**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________О.Г. Локтионова
« 26 » 05 2021 г.

# ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»
для студентов направления подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2021

УДК 510.6
Составители: С. В. Дегтярев, Е.Н. Иванова

Рецензент
Доцент кафедры программной инженерии,
кандидат технических наук
*Ю.А. Халин*

**Логика предикатов**: методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова. – Курск, 2021. – 31 с. – Библиограф.: с. 31.

Рассматривается раздел математической логики – Логика предикатов. Вводятся понятия предиката, квантора, приводятся основные законы логики предикатов. Обсуждаются практические приложения законов логики предикатов в инженерно-технических задачах.

Пособие содержит теоретический материал, поясняемый примерами, вопросы для самопроверки, задания для самостоятельного выполнения.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.05.21. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 1,7 Уч.-изд.л. 1,6 Тираж 20 экз. Заказ 858. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Цель практических занятий

Изучить основные понятия логики предикатов; овладеть методами формализации предикатов на естественном языке, методами проверки истинности сложных формул, способами преобразования выражений с целью упрощения понимания их смысла; приобрести навыки использования методологии логики предикатов для решения профессиональных задач, доказательства или опровержения различных утверждений.

## 1 Предикаты. Операции над предикатами. Формулы логики предикатов. Интерпретация

Логика предикатов – это логическая систем, обладающая средствами, позволяющими исследовать содержание и структуру высказываний, получаемых по законам алгебры высказываний.

Предикат (лат. *praedicatum* – сказанное) – то, что высказывается в суждении об объекте. Предикат отображает наличие того или иного признака у предмета. На языке теории множеств, предикат – отображение произвольного множества во множество высказываний.

Предикатом $P(x)$ называется произвольная функция переменного *x*, определенная на множестве $M$ и принимающая значения из множества $\{0; 1\}$, или $\{\text{ложь; истина}\}$. Множество *M*, на котором определен предикат $P(x)$, называется областью определения предиката.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение «истина», называется областью истинности $I_P$ предиката $P(x)$, т.е.

$$I_P = \{x | x \in M,\, P(x) = 1\}.$$

Пример

Предикат $P(x): x - \text{четное число}$, определен на множестве натуральных чисел *N*.

Область истинности $I_P = \{x = 2n | n \in N\}$.

Пример

Предикат $Q(x): \sin x = 0$, определен на множестве действительных чисел $R$.

Область истинности $I_Q = \{x = k\pi | k \in Z\}$, где $Z$ – множество целых чисел.

Пример

Предикат

$F(x)$: диагонали параллелограмма $x$ перпендикулярны.

Область истинности $I_F = \{x - \text{ромбы}\}$.

Предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$, называется тождественно истинным (тождественно ложным), если $I_P = \{M\}$ $\left(I_P = \{\varnothing\}\right)$.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется функция одной переменной, определенная на множестве $M$.

Двухместным предикатом $P(x, y)$ называется функция двух переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{0; 1\}$.

Пример

Двухместный предикат $Q(x, y): x > y$ определен на множестве $R = R \times R$

Пример

Двухместный предикат

$F(x, y)$: прямая $x$ перпендикулярна прямой $y$ определен на множестве прямых, лежащих в заданной плоскости.

$n$-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция $n$ переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая значения из множества $\{0; 1\}$.

Областью истинности $I_P$ предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется совокупность всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $M$ таких, что $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1$.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется тождественно истинным, если при любой подстановке вместо предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных значений (предметов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно, он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1$.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется тождественно ложным, если при любой подстановке вместо предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных значений (предметов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно, он превращается в ложное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется выполнимым (опровержимым), если существует по крайней мере один набор конкретных значений (предметов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенные на одном множестве $M$, называются равносильными $P=Q$, если для любых конкретных значений (предметов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть заданы два предиката $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве $M$.

Конъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x)\&Q(x)$, определенный на том же множестве $M$ и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значения «истина», т.е.

$$P(x) \& Q(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 1; \\ Q(x) = 1. \end{cases}$$

Во всех остальных случаях предикат $P(x) \& Q(x)$ принимает значение «ложь». В этом случае область истинности $P(x) \& Q(x)$ будет равна пересечению из областей истинности, т.е.

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q$$

Пример

$P(x)$: $x$ – четное число

$Q(x)$: $x$ – число, кратное 3

Предикаты заданы на множестве натуральных чисел. Область истинности их конъюнкции будет равна $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q = \{x = 6n | n \in N\}$.

Дизъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, определенный на том же множестве $M$ и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значения «ложь», т.е.

$$P(x) \& Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

Во всех остальных случаях предикат $P(x) \vee Q(x)$ принимает значение «истина». В этом случае область истинности $P(x) \vee Q(x)$ будет равна объединению областей истинности, т.е.

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$$

Пример

$P(x)$: $x$ – число, кратное 4

$Q(x)$: $x$ – число, кратное 3

Предикаты заданы на множестве натуральных чисел. Область истинности их дизъюнкции будет равна $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{x = 3n,\ x = 4n | n \in N\}$.

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P(x)}$, определенный на том же множестве $M$ и принимающий значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение «истина» и наоборот, т.е.

$$\overline{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 1,$$

$$\overline{P(x)} = 1 \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

Область истинности $\overline{P(x)}$ будет равна разности области его определения и области истинности заданного предиката, т.е.

$$I_{\overline{P}} = M \setminus I_P$$

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \to Q(x)$, определенный на том же множестве $M$ и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ принимает значение «ложь», т.е.

$$P(x) \to Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 1; \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

Во всех остальных случаях предикат $P(x) \to Q(x)$ принимает значение «истина». В этом случае область истинности $P(x) \to Q(x)$ будет определяться из равносильности $P(x) \to Q(x) = \overline{P(x)} \vee Q(x)$, т.е.

$$I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = M \setminus I_P \cup I_Q.$$

К одной из основных операций преобразования предикатов относится операция квантификации, для понятия которой рассмотрим ее применение к одно- и двухместным предикатам.

Пусть имеется предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$. если «$a$» – некоторый элемент из множества $M$, то подстановка его вместо $x$ в предикат $P(x)$ превращает этот предикат в высказывание $P(a)$. Такое высказывание называют единичным.

Пример

$P(x)$: $x$ – четное число

Предикат задан на множестве натуральных чисел.

$x = 5$, $P(5)$ – ложное высказывание;

$x = 8$, $P(8)$ – истинное высказывание.

Получить единичное высказывание можно и с помощью двух операций квантификации: квантора всеобщности и квантора существования.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве *M*. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента *x* из множества *M*, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x*. Это выражение читается так: «Для всякого $x$ $P(x)$ истинно» или «Для любого $x$ $P(x)$ истинно». При чтении выражения с кванторами необходимо учитывать конкретику его приложения.

Пример

$P(x)$: $x$ – четное число

Предикат задан на множестве натуральных чисел.

$\forall x P(x)$: любое натуральное число четное.

Символ $\forall$ называется квантором всеобщности. Переменную *x* в предикате $P(x)$ называют свободной и ей можно придавать различные значения из *M*, а в высказывании $\forall x P(x)$ переменную *x* называют связанной квантором $\forall$.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве *M*. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x*. Это выражение читается так: «Существует *x*, при котором $P(x)$ истинно».

Символ $\exists$ называется квантором существования. В высказывании $\exists x P(x)$ переменную *x* называют связанной квантором $\exists$.

Пример

$P(x)$: $x$ – четное число

Предикат задан на множестве натуральных чисел.

$\exists x P(x)$: существует четное число.

Пример

$P(x)$: $x$ кратно 7

Предикат задан на множестве натуральных чисел.

$x=7$ $\exists x P(x)$: существует натуральное число, кратное $7$;

$x=7$ $\forall x P(x)$: все натуральные числа кратны $7$.

Пусть на конечном множестве $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ задан предикат $P(x)$. Если на этой области предикат является тождественно истинным, то для любого $a_i \in M$, $i=1, 2, \ldots, n$ $P(a_i)=1$, тогда $\forall x P(x)=P(a_1)\,\&\,P(a_2)\,\&\ldots\&\,P(a_n)=\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i)=1$. Если же найдется такой $a_i \in M$, $i=1, 2, \ldots, n$, что $P(a_i)=0$, то ложной будет и конъюнкция $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i)$, и, следовательно, соответствующее высказывание $\forall x P(x)$ будет ложным. Значит, справедлива равносильность $\forall x P(x)=\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i)$.

Согласно определению квантора существования справедлива равносильность $\exists x P(x)=\underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} P(a_i)$.

Кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей определения предиката.

Применение кванторной операции к предикату $P(x, y)$ по переменной $x$ ставит в соответствие двухместному предикату $P(x, y)$ одноместный предикат $\forall x P(x, y)$ или одноместный предикат $\exists x P(x, y)$, зависящий от переменной $y$ и не зависящий от переменной $x$. К ним можно применить кванторные операции по переменной $y$, которые приведут уже к высказываниям следующих видов: $\forall y\forall xP(x, y)$, $\exists y\forall xP(x, y)$, $\forall y\exists xP(x, y)$, $\exists y\exists xP(x, y)$.

Изменение порядка следования кванторов всеобщности и кванторов существования меняет смысл полученного высказывания.

Пример

$P(x, y)$: $y$ – делитель $x$

Предикат задан на множестве натуральных чисел $N \times N$.

$\forall y\forall xP(x, y)$: «Для всякого $y$ и $x$ $y$ является делителем $x$»;

$\exists y\forall xP(x, y)$: «Существует $y$, которое является делителем всякого $x$»;

$\forall y\exists xP(x, y)$: «Для всякого $y$ существует $x$ такое, что $x$ делится на $y$»;

$\exists y\exists xP(x, y)$: «Существуют $y$ и $x$ такие, что $y$ является делителем $x$»;

$\forall x\forall yP(x, y)$: «Для всякого $x$ и $y$ $y$ является делителем $x$»;

$\exists x\forall yP(x, y)$: «Существует $x$ такое, что для всякого $y$ $x$ делится на $y$»;

$\forall x\exists yP(x, y)$: «Для всякого $x$ существует $y$ такое, что $x$ делится на $y$»;

$\exists y\exists xP(x, y)$: «Существуют $y$ и $x$ такие, что $y$ является делителем $x$»;

Изменение порядка следования кванторов меняет логическое значение полученного высказывания, и, следовательно, его истинностное значение.

Одноименные квантора переставлять можно, разноименные нельзя:

$$\forall y\forall xP(x, y) = \forall x\forall yP(x, y)$$

$$\exists y\exists xP(x, y) = \exists x\exists yP(x, y)$$

$$\exists y\forall xP(x, y) \neq \forall x\exists yP(x, y)$$

Для формирования языка логики предикатов используется следующая символика:

1. Символы $x, y, z, p, q, \ldots$ – предметные переменные, принимающие значения из некоторого множества $M$.

2. Символы $a, b, c, \ldots$ – предметные константы, т.е. значения предметных переменных.

3. Символы $P, Q, S, \ldots$ – предикатные переменные (буквы).

4. Символы $f, g, \ldots$ – функциональные буквы.

5. Символы логические операций $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

6. Символы кванторов $\{\exists, \forall\}$.

Определение терма:

а) всякая предметная переменная или предметная постоянная есть терм;

б) если $f$ – функциональная буква и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – темы, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ есть терм;

в) выражение является термом только в том случае, если это следует из правил а) и б).

Пример

$a$ – терм;

$x$ – терм;

$f(a, x)$ – терм;

$f(a, g(x))$ – терм.

Предикатные буквы, примененные к термам, порождают формулы: если $P$ – предикатная буква, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, то $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – элементарная формула.

Формула логики предикатов определяется следующим образом.

1. Каждая элементарная формула – формула.

2. Если $A$ и $B$ – формулы и $x$ – предметная переменная, то каждое из выражений $\overline{A},\ A \rightarrow B,\ \forall x A(x),\ \exists x A(x)$ – формула.

3. выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил а) и б).

В выражениях $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ формула $A(x)$ называется областью действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$, соответственно.

При записи формул алгебры предикатов необходимо соблюдать правило: если один квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, обозначаются различными буквами.

Формула называется замкнутой, если она не содержит свободных предметных переменных.

Пример

$\forall x \forall y \big( P(x, y) \to Q(y, x) \big)$ – замкнутая формула.

Если формула алгебры предикатов $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ содержит свободные переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то формула $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется замыканием формулы $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Значение формулы логики предикатов можно оценить, когда задано множество $M$, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. И тогда логическое значение формулы логики предикатов будет зависеть от значений трех видов переменных:

– значений входящих в формулу переменных высказываний;

– значений свободных предметных переменных из множества $M$;

– значений предикатных переменных.

При конкретных значениях каждого из трех видов переменных формула логики предикатов становится высказыванием, принимающим истинное или ложное значение.

Пример

$\exists y \forall z \big( P(x, y) \to P(y, z) \big)$, предикат $P(x, y)$ определен на множестве $N \times N$.

$P(x, y)$ – переменный предикат;

$x, y, z$ – предметные переменные;

$y, z$ – связанные переменные;

$x$ – свободная переменная;

$P(x, y) : x < y$ – значение предиката;

Пусть $x = 5$, тогда для любого $z$ при $y < 5$ $\exists y \forall z \big( P(x, y) \to P(y, z) \big) = 1$, в остальных случаях $\exists y \forall z \big( P(x, y) \to P(y, z) \big) = 0$.

Формула алгебры предикатов называется тождественно истинной, если она принимает значение «истина» для всех множеств, для всех предикатов и для всех элементов.

Формула алгебры предикатов называется тождественно ложной, если она принимает значение «ложь» для всех множеств, для всех предикатов и для всех элементов.

Формула алгебры предикатов называется выполнимой, если она принимает значение «истина» хотя бы для некоторых множеств, предикатов и элементов.

Формула алгебры предикатов называется опровержимой, если она принимает значение «ложь» хотя бы для некоторых множеств, предикатов и элементов.

Формула *A* сильнее формулы *B*, если всякий раз, когда формула *A* принимает истинное значение, формула *B* также истинное значение.

Интерпретация считается заданной, если:

1. Задано непустое множество *M*, называемое областью интерпретации.

2. Заданы следующие соответствия:

а) предикатным буквам поставлены в соответствие некоторые предикаты в *M*;

б) функциональным буквам поставлены в соответствие некоторые функции;

в) каждой предметной постоянной поставлен в соответствие некоторый (фиксированный) элемент из *M*;

г) символам $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall\}$ поставлен в соответствие их традиционный смысл.

3. Предметные переменные «пробегают» все множество *M*.

Пример

Чтобы задать интерпретацию для формулы $\forall x P(x, y)$, нужно задать множество $M$ – область интерпретации (область изменения переменных $x, y$. Далее нужно задать двухместный предикат, соответствующий букве $P$. Пусть $M = [0; \infty)$, предикат $P$ соответствует неравенству $x \le y$, тогда формула в заданной интерпретации запишется:

$\forall x(x \le y)$

и означает, что для любого $x, x \in [0; \infty)$ $y \ge x$. Это отношение истинно при некоторых $y$.

Формула называется выполнимой в данной интерпретации, если она принимает значение «истина» хотя бы для одной совокупности возможных значений ее свободных переменных (если они есть). Если формула не содержит свободных переменных, то она называется выполнимой в том случае, если принимает значение «истина» в этой интерпретации.

Формула называется истинной в данной интерпретации, если она принимает значение «истина» для всех возможных значений ее свободных переменных (если они есть). Если же свободных переменных нет, то формула называется истинной, когда они принимает значение «истина» в этой интерпретации.

Формула называется ложной в данной интерпретации, если она принимает значение «ложь» для всех возможных значений ее свободных переменных (если они есть). Если же свободных переменных нет, то формула называется ложной, когда они принимает значение «ложь» в этой интерпретации.

Из приведенных определений следует:

1. Если формула *A* общезначима, то она и выполнима на всякой области.

2. Если формула *A* тождественно истинна в области *M*, то она и выполнима в этой области.

3. Если формула *A* тождественно ложна в области *M*, то она не выполнима в этой области.

4. Если формула *A* невыполнима, то она тождественно ложна на всякой области.

5. Для того, чтобы формула а логики предикатов была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было невыполнимо.

6. Для того, чтобы формула *A* логики предикатов была выполнимой необходимо и достаточно, чтобы формула $\overline{A}$ была не общезначима.

Общезначимую формулу логики предикатов называют логическим законом.

## Вопросы для самопроверки

1. Определите понятие предиката.
2. Дайте определение логических операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквивалентности.
3. Кванторы. Использование кванторов и предикатов.
4. Термы, элементарные формулы и формулы логики предикатов.
5. Свободные и связанные переменные.
6. Замкнутые формулы.
7. Выполнимые, истинные и ложные формулы.
8. Интерпретация.
9. Выполнимые, истинные и ложные формулы в заданной интерпретации

## Задания для выполнения

1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) «Число $x$ простое»;

б) «Все подобные треугольники равны».

в) «$x^2 + y^2 < 0$ ($x$, $y$ – действительные числа)»;

г) «Все четные числа делятся на число $y$»;

д) «8 – нечетное число»;

е) «Имеется бесчисленное множество различных простых чисел».

3. Запишите символически следующие предложения:

а) «для всякого числа $x$ существует такое число $y$, что $x + y = 5$»;

б) «для любого числа $y$ найдется хотя бы одно число $x$, что $y - x < 0$»;

в) «при любом $x$, не равном нулю, существует $y$ такое, что $x / y = 2$».

г) «для любых чисел $x$ и $y$ имеет место равенство $x + y = y + x$»;

д) «все рациональные числа действительные»;

е) «ни одно рациональное число не является действительным»;

ж) «некоторые рациональные числа действительные»;

з) «некоторые рациональные числа не являются действительными».

4. Введем обозначения:

$R(x, t)$: я читаю информацию $x$ в момент времени $t$,

$M(x, t)$: я запоминаю информацию $x$ в момент времени $t$,

$F(x, t)$: я забываю информацию $x$ в момент времени $t$,

$Q(t, \tau)$: момент времени $t$ предшествует моменту времени $\tau$.

Используя введенные обозначения, запишите формулы для предложений:

а) «Я всегда что-то читаю»;

б) «Иногда я ничего не читаю»;

в) «Существует информация, которую я никогда не прочитаю»;

г) «Я читаю информацию и сразу ее запоминаю»;

д) «Если я запоминаю какую-то информацию, то через некоторое время я ее забываю»;

е) «Не существует информации, которую я не забываю спустя некоторое время»;

ж) «Некоторую информацию, которую я когда-то запомнил, я читаю вновь».

5. Если предикатные переменные в формулах рациональные числа, сформулируйте интерпретацию формул на естественном языке и определите их истинностное значение:

а) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$;

б) $\forall x \exists y (x + y = 3)$;

в) $\exists y \forall x (x + y = 3)$;

г) $\exists y \exists x (x + y = 3)$;

д) $\forall x \forall y (x + y = 3) \to (2 = 3)$;

е) $\exists y \exists x ((x > y > 3) \& (x + y = 0))$;

ж) $\forall x (((x > 3) \& (x < 1)) \leftrightarrow (x \neq x))$;

з) $\forall x (((x > 3) \vee (x < 1)) \leftrightarrow (x = x))$.

6. Выразите область истинности предиката $P(x,\, y)$ через область истинности предикатов $A(x,\, y)$ и $B(x,\, y)$, если:

а) $P(x,\, y) = \overline{A(x,\, y)}$;

б) $P(x,\, y) = A(x,\, y) \vee B(x,\, y)$;

в) $P(x,\, y) = A(x,\, y) \,\&\, B(x,\, y)$;

г) $P(x,\, y) = A(x,\, y) \to B(x,\, y)$;

д) $P(x,\, y) = A(x,\, y) \leftrightarrow B(x,\, y)$.

## 2 Правила перенесения отрицания через кванторы. Правила перестановки кванторов. Правила переименования связанных переменных

Установлено, что квантор всеобщности является обобщением конъюнкции, а квантор существования – дизъюнкции.

$\forall x P(x)$ равносильно $P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\ldots\&\, P(a_n)$

$\exists x P(x)$ равносильно $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

$\overline{\forall x P(x)}$ равносильно $\overline{P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\ldots\&\, P(a_n)}$

$\overline{P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\ldots\&\, P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \ldots \vee \overline{P(a_n)}$

$\overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \ldots \vee \overline{P(a_n)}$ равносильно $\exists x \overline{P(x)}$

Таким образом, $\forall x P(x)$ равносильно $\exists x \overline{P(x)}$.

Аналогично получим:

$\overline{\exists x P(x)}$ равносильно $\overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)}$

$\overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \,\&\, \overline{P(a_2)} \,\&\ldots\&\, \overline{P(a_n)}$

$\overline{P(a_1)} \,\&\, \overline{P(a_2)} \,\&\ldots\&\, \overline{P(a_n)}$ равносильно $\forall x \overline{P(x)}$

Таким образом, $\exists x P(x)$ равносильно $\forall x \overline{P(x)}$.

Полученные соотношение показывают, что при перенесении отрицания через кванторы последние меняются на двойственные.

Пример

$$\overline{\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)}=\exists x\overline{\left(A(x)\to B(x)\right)}=\exists x\overline{\left(\overline{A(x)}\vee B(x)\right)}=$$

$$=\exists x\left(A(x)\,\&\,\overline{B(x)}\right)$$

Из определения кванторов следует, что если на некоторой интерпретации истинна формула $\forall x\forall yP$, то истинна и формула $\forall y\forall xP$, и наоборот. Аналогично из определения кванторов вытекает и равносильность формул $\exists x\exists yP$ и $\exists y\exists xP$.

Таким образом, при перемене мест стоящих рядом одноименных кванторов получаем равносильные формулы.

Для разноименных кванторов справедлива равносильность формул $\exists x\forall yP$ и $\forall y\exists xP$, но не наоборот.

Пример

$$\exists y\forall x\left(A(x)\to B(y)\right)=\forall x\exists y\left(A(x)\to B(y)\right)$$

Пусть *A* – произвольная формула логики предикатов. Формулу *B* получим из *A* заменой связанных переменных другими переменными, отличными от всех свободных переменных формулы *A*, причем заменяемая переменная в формуле *A* должна менять одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную и в самом кванторе. Тогда *B* равносильна *A*.

Переименовываются связанные переменные только в области действия соответствующего квантора. Это означает, что одноименные переменные, для которых связывающие их кванторы имеют различные области действия, могут переименовываться разным образом или не переименовываться совсем.

Пример

Задана формула $\forall xA(x)\to\exists xB(x)\to C(x)$. Выполним возможные переименования переменной $x$.

При переименовании переменной, связанной квантором всеобщности, получим формулу $\forall yA(y)\to\exists xB(x)\to C(x)$, равносильную заданной.

При переименовании переменной, связанной квантором существования, получим формулу $\forall xA(x)\to\exists zB(z)\to C(x)$, равносильную заданной.

При переименовании свободные переменные не трогаются.

Пример

Задана формула $\forall x\big(\exists yP(x,y)\to\forall yQ(x,\ y)\to R(x)\big)$. Выполним возможные переименования переменной $x$.

Получим формулу, равносильную заданной:

$\forall z\big(\exists yP(z,y)\to\forall yQ(z,\ y)\to R(z)\big)$

**Вопросы для самопроверки**

1. Аналог закона де Моргана в логике предикатов.
2. Обобщение конъюнкции через квантор.
3. Обобщение дизъюнкции через квантор.
4. Правила перенесения отрицания через кванторы.
5. Можно ли переставлять рядом стоящие одноименные кванторы?
6. Можно ли переставлять рядом стоящие разноименные кванторы?
7. Правила переименования связанных переменных.

**Задание для выполнения**

1. Доказать или опровергнуть тождественную истинность формул:

а) $\forall x\exists yB(x,\ y)\to\exists y\forall xB(x,\ y)$;

б) $\overline{\forall x\exists yB(x,\ y)}\to\exists x\forall y\overline{B(x,\ y)}$;

в) $\forall x\forall yB(x,\ y,\ z)\to\forall y\forall xB(x,\ y,\ z)$;

г) $\exists x\exists yB(x,\ y,\ z)\to\exists y\exists xB(x,\ y,\ z)$;

д) $\forall x\big(B(x,\ y)\,\&\,A(x,\ y)\big)\to\forall xB(x,\ y)\,\&\,\forall xA(x,\ y)$;

е) $\forall x\big(B(x,\ y)\vee A(x,\ y)\big)\to\forall xB(x,\ y)\vee A(x,\ y)$;

ж) $\exists x\exists yB(x,\ y,\ z)\to\exists y\exists xB(x,\ y,\ z)$.

2. Указать свободные и связанные вхождения переменных в следующих формулах:

а) $\exists y\big(P(z,\ y)\,\&\,\forall zQ(z,\ x)\to R(z)\big)$;

б) $\forall x\left(P(x, y)\,\&\,\forall yQ(y,\ x)\to R(x)\right)$;

в) $\forall y\exists z\left(P(y, z)\,\&\,Q(z,\ x)\to R(y)\right)$;

г) $\forall y\exists z\left(P(z, y)\,\&\,\forall zQ(z,\ x)\to R(y)\right)$.

3. Выполнить возможные переименования переменных:

а) $\forall x\exists yB(x, y)\to\exists y\forall xB(x, y)$;

б) $\forall y\exists z\left(P(y, z)\,\&\,Q(z,\ x)\to R(y)\right)$;

в) $\forall x\forall yB(x, y, z)\to\forall y\forall xB(x, y, z)$;

г) $\exists x\exists y\left(B(x, y, z)\to A(x, y,\ z)\right)$;

д) $\forall x\left(B(x, y)\,\&\,A(x, y)\right)\to\forall xB(x, y)\,\&\,\forall xA(x, y)$;

е) $\forall x\left(B(x, y)\vee A(x, y)\right)\to\forall xB(x, y)\vee A(x, y)$;

ж) $\exists x\exists yB(x, y, z)\to\exists y\exists xB(x, y,\ z)$.

## 3 Предваренная нормальная форма

Формула называется предваренной, если она бескванторная (т.е. не содержит кванторов) или имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\Phi$, где $\Phi$ – бескванторная формула, $Q_i,\ i=\overline{1, n}$ – квантор вида $\exists$ или $\vee$. Совокупность кванторов $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$ называется префиксом исходной формулы, а формула $\Phi$ – матрицей исходной формулы. Дополнительно необходимо, чтобы матрица была представлена в конъюнктивной нормальной форме.

Пример

$\forall x\left(P(x)\vee Q(y)\right)$ – формула в предваренной нормальной форме.

$\forall xP(x)\vee Q(y)$ – формула не в предваренной нормальной форме.

Построение предваренной формулы, равносильной данной формуле, называется приведением формулы к предваренному виду или предваренной форме.

Определим, каким образом кванторы выносятся за скобки. Пусть $A$ обозначает формулу, не имеющую свободных вхождений переменной $x$, $B(x)$ и $C(x)$ – произвольные формулы, которые могут содержать свободное вхождение переменной $x$. Тогда:

$A \& \forall x B(x)$ равносильно $\forall x\big(A \& B(x)\big)$;

$\forall x\big(A \& B(x)\big)$ равносильно $A \& \forall x B(x)$;

$A \vee \forall x B(x)$ равносильно $\forall x\big(A \vee B(x)\big)$;

$\forall x\big(A \vee B(x)\big)$ равносильно $A \vee \forall x B(x)$;

$A \& \exists x B(x)$ равносильно $\exists x\big(A \& B(x)\big)$;

$\exists x\big(A \& B(x)\big)$ равносильно $A \& \exists x B(x)$;

$A \vee \exists x B(x)$ равносильно $\exists x\big(A \vee B(x)\big)$;

$\exists x\big(A \vee B(x)\big)$ равносильно $A \vee \exists x B(x)$;

$\big(\forall x B(x)\big) \& \forall x C(x)$ равносильно $\forall x\big(B(x) \& C(x)\big)$;

$\forall x\big(B(x) \& C(x)\big)$ равносильно $\big(\forall x B(x)\big) \& \forall x C(x)$;

$\big(\exists x B(x)\big) \vee \exists x C(x)$ равносильно $\exists x\big(B(x) \vee C(x)\big)$;

$\exists x\big(B(x) \vee C(x)\big)$ равносильно $\big(\exists x B(x)\big) \vee \exists x C(x)$;

$\big(\forall x B(x)\big) \vee \forall x C(x)$ равносильно $\forall x\big(B(x) \vee C(x)\big)$;

$\exists x\big(B(x) \& C(x)\big)$ равносильно $\big(\exists x B(x)\big) \& \exists x C(x)$;

$\big(\exists x B(x)\big) \to A$ равносильно $\forall x\big(B(x) \to A\big)$;

$\forall x\big(B(x) \to A\big)$ равносильно $\big(\exists x B(x)\big) \to A$;

$A \to \big(\forall x B(x)\big)$ равносильно $\forall x\big(A \to B(x)\big)$;

$\forall x\big(A \to B(x)\big)$ равносильно $A \to \big(\forall x B(x)\big)$;

$\big(\forall x B(x)\big) \to A$ равносильно $\exists x\big(B(x) \to A\big)$;

$\exists x\big(B(x) \to A\big)$ равносильно $\big(\forall x B(x)\big) \to A$;

$A \to \big(\exists x B(x)\big)$ равносильно $\exists x\big(A \to B(x)\big)$;

$\exists x\big(A \to B(x)\big)$ равносильно $A \to \big(\exists x B(x)\big)$.

Из приведенных формул видно, что при вынесении кванторов за скобки для указанных формул кванторы могут выноситься без изменения, либо меняться на двойственные. В общем случае необходимо проводить еще и переименование переменных, прежде чем вынести квантор за скобки.

Пример

В формуле $\forall xB(x)\vee\forall xC(x)$ вынести квантор за скобки.

Если квантор $\forall x$ выносить за скобки без переименования переменных приводит к неравносильной формуле $\forall x\big(B(x)\vee C(x)\big)$.

Пусть $B(x)$ и $C(x)$ – произвольные формулы, которые могут содержать свободное вхождение переменной $x$. Тогда:

$\forall xB(x)\to\forall xC(x)$ равносильно $\exists y\forall z\big(B(y)\to C(z)\big)$;

$\exists y\forall z\big(B(y)\to C(z)\big)$ равносильно $\forall xB(x)\to\forall xC(x)$;

$\forall xB(x)\to\exists xC(x)$ равносильно $\exists x\big(B(x)\to C(x)\big)$;

$\exists x\big(B(x)\to C(x)\big)$ равносильно $\forall xB(x)\to\exists xC(x)$;

$\exists xB(x)\to\exists xC(x)$ равносильно $\forall y\exists z\big(B(y)\to C(z)\big)$;

$\forall y\exists z\big(B(y)\to C(z)\big)$ равносильно $\exists xB(x)\to\exists xC(x)$;

$\exists xB(x)\to\forall xC(x)$ равносильно $\forall y\forall z\big(B(y)\to C(z)\big)$;

$\forall y\forall z\big(B(y)\to C(z)\big)$ равносильно $\exists xB(x)\to\forall xC(x)$.

Здесь $z$ и $y$ – переменные, отличные от всех свободных переменных формул $B(x)$ и $C(x)$, а $B(y)$ и $C(z)$ – формулы полученные из $B(x)$ и $C(x)$, соответственно при переименовании связанной переменной $x$ на $z$ и $y$.

Для каждой формулы логики предикатов существует равносильная ей формула в предваренной нормальной форме.

Пример

Привести к предваренной нормальной форме формулу:

$\overline{\forall x\forall yP(x,\,y)}\vee\forall x\exists yQ(x,\,y)$.

Приведение заданной формулы к предваренной форме состоит в построении цепочки формул, каждая из которых получается из предыдущей применением одной из равносильностей.

$$\overline{\forall x\forall yP(x, y)}\vee\forall x\exists yQ(x, y)\equiv\exists x\overline{\forall yP(x, y)}\vee\forall x\exists yQ(x, y)\equiv$$

$$\equiv\exists x\exists y\overline{P(x, y)}\vee\forall x\exists yQ(x, y)\equiv\exists x\exists y\overline{P(x, y)}\vee\forall z\exists yQ(z, y)\equiv$$

$$\equiv\exists x\left(\exists y\overline{P(x, y)}\vee\forall z\exists yQ(z, y)\right)\equiv\exists x\forall z\left(\exists y\overline{P(x, y)}\vee\exists yQ(z, y)\right)\equiv$$

$$\equiv\exists x\forall z\exists y\left(\overline{P(x, y)}\vee Q(z, y)\right)$$

Последняя формула является предваренной нормальной формой заданной формулы.

**Вопросы для самопроверки**

1. Определение предваренных нормальных форм.
2. Для каждой ли формулы логики предикатов существует предваренная нормальная форма?
3. Алгоритм нахождения предваренных нормальных форма.
4. Что такое префикс формулы?
5. Что такое матрица формулы?
6. В какой форме должна быть представлена матрица формулы в предваренной нормальной форме?
7. Для каких формул кванторы могут выноситься без изменения, либо меняться на двойственные?
8. Какая операция предшествует вынесению кванторов за скобки?

**Задания для выполнения**

1. Среди следующих формул найдите равносильные:

а) $\forall x\forall y\left(P(x)\to Q(y)\right)$;

б) $\forall x\exists y\left(P(x)\to Q(y)\right)$;

в) $\exists y\forall x\left(P(x)\to Q(y)\right)$;

г) $\forall y\exists x\left(P(x)\to Q(y)\right)$;

д) $\exists x\forall y\left(P(x)\to Q(y)\right)$;

е) $\exists x\exists y\left(P(x)\to Q(y)\right)$.

2. Для следующих формул найти равносильные формулы, не содержащие кванторов вне скобок (внести кванторы под скобки):

а) $\exists x\forall y\big(A(x)\to B(x,\,y)\big)$;

б) $\forall x\forall y\big(\overline{A(x)}\to B(y)\big)$;

в) $\exists x\exists y\big(\overline{A(x)}\to B(y)\big)$;

г) $\forall x\exists y\big(B(x,\,y)\to A(x)\big)$.

3. Для следующих формул найти равносильные формулы, в которых отрицание относится только к элементарным формулам:

а) $\forall x\overline{\exists y\big(A(x)\to B(y)\big)}$;

б) $\overline{\exists x\big(\forall yA(x,\,y,\,z)\to\exists uB(x,\,u)\big)}\,\&\,\overline{\forall t\forall v\big(C(t)\vee D(v)\big)}$;

в) $\overline{\forall x\forall z\big(A(x)\to B(z)\big)}$;

г) $\exists y\overline{\forall x\big(A(x)\,\&\,B(y)\big)}\to\overline{\exists zC(x,\,y,\,z)}$.

4. приведите отрицания следующих формул:

а) $\exists x\big(A(x)\,\&\,B(x)\,\&\,C(x)\big)$;

б) $\forall x\big(A(x)\to\forall yB(y)\big)$;

в) $\forall x\big(A(x)\vee\exists yB(y)\big)$;

г) $\forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\,\&\,\exists x\big(S(x)\,\&\,\overline{R(x)}\big)$;

д) $\exists x\big(R(x)\leftrightarrow B(x)\big)$;

е) $\forall x\exists y\forall z\big(P(x,\,y,\,z)\to Q(x,\,y,\,z)\big)$.

5. Привести к предваренной нормальной форме формулу:

а) $\overline{\forall x\forall yP(x,\,y)\vee\forall x\exists yQ(x,\,y)}$;

б) $\forall x\overline{\exists yP(x,\,y)}\,\&\,\exists x\exists yQ(x,\,y)$;

в) $\forall x\exists yP(x,\,y)\,\&\,\forall x\exists yQ(x,\,y)$;

г) $\forall x\exists yP(x,\,y)\to\forall x\exists yQ(x,\,y)$;

д) $\forall x\big(A(x)\to B(x,\,y)\big)\to\exists yA(y)\to\exists zB(y,\,z)$;

е) $\exists xB(x,\,y)\to A(x)\to\overline{\exists zB(x,\,z)}$;

ж) $\forall x\big(\forall y\exists zC(x,\,y,\,z)\to A(x)\big)\to\forall xA(x)$;

з) $\overline{\exists x A(x)} \rightarrow \forall z \exists y \forall x C(x, y, z)$.

## 4 Приложение логики предикатов к решению задач профессиональной сферы

Применение аппарата логики предикатов в профессиональной практике можно классифицировать по областям ее использования, например:

1) запись на языке логики предикатов различных предложений, описывающих логику работы устройств;

2) применение логики предикатов для построения доказательств различных теорем, основанных на теории логического следования;

3) приложение логики предикатов к теории множеств, к анализу Аристотелевой силлогистики.

Умение грамотного использования языка логики предикатов является базой логико-математической культуры его применения в различных областях научной и инженерной деятельности.

С помощью языка логики предикатов (кванторной символики) удобно записывать формулировки различных определений и теорем. В процессе такой записи приходится осмысливать данное предложение, отчетливо выявлять посылки и следствия, четко выявлять ограничивающие условия. Перевод расплывчатой словесной формулировки на строгий, не допускающий противоречивых толкований язык логики предикатов способствует четкости и ясности мышления. Следует подчеркнуть, что в формулировках теорем выделяются три части: условие теоремы, заключение теоремы и разъяснительная часть. Условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$. Заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, определенный на множестве $M$. разъяснительная часть – это описание объектов теоремы. Теоремы такой структуры формулируются в виде импликации:

$\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ – прямая теорема;

$\forall x\big(Q(x) \rightarrow P(x)\big)$ – обратная теорема;

$\forall x\big(\overline{P(x)} \rightarrow \overline{Q(x)}\big)$ – противоположная теорема;

$\forall x\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right)$ – обратно-противоположная теорема.

Рассмотрим предикаты, определенные на множестве значений логических высказываний:

$P(x, y)$: «высказывание $x$ противоречит высказыванию $y$»;

$Q(x, y)$: «логическая операция конъюнкции высказываний $x$ и $y$ принимает значение «ложь»»».

Прямая теорема

«Если высказывания $x$ и $y$ противоречивы, то их конъюнкция принимает значение «ложь»»»: $\forall x \forall y\left(P(x, y) \to Q(x, y)\right)$.

Обратная теорема

«Если конъюнкция высказываний $x$ и $y$ принимает значение «ложь», то эти высказывания противоречивы»: $\forall x \forall y\left(Q(x, y) \to P(x, y)\right)$.

Противоположная теорема

«Если два высказывания $x$ и $y$ не противоречивы, то их конъюнкция не принимает значение «ложь»»»: $\forall x \forall y\left(\overline{P(x, y)} \to \overline{Q(x, y)}\right)$.

Обратно-противоположная теорема

«Если конъюнкция высказываний $x$ и $y$ не принимает значение «ложь», то эти высказывания не противоречивы»: $\forall x \forall y\left(\overline{Q(x, y)} \to \overline{P(x, y)}\right)$.

Если верна и прямая и обратная теоремы, то формулируются теоремы другой структуры. В этом случае каждый из предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ является необходимым и достаточным условием для другого, и теоремы этой структуры формулируются в виде эквиваленции: $\forall x \forall y\left(P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y)\right)$

Логика предикатов точнее отражает процессы мышления, чем алгебра высказываний.

Пример

Рассмотрим высказывание «Каждое вычислительное устройство в своем составе имеет запоминающее устройство». Если на языке алгебры высказываний формулировка данного высказывания сведется к обозначению некоторой буквой (например, $A$), то на языке логики предикатов возможна формализация, учитывающая внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру этого высказывания. Пусть предикат $P(x, y)$: «$x$ имеет в своем составе $y$» определен на множестве всех вычислительных устройств. Тогда рассматриваемому высказыванию отвечает формула логики предикатов $\forall x \exists y P(x, y)$.

Рассматриваемое высказывание можно перевести на язык логики предикатов и иначе. Если ввести еще одноместные предикаты $Q(x)$: «$x$ есть вычислительное устройство», $R(y)$: «$y$ есть запоминающее устройство», определенные на произвольном множестве, то высказывание запишется как: $\forall x\Big(Q(x) \to \exists y\big(R(y) \,\&\, P(x, y)\big)\Big)$.

Пример

Рассмотрим два высказывания: «В Курске живет девушка, имеющая брата, живущего в Орле» и «В Орле живет молодой человек, имеющий сестру, живущую в Курске». Каждое из данных утверждений следует из другого, т.е. они равносильны. Можно ли выразить эту равносильность на языке алгебры высказываний, на языке логики предикатов?

Обозначим:

$A$: «В Курске живет девушка, имеющая брата, живущего в Орле»;

$B$: «В Орле живет молодой человек, имеющий сестру, живущую в Курске».

Очевидно, что формулы А и В не равносильны. Можно расчленить данные высказывания на более простые:

$A1$: «Девушка живет в Курске»;

$A2$: «Девушка имеет брата, живущего в Орле»;

$B1$: «Молодой человек живет в Орле»;

$B2$: «Молодой человек имеет сестру, живущую в Курске».

Тогда первое рассматриваемое высказывание есть конъюнкция $A1 \,\&\, A2$, а второе – $B1 \,\&\, B2$. Но эти две формулы алгебры высказываний не следуют одна из другой.

Теперь рассмотрим эти высказывания с точки зрения предикатов. Формализуем задачу, введя предикаты, определенные на множестве людей:

$P1(x)$: «$x$ – девушка»;

$P2(x)$: «$x$ живет в Курске»;

$Q1(y)$: «$y$ – молодой человек»;

$Q2(y)$: «$y$ живет в Орле»;

$R(x, y)$: «$x$ есть сестра $y$».

Тогда высказывание «В Курске живет девушка, имеющая брата, живущего в Орле» соответствует формуле логики предикатов:

$$\exists x\Big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,\exists y\big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,R(x, y)\big)\Big),$$

а высказыванию «В Орле живет молодой человек, имеющий сестру, живущую в Курске» – формула:

$$\exists x\Big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,\exists y\big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,R(x, y)\big)\Big)$$

Покажем, что полученные формулы равносильны, для чего первую формулу методом равносильных преобразований сведем ко второй:

$$\exists x\Big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,\exists y\big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,R(x, y)\big)\Big)=$$

$$=\exists x\exists y\Big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,\big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,R(x, y)\big)\Big)=$$

$$=\exists y\exists x\big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,R(x, y)\big)=$$

$$=\exists y\exists x\big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,R(x, y)\big)=$$

$$=\exists y\Big(Q1(y)\,\&\,Q2(y)\,\&\,\exists x\big(P1(x)\,\&\,P2(x)\,\&\,R(x, y)\big)\Big)$$

Таким образом, определена равносильность двух формул, используя логику предикатов.

Доказательство методом от противного проводится по следующей схеме: предполагается, что теорема $\forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)$ не верна, т.е. существует такой $x$, что условие $P(x)$ истинно, а заключение $Q(x)$ – ложно. Если из этих предположений путем логических рассуждений приходят к противоречивому утверждению, то делают вывод о том, что исходное предположение не верно, и верна теорема $\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$.

Действительно, предположение о том, что теорема $\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$ не верна, означает ложность формулы $\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$. Но тогда будет истинна формула $\overline{\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)}$ и тогда формула $\overline{\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)}\to 0$ будет истинной только при условии истинности $\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$.

Действительно,

$$\overline{\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)}\to 0=\overline{\overline{\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)}}\vee 0=\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$$

**Вопросы для самопроверки**

1. В каких областях может применяться аппарат логики предикатов?
2. Какие части можно выделить при формулировке теоремы?
3. Если условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$, заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, то как запишется прямая теорема?
4. Если условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$, заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, то как запишется обратная теорема?
5. Если условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$, заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, то как запишется противоположная теорема?
6. Если условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве $M$, заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, то как запишется обратно-противоположная теорема?
7. Если каждый из предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ является необходимым и достаточным условием для другого, то как в этом случае запишется прямая теорема?
8. Поясните схему доказательства от противного, используя аппарат логики предикатов.

**Задания для выполнения**

1. На множестве $M$ определены два таких одноместных предиката $A(x)$ и $B(x)$, что высказывание $\exists x\left(A(x)\to\left(\overline{A(x)}\vee\left(\overline{\overline{B(x)}\to A(x)}\right)\right)\right)$ истинно. Доказать, что высказывание $\forall xA(x)$ ложно.

2. Каким условиям должны удовлетворять области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве $M$, если истинны высказывания:

а) $\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)\&\exists x\left(\overline{A(x)}\&B(x)\right)$;

б) $\overline{\exists x\left(A(x)\&B(x)\right)}\&\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)$;

в) $\exists x\left(A(x)\&B(x)\right)\to\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)$.

3. Доказать, что формула $\exists x\exists y\left(\left(A(x)\to A(y)\right)\&\left(A(x)\to\overline{A(y)}\right)\&A(x)\right)$ тождественно ложна.

4. Используя язык логики предикатов, запишите определения:

а) линейно упорядоченного множества: «Упорядоченное множество называется линейным, если для любых $x$ и $y$ этого множества либо $x=y$, либо $x<y$, либо $x>y$»;

б) ограниченной функции: «Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $M$, если существует такое неотрицательное число $L$, что для всех $x\in M$ справедливо неравенство $\left|f(x)\right|\le L$»;

в) четной функции: «Функция $f(x)$ называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат и для каждого x из области определения справедливо равенство $f(-x)=f(x)$»;

г) периодической функции: «Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T=0$, что при любом $x$ из области определения $f(x)$ элементы $x-T$ и $x+T$ также принадлежат этой области, и при этом выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$»;

д) количества информации: «Пусть $x$ и $y$ – случайные величины, заданные на соответствующих множествах $X$ и $Y$, тогда количество информации $x$ относительно $y$ есть разность априорной и апостериорной энтропий $I(x, y) = H(x) - H(x|y)$».

5. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но не достаточно», или «достаточно, но необходимо», или «не необходимо и недостаточно», или «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное утверждение:

а) «Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольным …, чтобы длины его диагоналей были равны»;

б) «Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, …, чтобы каждое слагаемое было четным»;

в) «Для того, чтобы $x^2 - 8x + 15 = 0$ …, чтобы $x = 5$»;

г) «Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, …, чтобы она была монотонна и ограничена».

## Список использованных источников

1. Алексеев, В.В. Логика предикатов [Текст] : учебно-методическое пособие / В.В. Алексеев. – Саров, 2019. – 50 с.

2. Галиев, Ш.И. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст] : учебное пособие / Ш.И. Галиев. – Казань : Издательство КГТУ им. А.Н. Туполева, 2002. – 270 с.