

УДК 51

Составители: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики *В.И. Дмитриев*

Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для направления подготовки 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов. – Курск, 2021. – 7 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению лабораторных работ. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач теории вероятностей и математической статистики прикладных методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем». Материал предназначен для специалистов по направлению подготовки 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____ . Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж _____ экз. Заказ _____ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Расчёт вероятностей случайных событий».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

2. Тема «Повторные испытания. Случайные величины».

Игральная кость брошена 4 раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

3. Тема «Элементы математической статистики и корреляционного анализа».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2,3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1,4$.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

1. Тема «Элементы теории вероятностей»

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

Фраза «шары разного цвета» подразумевает два исхода: белый и чёрный шары или чёрный и белый шары.

$$\text{а) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7};$$

$$\text{б) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}.$$

2. Тема «Повторные испытания. Случайные величины»

Игральная кость брошена 4 раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

При четырёх бросаниях кости шестёрка может не появиться ни разу, появиться 1, 2, 3 или 4 раза. Значит, случайная величина – число появлений шестёрки при четырёх бросаниях, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности $P(X = x_i)$ найдём по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где n – количество испытаний, k – количество появления события A , p – вероятность появления события A в каждом опыте, $q = 1 - p$ – вероятность неудачи в каждом опыте.

По условию $n = 4$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{6^4};$$

$$P(X = 1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4} = \frac{500}{6^4};$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{150}{6^4};$$

$$P(X = 3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{4 \cdot 5}{6^4} = \frac{20}{6^4};$$

$$P(X = 4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^4}.$$

Закон распределения числа появлений шестёрки примет вид:

x_i	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{625}{6^4}$	$\frac{500}{6^4}$	$\frac{150}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$

Проверка: $\frac{625}{6^4} + \frac{500}{6^4} + \frac{150}{6^4} + \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = 1$ – верно.

3. Тема «Элементы математической статистики»

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2,3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1,4$.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, среднеквадратическое отклонение σ известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней \bar{x} .

В данном случае в качестве случайной величины $Y(\Theta)$ берётся величина $Y(\Theta) = \frac{\bar{X} - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, которая при достаточно больших объёмах

выборки приближённо распределена по нормальному закону $N(0,1)$.

Поэтому с заданной надёжностью γ доверительный интервал имеет

$$\text{вид } \left(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Таким образом, если исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением σ , то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством:

$$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\tilde{\Theta} = \bar{x}$ – точечная оценка математического ожидания (\bar{x} – выборочное среднее);

$$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \text{ – точность оценки;}$$

n – объём выборки;

t – квантиль нормального распределения или значение аргумента функции Лапласа (приложение 2 [5]), при котором $2\Phi(t) = \gamma$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Воспользуемся формулой: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$, далее по таблице приложения 2 [5] находим $t = 1,96$. Искомый доверительный интервал:

$$2,3 - \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} < a < 2,3 + \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} \text{ или } 1,908 < a < 2,692.$$

Смысл полученного результата: если произведено достаточно большое количество выборок по 49 элементов в каждой, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5% случаев значение a может выйти за границы доверительного интервала.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
2. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
3. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
4. Дайте определение полной группы событий.
5. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
6. Дайте определение относительной частоты.
7. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
8. Сформулируйте теоремы о вероятности суммы двух совместных, несовместных событий.
9. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
10. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
11. Какие виды случайных величин вы знаете?
12. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
13. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
14. Дайте понятие вариационного ряда.
15. Какие виды вариационных рядов вы знаете?

16. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
17. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
18. Дайте понятие доверительного интервала.
19. Дайте определение основной и конкурирующей гипотез.
20. Дайте определение прямой регрессии Y на X , X на Y .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.–479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. - М.: ЮРАЙТ, 2011.-404с.
3. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие / Е.А.Бойцова. – Старый Оскол: ТНТ, 2014. –156с.
4. Журавлева Е.В., Бойцова Е.А., Панина Е.А., Студеникина Л.И. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева, Е.А.Бойцова, Е.А.Панина, Л.И.Студеникина – Курск: ЮЗГУ, 2015. –178 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4 [Текст]: учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит, 2004. –432с.
6. Расчет вероятностей случайных событий [Электронный ресурс] : методические указания по выполнению лабораторной работы для студентов технических и экономических специальностей / ЮЗГУ ; сост.: Н. К. Зарубина, Н. Б. Федорова. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 31 с.
7. Повторные испытания. Случайные величины [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-17 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Журавлева Е.В., Панина Е.А. – Курск: ЮЗГУ, 2013. -49с.
8. Повторные испытания. Случайные величины [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Журавлева Е.В., Панина Е.А. – Курск: ЮЗГУ, 2019. -54с.
9. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: ЮЗГУ, 2020. -35 с.