МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_8_» 08 _____________ 2023 г.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Методические указания
по выполнению практических работ
для студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
по дисциплине «Теория электросвязи»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Основы теории электрических цепей: методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория электросвязи» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. – Курск, 2023. – 25 с.

Методические указания по выполнению практических работ содержат краткие теоретические сведения о расчете электрических цепей, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины: «Теория электросвязи».

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,45. Уч.-изд. л. 1,32. Тираж 100 экз. Заказ. 879. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Введение

Практические занятия – это индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая непосредственно под руководством преподавателя, по его заданиям и под его контролем.

Практические занятия студентов включают:

– разбор предлагаемых методическим указанием практических заданий, освоение решения подобных заданий, изучение лекционного материала по конспекту с использованием рекомендованной литературы;

– отработку изучаемого материала по печатным и электронным источникам, конспектам лекций;

– подготовку к выполнению контрольного задания;

– выполнение отчетов по практическим занятиям и подготовку к их защите.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1
ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Задание №1

Свинцовый аккумулятор емкостью $Q = 15\,\text{А} \cdot \text{ч}$ заряжается током $I_{ЗАР} = 1,5\,\text{А}$. Как долго он должен заряжаться и через сколько времени он разрядится через лампы током $I_{РАЗ} = 0,3\,\text{А}$.

Решение

$t_{ЗАР} = \dfrac{Q}{I_{ЗАР}} = \dfrac{15}{1,5} = 10\text{ч},$ т.е. аккумулятор должен заряжаться 10 ч.

$t_{РАЗ} = \dfrac{Q}{I_{РАЗ}} = \dfrac{15}{0,3} = 50\text{ч},$ т.е. лампы горели 50 ч.

Задание №2

Длина медной проволоки $l = 0,2\,км$ диаметр $d = 2\,мм$. Определить сопротивление этой проволоки.

Решение

Сопротивление $R = \rho \dfrac{1}{S}$, Площадь поперечного сечения проволоки

$$S = \frac{\pi d^3}{4} = \frac{3,14 \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2.$$

Удельное сопротивление меди $\rho_м = 1,7 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м.$

Тогда $R = 1,7 \cdot 10^{-8} \dfrac{200}{3,14 \cdot 10^{-6}} = 1,11\text{Ом}.$

Задание №3

Определить эквивалентное сопротивление цепей (рисунок 1).

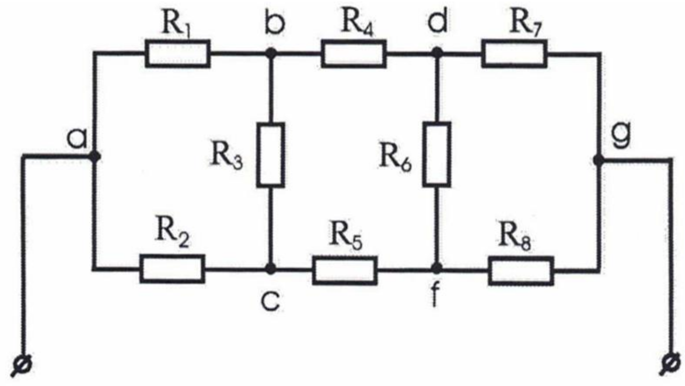


Рисунок 1 – Схема цепи

Сопротивление цепи: $R_1 = 30 Ом$, $R_2 = R_3 = 10 Ом$, $R_4 = 26 Ом$, $R_5 = 11 Ом$, $R_6 = 10 Ом$, $R_7 = 40 Ом$, $R_8 = 50 Ом$.

Решение

Заменим треугольники сопротивлений «авс» и «dfg» эквивалентными звездами. Получим схему, изображенную на рисунке 2.

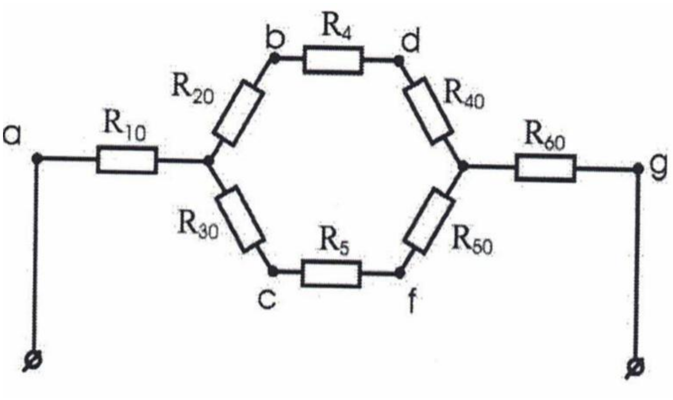


Рисунок 2 – Преобразованная схема

В преобразованной схеме, изображенной на рисунке, появились новые узлы «е» и «m».

Используя формулы пересчета, подсчитаем сопротивление лучей звезды R_{10}, R_{20} и R_{30}, эквивалентной треугольнику «авс» сопротивлений R_1, R_2, R_3.

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\,Ом, \qquad R_{20} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 6\,Ом, \quad R_{30} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\,Ом.$$

Определим сопротивления лучей звезды R_{40}, R_{50} и R_{60}, эквивалентной треугольнику «dfg» сопротивлений R_6, R_7, R_8.

$$R_{40} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = 4\,Ом, \qquad R_{50} = \frac{R_6 \cdot R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 5\,Ом, \quad R_{60} = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = 20\,Ом.$$

Эквивалентное (входное сопротивление) всей цепи

$$R_{ЭК} = R_{10} + \frac{R_{11} \cdot R_{22}}{R_{11} + R_{22}} + R_{60} = 38\,Ом,$$

где

$$R_{11} = R_{20} + R_4 + R_{40} = 36\,Ом,$$
$$R_{22} = R_{30} + R_5 + R_{50} = 18\,Ом.$$

Задание №4

В цепи рисунка 3 определить токи в ветвях пользуясь законами Кирхгофа и проверить баланс мощностей.

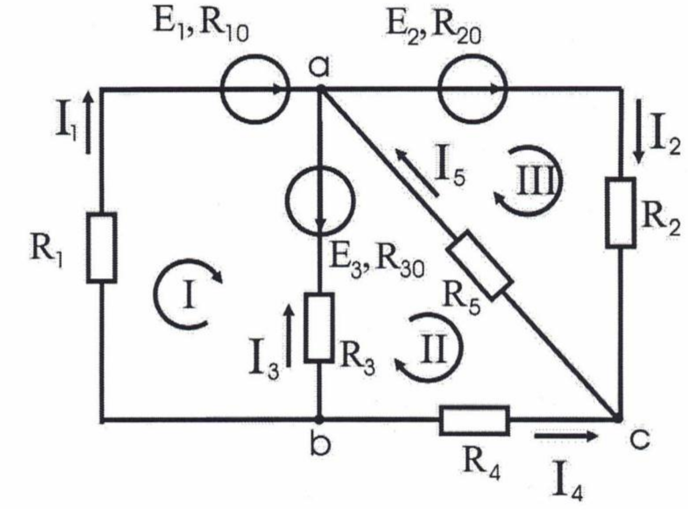


Рисунок 3 – Схема цепи

Параметры цепи: $R_1 = 5 Ом$, $R_2 = 4 Ом$, $R_3 = 8 Ом$, $R_4 = 2,5 Ом$, $R_5 = 15 Ом$.

Э.Д.С. генераторов $E_1 = 15 B$, $E_2 = 70 B$, $E_3 = 5 B$; их внутренние сопротивления: $R_{10} = R_{20} = 1 Ом$, $R_{30} = 2 Ом$.

Решение

В схеме пять ветвей $B = 5$ и три узла $У = 5$. Тогда по первому закону Кирхгофа надо составить число уравнений $K_1 = У - 1 = 2$, а по второму закону — число уравнений $K_2 = B - K_1 = 3$. Произвольно выберем положительные направления токов. Выберем три независимых контура I, II, III и обозначим стрелками направление их обхода. Составим систему уравнений Кирхгофа:

Для узла «a» $I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0,$

Для узла «d» $-I_1 - I_3 - I_4 = 0,$

Для I контура $E_1 + E_3 = (R_1 + R_{10})I_1 - (R_3 + R_{30})I_3,$

Для II контура $E_3 = -(R_3 + R_{30})I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5,$

Для III контура $E_2 = (R_2 + R_{20})I_2 + R_5 I_5.$

После подстановки числовых данных система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0, \\ -I_1 - I_3 - I_4 = 0, \\ 6I_1 - 10I_3 = 20, \\ -10I_3 + 2,5I_4 + 15I_5 = 5, \\ 5I_2 + 15I_5 = 70. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$I_1 = 5A,\ I_2 = 8A,\ I_3 = 1A,\ I_4 = -6A,\ I_5 = 2A.$$

Составим уравнение баланса мощностей для схемы

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 \left(R_1 + R_{10}\right) + I_2^2 \left(R_2 + R_{20}\right) + I_3^2 \left(R_3 + R_{30}\right) + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5,$$

Или $15,5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2,5 + 2^2 \cdot 15$ получено тождество $630 Bm = 630 Bm$.

Задание №5

В электрической цепи (рисунок 4) определить токи методом контурных токов

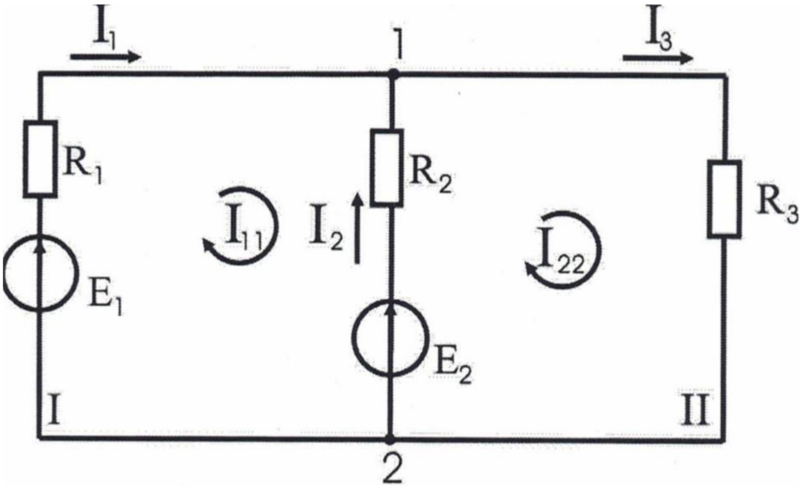


Рисунок 4 – Электрическая цепь

Э.Д.С. источников и параметры элементов цепи: $E_1 = 15B$, $E_2 = 14B$, $R_1 = 3Ом$, $R_2 = 2Ом$, $R_3 = 6Ом$. $E_1 = 15B$

Схема содержит 3 ветви $B = 3$, два узла $У = 2$, тогда число уравнений составленных по методу контурных токов равно $2(K = 3-1 = 2)$. Вычислим контурные Э.Д.С:

В первом контуре $E_{11} = E_1 - E_2 = 15 - 14 = 1B$,

Во втором контуре $E_{22} = E = 14B$.

Собственные сопротивления контуров $R_{11} = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5Ом$, $R_{22} = R_2 + R_3 = 2 + 6 = 8Ом$. Общее сопротивление контуров $R_{12} = R_{21} = -2Ом$.

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{22} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}. \end{cases}$$

Подставляем в систему уравнений числовые значения, получаем

$$\begin{cases} 5I_{11} - 2I_{22} = 1 \\ -2I_{11} + 8I_{22} = 14. \end{cases}$$

Определяем контурные токи $I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 36\,Ом^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} E_{11} & -R_{12} \\ E_{22} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} = 36\,В \cdot Ом,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & E_{11} \\ -R_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = 72\,В \cdot Ом.$$

$$I_{11} = 1A,\ I_{22} = 2A.$$

Токи в ветвях $I_1 = I_{11} = 1A$, $I_2 = I_{22} - I_{11} = 1A$, $I_3 = I_{22} = 2A$.

Задание №6

Определить токи в ветвях схемы (рисунок 5) методом узловых потенциалов. Величины источников и параметры элементов схемы: $E_1 = 20\,В$, $E_2 = 40\,В$, $E_3 = 20\,В$, $J = 2\,A$, $R_1 = 5\,Ом$, $R_2 = 20\,Ом$, $R_3 = 4\,Ом$, $R_4 = 10\,Ом$, $R_5 = 5\,Ом$.

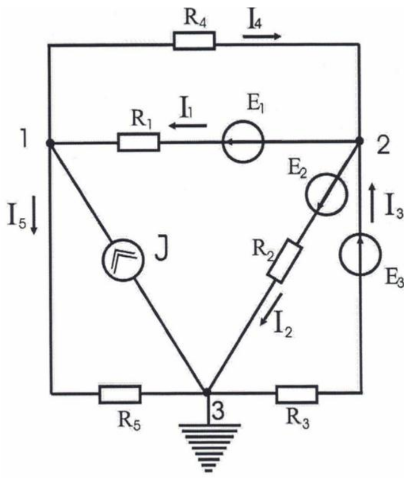


Рисунок 5 – Электрическая цепь

Решение

Выберем в качестве базисного узел 3 и его потенциал приравняем к нулю $\varphi_3 = 0$. Остаются неизвестными потенциалы узлов 1 и 2, поэтому по методу узловых потенциалов надо составить два уравнения.

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} = J_{11},$$

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} = J_{22},$$

где
$$G_{11} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0,5\,См,$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = 0,6\,См,$$

$$G_{12} = G_{21} = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) = -0,3\,См,$$

$$J_{11} = J + \frac{E_1}{R_1} = 2 + \frac{20}{R_5} = 6\,A, \qquad J_{22} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} = -4 - 2 + 5 = -1\,A.$$

После подстановки числовых значений, система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot 0,5 - \varphi_2 \cdot 0,3 = 6, \\ -\varphi_1 \cdot 0,3 - \varphi_2 \cdot 0,6 = -1. \end{cases}$$

Определяем неизвестные потенциалы

$$\varphi_1 = 15,71\,B,\ \varphi_2 = 6,19\,B\,.$$

Применяя обобщенный закон Ома, рассчитываем токи, выбрав предварительно их условно положительные направления:

$$I_1 = \frac{E_1 + U_{21}}{R_1} = \frac{E_1 + \varphi_2 - \varphi_1}{R_1} = \frac{20 - 15,71 + 6,19}{5} = 20,96A,$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{23}}{R_2} = \frac{E_2 + \varphi_2}{R_2} = \frac{46,19}{20} = 2,31A,$$

$$I_3 = \frac{E_3 + U_{32}}{R_3} = \frac{E_3 - \varphi_2}{R_3} = \frac{20 - 6,19}{4} = 3,45A,$$

$$I_4 = \frac{U_{12}}{R_4} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} = \frac{9,52}{10} = 0,95A,$$

$$I_5 = \frac{U_{13}}{R_5} = \frac{\varphi_1}{R_5} = \frac{15,71}{-5} = 3,14A.$$

Задание №7

Определить ток схемы рисунка 6 методом эквивалентного генератора, если $E = 30 B$, $R_1 = 30 Ом$, $R_2 = 60 Ом$, $R_3 = 15 Ом$, $R_4 = 45 Ом$, а сопротивление R_H принимает значения 0, 30, 90, 270, $Ом$.

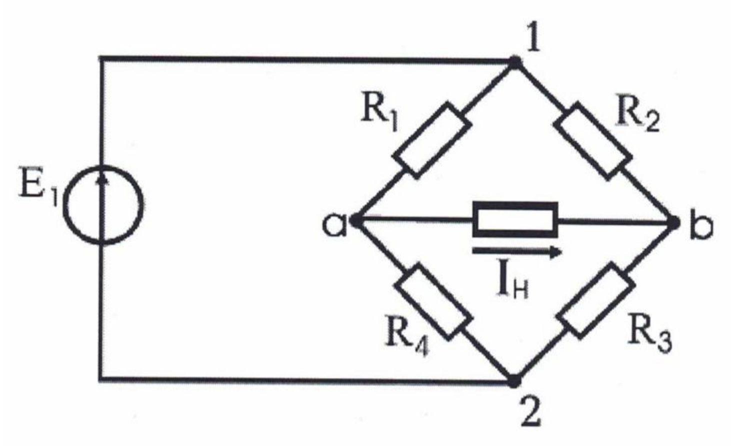


Рисунок 6 – Схема цепи

Решение

По методу эквивалентного генератора $I_H = \frac{U_{abxx}}{R_{ai} + R_i}$,

Определяем U_{abxx}. Оборвем ветвь с сопротивлением R_H, тогда исходная схема примет вид

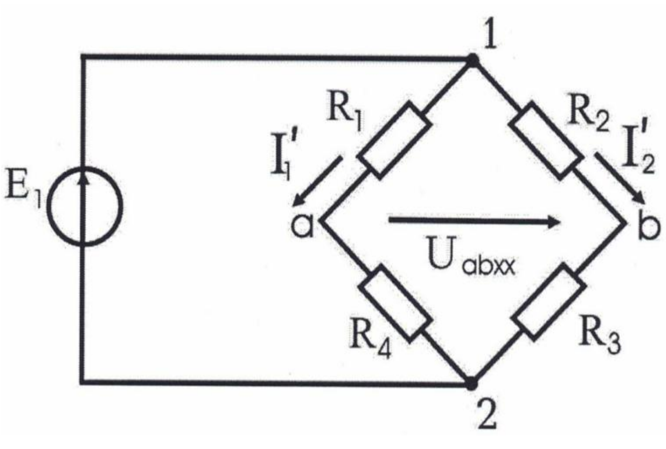


Рисунок 7 – Преобразованная схема

Напряжение U_{abxx} определяем по второму закону Кирхгофа откуда

$$U_{abxx}=\left(\frac{E_1}{R_2+R_3}\right)R_2-\left(\frac{E_1}{R_1+R_4}\right)R_1=12\,B.$$

Для определения внутреннего сопротивления закорачиваем источник Э.Д.С. E_1, восстанавливаем ветвь с сопротивлением R_H и определяем сопротивление относительно выводов ab пассивного двухполюсника.

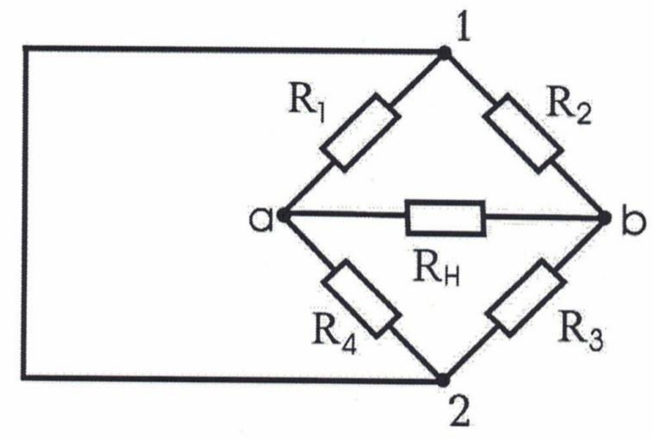


Рисунок 8 – Схема цепи

Внутреннее сопротивление

$$R_{BH}=\frac{R_1\cdot R_4}{R_1+R_4}+\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3}=\frac{30\cdot 45}{30+45}=\frac{60\cdot 15}{60+15}=30\,Ом.$$

Окончательно подставляя в формулу $I_H=\dfrac{12}{30+R_H}$ $R_H=0,30,90,270,\infty\,Ом$, получаем $I_H=0,4\,A;0,2\,A;0,01\,A;0\,A$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Задание №1

При частоте ω_1, равной половине граничной частоты ω_C, сопротивление нагрузки R_2 равно характеристическому сопротивлению низкочастотного фильтра (рисунок 9)

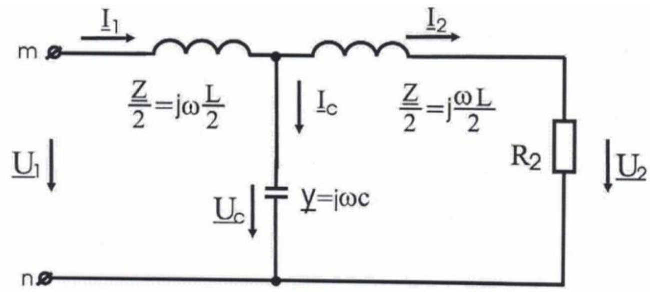


Рисунок 9 – Низкочастотный фильтр

Определить частоту среза, сопротивление на нагрузке, ток I_2, коэффициент затухания и фазы, если $\frac{L}{2}=0,01 Гн$, $C=8 мкФ$ и $U_2=10 В$.

Решение

Частота среза $\omega_1=\frac{2}{\sqrt{LC}}=\frac{2}{\sqrt{0,02\cdot 8\cdot 10^{-6}}}=5000\frac{рад}{сек}$. По условию $\omega_1=\frac{\omega_C}{2}=2500\frac{рад}{сек}$.

Из опытов холостого хода и короткого замыкания определяем $\underline{Z}_{1X}=\frac{\underline{Z}}{2}+\frac{1}{\underline{Y}}=j\omega_1\frac{L}{2}+\frac{1}{j\omega_1 C}=j2500\cdot 0,01+\frac{1}{j2500\cdot 8\cdot 10^{-6}}=-j25 Ом$,

$$\underline{Z}_{1K}=\frac{\underline{Z}}{2}+\frac{\frac{\underline{Z}}{2}\cdot\frac{1}{\underline{Y}}}{\frac{\underline{Z}}{2}+\frac{1}{\underline{Y}}}=j25+\frac{j25(-j50)}{j25-j50}=j75 Ом.$$

Сопротивление нагрузки R_2 и ток I_2:

$$R_2=Z_C=\sqrt{\underline{Z}_{1K}\cdot\underline{Z}_{1X}}=\sqrt{j75(-j25)}=25\sqrt{3} Ом,\ I_2=\frac{U_2}{R_2}=\frac{10}{25\sqrt{3}}=0,23 А.$$

Коэффициент распространения g:

$$thg = \frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{j75}{-j25} = j\sqrt{3} = jtg\,B,$$

Из этого выражения следует, что затухание $a = 0$, а коэффициент фазы $в$ равен $\frac{\pi}{3}$, т. е. $g = j\frac{\pi}{3}$.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на поперечное есть величина постоянная, равная k, называются фильтрами типа $-k$.

Анализ фильтра проведем из условия его согласования и симметрии, т.е.

«$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{e2}$ и $\underline{Z}_{н} = \underline{Z}_{e}$». Тогда $U_2 = U_1 e^{-q} \cdot i_2 = i_1 e^{-q}$. Для фильтров, состоящих только из реактивных элементов, $A_{11} = A_{22}$ - действительные величины, $A_{12} = A_{21}$ - мнимые.

Тогда, исходя из того, что «$ch(q) = ch(\alpha + j\beta) = ch(\alpha)\cdot\cos(\beta) + j\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = A_{11}$», имеем: «$ch(\alpha)\cdot\cos(\beta) = A_{11}\sin(\alpha)\sin(\beta) = 0$». Для идеального фильтра в полосе пропускания $\alpha = 0$, тогда полосы пропускания $A_{11} = \pm 1$. По ним находятся граничные частоты ω_1 и ω_2 полосы пропускания, в которой $\beta = \arccos A_{11}(\omega)$. В полосе заграждения $\alpha > 0$, тогда $\sin(\beta) = 0$, т. е. «$\beta = 0 \pm \%$» - напряжение на выходе U_2 находится в фазе или противофазе со входным U_1. Соответственно «$\alpha = Arch(+A_{11})$» либо «$\alpha = Arch(-A_{11})$».

Фильтрами низких частот (ФНЧ) называются фильтры, пропускающие частоты от $\omega_1 = 0$ до ω_2, и не пропускающие частоты выше ω_2. Фильтрами высоких частот (ФВЧ) называются фильтры, у которых наоборот, полоса заграждения лежит от 0 до ω_1, а полоса пропускания выше ω_2.

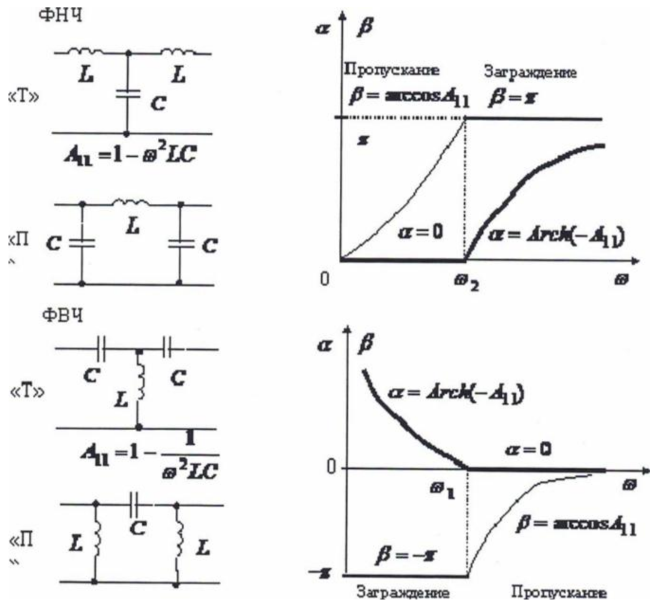


Рисунок 10 – Схемы фильтров

Выбор знака «$\pm$%» для фазочастотной характеристики $\beta(\omega)$ обусловлен тем обстоятельством, что фаза должна возрастать с ростом частоты.

Выражения и графики, полученные выше, приведены для согласованного фильтра, т. е. «$\underline{Z}_н = \underline{Z}_в$». На практике трудно нагрузить фильтр на нагрузку, которая изменялась бы так же в частотном диапазоне как и «$\underline{Z}_в$». Для несогласованного фильтра $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ можно рассчитать по коэффициенту передачи четырехполюсника по напряжению и току:

$$«\underline{K}_M = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{A_{11}\underline{Z}_{H2} + A_{12}} = K \cdot e^{j\varphi} = e^{-q} = e^{-\alpha} \cdot e^{-j\beta}.»$$

Тогда «$\alpha = -\ln\left|\underline{K}_H\right|,\ \beta = -\arg(\underline{K}_H)$».

Для улучшения фильтрующих свойств звенья фильтра включают каскадно.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3
ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Способы составления характеристического уравнения

Характеристическое уравнение составляется для цепи после коммутации. Оно может быть получено следующими способами:

- непосредственно на основе дифференциального уравнения вида, т.е. путем исключения из системы уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи на основании первого и второго законов Кирхгофа, всех неизвестных величин, кроме одной, относительно которой и записывается уравнение;

- путем использования выражения для входного сопротивления цепи на синусоидальном токе;

- на основе выражения главного определителя.

Согласно первому способу, в предыдущей лекции было получено дифференциальное уравнение относительно напряжения U_C на конденсаторе для последовательной $R-L-C-цепи$, на базе которого записывается характеристическое уравнение.

Следует отметить, что, поскольку линейная цепь охвачена единым переходным процессом, корни характеристического уравнения являются общими для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение.

Поэтому по первому способу составления характеристического уравнения в качестве переменной, относительно которой оно записывается, может быть выбрана любая.

Применение второго и третьего способов составления характеристического уравнения рассмотрим на примере цепи рисунке 11.

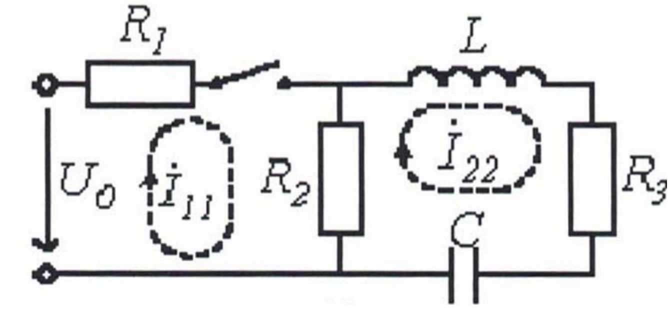


Рисунок 11 – Пример цепи

Составление характеристического уравнения по методу входного сопротивления заключается в следующем:

- записывается входное сопротивление цепи на переменном токе;
- $j\omega$ заменяется на оператор p;

- полученное выражение $Z(p)$ приравнивается к нулю.

Уравнение $Z(p)=0$ совпадает с характеристическим.

Следует подчеркнуть, что входное сопротивление может быть записано относительно места разрыва любой ветви схемы. При этом активный двухполюсник заменяется пассивным по аналогии с методом эквивалентного генератора. Данный способ составления характеристического уравнения предполагает отсутствие в схеме магнитосвязанных ветвей; при наличии таковых необходимо осуществить их предварительное развязывание.

Для цепи на рисунке 11 относительно зажимов источника

$$\underline{Z}(j\omega)=R_1+\frac{R_2\left(j\omega L+R_3+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R_2+R_3+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}.$$

Заменив $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, запишем

$$\underline{Z}(p)=R_1+\frac{R_2\left(pL+R_3+\dfrac{1}{pC}\right)}{R_2+R_3+pL+\dfrac{1}{pC}}=0$$

Или

$$CL(R_1+R_2)p^2+C(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)p+(R_1+R_2)=0. \tag{1}$$

При составлении характеристического уравнения на основе выражения главного определителя число алгебраических уравнений, на базе которых он записывается, равно числу неизвестных свободных составляющих токов. Алгебраизация исходной системы интегро-дифференциальных уравнений, составленных, например, на основании законов Кирхгофа или по методу контурных токов, осуществляется заменой символов дифференцирования и интегрирования соответственно на умножение и деление на оператор p. Характеристическое уравнение получается путем приравнивания записанного определителя к нулю. Поскольку выражение для главного определителя не зависит от правых частей системы неоднородных уравнений, записанных для полных токов.

Для цепи на рисунке 11 алгебраизованная система уравнений на основе метода контурных токов имеет вид:

$$i_{11}(R_1+R_2)-i_{22}R_2=U_0;$$

$$-i_{11}R_2+i_{22}\left(R_2+R_3+Lp+\frac{1}{Cp}\right)=0.$$

Отсюда выражение для главного определителя этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + Lp + \dfrac{1}{Cp} \end{vmatrix} = (R_1 + R_2)\left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - R_2^2$$

Приравняв D к нулю, получим результат, аналогичный (1).

Общая методика расчета переходных процессов классическим методом

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Запись выражения для искомой переменной в виде

$$x(t) = x_{пр} + x_{св}. \qquad (2)$$

2. Нахождение принужденной составляющей общего решения на основании расчета установившегося режима послекоммутационной цепи.
3. Составление характеристического уравнения и определение его корней (для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, вместо корней можно находить постоянную времени t. Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.
4. Подстановка полученных выражений принужденной и свободной составляющих в соотношение (2).
5. Определение начальных условий и на их основе — постоянных интегрирования.

Расчёт переходных процессов классическим методом

1. Переходные процессы в R-L цепи при ее подключении к источнику напряжения

Такие процессы имеют место, например, при подключении к источнику питания электромагнитов, трансформаторов, электрических двигателей и т.п.

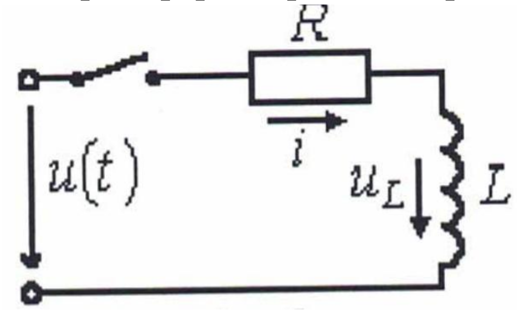


Рисунок 12 – Схема переходных процессов

Рассмотрим два случая:

a) $u(t) = U_0$;

b) $u(t) = U_m \sin(\alpha t + \varphi_U)$.

Согласно рассмотренной методике для тока в цепи на рисунке 2 можно записать:

$$i = i_{пр} + i_{св.} \tag{3}$$

Тогда для первого случая принужденная составляющая тока

$$i_{пр} = \frac{U_0}{R}. \tag{4}$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0,$$

Откуда $p = -R / L$ и постоянная времени $\tau_L = \left| 1/p \right| = L / R$.

Таким образом,

$$i_{св} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в соотношение (3), запишем

$$i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В соответствии с первым законом коммутации $i(O) = O$. Тогда

$$i(O) = \frac{U_0}{R} + A = 0,$$

Откуда $A = -U_0 / R$,

Таким образом, ток в цепи в переходном процессе описывается уравнением:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

а напряжение на катушке индуктивности – выражением:

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Качественный вид кривых $i(t)$ и $U_L(t)$, соответствующих полученным решениям, представлен на рисунке 13.

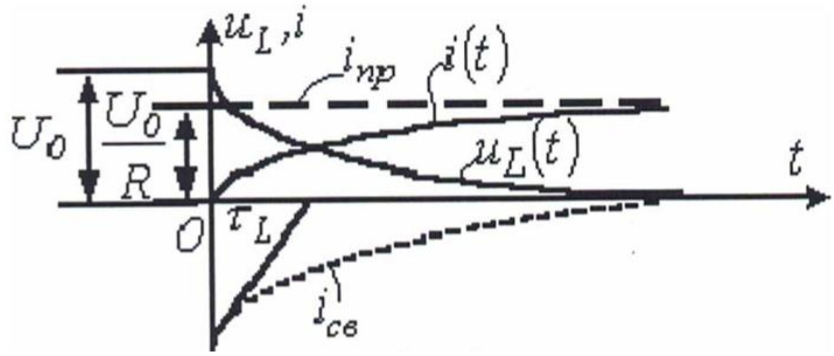


Рисунок 13 – Качественный вид кривых

При втором типе источника принужденная составляющая рассчитывается с использованием символического метода:

$$I_{npm} = \frac{U_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\,arctg\frac{\omega L}{R}}} = I_m e^{j(\varphi_v - \varphi)},$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = arctg(\omega L / R)$,

Отсюда

$$I_{np} = I_m \sin(\omega + \varphi_U - \varphi).$$

Выражение свободной составляющей не зависит от типа источника напряжения. Следовательно:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Поскольку $i(O) = O$, то

$$O = I_m \sin(\varphi_U - \varphi) + A,$$

Таким образом окончательно получаем

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) - I_m \sin(\varphi_U - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (6)$$

Анализ полученного выражения (6) показывает:

1. При начальной фазе напряжения $\varphi_U = \varphi \pm \pi$ постоянная интегрирования $A = 0$. Таким образом, в этом случае коммутация не повлечет за собой переходного процесса, и в цепи сразу возникнет установившийся режим.

2. При $\varphi_U - \varphi = \pm\pi/2$ свободная составляющая максимальна по модулю. В этом случае ток переходного процесса достигает своей наибольшей величины.

Если τ_L значительна по величине, то за полпериода свободная составляющая существенно не уменьшается. В этом случае максимальная величина тока переходного процесса может существенно превышать амплитуду тока установившегося режима. Как видно из рисунка 14, где $\varphi_U - \varphi = -\pi/2$, максимум тока имеет место примерно через $t = T/2$, в пределе при $\tau_L \to \infty$ $i_{\max} = 2I_m$.

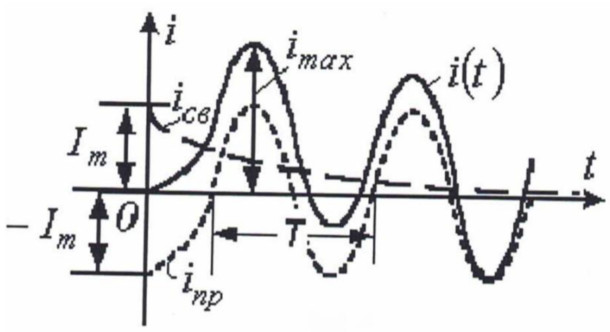


Рисунок 14 – Осциллограмма переходных процессов

Таким образом, для линейной цепи максимальное значение тока переходного режима не может превышать удвоенной амплитуды принужденного тока: $i_{L\max} < 2I_m$.

Аналогично для линейной цепи с конденсатором: если в момент коммутации принужденное напряжение равно своему амплитудному значению и постоянная времени τ_C цепи достаточно велика, то примерно через половину периода напряжение на конденсаторе достигает своего максимального значения $U_{C\max}$, которое не может превышать удвоенной амплитуды принужденного напряжения: $U_{C\max} < 2U_{Cm}$.

2. Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания

При размыкании ключа в цепи на рисунке 15 принужденная составляющая тока через катушку индуктивности $i_{пр} = O$.

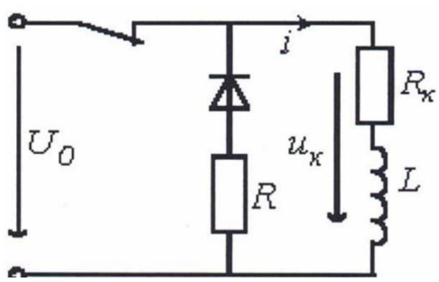


Рисунок 15 – Цепь с разомкнутым ключом

Характеристическое уравнение:

$$L_p + R + R_K = O$$

Откуда $p = -(R + R_K)/L$ и $\tau_L = L/(R + R_K)$.

В соответствии с первым законом коммутации:

$$i(O) = \frac{U_0}{R_K} = A.$$

Таким образом, выражение для тока в переходном режиме:

$$i(t) = \frac{U_0}{R_K} = e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

И напряжение на катушке индуктивности

$$u_K(t) = -Ri = -\frac{R}{R_K} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \tag{7}$$

Анализ (7) показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, могут возникать большие перенапряжения, которые без принятия специальных мер могут вывести аппаратуру из строя. Действительно, при $n = R/R_K \gg 1$ модуль напряжения на катушке индуктивности в момент коммутации будет во много раз превышать напряжение источника: $u_K(0) = nU_0$. При отсутствии гасящего резистора R указанное напряжение прикладывается к размыкающимся контактам ключа, в результате чего между ними возникает дуга.

3. Заряд и разряд конденсатора

При переводе ключа в положение 1 (см. рисунок 16) начинается процесс заряда конденсатора: $u_C(t) = u_{C\,пр} + u_{C\,св.}$

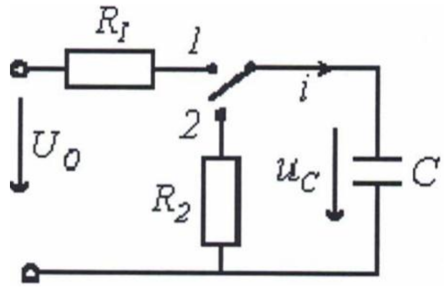


Рисунок 16 – Цепь с ключом в положении 1

Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе $u_{C\,пр} = U_0$.

Из характеристического уравнения

$$R_1 + \frac{1}{Cp} = O$$

определяется корень $p = -1/(R_1C)$. Отсюда постоянная времени $\tau_{C1} = R_1C$.

Таким образом,

$$u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

При $t = 0$ напряжение на конденсаторе равно $u_C(O)$ (в общем случае к моменту коммутации конденсатор может быть заряженным, т. е. $u_C(O) \neq O$).

Тогда $A = u_C(O) - U_0$ и $u_C(t) = U_0 + \left(u_C(O) - U_0\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$.

Соответственно для зарядного тока можно записать

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C(O)}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В зависимости от величины $u_C(O)$: 1 – $u_C(O) = O$; 2 – $O < u_C(O) < U_0$; 3 – $u_C(O) < O$; 4 – $u_C(O) > U_0$ – возможны четыре вида кривых переходного процесса, которые иллюстрирует рисунок 17.

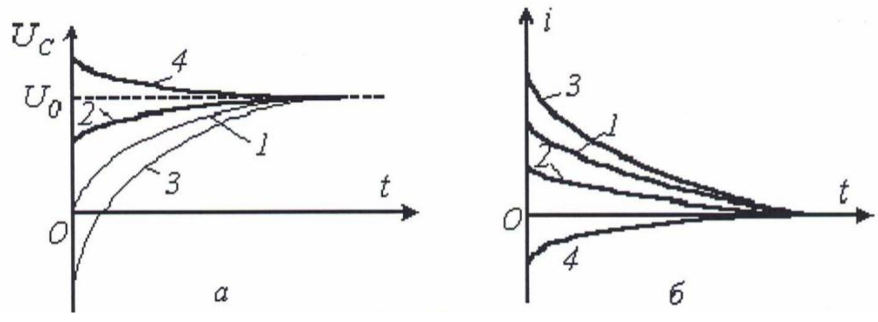


Рисунок 17 – Четыре вида кривых переходного процесса

При разряде конденсатора на резистор R_2 (ключ на рисунке 6 переводится в положение 2) $u_{C\,пр} = O$. Постоянная времени $\tau_{C2} = R_2 C$.

Тогда, принимая, что к моменту коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_{C1}(O)$ (в частном случае $u_{C1}(O) = U_0$), для напряжения на нем в переходном режиме можно записать

$$u_C(t) = u_{C1}(O) e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Соответственно разрядный ток

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{-u_{C1}(O)}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \qquad (8)$$

Как видно из (8), во избежание значительных бросков разрядного тока величина R_2 должна быть достаточно большой.

В заключение отметим, что процессы заряда и разряда конденсатора используются в генераторах пилообразного напряжения, широко применяемых в автоматике. Для этого ключ в схеме на рисунке 6 заменяется на электронный.

Контрольные вопросы

1. Составить характеристическое уравнение для цепи на рисунке 1, используя выражение входного сопротивления относительно места разрыва ветви с резистором R_3.
2. Может ли в одной части линейной цепи протекать колебательный переходный процесс, а в другой — апериодический?
3. Для чего в схеме на рисунке 15 служит цепочка, состоящая из диода и резистора R?
4. Почему можно разрывать ветвь с конденсатором и нельзя — ветвь с индуктивным элементом?
5. Почему корни характеристического уравнения не зависят от того, относительно какой переменной было записано дифференциальное уравнение?
6. Для цепи на рисунке 18 составить характеристическое уравнение и определить, при каких значениях R_2 переходный процесс в ней будет носить апериодический характер, если $L = 1\,Гн$, $R_3 = 100\,Ом$, $C = 10\,мкФ$.

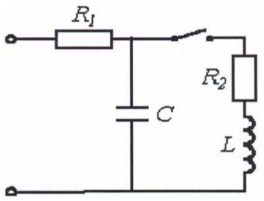


Рисунок 18 – Электрическая цепь

Ответ: $368\,Ом < R_2 < 1632\,Ом$.

7. Определить $i(t)$ в цепи на рисунке 19, если $R_1 = R_2 = 5\,Ом$, $L = 0,01\,Гн$, $e = 100\sqrt{2}\sin(1000t - 0,2618)\,В$, $J = 4\,А$.

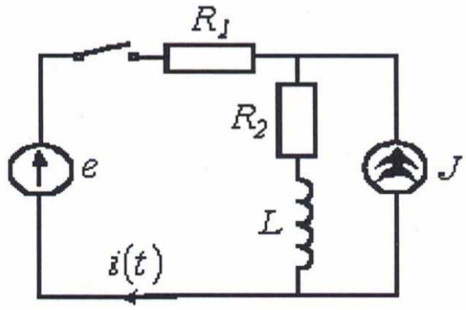


Рисунок 19 – Электрическая цепь

Ответ: $i(t) = -2 + 10\sin(1000t - \pi/6) + 7e^{-1000t}\,A$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»

(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

________ О.Г. Локтионова

«8» 08 2023 г.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСВЯЗИ

Методические указания
по выполнению практических работ
для студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
по дисциплине «Теория электросвязи»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Теория электросвязи: методические указания по выполнению практических работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 25 с.

Методические указания по выполнению практических работ направлены на закрепление теоретического материала на практике, а также формирование практических умений и навыков в процессе выполнения заданий по построению временных и спектральных диаграмм для периодической последовательности прямоугольных импульсов, различных видов модулированных сигналов, отклика нелинейной цепи на различные виды входного воздействия.

Методические указания соответствуют учебному плану по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины «Теория электросвязи».

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60х841/16.
Усл. печ. л. 1,45. Уч.-изд. л. 1,32. Тираж 100 экз. Заказ 755. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическая работа № 1

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Цель работы: научиться проводить спектральный анализ периодической последовательности прямоугольных импульсов (ППИ).

Подготовка к выполнению работы

1 Изучить по [1] – [6] ППИ.

2 Подготовить ответы на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

1 Что называется скважностью импульсов?

2 Что называется частотой следования импульсов?

3 Что показывает скважность импульсов?

4 Как зависит ширина спектра импульсной последовательности от скважности?

5 Как влияет скважность на спектр ППИ сигнала?

6 В чем заключается связь между временным и спектральным представлением сигнала?

7 Приведите формулу для расчета амплитуд спектральных составляющих ППИ.

Аппаратное и программное обеспечение

1 Микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы

1 Ответить на вопросы по домашнему заданию.

2 Нарисовать временную диаграмму ППИ сигнала при скважности 1 + N, где N – номер варианта.

ПРИМЕЧАНИЕ: Номер варианта соответствует порядковому номеру записи фамилии студента в учебном журнале.

3 Рассчитать амплитуды составляющих спектра ППИ в пределах ширины спектра. Нарисовать в примерном масштабе временную диаграмму рассматриваемой последовательности импульсов согласно данным таблицы 1.

По результатам расчетов построить спектральную диаграмму ПППИ.

Таблица 1 – Исходные данные

Вариант	Данные
1	$U(t)=\begin{cases}5, & 0\le t\le 3\text{ мс}\\ 0, & 3<t<10\text{ мс}\end{cases}$
2	$U(t)=\begin{cases}10, & 0\le t\le 2\text{ мс}\\ 0, & 2<t<8\text{ мс}\end{cases}$
3	$U(t)=\begin{cases}3, & -5\le t\le 5\text{ мс}\\ 0, & 5<t<35\text{ мс}\end{cases}$
4	$U(t)=\begin{cases}2, & 5\le t\le 15\text{ мс}\\ 0, & 15<t<45\text{ мс}\end{cases}$
5	$U(t)=\begin{cases}7, & 0\le t\le 3\text{ мс}\\ 0, & 3<t<12\text{ мс}\end{cases}$
6	U_m = 4 В, T = 100 мс, τ = 25 мс
7	U_m = 8 В, T = 80 мс, τ = 20 мс
8	U_m = 6 В, T = 120 мс, τ = 30 мс
9	U_m = 9 В, T = 60 мс, τ = 15 мс
10	U_m = 4 В, T = 36 мс, τ = 9 мс
11	U_m = 11 В, f = 10 кГц, q = 4
12	U_m = 13 В, f = 15 кГц, q = 3
13	U_m = 15 В, f = 24 кГц, q = 3
14	U_m = 16 В, f = 28 кГц, q = 4
15	U_m = 10 В, f = 30 кГц, q = 4
16	$U(t)=\begin{cases}16, & 0\le t\le 4\text{ мс}\\ 0, & 4<t<16\text{ мс}\end{cases}$
17	$U(t)=\begin{cases}10, & -2\le t\le 2\text{ мс}\\ 0, & 2<t<6\text{ мс}\end{cases}$
18	$U(t)=\begin{cases}13, & -4\le t\le 5\text{ мс}\\ 0, & 5<t<32\text{ мс}\end{cases}$
19	$U(t)=\begin{cases}22, & 10\le t\le 20\text{ мс}\\ 0, & 20<t<50\text{ мс}\end{cases}$
20	$U(t)=\begin{cases}16, & 0\le t\le 15\text{ мс}\\ 0, & 15<t<60\text{ мс}\end{cases}$
21	U_m = 14 В, T = 120 мс, τ = 30 мс
22	U_m = 18 В, T = 88 мс, τ = 22 мс
23	U_m = 16 В, T = 56 мс, τ = 14 мс
24	U_m = 19 В, T = 240 мс, τ = 60 мс
25	U_m = 24 В, T = 48 мс, τ = 12 мс
26	U_m = 21 В, f = 45 кГц, q = 4
27	U_m = 23 В, f = 35 кГц, q = 3

Окончание таблицы 1

Вариант	Данные
28	U_m = 15 В, f = 43 кГц, q = 3
29	U_m = 16 В, f = 65 кГц, q = 4
30	U_m = 10 В, f = 23 кГц, q = 4

4 Нарисовать в общем виде спектральную диаграмму ППИ сигнала при скважности 1 + N, где N – номер варианта.

5 Показать результаты выполнения работы преподавателю.

6 Сделать выводы.

7 Составить отчет по работе.

Содержание отчета

1 Наименование и цель работы.

2 Наименование аппаратного и программного обеспечения.

3 Исходные данные для расчетов.

4 Результаты расчетов.

5 Временные и спектральные диаграммы ППИ.

6 Выводы по работе.

7 Ответы на контрольные вопросы (по заданию преподавателя).

Контрольные вопросы

1 Как влияет изменение длительности импульсов на спектр ППИ?

2 Какие гармонические составляющие отсутствуют при скважности 4 в ППИ?

3 Как изменится спектр ППИ при изменении частоты следования импульсов?

4 Что изменится в спектре ППИ при изменении амплитуды импульсов?

5 Чем определяется ширина спектра ППИ?

6 Поясните, как определить ширину спектра по спектральной диаграмме ППИ.

7 В чем особенность спектра ППИ при скважности q = 3,2?

8 Сравните спектры периодических импульсных последовательностей, приведенных на рисунке 1.

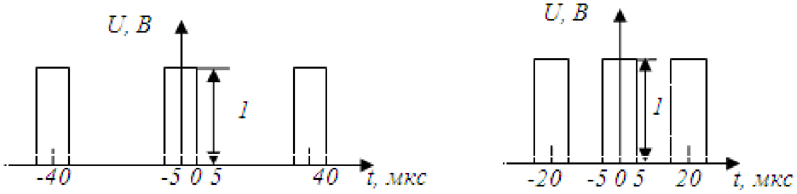


Рисунок 1 – Временные диаграммы сигналов.

9 Где используются ПППИ сигналы?

Содержание зачета

Учащемуся необходимо знать ответы на контрольные вопросы, уметь проводить расчеты, строить временные и спектральные диаграммы ПППИ и анализировать результаты.

Практическая работа № 2

АНАЛИЗ СПЕКТРА ОТКЛИКА НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Цель работы: научиться анализировать графическим и аналитическим способами спектр отклика нелинейной цепи на гармоническое и бигармоническое воздействия.

Подготовка к выполнению работы

1 Изучить по [1] – [6] спектральный состав отклика нелинейной цепи на гармоническое и бигармоническое воздействия.

2 Подготовить бланк отчета.

3 Подготовить ответы на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

1 Что называют нелинейной цепью?

2 Какими свойствами обладает нелинейная цепь?

3 Что называют воздействием?

4 Какие методы анализа нелинейных цепей чаще всего используют?

5 Что называют откликом нелинейной цепи?

6 Поясните спектральный состав отклика, если характеристика нелинейного элемента (НЭ) аппроксимируется полиномом второй степени $i = a_0 + a_1u + a_3u^2$. В приведенном выражении u – гармоническое колебание.

7 Поясните спектральный состав отклика, если на вход НЭ воздействует гармоническое колебание, а характеристика НЭ аппроксимируется выражением $i = a_1u + a_2u^2$.

8 Чем отличается спектр отклика нелинейной цепи при воздействии двух гармонических колебаний от спектра отклика нелинейной цепи при воздействии одного гармонического колебания?

9 Что называют комбинационными частотами?

10 В каких устройствах используют перемножение колебаний на НЭ?

11 В каких устройствах используют НЭ, на вход которых воздействуют гармонические колебания?

Аппаратное и программное обеспечение

1 Микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы

1 Ответить на вопросы преподавателя по домашнему заданию.

2 Решить задачу: Характеристика НЭ аппроксимируется полиномом $i = a + a_1u + a_2u^2$. На вход НЭ воздействуют два гармонических колебания. Рассчитать и построить спектр отклика нелинейной цепи для условий, приведенных в таблицах 2 и 3.

ПРИМЕЧАНИЕ – Номер варианта соответствует порядковому номеру записи фамилии студента в учебном журнале.

Таблица 2 – Исходные данные

Вариант	Характер изменения воздействующих сигналов	Законы изменения гармонических сигналов
1…5	$u = u_1 + u_3$	$u_1 = U_{m1}cos\omega_1t;$ $u_3 = U_{m3}cos\omega_3t;$
6…10	$u = u_1 + u_2$	$u_1 = U_{m1}sin\omega_1t;$ $u_2 = U_{m2}sin\omega_2t;$
11…15	$u = u_2 + u_3$	$u_2 = U_{m2}cos\omega_2t;$ $u_3 = U_{m3}cos\omega_3t;$
16…20	$u = u_1 - u_3$	$u_1 = U_{m1}sin\omega_1t;$ $u_3 = U_{m3}sin\omega_3t;$
21…25	$u = u_1 - u_2$	$u_1 = U_{m1}sin\omega_2t;$ $u_2 = U_{m2}sin\omega_3t;$
26…30	$u = u_2 - u_3$	$u_2 = U_{m2}cos\omega_2t;$ $u_3 = U_{m3}cos\omega_3t;$

Таблица 3 – Исходные данные

Вариант	Частоты воздействия			Амплитуда напряжения на входе НЭ			Коэффициенты аппроксимации		
	f_1, кГц	f_2, кГц	f_3, кГц	U_{m1},В	U_{m2},В	U_{m3},В	a_0	a_1	a_2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	9	28	6	5,0	3,9	1,0	-	0,7	0,5
2	11	27	6	5,1	3,8	1,1	-	0,6	0,4
3	12	26	7	5,2	3,7	1,2	-	0,5	0,3
4	13	24	8	5,3	3,6	1,3	-	0,4	0,2
5	14	24	9	5,4	3,5	1,4	-	0,8	0,3
6	14	23	11	5,5	3,4	1,5	0,3	0,5	0,4
7	15	23	4	5,6	3,3	1,6	0,3	0,6	0,5

Окончание таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	17	21	3	5,7	3,2	1,7	0,3	0,7	0,5
9	17	20	2	5,8	3,1	1,8	0,3	0,4	0,3
10	18	30	2	5,9	3,0	1,9	0,3	0,3	0,2
11	20	31	11	6,0	2,9	2,0	0,4	0,3	0,2
12	21	2	10	6,1	2,8	2,1	0,4	0,4	0,3
13	22	3	12	6,2	2,7	2,2	0,4	0,5	0,4
14	23	4	12	6,3	2,6	2,3	0,4	0,6	0,3
15	24	5	14	6,4	2,5	2,4	0,4	0,7	0,4
16	25	6	15	6,5	2,4	2,5	0,5	0,3	0,1
17	26	7	16	6,6	2,3	2,6	0,5	0,4	0,2
18	27	8	19	6,7	2,2	2,7	0,5	0,7	0,3
19	28	8	20	6,8	2,1	2,8	0,5	0,6	0,4
20	29	10	22	6,9	2,0	2,9	0,5	0,5	0,4
21	14	4	7	7,0	4,0	3,0	-	0,7	0,5
22	15	6	8	7,1	4,1	3,1	-	0,8	0,6
23	16	7	9	7,2	4,2	3,2	-	0,6	0,3
24	17	8	10	7,3	4,3	3,3	-	0,5	0,4
25	18	9	11	7,4	4,4	3,4	-	0,4	0,2
26	19	10	7	7,5	4,5	3,5	0,3	0,5	0,4
27	13	11	7	7,6	4,9	3,6	0,3	0,5	0,3
28	12	12	9	7,7	4,8	3,7	0,3	0,6	0,5
29	11	13	8	7,8	4,7	3,8	0,3	0,6	0,45
30	10	14	9	7,9	4,6	3,9	0,3	0,7	0,55

3 На вход НЭ подано напряжение $U(t) = U_0 + U_m sin6,28 \cdot N \cdot 10^3 t$, амплитуда тока на выходе нелинейного элемента равна *Im* мА, напряжение отсечки *Uн* В. Рассчитать спектр отклика нелинейного элемента, построить временные диаграммы воздействия и отклика используя данные таблицы 4.

Таблица 4 – Исходные данные

Вариант	U_0, В	U_m, В	$U_н$, В	I_m, мА
1	0,4	0,2	0,5	1
2	0,6	0,4	0,6	2
3	0,8	0,6	1,0	3
4	1,0	0,8	1,2	4
5	1,2	1,0	1,5	5

Окончание таблицы 4

Вариант	U_0, В	U_m, В	$U_н$, В	I_m, мА
6	1,4	1,2	1,4	6
7	1,6	1,4	1,6	7
8	1,8	1,6	1,8	8
9	2,0	1,8	2,0	9
10	2,2	2,0	2,2	10
11	2,4	2,2	2,1	11
12	2,6	2,4	1,8	12
13	2,8	2,6	1,6	13
14	3,0	2,8	1,5	14
15	0,3	3,0	1,5	15
16	0,5	0,3	0,3	16
17	0,7	0,5	0,9	17
18	0,9	0,7	1,0	18
19	1,1	0,9	1,5	19
20	1,3	1,1	1,8	20
21	1,5	1,3	1,5	21
22	1,7	1,5	1,7	22
23	1,9	1,7	1,9	23
24	2,1	1,9	2,1	24
25	2,3	2,1	2,3	25
26	2,5	2,3	2,1	26
27	2,7	2,5	2,0	27
28	2,9	2,7	1,9	28
29	1,0	2,9	0,9	29
30	1,2	1,0	0,6	30

4 Нарисовать временную диаграмму сигнала с углом отсечки равным 5N, где N – номер варианта.

5 Показать результаты выполнения работы преподавателю.

6 Сделать выводы.

7 Составить отчет по работе.

Содержание отчета

1 Наименование и цель работы.

2 Наименование аппаратного и программного обеспечения.

3 Исходные данные для расчетов.

4 Результаты расчетов.

5 Временные и спектральные диаграммы воздействия и отклика нелинейной цепи.

6 Выводы по работе.

7 Ответы на контрольные вопросы (по заданию преподавателя).

Контрольные вопросы

1 Как влияет на спектр отклика нелинейность характеристики НЭ?

2 Изменится ли спектральный состав отклика нелинейной цепи, если изменится амплитуда одного из воздействующих колебаний?

3 Изменится ли спектральный состав отклика нелинейной цепи, если изменится частота одного из воздействующих колебаний?

4 Как изменится спектральный состав отклика нелинейной цепи, если угол отсечки уменьшится с 70° до 40°?

5 Как изменится спектр отклика, если на вход нелинейной цепи будет подано три гармонических колебания?

6 Как выделить из спектра отклика нелинейной цепи необходимые колебания?

7 Изменится ли спектр амплитуд отклика, если вместо синусоидальных колебаний на вход нелинейной цепи будут поданы косиносуидальные колебания?

8 Какой способ аппроксимации характеристики нелинейного элемента целесообразно использовать при больших амплитудах входного сигнала?

9 Что показывает значение крутизны вольтамперной характеристики НЭ 6 мА/В?

10 Как называется внешняя характеристика нелинейной индуктивности?

Содержание зачета

Учащемуся необходимо знать ответы на контрольные вопросы, уметь проводить расчеты, предусмотренные заданием на работу, строить временные и спектральные диаграммы воздействия и отклика НЭ и анализировать результаты.

Практическая работа № 3

АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ И ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Цель работы: научиться составлять математические модели амплитудно-модулированного (АМ) и частотно-модулированного (ЧМ) сигналов, рассчитывать спектры АМ и ЧМ сигналов, представлять временные диаграммы модулированных сигналов.

Подготовка к выполнению работы

1 Изучить по [1] – [6] формирование амплитудно- и частотно-модулированных сигналов.

2 Подготовить ответы на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

1 Что называют амплитудной модуляцией?

2 Каким должно быть соотношение частот и амплитуд несущего и модулирующего колебаний?

3 Какие составляющие АМ сигнала несут информацию о модулирующем сигнале?

4 Что называют частотной модуляцией?

5 Что называют девиацией частоты?

6 Какие составляющие ЧМ сигнала несут информацию о модулирующем сигнале?

7 Как зависит ширина спектра ЧМ сигнала от индекса частотной модуляции?

8 Какие достоинства и недостатки частотной модуляции?

Аппаратное и программное обеспечение

1 Микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы

1 Ответить на вопросы по домашнему заданию.

2 Составить математическую модель АМ сигнала и построить его спектральную диаграмму амплитуд согласно исходным данным, приведенным в таблице 5.

ПРИМЕЧАНИЕ – Номер варианта соответствует порядковому номеру записи фамилии студента в учебном журнале.

Таблица 5 – Исходные данные

Вари-ант	Математическая модель несущего колебания *S(t)*	Параметры модулирующего колебания		Коэффициент a_{AM}
		Амплитуда, В	Период, мс	
1	$3{,}4\cos 62{,}8\cdot10^4 t$	1,2	0,10	0,86
2	$10\cos 0{,}6\cdot12{,}56\cdot10^5 t$	4,7	0,08	0,92
3	$1{,}8\cos 2\pi\cdot13\cdot10^4 t$	0,9	$6{,}25\cdot10^{-2}$	0,85
4	$2{,}2\cos 2\cdot251{,}2\cdot10^3 t$	1,0	$16\cdot10^{-2}$	0,93
5	$4{,}2\cos 3{,}14\cdot1{,}8\cdot10^4 t$	2,6	$1\cdot10^{-1}$	0,84
6	$3{,}6\cos 2\pi\cdot104\cdot10^3 t$	2,0	$8\cdot10^{-2}$	0,94
7	$1{,}6\cos 0{,}5\cdot62{,}8\cdot10^4 t$	0,7	0,25	0,88
8	$2{,}8\cos 5\cdot12{,}56\cdot10^4 t$	1,6	$6{,}25\cdot10^{-2}$	0,86
9	$12\cos 2\pi\cdot78\cdot10^3 t$	7,4	$25\cdot10^{-2}$	0,92
10	$3{,}7\cos 31{,}4\cdot18000t$	2,1	0,16	0,94
11	$1{,}7\cos 125{,}6\cdot4200t$	1,1	$62{,}5\cdot10^{-3}$	0,82
12	$14\cos 62{,}8\cdot92\cdot10^3 t$	9,6	$10\cdot10^{-2}$	0,93
13	$3{,}8\cos 2\pi\cdot14{,}2\cdot10^4 t$	2,4	$6{,}25\cdot10^{-2}$	0,85
14	$5{,}7\cos 628\cdot860t$	3,8	$12{,}5\cdot10^{-2}$	0,90
15	$4{,}1\cos 314\cdot1520t$	2,6	$16\cdot10^{-2}$	0,86
16	$6{,}4\cos 2\pi\cdot96\cdot10^3 t$	4,1	0,08	0,82
17	$4{,}8\cos 628000t$	3,0	$10\cdot10^{-2}$	0,80
18	$3{,}9\cos 0{,}55\cdot12{,}56\cdot10^5 t$	1,8	$6{,}25\cdot10^{-2}$	0,92
19	$4{,}4\cos 2{,}8\cdot12{,}56\cdot10^4 t$	3,1	$20\cdot10^{-2}$	0,94
20	$5{,}6\cos 3{,}14\cdot128000t$	4,2	0,16	0,86
21	$7{,}2\cos 2\pi\cdot106000t$	5,8	$8\cdot10^{-2}$	0,90
22	$3{,}9\cos 2\cdot251200t$	2,8	0,125	0,95
23	$9{,}4\cos 314\cdot1980t$	6,2	0,16	0,82
24	$6{,}2\cos 8{,}9\cdot6{,}28\cdot10^4 t$	4,1	$10\cdot10^{-2}$	0,84
25	$5{,}2\cos 12{,}56\cdot52000t$	3,5	$6{,}25\cdot10^{-2}$	0,80
26	$7{,}4\cos 3{,}14\cdot182000t$	5,9	0,08	0,90
27	$9{,}2\cos 125{,}6\cdot3400t$	7,6	$16\cdot10^{-2}$	0,92
28	$1{,}9\cos 25{,}12\cdot23000t$	0,9	0,125	0,85
29	$2{,}6\cos 2\pi\cdot6{,}9\cdot10^4 t$	1,3	0,16	0,87
30	$8{,}8\cos 314\cdot1260t$	6,1	0,32	0,89

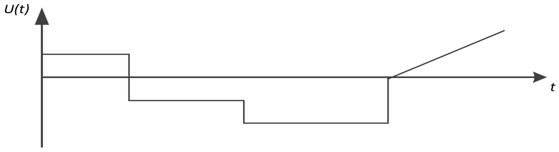
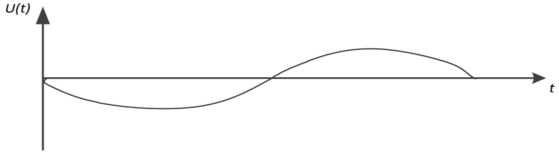
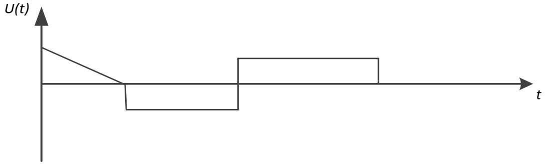
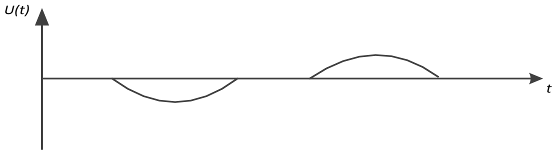
3 Составить математическую модель ЧМ сигнала и построить его спектральную диаграмму амплитуд согласно исходным данным, приведенным в таблице 6.

Таблица 6 – Исходные данные

Вариант	$f_н$, МГц	F, кГц	U_m, В	Δf_m, кГц	M	λ, м
1	66	15	32	-	3,33	-
2	67	15	31	-	3,33	-
3	68	15	30	-	3,33	-
4	69	15	29	-	3,33	-
5	70	15	28	-	3,33	-
6	71	15	27	-	3,33	-
7	72	15	26	-	3,33	-
8	73	15	25	-	3,33	-
9	-	15	24	50	-	4,1
10	-	15	23	50	-	4,2
11	-	15	22	50	-	4,3
12	-	15	21	50	-	4,4
13	-	15	20	50	-	4,5
14	-	15	19	50	-	4,15
15	-	15	18	50	-	4,25
16	-	15	17	50	-	4,35
17	-	-	10	45	3	4,16
18	-	-	9	45	3	4,46
19	-	-	8	45	3	4,55
20	-	-	7	45	3	4,45
21	66	15	6	-	3	-
22	67	15	5	-	3	-
23	68	15	4	-	3	-
24	69	15	3	-	3	-
25	107	-	4,4	45	3	-
26	70	13	0,5	-	3	-
27	35	13	0,5	-	3	-
28	140	14	0,4	-	3	-
29	84	-	5	45	3	-
30	70	14	1,5	-	3	-

4 Нарисовать временные диаграммы АМ и ЧМ сигналов, если информационный имеет вид, представленный в таблице 7.

Таблица 7 – Исходные данные

Вариант	Временная диаграмма информационного сигнала
1 – 8	
9 – 16	
17 – 23	
24 – 30	

5 Показать результаты выполнения работы преподавателю.
6 Сделать выводы.
7 Выключить оборудование.
8 Составить отчет по работе.

Содержание отчета

1 Наименование и цель работы.
2 Наименование аппаратного и программного обеспечения.
3 Исходные данные для расчетов.
4 Результаты расчетов.
5 Выводы по работе.
6 Ответы на контрольные вопросы (по заданию преподавателя).

Контрольные вопросы

1 Зачем применяют подавление одной боковой полосы частот АМ сигнала?

2 Какая будет ширина спектра АМ сигнала, если модулирующим является сигнал звукового вещания первого класса качества?

3 Как рассчитать коэффициент модуляции по временной диаграмме АМ сигнала?

4 Существует ли сдвиг по фазе между составляющими АМ сигнала?

5 Какая частотная модуляция называется широкополосной, узкополосной?

6 В чем преимущества узкополосной ЧМ модуляции?

7 Какие преимущества широкополосной ЧМ модуляции?

8 Какие особенности ЧМ сигнала при $M_{чм} = 2,4$?

Содержание зачета

Учащемуся необходимо знать ответы на контрольные вопросы, уметь проводить расчеты, предусмотренные заданием на работу, сроить временные и спектральные диаграммы АМ и ЧМ сигналов и анализировать результаты.

Практическая работа № 4
АНАЛИЗ СИГНАЛОВ С ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Цель работы: научиться рассчитывать частоту дискретизации сигналов, преобразовывать дискретный сигнал в импульсно-кодово-модулированный (ИКМ).

Подготовка к выполнению работы

1 Изучить по [1] – [5] принципы цифровой модуляции.

2 Подготовить ответы на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

1. Поясните физический смысл теоремы В.А. Котельникова. Для каких сигналов справедлива эта теорема?
2. Приведите пример практического применения теоремы В. А. Котельникова.
3. В чем заключаются основные преимущества цифровых методов передачи непрерывных сигналов?
4. Поясните принцип формирования ИКМ сигнала.
5. Поясните когда применяются равномерное и неравномерное квантование.
6. Какие недостатки имеют цифровые способы передачи непрерывных сигналов?

Аппаратное и программное обеспечение

1 Микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы

1 Ответить на вопросы по домашнему заданию.

2 Построить спектральную диаграмму и рассчитать частоту дискретизации сигнала, математическая модель которого имеет вид согласно данным таблицы 8.

ПРИМЕЧАНИЕ – Номер варианта соответствует порядковому номеру записи фамилии студента в учебном журнале.

Таблица 8 – Исходные данные

Вариант	Математическая модель сигнала
1	$U(t) = 3sin62800t + 1{,}5sin188400t$
2	$U(t) = 5cos163280t + 5{,}7cos169560t$
3	$U(t) = 2sin125600t + 0{,}5sin251200t$
4	$U(t) = 2{,}5cos339120t + 7{,}7cos106760t$
5	$U(t) = 1{,}3sin6280t - 2{,}0sin18840t$
6	$U(t) = 9cos144440t - 5{,}7cos270040t$
7	$U(t) = 0{,}7sin94200t + 2{,}5sin219800t$
8	$U(t) = 1{,}4cos119320t + 2{,}9cos175840t$
9	$U(t) = 0{,}3sin138160t + 1{,}5sin69080t$
10	$U(t) = 4{,}3sin163280t + 5{,}1cos169560t$
11	$U(t) = 4cos75360t - 2cos43960t$
12	$U(t) = 6{,}3cos75360t + 1{,}5cos131880t$
13	$U(t) = 7cos131880t + 3sin119320t$
14	$U(t) = 3{,}2cos87920t + 2{,}3cos257480t$
15	$U(t) = 2sin314000t - 1{,}5sin31400t$
16	$U(t) = 3{,}6cos383080t + 6{,}3cos100480t$
17	$U(t) = 2sin6280t + 1{,}5sin18840t$
18	$U(t) = 4{,}2cos527520t + 2{,}4cos546360t$
19	$U(t) = 15sin150720t + 11sin175840t$
20	$U(t) = 3{,}5cos408200t + 2{,}7cos395640t$
21	$U(t) = 3sin232360t - 5sin87920t$
22	$U(t) = 7cos270040t - 5sin301440t$
23	$U(t) = 2sin75360t + 4sin175840t$
24	$U(t) = 6cos445880t + 10cos106760t$
25	$U(t) = 11sin628000t + 8sin1884000t$
26	$U(t) = 7{,}7cos138160t + 4{,}3cos276320t$
27	$U(t) = 4sin37680t - 1sin43960t$
28	$U(t) = 6{,}3cos207240t + 5{,}7cos345400t$
29	$U(t) = 1{,}2sin56520t + 2{,}3cos87920t$
30	$U(t) = 6cos339120t + 8cos113040t$

3 В результате дискретизации сигнала получена последовательность отсчетов U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}, U_{m4}, U_{m5} B. Преобразовать эту последовательность в ИКМ сигнал при шаге квантования ΔU В. Рассчитать ошибку квантования. Исходные данные смотреть в таблице 9.

Таблица 9 – Исходные данные

Вариант	U_{m1}, В	U_{m2}, В	U_{m3}, В	U_{m4}, В	U_{m5}, В	ΔU, В
1	0,63	1,8	1,18	0,1	0,45	0,1
2	2,3	0,4	3,63	1,5	2,79	0,2
3	0,34	1,2	2,55	5,1	4,74	0,3
4	7,5	5,4	0,82	2,4	4,0	0,4
5	4,0	1,5	9,8	8,2	5,75	0,5
6	6,3	2,35	9,21	11,4	7,8	0,6
7	0,7	8,4	9,1	4,8	12,64	0,7
8	8,3	10,4	15,1	1,6	6,8	0,8
9	18,0	15,3	0,92	4,95	10,7	0,9
10	1,05	1,53	0,38	0,2	1,9	0,10
11	1,22	0,76	1,76	0,16	2,2	0,11
12	0,36	0,85	1,31	1,8	2,34	0,12
13	2,47	2,07	1,69	1,18	0,54	0,13
14	1,43	0,13	0,84	2,52	2,17	0,14
15	2,5	2,97	0,32	0,9	1,65	0,15
16	1,44	0,63	2,55	3,04	2,0	0,16
17	1,28	0,54	0,245	3,23	2,21	0,17
18	1,28	2,79	0,36	3,42	0,89	0,18
19	2,67	0,37	3,42	1,52	2,08	0,19
20	2,3	1,2	3,15	3,83	0,4	0,20
21	3,88	0,42	1,05	1,9	2,9	0,21
22	0,55	4,18	2,21	3,3	2,63	0,22
23	0,23	4,36	2,75	1,165	3,45	0,23
24	0,3	3,6	4,7	1,44	2,52	0,24
25	0,45	4,8	1,5	2,9	4	0,25
26	0,27	1,03	4,94	2,73	3,12	0,26
27	4,86	2,95	1,7	3,78	2,45	0,27
28	5,6	1,22	3,0	2,24	4,34	0,28
29	3,1	1,74	5,22	4,37	2,125	0,29
30	3,3	4,35	6,0	0,27	1,51	0,30

4 Показать результаты выполнения работы преподавателю.
5 Сделать выводы.
6 Составить отчет по работе.

Содержание отчета

1 Наименование и цель работы.
2 Наименование аппаратного и программного обеспечения.

3 Исходные данные для расчетов.

4 Результаты расчетов.

5 Выводы по работе.

6 Ответы на контрольные вопросы (по заданию преподавателя).

Контрольные вопросы

1 Приведите выражение для расчета частоты дискретизации.

2 Почему следует частоту дискретизации выбирать на 10…15 % выше теоретической, рассчитываемой по теореме В. А. Котельникова?

3 Какие ошибки возникают при формировании ИКМ сигнала?

4 Как определяется интервал дискретизации?

5 Какие операции выполняются при преобразовании аналогового сигнала в цифровой?

6 Что такое квантование?

7 Что такое кодирование?

Содержание зачета

Учащемуся необходимо знать ответы на контрольные вопросы, уметь проводить расчеты и анализировать результаты.

Практическая работа № 5

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОЕ КОДИРОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ

Цель работы: научиться формировать разрешенные кодовые комбинации помехоустойчивых кодов и декодировать систематические линейные блочные коды.

Подготовка к выполнению работы

1 Изучить по [1] – [6] помехоустойчивое кодирование сообщений и синдромное декодирование кодов.

2 Подготовить ответы на вопросы для самопроверки.

Вопросы для самопроверки

1 В чем заключается помехоустойчивое кодирование?

2 Какие существуют способы формирования разрешенных кодовых комбинаций систематических линейных блочных кодов?

3 В чем состоит принцип синдромного декодирования помехоустойчивых кодов?

4 Как определить количество гарантированно обнаруживаемых и гарантированно исправляемых ошибок помехоустойчивым кодом?

5 Каким условиям должен удовлетворять порождающий полином линейного циклического кода?

6 Каким образом формируются разрешенные кодовые комбинации неразделимого и разделимого линейных циклических кодов?

7 В чем заключается различие между систематическими и несистематическими помехоустойчивыми кодами?

Аппаратное и программное обеспечение

1 Микрокалькулятор.

Порядок выполнения работы

1 Ответить на вопросы программированного допуска.

2 Закодировать четырехразрядное сообщение кодом Хэмминга (7,4,3) с использованием порождающей и проверочной матриц, согласно таблице 10, и сравнить полученные результаты.

ПРИМЕЧАНИЕ: Код сообщения сформировать следующим образом: закодировать 5-разрядным двоичным кодом номер варианта и отбросить старший разряд (для номера «16» принять код «1110»).

Таблица 10 – Исходные данные

Номер варианта	Порождающая матрица	Проверочная матрица
1…5	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 111 \\ 0100 & 110 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 011 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 1110 & 100 \\ 1101 & 010 \\ 1011 & 001 \end{vmatrix}$
6…10	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 011 \\ 0100 & 110 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 111 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 0111 & 100 \\ 1101 & 010 \\ 1011 & 001 \end{vmatrix}$
11…15	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 110 \\ 0100 & 101 \\ 0010 & 111 \\ 0001 & 011 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 1110 & 100 \\ 1011 & 010 \\ 0111 & 001 \end{vmatrix}$
16…20	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 110 \\ 0100 & 111 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 011 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 1110 & 100 \\ 1101 & 010 \\ 0111 & 001 \end{vmatrix}$
21…25	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 101 \\ 0100 & 111 \\ 0010 & 011 \\ 0001 & 110 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 1101 & 100 \\ 0111 & 010 \\ 1110 & 001 \end{vmatrix}$
26…30	$G_{4,7} = \begin{vmatrix} 1000 & 110 \\ 0100 & 011 \\ 0010 & 111 \\ 0001 & 101 \end{vmatrix}$	$H_{3,7} = \begin{vmatrix} 1011 & 100 \\ 1110 & 010 \\ 0111 & 001 \end{vmatrix}$

3 Декодировать синдромным способом кодовую комбинацию, полученную по пункту 2, для случаев внесения одно-, двух- и трехкратных ошибок (искаженные разряды – произвольно).

4 Закодировать разделимым и неразделимым линейным циклическим кодом (9,5) 5-разрядный двоичный код номера варианта и сравнить полученные результаты. Порождающий полином кодов приведен в таблице 11.

Таблица 11 – Исходные данные

Номер варианта	Порождающий полином g(x)
1 – 15	$x^4 + x^3 + 1$
16 – 30	$x^4 + x + 1$

1 Показать результаты выполнения работы преподавателю.
2 Сделать выводы.
3 Составить отчет по работе.

Содержание отчета

1 Наименование и цель работы.
2 Наименование аппаратного и программного обеспечения.
3 Исходные данные для расчетов.
4 Результаты расчетов.
5 Выводы по работе.
6 Ответы на контрольные вопросы (по заданию преподавателя).

Контрольные вопросы

1 Ошибки какой кратности обнаруживает и исправляет код Хэмминга (7,4,3)?

2 Какой способ формирования разрешенных кодовых последовательностей систематических линейных блочных кодов проще осуществить аппаратными средствами?

3 Какой полином называют порождающим?

4 Какое минимальное число разрядов должна иметь разрешенная кодовая комбинация помехоустойчивого кода?

5 От чего зависит корректирующая способность помехоустойчивого кода?

6 Что понимают под разрешенной кодовой комбинацией?

7 Какие существуют методы помехоустойчивого декодирования?

8 В чем заключается синдромное декодирование?

9 Какой полином называют проверочным?

10 Можно ли проводить помехоустойчивое кодирование непрерывных сигналов?

11 Как определяется кратность гарантированно обнаруживаемых кодом ошибок?

12 Выполнение какого условия является необходимым для обнаружения ошибки передачи?

13 Как определяется кратность гарантированно исправляемых кодом ошибок?

14 Какие кодовые комбинации формирует кодер корректирующего кода?

15 Что достаточно знать для определения количества информационных символов в кодовой комбинации линейного циклического кода?

16 Составьте структурную схему кодера кода Хэмминга (7;4), если проверочные разряды формируются следующим образом:

$a_5 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$;

$a_6 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$;

$a_7 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$.

Содержание зачета

Учащемуся необходимо знать ответы на контрольные вопросы, уметь формировать разрешенные кодовые комбинации помехоустойчивых кодов, декодировать принятые кодовые слова при введении ошибок и анализировать результаты.

Литература

1 Ю. С. Шинаков, Ю. М. Колодяжный Теория передачи сигналов электросвязи. – М.: Радио и связь, 1989. – С. 60…67.

2 И. П. Панфилов, В. Е. Дырда Теория электрической связи. – М.: Радио и связь, 1991. – С. 88…92.

3 Л. Л. Клюев Теория электрической связи – Мн: Дизайн ПРО,1998, 2008.

4 С. И. Баскаков Радиотехнические цепи и сигналы – М: Высшая школа, 1988, 2000.

5 В. П. Шувалов, Н. В. Захарченко и др. Передача дискретных сообщений, – М.: Радио и связь, 1990, с.146…155, 254…275.

6 А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк Теория передачи сигналов, – М.: Радио и связь, 1986, с.109…112, 131…158.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О. Г. Локтионова
«28» 08 _________ 2023

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория электросвязи» для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Курск 2023

УДК 654:004.7 (075.8)

Составители: А. А. Чуев, Д. С. Коптев

Рецензент
Доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Основы теории телетрафика: методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория электросвязи» для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А. А. Чуев, Д. С. Коптев. – Курск, 2023. – 72 с.

Методические указания содержит материалы, необходимые для выполнения практических работ по изучению простейших потоков, систем массового обслуживания с ожиданием и отказами, распределения Эрланга для различных систем в теории массового обслуживания, а также задания по выполнению этих работ.

Полученные знания в результате выполнения практических работ дадут возможность сформировать компетенции применения математического аппарата для решения профессиональных задач, планирования и проведения математического моделирования процессов телекоммуникационных систем.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем при изучении дисциплины «Теория электросвязи», а также может использоваться студентами других направлений подготовки и специальностей в области информационных и телекоммуникационных технологий при изучении дисциплин, связанных с расчетами характеристик систем массового обслуживания различных видов в телекоммуникационных системах.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 25.09.23. Формат 60х841/16.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. 3,79. Тираж 100 экз. Заказ 924. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа №1
ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ И ХАРАКТЕРИСТИК ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА..4
Практическая работа №2
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА..10
Практическая работа №3
СУММИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ 31
Практическая работа №4
ИЗУЧЕНИЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.............35
Практическая работа №5
ИССЛЕДОВАНИЕ СМО С ОТКАЗАМИ...52
Практическая работа №6
ИССЛЕДОВАНИЕ СМО С ОЖИДАНИЕМ 55
Практическая работа №7
ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ 61
Практическая работа №8
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ СМО С ОТКАЗАМИ 67
Практическая работа №9
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ 70

Практическая работа №1
ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ И ХАРАКТЕРИСТИК ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

Цель работы: изучить свойства и характеристики пуассоновского (простейшего) потока, сравнить теоретические и модельные значения полученных характеристик.

Краткие теоретические сведения

Простейший поток обладает следующими свойствами: *стационарность, ординарность и отсутствие последействия*.

Свойство *стационарности* означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Поток можно назвать стационарным, если для любого числа k требований, поступивших за промежуток времени длиной Δt, вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени (1).

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t+\Delta t) = P_k(\Delta t)\,, \tag{1}$$

где $P_k(t)$ – вероятность поступления k требований.

Свойство *ординарности* означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая, более высокого порядка, чем Δt, т.е.

$$P_{i\geq 2}(\Delta t) = 0(\Delta t)\,. \tag{2}$$

Свойство *отсутствия последействия* означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления k требований в промежуток $[t_1,t_2]$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1. Для случайного потока без последействия условная вероятность поступления требований в промежутке $[t_1,t_2]$, вычисленная при любых предположениях о течении процесса обслуживания требований до момента t_1, равна безусловной

$$P_i([t_1,t_2]) = P_i([t_1,t_2])\,. \tag{3}$$

К основным характеристикам случайного потока относят ведущую функцию, параметр и интенсивность. Ведущая функция случайного потока $\bar{x}(0,t)$ есть математическое ожидание числа требований в промежутке $[0,t)$. Функция $\bar{x}(0,t)$ – неотрицательная, неубывающая, в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Параметр потока $\lambda(t)$ в момент времени t есть предел отношения вероятности поступления не менее одного требования в промежутке $[t,t+\Delta t]$ к величине этого промежутка Δt при $\Delta t \to 0$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{k\ge1}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Параметр потока определяет плотность вероятности наступления вызывающего момента в момент t. Определение параметра равносильно предположению, что вероятность поступления хотя бы одного требования в промежутке $[t,t+\Delta t]$ с точностью до бесконечно малой величины пропорциональна промежутку и параметру потока $\lambda(t)$:

$$P_{k\ge1}(t,t+\Delta t) = \lambda(t)\Delta t + 0(\Delta t). \tag{5}$$

Для стационарных потоков вероятность поступления требований не зависит от времени, т. е., $P_{k\ge1}(t,t+\Delta t) = P_{k\ge1}(\Delta t)$, поэтому параметр стационарного потока постоянен.

Соответственно получаем

$$P_{k\ge1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + 0(\Delta t). \tag{6}$$

Интенсивность стационарного потока μ есть математическое ожидание числа требований в единицу времени.

Если интенсивность характеризует поток требований, то параметр – поток вызывающих моментов. Поэтому всегда $\mu(t) \ge \lambda(t)$, а равенство имеет место только для ординарных потоков, когда в каждый вызывающий момент поступает только одно требование.

Моделирование простейшего потока

Для простейшего потока требований длины промежутков времени между последовательными требованиями потока $z_i = t_i - t_{i-1} > 0$ распределены по показательному закону с тем же параметром λ:

$$P(z < t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Это утверждение позволяет моделировать простейший поток требований на заданном промежутке времени при помощи метода Монте-Карло, в основе которого лежит следующая теорема.

Если r_i - случайные числа, равномерно распределенные на (0,1), то возможное значение x_i получаемой случайно непрерывной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, соответствующее r_i, является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i \,. \tag{8}$$

Согласно этой теореме для получения последовательности случайных значений z_i, распределенных по показательному закону с параметром λ, требуется для каждого случайного числа $r_i(0,1)$, генерируемого на ПЭВМ датчиком псевдослучайных чисел, решить уравнение

$$1 - e^{-\lambda Z_i} = r_i, i = 1, 2, \ldots \,. \tag{9}$$

Решая это уравнение относительно Z_i , имеем

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i) \tag{10}$$

или

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i, i = 1, 2, \ldots \,. \tag{11}$$

Задание на практическую работу

> **Внимание!** Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.
2. Сгенерировать случайные равномерно распределённые числа $r_i(0,1)$.
3. Вычислить $\lambda = 10 \cdot m / N_n$ (треб/мин); где *Nn* – порядковый номер студента в журнале преподавателя, *m* – сумма всех чисел в шифре группы (например, для группы БТ-61 *m* = 6 + 1 = 7).
4. По формуле $Z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$, где $i = 1,2,\ldots.$, получить Z_i для промежутков между требованиями.

5. На промежутке $[T_1 = N+1, T_2 = N+5]$ мин., получить последовательность t_k моментов поступления требований, где $t_k = T_1 + \sum_{i=1}^{k} Z_i$ до тех пор, пока $t_k \le T_2$.

Полученные результаты занести в таблицу 1.1.

Таблица 1.1 – Результаты полученные в ходе выполнения работы

r_i	Z_i	t_k
r_1	z_1	t_1
r_2	z_2	t_2
...	...	...

6. Провести статистическую обработку полученных результатов, для этого разделить заданный интервал на 25 равных промежутков длиной

$$\tau = \frac{T_2 - T_1}{25} \text{ (мин).}$$

Для каждого промежутка определить $x(\tau)$ – количество требований, попавших в промежуток длиной τ, занести в таблицу 1.2.

Таблица 1.2 – Количество требований, попавших в промежуток длинной τ

№ интервала	1	2	…	25
$x_N(\tau)$				

Из таблицы 1.2 определить параметры статистического распределения случайной величины и занести их в таблицу 3.

Таблица 1.3 – Параметры статистического распределения случайной величины

$x_k(\tau)$	0	1	2	…	k
n_k	n_1	n_2	n_3	...	k

$\sum n_k = N$, где n_k – количество интервалов, в которое попало k требований.

7. Определить модельное значение параметра потока:

$a = \bar{x}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_k x_k(\tau) n_k$ – мат. ожидание числа требований в k интервале, отсюда следует $a = \bar{\lambda}\tau \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{a}{\tau}$.

8. Для заданного (λ) и модельного значения $(\bar{\lambda})$ определить:

а) Вероятность отсутствия требования $P_0(t)$ за промежуток $t = T_2 - T_1$.

б) Вероятность поступления одного требования $P_1(t)$.

в) Вероятность поступления четырёх требований $P_4(t)$.

г) Вероятность поступления не менее пяти требований $P_{\geq 5}(t) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$.

д) Вероятность поступления менее трёх требований $P_{<3}(t) = P_0 + P_1 + P_2$.

е) Вероятность поступления не более семи требований $P_{\leq 7}(t) = P_0 + ... + P_7$.

ж) Вероятность, что промежуток между требованием z_k $P[0{,}1 < z_k < 0{,}5] = F(0{,}5) - F(0{,}1)$.

9. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания

1. По каким свойствам классифицируются случайные потоки?
2. Дать определение свойствам: стационарность, ординарность, отсутствие последействия.
3. Дать определения числовым характеристикам случайных потоков: параметр потока, интенсивность потока, ведущая функция потока.
4. Для каких потоков совпадают значения параметра потока и интенсивности?
5. По какому закону распределён промежуток между соседними требованиями в простейшем потоке?
6. По какому закону распределена случайная величина, характеризующая количество требований простейшего потока, попавших в некоторый промежуток?

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №2
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА

Цель работы: изучение пуассоновского потока и методов аппроксимации теоретическим распределением данных наблюдения за входящим потоком и потоком обслуживания в системах массового обслуживания.

Краткие теоретические сведения

Поток требований называют *однородным*, если:

– все требования потока обслуживаются в системе массового обслуживания одинаково;

– рассмотрение требований (событий) потока, которые по своей природе могут быть различными, ограничивается рассмотрением моментов времени их поступления.

Поток называется *регулярным*, если события в потоке следуют один за другим через интервалы времени одинаковой длительности.

Функция *f(x)* плотности распределения вероятности случайной величины *T*, обозначающей интервал времени между событиями, для регулярного потока имеет вид:

$$f(x) = \delta\left(x - \bar{t}\right)$$

где δ – дельта функция,

$\bar{t}$ – математическое ожидание случайной величины *T*.

Дисперсия интервала между событиями регулярного потока (моментами поступления требований) *D[T]* равна 0, а интенсивность наступления событий в потоке (среднее число требований в единицу времени) λ равна $1/\bar{t}$.

Поток называется *случайным*, если события в потоке следуют один за другим через интервалы времени случайной длительности.

Случайный поток может быть описан как случайный вектор, который, в свою очередь, может быть задан одним из двух способов:

1. Функцией распределения моментов наступления событий $T_1, T_2, ..., T_n$

$$F\left(t_1,t_2,...,t_n\right)=P\left(T_1<t_1,T_2<t_2,...,T_n<t_n\right)$$

где t_i – значение моментов наступления $T_i(i=1,n)$.

2. Функцией распределения интервалов между наступлением последовательных событий $\tau_1, \tau_2,\dots \tau_n$:

$$F\left(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\right)=P\left(\tau_1<\theta_1,\tau_2<\theta_2,...,\tau_n<\theta_n\right),$$

где θ_i – значения интервалов между событиями $\tau_i(i=1,n)$.

В последнем случае моменты наступления событий могут при необходимости быть найдены из рекуррентных соотношений:

$$t_1=t_0+\theta_1,$$

$$t_2=t_1+\theta_2,$$

$$..........,$$

$$t_n=t_{n-1}+\theta_n,$$

где t_0 – момент наступления первого события потока.

Поток называется **стационарным**, если вероятность попадания того или иного числа событий на элементарный участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси t расположен этот участок.

Поток событий называется потоком **без последействия**, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами - стационарностью, отсутствием последействия, ординарностью - называется **простейшим**, или **стационарным пуассоновским** потоком.

Пуассоновский поток событий тесно связан с известным из теории вероятностей распределением Пуассона: число событий потока, попадающих на временной интервал некоторой величины, распределено по закону Пуассона.

Если на временной оси t, где наблюдается поток событий, выделить некоторый участок времени длины τ, начинающийся в момент t_0 и заканчивающийся в момент $t_0 + \tau$, то нетрудно доказать, что вероятность попадания на этот участок ровно m событий выражается формулой:

$$P_m = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

где a – среднее число событий, приходящееся на участок τ,

e – основание натуральных логарифмов (2,71828…),

$$m! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m, & m \geq 1 \\ 1, & m = 1 \end{cases}.$$

Для стационарного (простейшего) пуассоновского потока величина a равна интенсивности потока λ, умноженной на длину интервала:

$$a = \lambda \cdot t$$

где *интенсивность, или плотность потока* λ есть среднее число событий, приходящихся на единичный временной интервал. В зависимости от физической природы изучаемой системы интенсивность может иметь различную размерность, например, чел/мин, руб/день, кг/час, запросов/сек, документов/сутки, отправлений/сутки и т.д.

Функция распределения

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

представляющая собой по определению вероятность того, что случайная величина T (интервал времени между событиями) не превысит значения t, имеет для пуассоновского потока следующий вид:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Такой закон распределения называется *показательным* (или *экспоненциальным*) с плотностью λ. Величина λ называется также *параметром* показательного закона.

Математическое ожидание случайной величины T равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$

а дисперсия составляет

$$D[T] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины T находится как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_T = \sqrt{D[T]} = \frac{1}{\lambda}.$$

Как нетрудно видеть, математическое ожидание величины *T* равно ее среднеквадратическому отклонению, что является характерной особенностью экспоненциального распределения.

Таким образом, вероятность появления *m* событий в заданном промежутке времени описывается *пуассоновским* распределением, а вероятность того, что временные интервалы между событиями потока не превзойдут некоторого наперед заданного значения, описывается *экспоненциальным* распределением. Это различные описания одного и того же стохастического процесса.

Пример

По шоссе мимо наблюдателя движется в одном направлении простейший поток машин. Известно, что вероятность отсутствия машин в течение 5 минут равна 0,5. Требуется найти вероятность того, что за 10 минут мимо наблюдателя пройдет не более двух машин.

Решение. Примем за единицу времени 5 мин. В задаче требуется найти

$$P(m \geq 2) = \sum_{i=0}^{2} P(m=i) = \frac{(2\lambda)^0}{0!}e^{-2\lambda} + \frac{(2\lambda)^1}{1!}e^{-2\lambda} + \frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-2\lambda} = (1+2\lambda+2\lambda^2)e^{-2\lambda}$$

По условию задачи

$$P(m=0) = \frac{(\lambda)^2}{1!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0{,}5$$

Откуда $\lambda = -\ln 0{,}5 = \ln 2 \approx 0{,}693$ *и, подставляя в выражение для* $P(m \leq 2)$, *получаем* $P(m \leq 2) \approx 0{,}837$.

Весьма распространенными на практике являются случаи, когда нескольких простейших потоков соединяются в один или, наоборот, из одного простейшего потока образуются несколько. При *слиянии (объединении, суперпозиции)* n независимых простейших потоков с интенсивностями $\lambda 1,...,\lambda n$ образуется простейший поток, имеющий интенсивность $\lambda=\lambda 1+...+\lambda n$.

При *ветвлении (разъединении)* потока интенсивности λ на n направлений так, что вероятности перехода заявки в каждое из направлений равны $p_1, p_2, ..., p_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, образуется *n* простейших потоков с интенсивностями $\lambda_{p1}, ..., \lambda_{pn}$ соответственно.

Любое исследование системы массового обслуживания начинается с изучения того, что необходимо обслуживать, иначе говоря, с изучения характеристик входящего потока заявок. В нетривиальных случаях требуется также обследование самой системы массового обслуживания с целью нахождения характеристик обслуживания, (потока обслуживания). Решение задач анализа и проектирования систем массового обслуживания намного упрощается в случаях, когда входящий поток и поток обслуживания являются простейшими (пуассоновскими).

Задание на практическую работу

> **Внимание!** Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.

2. Провести анализ данных наблюдения двух потоков в системе массового обслуживания:

а) входящего потока, где данные представляют собой число появления требований в единицу времени;

б) потока обслуживания, где данные представляют собой число требований, обслуженных в интервале наблюдения.

Исходные наблюдений входящего потока и потока обслуживания приведены в приложениях В и Г.

3. Определить параметры потока (плотность и среднее время интервала поступления или обслуживания заявок).

4. Дать заключение о возможности отнесения потока к пуассоновскому потоку (таблица χ^2 приводится в приложении Б).

5. Для каждого потока построить диаграммы с теоретическими и экспериментальными значениями. Для входящего потока строится гистограмма вероятности появления определенного числа требований в единицу времени. Для выходящего потока (потока обслуживания) – график функции распределения длительности обслуживания.

6. Оформить отчет по практическому занятию и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

Внимание! Отчет должен содержать исходные данные по каждому потоку, промежуточные данные расчетов, значения показателей потоков, наблюдаемые и табличные значения χ^2, вывод о принятии или отбрасывании гипотезы пуассоновского (экспоненциального) распределения потока, диаграммы теоретических и экспериментальных значений.

Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое пуассоновский поток?
2. Как записывается и что позволяет найти формула Пуассона?
3. Какому закону распределения подчиняются интервалы между поступлением отдельных заявок потока?
4. Как найти вероятность того, что в течение определенного интервала поступит не более определенного числа требований?
5. Чему равно математическое ожидание интервала времени между событиями в пуассоновском потоке?
6. Чему равно среднеквадратическое отклонение интервала времени между событиями в пуассоновском потоке?
7. В каких целях проводится аппроксимация экспериментальных данных относительно потока заявок и времени обслуживания в системе массового обслуживания теоретической зависимостью?
8. Из каких основных шагов состоит построение теоретической зависимости?
9. Зачем нужно проводить оценку статистической значимости результата?
10. Что будет являться результатом слияния двух пуассоновских потоков?
11. Какие потоки получаются при ветвлении пуассоновского потока на несколько потоков?

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Приложение А
Пример выполнения практического задания

Пример анализа данных наблюдения входящего потока

Предположим, что проводилось наблюдение за потоком посетителей в отделении банка в течение 10 дней его работы. Результаты почасового наблюдения представлены в нижеследующей таблице А.1.

Таблица А.1 – Результаты почасового наблюдения (входящего потока)

Часы / Дни	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Определим интенсивность входящего потока покупателей за час работы отделения и, используя критерий Пирсона с уровнем значимости α=0,05, подвергнем проверке гипотезу о том, что поток описывается пуассоновским законом распределения.

Решение.

1. Сгруппируем данные по числу клиентов банка k, посетивших отделение в течение часа, а результаты представим в виде таблицы А.2.

Таблица А.2 – Группировка исходных данных по числу клиентов в течении часа

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1

Для автоматизированного подсчета частот *fk* по данным, представленным в исходной таблице использовали функцию СЧЕТЕСЛИ приложения Excel.

2. Находим интенсивность потока λ:

$$\lambda = \bar{k} = \frac{\sum_{k=1}^{8} k \cdot f_k}{\sum_{k=1}^{8} f_k} = \frac{279}{80} = 3,49.$$

В приложении Excel для удобства вычисления интенсивности, предварительно подсчитали в ячейках отдельной строки входящие в числитель выражения для λ произведения $k \cdot f_k$

Таблица А.3 – Вычисление интенсивности потока λ

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
$\boldsymbol{f_k}$	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$\boldsymbol{k \cdot f_k}$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**

3. По формуле

$$f_k^T = N \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } N = \sum_{k=1}^{8} f_k = 80$$

находим и заносим в строку f^T теоретические значения частот.

Таблица А.4 – Расчет теоретических значений частот

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
$\boldsymbol{f_k}$	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$\boldsymbol{k \cdot f_k}$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**
$\boldsymbol{f^T}$	8.53	14.88	17.29	15.08	10.52	6.11	3.05	1.33	0.51	

4. Вычислим и занесем в строку таблицы значения $\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$, стоящие в числителе выражения под знаком суммы в формуле $\chi^2_{набл} = \sum_{k=1}^{8} \frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$ для наблюдаемого значения критерия Пирсона (таблица А.5).

Таблица А.5 – Расчет наблюдаемого значения критерия Пирсона

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$k \cdot f_k$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**
f^T	8.53	14.88	17.29	15.08	10.52	6.11	3.05	1.33	0.51	
$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$	3.59	1.14	1.88	2.33	1.94	0.73	0.36	0.08	0.46	**12,51**

В результате получаем наблюдаемое значение $\chi^2_{набл} = 12{,}51$

5. По заданному уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы $\upsilon = n$-2, где n – число групп в ряду (в нашем случае n=9) по таблице значений критических точек χ^2 распределения находим

$$\chi^2_{кр}\left(\alpha,\upsilon\right) = \chi^2_{кр}\left(0{,}05{,}7\right) = 14{,}07$$

6. Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{табл}$ (12,51 < 14,07) не отвергаем гипотезу о том, что входящий поток описывается пуассоновским законом распределения с интенсивностью λ=3,49 час$^{-1}$.

Вид теоретической и экспериментальной зависимостей для рассмотренного примера показан на построенной средствами Excel диаграмме (рисунок А.1).

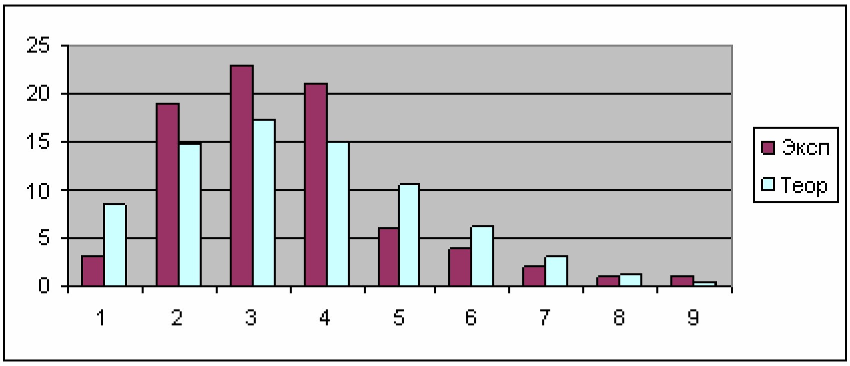


Рисунок А.1 – Теоретические и экспериментальные частоты

Пример анализа данных наблюдения потока обслуживания.

Предположим, что проводилось наблюдение за временем обслуживания клиентов отделения банка кассиром, в результате чего получена таблица для частот интервалов следующего вида (таблица А.6).

Таблица А.6 – Результаты наблюдения обслуживания требований

	tмин	*tмакс*	*f*
1	0	5	27
2	5	10	23
3	10	15	18
4	15	20	11
5	20	25	8
6	25	30	3

Определим среднее время $\bar{t}_s$ и интенсивность μ обслуживания клиентов банка, после чего обоснуем с уровнем значимости α=0,05 гипотезу о том, что время $\bar{t}_s$ распределено по показательному закону, используя для этого критерий Пирсона.

1. Находим среднее значение каждого временного интервала по формуле:

$$\overline{t_k} = \frac{t_k^{\min} + t_k^{\max}}{2}, k = 1, 2, ..., 6$$

Значения заносим в столбец, добавляемый к таблице справа (таблица А.7).

Таблица А.7 – Расчет среднего значение временного интервала

	tмин	*tмакс*	*f*	$\bar{t}_s$
1	0	5	27	2.5
2	5	10	23	7.5
3	10	15	18	12.5
4	15	20	11	17.5
5	20	25	8	22.5
6	25	30	3	27.5

2. Находим среднее время $\bar{t}_s$

$$\bar{t}_s = \frac{\sum_{k=1}^{6} \bar{t}_k \cdot f_k}{\sum_{k=1}^{6} f_k} = 10,22 \text{ мин}$$

и интенсивность μ обслуживания $\mu = \frac{1}{\bar{t}_s} = 0,10$ мин$^{-1}$

Для удобства вычисления среднего времени, предварительно подсчитаем в ячейках отдельного столбца входящие в выражение для среднего времени произведения $k \cdot f_k$ (таблица А.8).

Таблица А.8

	tмин	*tмакс*	f	$\bar{t}_k$	$k \cdot f_k$
1	0	5	27	2.5	67.5
2	5	10	23	7.5	173
3	10	15	18	12.5	225
4	15	20	11	17.5	193
5	20	25	8	22.5	180
6	25	30	3	27.5	82.5
Σ			90		

3. По формуле $f_k^T = N\left(e^{-\mu \cdot t_k^{\min}} - e^{-\mu \cdot t_k^{\max}}\right)$, где $N = \sum_{k=1}^{6} f_k = 90$ находим теоретические частоты (таблица А.9).

Таблица А.9 – Расчет теоретических частот

	tмин	*tмакс*	f	$\bar{t}_k$	$k \cdot f_k$	f^T
1	0	5	27	2.5	67.5	34.82
2	5	10	23	7.5	173	21.35
3	10	15	18	12.5	225	13.09
4	15	20	11	17.5	193	8.03
5	20	25	8	22.5	180	4.92
6	25	30	3	27.5	82.5	3.02
Σ			90			

4. Вычислим и занесем в отдельный столбец таблицы значения $\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$ входящие в выражение под знаком суммы в формуле $\chi^2_{набл} = \sum_{k=1}^{6} \frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$ для наблюдаемого значения критерия Пирсона (таблица А.10).

Таблица А.10 – Расчет наблюдаемого значения критерия Пирсона

	tмин	*tмакс*	f	$\bar{t}_k$	$k \cdot f_k$	f^T	$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$
1	0	5	27	2.5	67.5	34.82	1.7545
2	5	10	23	7.5	173	21.35	0.1279
3	10	15	18	12.5	225	13.09	1.8422
4	15	20	11	17.5	193	8.03	1.1021
5	20	25	8	22.5	180	4.92	1.9262
6	25	30	3	27.5	82.5	3.02	0.0001
Σ			90				6.75

В результате получаем $\chi^2_{набл} = 6,75$.

5. По заданному уравнению значимости α=0,05 и числу степеней свободы υ = *n-2*, где *n* – число групп в ряду (в нашем случае *n*=6) в таблице значений критических точек χ^2 распределения находим

$$\chi^2_{кр}(\alpha,\upsilon) = \chi^2_{кр}(0,05,4) = 9,49$$

6. Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{табл}$ (6,75 < 9,49) не отвергаем гипотезу о том, что время обслуживания клиентов описывается экспоненциальным законом распределения с интенсивностью $\mu = 0,10$ мин$^{-1}$.

Вид теоретической и экспериментальной зависимостей для рассмотренного примера показан на диаграмме (рисунок А.2).

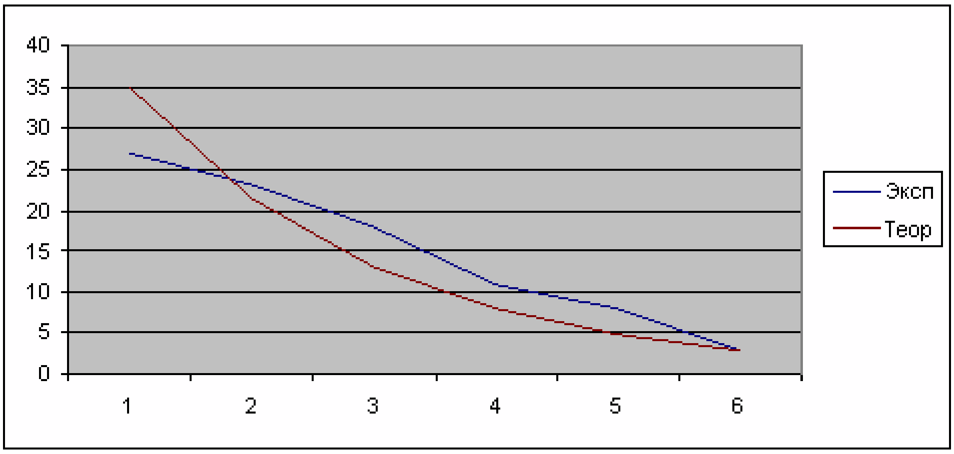


Рисунок А.2 – Теоретические и экспериментальные частоты

Приложение Б
Критические точки распределения χ^2

Справочная информация: для любого значения уровня значимости α χ^2 можно найти с помощью функции электронных таблиц:

=ХИ2ОБР(α; υ)

Таблица Б.1 – Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы υ	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21 .0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Приложение В
Исходные данные (входящие поток)

Вариант №1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	5	4	3	5	5	3	7
2	7	4	3	3	2	4	5	5
3	7	3	1	5	8	5	6	3
4	2	7	4	5	6	3	2	3
5	5	2	5	2	1	3	2	4
6	4	4	2	2	4	4	2	1
7	3	4	5	4	1	5	2	4
8	5	1	5	7	3	4	5	5
9	7	4	3	4	7	4	4	3
10	3	5	5	2	4	3	3	5

Вариант №2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	6	3	5	11	6	4
2	3	4	5	4	3	8	4	2
3	2	3	4	5	4	5	6	5
4	4	5	3	10	5	3	4	2
5	3	2	9	5	4	4	5	3
6	5	3	5	12	5	3	2	7
7	2	5	8	4	7	5	6	4

Вариант №3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	7	3	5	11	6	4
2	3	5	5	4	10	8	4	2
3	2	4	4	5	4	5	6	5
4	5	5	3	10	5	3	4	2
5	3	2	8	5	4	4	5	3
6	5	3	5	11	5	4	2	7
7	2	5	8	4	7	5	6	4
8	1	4	8	9	7	10	6	5
9	3	5	2	4	8	5	6	4

Вариант №4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	8	3	3	7	5	4
2	5	3	5	4	9	5	4	2
3	4	2	3	5	4	4	6	5
4	5	5	4	10	5	3	4	2
5	2	3	4	5	4	8	5	3
6	3	5	5	11	5	5	2	7
7	5	2	10	4	7	8	6	4
8	4	1	11	9	7	8	6	5

Вариант №5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	5	1	1	2	2
2	0	1	1	1	0	0	1	1
3	1	3	1	2	0	1	1	2
4	1	0	3	1	0	1	3	4
5	1	1	2	1	2	6	1	1
6	0	1	2	1	2	0	1	1
7	0	0	4	1	0	1	3	4

Вариант №6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	1	2	2	0	5
2	1	1	1	1	0	1	2	1
3	3	1	7	2	5	1	0	1
4	1	1	1	1	0	1	2	2
5	1	3	3	1	2	2	2	2
6	4	4	2	1	3	2	2	1
7	1	1	2	1	0	0	3	5

Вариант №7

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	2	0	2	2	4	2	1
2	2	3	3	2	1	2	1	4
3	1	2	1	1	1	5	4	1
4	3	2	2	1	2	2	0	1
5	1	4	2	2	0	1	0	2
6	2	7	2	3	1	0	2	6
7	1	6	1	1	2	2	1	1
8	3	3	3	1	2	0	2	2

Вариант №8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	4	1	3	2	4	5
2	2	0	2	3	3	2	1	2
3	2	5	4	0	5	0	1	2
4	6	4	1	3	6	5	3	4
5	8	3	3	2	3	4	0	7
6	1	2	3	4	3	3	0	2
7	2	3	4	7	0	2	2	2
8	4	1	3	5	0	4	3	3

Вариант №9

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	0	1	5	2
2	3	7	3	4	2	7	3	3
3	2	2	3	6	3	4	3	5
4	5	4	4	2	6	5	6	2
5	4	2	1	6	2	3	1	5
6	3	1	3	6	6	5	3	2
7	4	3	5	2	5	3	5	1
8	7	3	8	3	4	8	4	2

Вариант №10

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	0	1	5	2
2	3	7	3	4	2	7	3	3
3	2	2	3	6	3	4	3	5
4	5	4	4	2	6	5	6	2
5	4	2	1	6	2	3	1	5
6	3	1	3	6	6	5	3	2
7	4	3	5	2	5	3	5	1
8	7	3	8	3	4	8	4	2

Вариант №11

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	2	4	4	4	5	2	6
2	1	1	3	4	3	3	3	4
3	0	1	6	2	3	3	2	3
4	4	1	5	4	2	5	2	2
5	4	1	4	4	3	4	3	4
6	4	4	3	3	2	3	3	3
7	1	3	6	2	2	1	3	2
8	3	2	2	3	1	2	2	3

Вариант №12

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	4	5	1	2	7	2
2	1	2	3	2	2	5	1	0
3	2	0	2	3	2	4	1	6
4	0	4	2	4	6	2	1	1
5	2	2	2	4	1	5	2	1
6	4	1	1	2	4	2	1	3
7	4	2	3	1	2	2	2	1
8	0	1	1	2	1	0	2	1

Вариант №13

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	4	5	2	3	5	1
2	2	5	7	1	1	3	1	5
3	2	1	6	1	4	1	4	1
4	3	2	4	1	1	1	3	2
5	5	2	5	4	1	1	2	3
6	2	3	5	3	2	2	6	2
7	1	5	1	2	0	3	1	0
8	1	3	1	3	3	2	2	2

Вариант №14

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	4	3	1	2	2
2	2	3	1	1	3	1	2	3
3	2	2	3	3	4	2	1	2
4	2	5	1	0	1	1	5	1
5	2	2	0	2	2	2	2	2
6	1	3	3	1	0	0	0	1
7	1	1	3	1	0	0	4	4
8	1	2	2	2	3	3	2	2

Вариант №15

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	3	2	2	2	0
2	2	2	3	1	3	0	1	3
3	3	1	5	3	0	1	0	5
4	1	2	1	2	1	3	3	1
5	2	3	1	5	3	5	3	0
6	1	4	1	1	3	3	2	1
7	2	1	3	2	1	4	2	3
8	3	2	2	1	1	0	3	2

Вариант №16

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	3	5	4	2	5	2
2	2	0	2	2	2	1	2	1
3	1	3	1	0	1	2	5	2
4	2	2	0	4	1	1	1	2
5	1	0	3	1	3	2	1	0
6	1	3	2	4	4	2	2	0
7	2	3	2	3	5	4	0	3
8	5	2	1	2	3	6	5	1

Вариант №17

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	2	4	3	2
2	0	3	2	2	1	3	3	1
3	3	2	1	0	2	0	3	1
4	6	0	1	2	2	0	0	1
5	0	1	2	1	2	3	0	2
6	0	1	2	1	2	2	2	0
7	1	4	1	1	0	1	1	1
8	6	3	3	3	2	3	2	0

Вариант №18

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	6	3	3	1	3	2	1
2	3	1	5	4	1	4	2	1
3	1	4	1	2	2	4	1	0
4	1	2	3	2	0	2	1	2
5	0	2	2	1	3	4	2	2
6	2	3	3	2	2	2	7	4
7	2	1	3	2	4	2	5	1
8	1	1	1	8	6	1	3	2

Вариант №19

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	0	3	3	2	4	4
2	3	2	2	6	6	0	2	1
3	2	2	6	3	0	2	0	4
4	2	3	4	1	4	1	2	2
5	3	2	1	3	2	0	5	4
6	3	2	2	3	2	0	5	1
7	2	4	3	2	4	4	7	3
8	2	3	0	2	8	3	2	1

Вариант №20

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3	5	3	5	3	3	3
2	3	4	3	2	4	1	5	2
3	1	4	4	2	2	4	4	4
4	2	2	4	2	2	1	3	2
5	1	4	3	1	2	3	2	3
6	2	3	4	3	4	4	3	4
7	2	2	2	3	0	5	3	4
8	6	3	6	4	5	3	4	3

Вариант №21

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	3	5	3	5	3	4	1
2	2	3	4	3	4	3	2	5
3	6	5	2	2	2	1	5	7
4	5	7	5	3	2	5	5	3
5	0	3	9	4	6	3	1	7
6	1	2	5	7	2	3	4	3
7	5	5	3	3	3	4	4	8
8	5	4	6	3	1	9	5	9

Вариант №22

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	2	5	4	3	1	6
2	1	2	2	0	1	1	2	2
3	4	2	1	5	3	1	0	3
4	7	6	2	4	2	1	4	0
5	3	2	4	5	2	4	4	5
6	2	6	1	2	1	3	2	4
7	4	7	3	1	6	3	2	6
8	4	1	2	2	1	3	0	4

Вариант №23

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	2	2	1	1	2	0
2	1	6	3	1	7	2	1	1
3	5	3	4	3	3	2	1	3
4	2	1	3	2	1	4	3	4
5	3	4	4	1	1	5	0	4
6	3	1	3	3	2	0	5	3
7	5	4	5	1	3	0	1	1
8	6	4	2	4	5	5	1	4

Вариант №24

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	0	1	3	1	0	0
2	1	2	1	1	1	4	0	1
3	5	4	7	1	6	0	2	5
4	3	1	2	2	1	3	3	2
5	2	4	5	2	1	0	2	4
6	2	1	5	2	3	1	0	5
7	0	2	2	1	4	2	3	2
8	0	2	6	1	8	1	2	3

Вариант №25

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	2	3	1	4	3	1
2	4	5	5	2	2	2	2	0
3	2	2	5	2	3	0	2	3
4	5	4	2	1	2	0	3	2
5	2	5	3	2	1	2	0	0
6	4	2	1	3	2	2	4	2
7	2	5	1	3	4	4	3	4
8	3	0	0	3	2	1	4	2

Приложение Г
Исходные данные (поток обслуживания)

Вариант №1

	tмин	tмакс	f
1	0	1,87	50
2	1,87	3,74	17
3	3,74	5,6	20
4	5,6	7,46	8
5	7,46	9,32	3
6	9,32	11,18	1

Вариант №2

	tмин	tмакс	f
1	0	8,6	98
2	8,6	17,2	43
3	17,2	25,8	5
4	25,8	34,4	3
5	34,4	43	1
6	43	51,6	1

Вариант №3

	tмин	tмакс	f
1	0	9,52	94
2	9,52	19,05	38
3	19,05	28,57	10
4	28,57	38,09	3
5	38,09	47,62	2
6	47,62	57,14	3

Вариант №4

	tмин	tмакс	f
1	0	5,29	170
2	5,29	10,58	64
3	10,58	15,87	20
4	15,87	21,16	6
5	21,16	26,45	3
6	26,45	31,75	3

Вариант №5

	tмин	tмакс	f
1	0	6,35	144
2	6,35	12,7	49
3	12,7	19,05	14
4	19,05	25,4	4
5	25,4	31,75	2
6	31,75	38,09	3

Вариант №6

	tмин	tмакс	f
1	0	11,64	142
2	11,64	23,28	44
3	23,28	34,92	16
4	34,92	46,56	5
5	46,56	58,2	3
6	58,2	69,84	3

Вариант №7

	tмин	tмакс	f
1	0	12,7	224
2	12,7	25,4	76
3	25,4	38,09	43
4	38,09	50,79	8
5	50,79	63,49	4
6	63,49	76,19	3

Вариант №8

	tмин	tмакс	f
1	0	15,87	212
2	15,87	31,75	56
3	31,75	47,62	29
4	47,62	63,49	9
5	63,49	79,36	4
6	79,36	95,24	3

Вариант №9

	tмин	tмакс	f
1	0	8,47	124
2	8,47	16,93	70
3	16,93	25,4	33
4	25,4	33,86	7
5	33,86	42,33	3
6	42,33	50,79	3

Вариант №10

	tмин	tмакс	f
1	0	4,65	39
2	4,65	9,31	16
3	9,31	13,96	7
4	13,96	18,62	1
5	18,62	23,27	0
6	23,27	27,93	1

Вариант №11

	tмин	tмакс	f
1	0	7,94	89
2	7,94	15,87	38
3	15,87	23,81	10
4	23,81	31,75	3
5	31,75	39,68	2
6	39,68	47,62	3

Вариант №12

	tмин	tмакс	f
1	0	5,82	137
2	5,82	11,64	49
3	11,64	17,46	17
4	17,46	23,28	6
5	23,28	29,1	3
6	29,1	34,92	3

Вариант №13

	tмин	tмакс	f
1	0	6,24	142
2	6,24	12,49	48
3	12,49	18,73	16
4	18,73	24,97	4
5	24,97	31,22	3
6	31,22	37,46	3

Вариант №14

	tмин	tмакс	f
1	0	16,72	131
2	16,72	33,44	54
3	33,44	50,16	31
4	50,16	66,88	4
5	66,88	83,6	3
6	83,6	100,32	3

Вариант №15

	tмин	tмакс	f
1	0	4,97	172
2	4,97	9,95	51
3	9,95	14,92	18
4	14,92	19,89	6
5	19,89	24,87	4
6	24,87	29,84	3

Вариант №16

	tмин	tмакс	f
1	0	14,83	42
2	14,83	29,66	18
3	29,66	44,49	1
4	44,49	59,32	1
5	59,32	74,15	1
6	74,15	88,98	1

Вариант №17

	tмин	tмакс	f
1	0	7,93	30
2	7,93	15,86	17
3	15,86	23,78	10
4	23,78	31,71	6
5	31,71	39,64	0
6	39,64	47,57	1

Вариант №18

	tмин	tмакс	f
1	0	4,06	36
2	4,06	8,11	16
3	8,11	12,17	4
4	12,17	16,23	6
5	16,23	20,28	1
6	20,28	24,34	1

Вариант №19

	tмин	tмакс	f
1	0	8,74	34
2	8,74	17,47	17
3	17,47	26,21	5
4	26,21	34,95	4
5	34,95	43,69	2
6	43,69	52,42	2

Вариант №20

	tмин	tмакс	f
1	0	10,14	49
2	10,14	20,28	9
3	20,28	30,41	6
4	30,41	40,55	2
5	40,55	50,69	0
6	50,69	60,83	1

Вариант №21

	tмин	tмакс	f
1	0	7,76	33
2	7,76	15,52	12
3	15,52	23,28	11
4	23,28	31,04	5
5	31,04	38,8	2
6	38,8	46,56	1

Вариант №22

	tмин	tмакс	f
1	0	9,44	37
2	9,44	18,89	20
3	18,89	28,33	5
4	28,33	37,78	0
5	37,78	47,22	1
6	47,22	56,67	1

Вариант №23

	tмин	tмакс	f
1	0	3,55	22
2	3,55	7,09	20
3	7,09	10,64	12
4	10,64	14,18	6
5	14,18	17,73	2
6	17,73	21,27	2

Вариант №24

	tмин	tмакс	f
1	0	7,75	42
2	7,75	15,5	12
3	15,5	23,25	4
4	23,25	31,01	2
5	31,01	38,76	0
6	38,76	46,51	1

Вариант №25

	tмин	tмакс	f
1	0	2,72	28
2	2,72	5,44	17
3	5,44	8,15	5
4	8,15	10,87	6
5	10,87	13,59	6
6	13,59	16,31	2

Практическая работа №3
СУММИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ

Цель работы: исследовать сумму двух простейших потоков и определить характеристики результирующего потока.

Краткие теоретические сведения

Суммирование и разъединение простейших потоков

При объединении нескольких независимых простейших потоков образуется простейший поток с параметром, равным сумме параметров исходных потоков. При разъединении поступающего простейшего потока с параметром λ на n направлений так, что каждое требование исходного потока с вероятностью $P_i \left(\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \right)$ поступает на i-е направление, поток i-го направления также будет простейшим с параметром λP_i. Эти свойства простейшего потока широко используются на практике, поскольку значительно упрощают расчёты стационарного оборудования и информационных сетей.

Экспериментальная проверка соответствия реального потока простейшему

В простейшем потоке промежутки z между соседними требованиями распределены по показательному (экспоненциальному) закону с параметром λ: $p(t) = e^{-\lambda t}$.

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение промежутка z:

$$M_z = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda;$$

$$D_z = \int_0^\infty t^2 p(t)dt - M^2 z = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2;$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = 1/\lambda.$$

Полученное совпадение величин M_z и σ_z характерно для показательного распределения. Это свойство на практике используют как критерий для первоначальной проверки соответствия гипотезы о показательном распределении полученным статистическим данным.

Другой способ проверки основывается на том, что количество требований простейшего потока, попавших в интервал времени *t*, описывается распределением Пуассона:

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Определим математическое ожидание M_i и дисперсию D_i числа требований за промежуток *t*:

$$M_i = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda t)^i / i! = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda t)^r / r! = \lambda t\ ;$$

$$D_i = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P_i(t) - M^2 i = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\lambda t)^i / i! – (\lambda t)^2 = \lambda t\ .$$

Совпадение математического ожидания и дисперсии числа требований за промежуток *t* означает соответствие реального потока простейшему. Допустим, для некоторого реального потока получен ряд чисел x_1, x_2, ..., x_n, характеризующий число требований, поступающих в *n* промежутков длиной *t*. Обычно принимают t =15 мин. Рассчитываются среднее значение и несмещенная оценка дисперсии величины *x*:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j / n\ ;$$

$$D_x = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 / (n-1)\ .$$

В зависимости от степени совпадения величин $\bar{x}$ и D_x делается вывод о приемлемости модели простейшего потока.

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.
2. Промоделировать два простейших потока с $\lambda = 9\frac{m}{N_n}$ и $\lambda = 13\frac{m}{N_n}$,

где *m* – сумма всех цифр в шифре группы, N_n – порядковый номер студента в журнале преподавателя. Моделирование провести аналогично моделированию простейшего потока в практической работе «Изучение свойств и характеристик пуассоновского потока» (задания 2-6). Полученные данные занести в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты моделирования простейших потоков

№ интервала	1	…	25
$x_1(\tau)$			
$x_2(\tau)$			
$x(\tau)$			

3. Получить суммарный поток, складывая $x(\tau)$ соответствующих интервалов. Построить графики $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x(n)$, где n – номер интервала, x_1, x_2, x – количество вызовов, попавших в интервал для I, II и суммарного потока соответственно.

4. Используя методику, описанную в задании 7 практической работы «Изучение свойств и характеристик пуассоновского потока», получить $\lambda_{сум}$ модельное для суммарного потока $x(n)$.

5. Сравнить полученное значение $\lambda_{сум}$ и $\lambda_1 + \lambda_2$.

6. Рассчитать оценки дисперсии и математического ожидания случайной величины $x(\tau)$ – количество вызовов суммарного потока, попавших в интервал τ.

7. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

> **Внимание!** Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. По каким свойствам классифицируются случайные потоки?
2. Дать определение свойствам: стационарность, ординарность, отсутствие последействия.
3. Дать определения числовым характеристикам случайных потоков: параметр потока, интенсивность потока, ведущая функция потока.
4. Какой поток образуется при объединении n простейших потоков?
5. Чему равны параметры потоков, образовавшихся при разъединении простейшего потока?
6. Какой способ проверки соответствия реального потока простейшему, используют:

а) если измерены промежутки между требованиями потока;

б) если подсчитано число требований, попавших в промежутки равной длины.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №4
ИЗУЧЕНИЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Цель работы: изучение аналитических методов описания марковских случайных процессов.

Краткие теоретические сведения

Пусть имеется некоторая система S, состояние которой меняется с течением времени (под системой S может пониматься техническое устройство, производственный процесс, вычислительная машина, информационная сеть и т. д.). Если состояние системы S меняется во времени случайным, заранее непредсказуемым образом, говорят, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *марковским* (или «процессом без последействия»), если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t>t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Марковский случайный процесс (цепь Маркова) можно определить также как последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-ом испытании наступит событие A_j при условии, что в $(s-1)$-ом испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предшествующих испытаний. Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются *состояниями системы*, а испытания – *изменениями состояний системы*.

Марковские случайные процессы делятся на классы. Основными классифицирующими признаками являются:

– множество состояний, в которых может находиться система,

– моменты времени, в которых происходит изменение состояния системы.

Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если возможные состояния системы $S_1, S_2, S_3, \ldots$ можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система S скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Кроме процессов с дискретными состояниями существуют случайные процессы с *непрерывными состояниями*: для этих процессов характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние. Например, процесс изменения напряжения в осветительной сети представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots,$ то марковский процесс относится к *процессам с дискретным временем*. В противном случае имеет место *процесс с непрерывным временем*.

Анализ случайных процессов с дискретными состояниями обычно проводится с помощью *графа состояний и переходов (ГСП)*.

Пусть имеется система S с n дискретными состояниями:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_n.$$

Каждое состояние изображается прямоугольником, а возможные переходы («перескоки») из состояния в состояние – стрелками, соединяющими эти прямоугольники. Удобно также пользоваться размеченным графом, который графически изображает не только возможные состояния системы и возможные переходы из состояния в состояние, но также и значения вероятностей перехода.

Примеры ГСП показаны на рисунке 4.1.

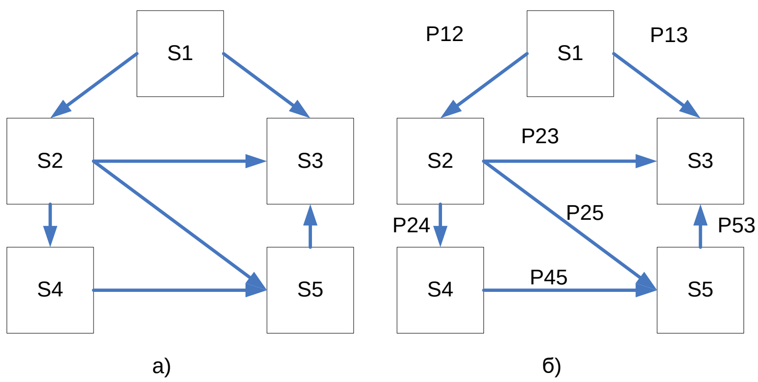


Рис.4.1. Примеры графа состояний и переходов

Графу системы, содержащему n вершин, можно поставить в соответствие матрицу $n \times n$, элементами которой являются вероятности переходов p_{ij} между вершинами графа, называемую *матрицей вероятностей переходов*. Элементы матрицы p_{ij} удовлетворяют условиям:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{2}$$

Условие (1) – обычное свойство вероятностей, а условие (2) означает, что система *S* обязательно либо переходит из какого-то состояния S_i в другое состояние, либо остается в состоянии S_i. Элементы p_{ij} матрицы *P* обозначают вероятности переходов в системе за один шаг.

Обычно на графе вероятности перехода системы из одного состояния в то же самое не отмечаются. При рассмотрении конкретных систем удобно сначала построить граф состояний, затем определить вероятность переходов системы из одного состояния в то же самое (исходя из требования равенства единице суммы элементов строк матрицы), а потом составить матрицу переходов системы.

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Пусть система S может находиться в состояниях:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n,$$

и изменения состояния системы возможны только в моменты:

$$t_1, t_2, t_3, \dots t_n.$$

Будем называть эти моменты *шагами*, или *этапами* процесса и рассматривать протекающий в системе *S* случайный процесс как функцию целочисленного аргумента $m = 1,2,...k,...$, обозначающего номер шага.

Указанный случайный процесс состоит в том, что в последовательные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ система *S* оказывается в тех или иных состояниях. Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность (цепочку) событий, например, $S_1^{(1)}, S_2^{(2)}, ..., S_i^{(i)}, ..., S_n^{(n)}$, называемую *марковской цепью*, где для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i.

Марковскую цепь можно описать с помощью вероятностей состояний, в которых находится система на каком-то шаге. Пусть в любой момент времени (после любого шага) система может пребывать в одном из состояний:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n,$$

т. е., в результате шага k осуществится одно из полной группы несовместных событий:

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}.$$

Обозначив вероятности этих событий для k-го шага через

$$p_1(k) = p\left(S_1^{(k)}\right), p_2(k) = p\left(S_2^{(k)}\right), \dots, p_i(k) = p\left(S_i^{(k)}\right), \dots, p_n(k) = p\left(S_n^{(k)}\right),$$

легко видеть, что для каждого шага k

$$p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_i(k) + \dots + p_n(k) = 1,$$

поскольку $p_i(k), i = \overline{1,n}$ представляют собой вероятности появления полной группы событий.

Вероятности $p_i(k), i = \overline{1,n}$ называются *вероятностями состояния*.

Для любого шага (момента времени $t_1, t_2, \dots t_k, \dots$ или номера $1, 2, \dots, k, \dots$) существуют некоторые вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое (некоторые из них равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен), а также вероятность задержки системы в данном состоянии. Эти вероятности называются *переходными вероятностями марковской цепи*.

Если значения переходных вероятностей не зависят от номера шага, то марковская цепь называется *однородной*, или *стационарной*. В противном случае марковская цепь является *неоднородной*, или *нестационарной*.

Для графа (рис.4.1) значения переходных вероятностей p_{ij} будут равны:

$$p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13})$$

$$p_{22} = 1 - (p_{23} + p_{24} + p_{25})$$

$$p_{33} = 1$$

$$p_{44} = 1 - p_{45}$$

$$p_{55} = 1 - p_{53}$$

Если из состояния S_i не исходит ни одной стрелки (переход из него ни в какое другое состояние невозможен), соответствующая вероятность задержки P_{ii} равна единице.

Имея в распоряжении размеченный ГСП (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и зная начальное состояние системы, можно найти вероятности состояний $p_1(k), p_2(k), \ldots p_n(k)$ после любого (k-го) шага. Они находятся с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\, p_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

или в матричной форме

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} \times P$$

Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

На практике встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно – переход может осуществиться в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восстановление) этого элемента также может произойти в заранее неизвестный момент и т. д.

Для описания таких процессов может быть применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Такого типа процессы известны как непрерывные цепи Маркова. *Непрерывной цепью Маркова (марковским процессом)* называют процесс, для которого при

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots t_n + 1$$

выполняется:

$$P\{S(t_{n+1}) = S_{n+1} | S(t_1) = S_1, \ldots, S(t_n) = S_n\} = P\{S(t_{n+1}) = S_{n+1} | S(t_n) = S_n\}$$

Здесь так же, как и в случае процесса с дискретным временем, рассматривается ряд дискретных состояний: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$, однако переход системы S из состояния в состояние может происходить в произвольный момент времени.

Обозначим $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система $\boldsymbol{S}$ будет находиться в состоянии S_i ($i=1,..., n$). Очевидно, для любого момента t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$$

так как события, состоящие в том, что в момент t система находится в состояниях $S_1, S_2,, ..., S_n$, несовместны.

Необходимо определить для любого t вероятности состояний:

$$\overline{p(t)} = \left(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)\right)$$

Для того чтобы найти эти вероятности, необходимо знать характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для Марковской цепи. В случае процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотности вероятностей (или интенсивности) перехода λ_{ij} (поскольку вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент t будет равна нулю, так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Пусть система S в момент t находится в состоянии S_r. Рассмотрим элементарный промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t. Назовем *плотностью вероятности перехода* λ_{ij} из состояния i в состояние j предел (*или инфинитезимальными коэффициентами*) отношение вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j (плотность вероятностей перехода определяется только для $j \neq i$). Отсюда следует, что при малом Δt вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна:

$$P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \times \Delta t.$$

Если все плотности вероятностей перехода λ_{ij} не зависят от t, т.е. (от того, в какой момент начинается элементарный участок Δt

$$P\left\{S(t+\Delta t) = S_i \middle| S(t) = j\right\}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$$

то марковский процесс называется *однородным*, а если эти плотности зависят от времени, то он является *неоднородным*.

Анализ случайных процессов с непрерывным временем, так же как марковских процессов с дискретным временем, удобно производить с помощью *графа состояний и переходов* (рис.4.2), на основании которого можно определить вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени.

Распределение вероятностей состояний системы, которое можно характеризовать вектором $\vec{p}(t)=\left(p_1(t),p_2(t),...,p_n(t)\right)$, называется *стационарным*, если оно не зависит от времени, т.е. все компоненты вектора $\vec{p}(t)$ являются константами.

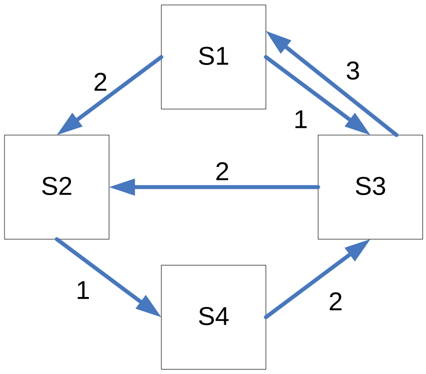


Рис.4.2. Пример размеченного графа непрерывной цепи Маркова

Выходными характеристиками марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем являются:

– нестационарное распределение вероятностей

$$p_i(t)=P\left\{S(t)=i\right\};$$

– стационарное распределение вероятностей $p_i=\lim\limits_{t\to\infty}p_i(t)$;

– среднее время пребывания в фиксированном множестве состояний;

– интенсивности перехода из одного множества состояний в другое.

Весьма важным является вопрос о поведении функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$ при $t\to\infty$, а именно, будут ли они стремиться к каким-то пределам. Если эти пределы существуют, они называются *предельными (финальными)* вероятностями состояний.

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\left(p_1,p_2,...,p_n\right)$$

Очевидно, предельные вероятности состояний в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Доказано, что если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

Таким образом, при $t \to \infty$ в системе S устанавливается некоторый предельный стационарный режим: хотя система случайным образом и меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени и каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, которая представляет собой *среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии. Это свойство позволяет обходиться при нахождении параметров системы на основе моделирования одной достаточно длинной реализацией.

Для вероятностей $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ можно составить систему линейных дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями Колмогорова*, которые в случае нахождения предельных вероятностей превращаются в систему *линейных алгебраических уравнений* (*уравнений глобального баланса)* для каждого состояния. Совместно с нормировочным условием эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности.

Общее правило составления уравнений Колмогорова для предельных вероятностей $p_i(t)$ можно сформулировать следующим образом:

– в левой части уравнения стоит сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в i-ое состояние, на интенсивности соответствующих потоков минус сумма интенсивностей всех потоков, выводящих систему из данного (j-го) состояния, умноженная на вероятность данного (j-го) состояния;

– в правой части уравнения стоит 0.

Пример:

Уравнения для ГСП на рис.4.2 будут иметь вид:

$$\begin{cases} -5p_1 + p_3 = 0 \\ -5p_2 + 2p_1 + 2p_3 = 0 \\ -3p_3 + 3p_1 + 2p_4 = 0 \\ -2p_4 + p_2 = 0 \end{cases}$$

Для получения системы независимых уравнений одно из уравнений следует заменить на условие нормировки:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Процессы гибели и размножения

Примером составления уравнений для нахождения предельных вероятностей могут служить процессы *гибели и размножения*, граф состояний и переходов (ГСП) для которых имеет вид, представленный на рис.4.3.

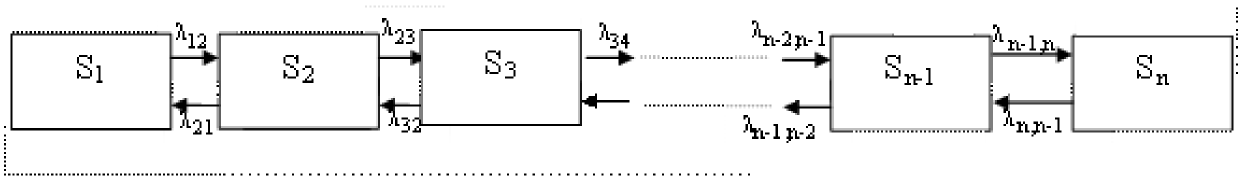


Рис.4.3. ГСП для процесса размножения и гибели

Запишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. В стационарных условиях для каждого состояния интенсивность потока, втекающего в данное состояние, должна равняться интенсивность потока, вытекающего из данного состояния.

Для первого состояния S_1 имеем:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

Для второго состояния S_2 суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3$$

Но можно сократить справа и слева равные друг другу члены и тогда получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3$$

и далее, совершенно аналогично,

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4$$

и т. д.

Очевидно, для этого случая члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

$$\lambda_{k-1.k} p_{k-1} = \lambda_{k.k-1} p_k$$

где *k* принимает все значения от *2* до *n*.

Итак, предельные вероятности состояний

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

в любой схеме размножения и гибели удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3$$

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4$$

$$\lambda_{k-1.k} p_{k-1} = \lambda_{k.k-1} p_k$$

$$\lambda_{n-1.k} p_{n-1} = \lambda_{n.n-1} p_n$$

и нормировочному условию:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Решение этой системы имеет вид

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{k-1.k}\lambda_{k-2.k-1}\dots\lambda_{12}}{\lambda_{k.k-1}\lambda_{k-1.k-2}\dots\lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1.n}\dots\lambda_{12}}{\lambda_{n.n-1}\dots\lambda_{21}}}$$

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1.k}}{\lambda_{k.k-1}} \cdot \frac{\lambda_{k-2.k-1}}{\lambda_{k-1.k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, k = 2,3,\dots$$

Пример:

Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов, каждый из которых может выходить из строя (отказывать). Отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Требуется найти вероятности числа отказавших узлов.

Решение.

Состояния системы:

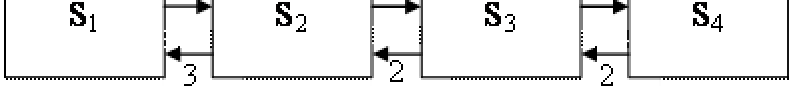
S_1 – все три узла исправны:

S_2 – один узел отказал (восстанавливается), два исправны;

S_3 – два узла восстанавливаются, один исправен;

S_4 – все три узла восстанавливаются.

ГСП имеет вид:



Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс размножения и гибели.

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{2}{5}$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$$

$$p_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.

2. В работе требуется провести расчет системы, состоящей из n узлов. Каждый из узлов может находиться в исправном или неисправном состоянии. После выхода узла из строя он начинает немедленно восстанавливаться. Протекающий в системе процесс можно считать марковским. Все узлы однотипны. Это означает, что все они имеют одни и те же значения интенсивностей выхода из строя λ и восстановления μ. Внесите в таблицу исходные данные λ и μ для своего варианта (приложение А), например:

Исходные данные

n	λ	μ
6	0.1	0.2

3. Постройте размеченный ГСП процесса.

Очевидно, что размеченный ГСП системы представляет собой размеченный ГСП процесса гибели и размножения. В случае, когда используются однотипные узлы, удобнее пронумеровать состояния системы номерами, соответствующими числу неисправных узлов, т. е., $0,1,2,\ldots n$, где n – число узлов. Тогда значения $\lambda_{k-1.k}$ и $\lambda_{k.k-1}$ будут определяться выражениями:

$$\lambda_{k-1.k} = (n-k) \cdot \lambda, \; k = 0,1,...,n-1$$

и

$$\lambda_{k.k-1} = k \cdot \mu, \; k = 1,2,...,n$$

где λ и μ есть значения интенсивностей выхода из строя и восстановления узла соответственно.

Используя любой известный графический редактор нарисуйте граф в виде рисунка на Excel – листе (в примере на рис.4.4 число узлов равно 6):

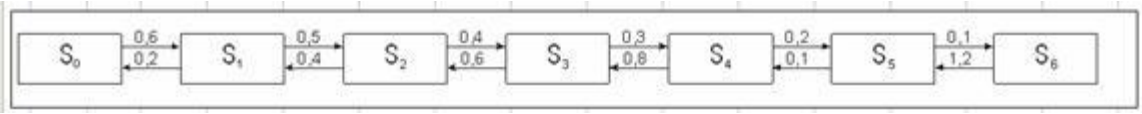


Рис.4.4. ГСП для процесса размножения и гибели

4. Проведите расчет вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний с помощью аналитических выражений аппарата марковских процессов.

Для проведения расчетов создайте таблицу со структурой (рис.4.5).

k	λк,к+1	λк+1,к	P0	Pk	
				Аналитич. модель	Имитац. модель
1	2	3	4	5	6

Рис.4.5. Структура таблицы

В таблице на рисунке столбцы 1,2,…6 используются следующим образом:

1 – номер состояния,

2 – интенсивность перехода из данного состояния в состояние с номером на 1 большим,

3 – интенсивность перехода из состояния с номером на 1 большим в данное состояние,

4 – значения каждого слагаемого, стоящего в выражении для вычисления P_0 (без 1),

5 – аналитически вычисленные значения $P_к$,

6 – найденные с помощью имитационной модели значения $P_к$.

Таблица должна содержать по одной строке для каждого состояния и одну строку для сумм по столбцам 4,5,6.

Точность для первого столбца таблицы установите равной одному десятичному знаку, для второго и третьего – двум десятичным знакам, для четвертого, пятого и шестого – четырем десятичным знакам.

5. Установите режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1. (Для этого нужно установить, что интенсивность обслуживания распределена по показательному закону распределения с помощью функции ЭКСПРАСП).

6. Найдите значения вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний с помощью имитационной модели. Результаты прогонов занесите в столбец 6 (рис.4.6).

7. Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами. Сравните результаты между собой. Постройте гистограммы для вероятностей состояний системы (рис.4.7)

k	λк,к+1	λк+1,к	P0	Pk	
				Аналитич. модель	Имитац. модель
1	2	3	4	5	6
0	0,6		3	0,0878	0,0716
1	0,5	0,2	3,75	0,2634	0,2372
2	0,4	0,4	2,5	0,3292	0,3271
3	0,3	0,6	0,9375	0,2195	0,2406
4	0,2	0,8	0,1875	0,0823	0,0995
5	0,1	1	0,015625	0,0165	0,0220
6		1,2		0,0014	0,0020
Σ			10,39063	1,0000	1,0000

Рис.4.6. Результаты вычислений

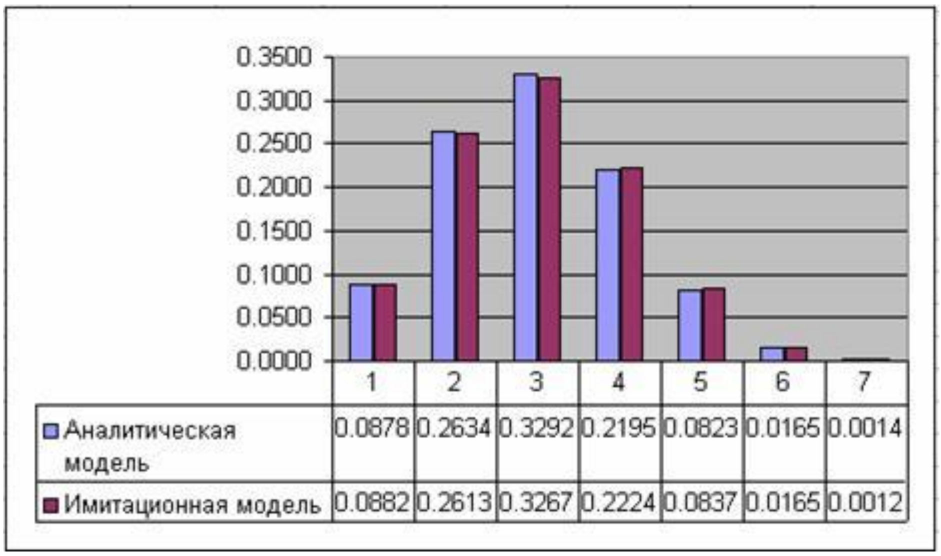


Рис.4.7. Гистограммы вероятностей состояний системы

6. Оформить отчет по практическому занятию и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

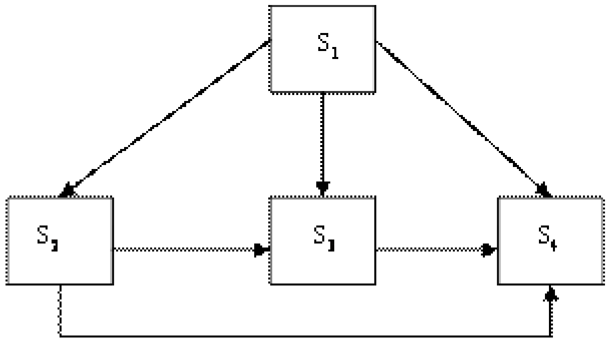
Внимание! Отчет должен содержать исходные данные, размеченный ГСП процесс, таблицу с расчетными и экспериментальными данными, гистограмму предельных вероятностей по каждому потоку.

Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение марковского процесса.
2. Как классифицируются марковские процессы?
3. Что такое граф состояний и переходов (ГСП) Марковской цепи? Какие бывают ГСП?
4. Что понимается под матрицей переходных вероятностей?
5. Как можно найти вероятность нахождения процесса в определенном состоянии после определенного числа шагов?
6. Что такое нестационарная марковская цепь?
7. Дайте определение марковского процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями.
8. Что такое предельные вероятности марковского процесса? Каков физический смысл предельных вероятностей?
9. Как найти предельные вероятности системы, имеющей стационарный режим?
10. Что называется процессами гибели и размножения? Поясните на ГСП.
11. Запишите выражения для предельных вероятностей процесса гибели и размножения.
12. Задачи

а) Постройте матрицу переходов и определите вероятности состояний через три шага процесса для системы, описываемой следующим ГСП:



Вероятности переходов имеют следующие значения P_{12}=0,3; P_{13}=0,4; P_{23}=0,1; P_{24}=0,2; P_{25}=0,3; P_{45}=0,3; P_{53}=0,2.

б) Производятся три выстрела по цели, которая может находиться в четырех состояниях:

- S1 – невредима;
- S2 – незначительно повреждена;
- S3 – получила существенные повреждения;
- S4 – полностью поражена.

Вероятности перехода для трех последовательных выстрелов различны и задаются тремя матрицами:

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В начальный момент система находится в состоянии S_1.

Найдите вектор вероятностей $P(3)$.

в) Устройство S состоит из двух узлов A и B, каждый из которых в процессе работы может отказывать. Возможны следующие состояния системы:

- S_1 – оба узла работают;

- S_2 – узел А отказал, В работает;
- S_3 – узел В отказал, А работает;
- S_4 – оба узла отказали.

Постройте ГСП системы (для двух случаев: возможность и невозможность одновременного выхода из строя обоих узлов).

г) Система S, как и в задаче в), представляет собой устройство, состоящее из двух узлов А и В, каждый из которых может в какой-то момент времени отказать. Отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Возможны такие состояния системы:

- S_1 – оба узла работают;
- S_2 – узел А восстанавливается, узел В - работает;
- S_3 – узел А работает, узел В восстанавливается;
- S_4 – оба узла восстанавливаются.

Постройте ГСП.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Приложение А
Варианты исходных данных

Число узлов n= 4

Интенсивности отказов и восстановлений

№	l	m
1	0,5	0,3
2	0,5	0,4
3	0,5	0,5
4	0,5	0,6
5	0,5	0,7
6	0,5	0,8
7	0,5	0,9
8	0,5	1
9	0,6	0,3
10	0,6	0,4
11	0,6	0,5
12	0,6	0,6
13	0,6	0,7
14	0,6	0,8
15	0,6	0,9
16	0,6	1
17	0,6	1,1
18	0,7	0,5
19	0,7	0,6
20	0,7	0,7
21	0,7	0,8
22	0,7	0,9
23	0,7	1
24	0,7	1,1
25	0,7	1,2

Практическая работа №5
ИССЛЕДОВАНИЕ СМО С ОТКАЗАМИ

Цель работы: исследовать систему массового обслуживания с отказами и ее характеристики качества, научиться определять эти характеристики.

Краткие теоретические сведения

N-канальной СМО с отказами называется система массового обслуживания, в которой, в случае если в момент прихода требования все узлы обслуживания заняты, требование получает отказ и сразу покидает систему. Для такой системы вероятность всех состояний системы (в установившемся режиме) дает первое распределение Эрланга:

$$P_k = \frac{p^k / k!}{\sum_{i=0}^{N} p^i / i!},$$

где $p = \lambda / \nu$ – нагрузка СМО, λ – интенсивность поступления требований, ν – интенсивность обслуживания.

К основным характеристикам качества обслуживания рассматриваемой СМО относятся:

– вероятность отказа $P_{отк}$

$$P_{отк} = P_N = \frac{p^n / N!}{\sum_{i=0}^{N} p^i / i!};$$

– среднее число занятых узлов обслуживания $M_{зан}$

$$M_{зан} = p(1 - P_N);$$

– среднее число свободных узлов обслуживания $M_{св}$

$$M_{св} = N - M_{зан}.$$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, отсюда

$$P_{отк} + P_{обс} = 1.$$

На основании приведенного выше выражения относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - P_N.$$

Абсолютная пропускная способность СМО с отказами равняется

$$A = \lambda P_{обс}.$$

Коэффициент занятости узлов обслуживания определяется отношением среднего числа занятых каналов к общему числу каналов:

$$K_з = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.
2. Построить график распределения P_k для N-канальной СМО с отказами, если на вход системы поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda = 10\frac{m}{N_n N}$ и обслуживание требований производится с интенсивностью $\nu = 5\frac{m}{N_n N}$, где m – сумма все цифр в шифре группы, N – количество каналов обслуживания (согласно варианту в табл. 5.1), N_n – номер по списку. Пример выполнения задания приведен на рисунке 5.1.

Таблица 5.1 – Число каналов обслуживания

N_n	1,5,9,13,17,21	2,6,10,14,18,22	3,7,11,15,19,23	4,8,12,16,20,24
N	4	5	6	3

3. Определить характеристики качества обслуживания: вероятность отказа $P_{отк}$, среднее число занятых узлов $M_{зан}$, среднее число свободных узлов $M_{св}$, относительную пропускную способность Q, абсолютную пропускную способность A, коэффициент занятости узлов $K_з$.
4. Повторить задания 2-3 заменив N на $N' = N + 2$. Сравнить характеристики двух СМО с разным количеством каналов обслуживания.
5. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

Внимание! Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

$\lambda := 8 \qquad \nu := 5 \qquad N := 7$

$\rho := \dfrac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 1.6$

$$P0 := \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!}\right)^{-1} \qquad P0 = 0.202$$

$k := 1 .. N$

$$P(k) := \frac{\rho^k}{k!} \cdot P0$$

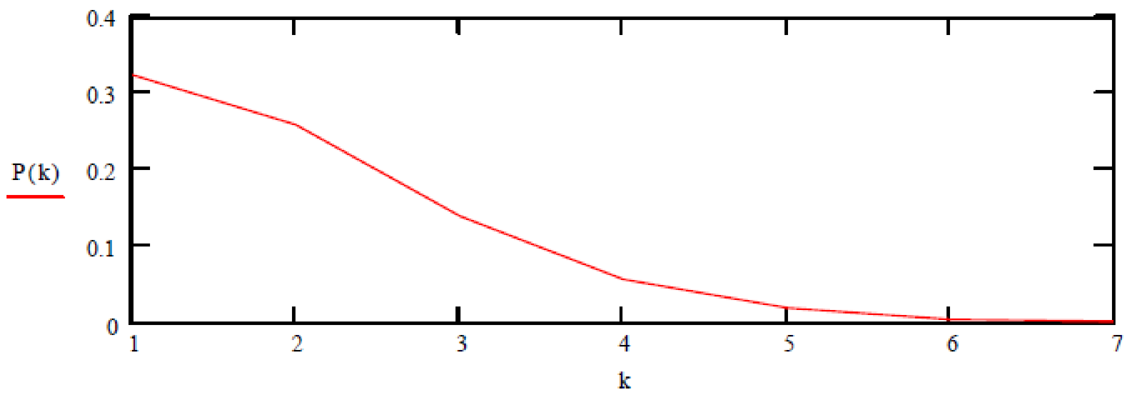


Рисунок 5.1 – Пример выполнения задания: график вероятностей P_k

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое нагрузка системы?
2. Дать понятие коэффициента занятости узлов.
3. Привести формулу первого распределения Эрланга.
4. Дать понятие вероятности отказа.
5. Дать определение характеристикам качества СМО с отказами.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №6
ИССЛЕДОВАНИЕ СМО С ОЖИДАНИЕМ

Цель работы: изучить одноканальные и многоканальные системы массового обслуживания с ожиданием и их характеристики.

Краткие теоретические сведения

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

СМО с *N*-каналами обслуживает простейший поток требований. При занятости всех n узлов обслуживания поступившее требование ставится в очередь и обслуживается после некоторого ожидания. Общее число требований, находящихся в системе на обслуживании и в очереди, обозначим $k\ (k = \overline{0,\infty})$ и назовем состоянием системы. При $k = \overline{0,N}$ величина k характеризует число занятых каналов в системе, при $k = \overline{0,\infty}$ число занятых каналов равно N, а разность $k - N$ определяет длину очереди. Параметр интенсивности обслуживания потока v определяется числом занятых узлов, и в первом случае $k = \overline{0,N}$ зависит от состояния системы k, а во втором $k = \overline{N,\infty}$ имеет постоянное значение v.

Введем понятие загрузки системы ρ равное отношению интенсивности входящего потока к интенсивности обслуживания:

$$\rho = \frac{\lambda}{v}.$$

Отметим, что при интенсивности поступающей нагрузки ρ, равной или больше числа узлов обслуживания системы N, с вероятностью равной 1 постоянно будут заняты все узлы обслуживания и длина очереди будет бесконечной – явление «взрыва». Поэтому, чтобы система могла функционировать нормально и очередь не росла безгранично, необходимо выполнить условие $\rho < N$.

Вероятность того, что система в установившемся режиме находится в состоянии k (P_k) определяем по формуле (второе распределение Эрланга)

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} P_0, при\, k = \overline{0,N}, \\ \dfrac{\rho^k}{N^{k-N} N!} P_0, при\, k = \overline{N,\infty} \end{cases},$$

где

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-p)}}.$$

К основным характеристикам качества обслуживания СМО с ожиданием относят следующие.

Вероятность наличия очереди $P_{оч}$ – вероятность того, что число требований в системе больше числа узлов:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-p)} P_0.$$

Вероятность занятости всех узлов системы $P_{зан}$:

$$P_{зан} = \frac{\rho^n}{(N-1)!(N-p)} P_0$$

Среднее число требований в системе M_{TP}:

$$M_{TP} = P_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2} \right).$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{N! N \left(1 - \frac{\rho}{N}\right)^2}.$$

Среднее число свободных узлов $M_{св}$:

$$M_{св} = \sum_{k=0}^{N-1} (N-k) P_k.$$

Среднее число занятых узлов $M_{зан}$:

$$M_{зан} = N - M_{св}.$$

Среднее время ожидания начала обслуживания $T_{ож}$ для требования, поступившего в систему:

$$T_{ож} = \frac{\rho^n}{\nu (N-1)!(N-p)^2} P_0.$$

Общее время, которое проводят в очереди все требования, поступившие в систему за единицу времени, $T_{оож}$:

$$T_{оож} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-p)^2} P_0.$$

Среднее время $T_{тр}$, которое требование проводит в системе обслуживания:

$$T_{тр} = T_{оож} + \frac{1}{\nu}.$$

Суммарное время, которое в среднем проводят в системе все требования, поступившие за единицу времени, $T_{стр}$:

$$T_{стр} = T_{оож} + \rho.$$

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Одноканальная система массового обслуживания является частным случаем многоканальной СМО, в которой число каналов N равно 1. В данной системе простейший поток требований обслуживает единственный канал, при занятости которого поступившее требование ставится в очередь и обслуживается после некоторого ожидания.

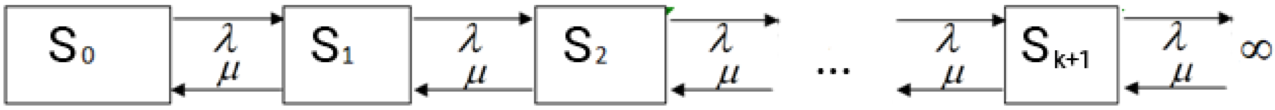


Рис.6.1. Граф состояний одноканальной СМО

СМО данного вида может пребывать в одном из следующих состояний:

– S_0 – канал обслуживания свободен;

– S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет;

– S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка;

– S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок.

Очевидно, что для одноканальной СМО также необходимо выполнение условия $\rho < N$. Для данных систем приведенные выше формулы вырождаются в следующий вид:

Вероятность того, что система в установившемся режиме находится в состоянии k (P_k) определяем по формуле (второе распределение Эрланга)

$$P_k = \rho^k P_0,$$

где

$$P_0 = 1 - \rho.$$

Среднее число требований в системе M_{TP}:

$$M_{TP} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = M_{TP} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.
2. Построить график вероятности состояний P_k от k ($k \in [0;50]$) для N-канальной СМО с ожиданием, если на вход поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda = 15\dfrac{m}{N_n N}$ и обслуживание требований производится с интенсивностью $\nu = 5\dfrac{m}{N_n N}$, где N_n – номер по списку, m – сумма все цифр в шифре группы, N – число каналов обслуживания (согласно варианту в табл. 6.1). Пример выполнения задания приведен на рисунке 6.1.

Таблица 6.1 – Число каналов обслуживания

N_n	1,5,9,13,17,21	2,6,10,14,18,22	3,7,11,15,19,23	4,8,12,16,20,24
N	4	5	6	7

3. Определить характеристики качества обслуживания: вероятность наличия очереди P_k; вероятность занятости всех узлов системы $P_{зан}$; среднее число требований в системе $M_{ТР}$; среднюю длину очереди $M_{оч}$; среднее число свободных узлов $M_{св}$; среднее число занятых узлов $M_{зан}$; среднее время ожидания $T_{ож}$; общее время пребывания требований в очереди за единицу времени $T_{оож}$; среднее время пребывания требований в системе $T_{тр}$; суммарное время, которое проводят все требования в системе за единицу времени, $T_{стр}$.
4. Повторить задания 2-3 заменив N на $N' = N + 2$. При этом интенсивность $\lambda' = \lambda$, а интенсивность $\mu' = \mu(N'/N)$. Сравнить характеристики двух СМО с разным количеством каналов обслуживания.
5. Решить задачу:

В фирме имеется один специалист по ремонту и обслуживанию компьютеров. Интенсивность поступления компьютеров λ (компьютеров в сутки) и среднее время ремонта/обслуживания одного компьютера (в сутках) приведены в таблице 6.2. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Рассчитать вероятности состояний S_0 – S_3;

показатели эффективности работы специалиста (вероятность занятости специалиста, среднее число заявок в системе, среднее число заявок в очереди).

Таблица 6.2 – Число каналов обслуживания

Вариант	λ	$T_{об}$	Вариант	λ	$T_{об}$
1	0,3	0,5	14	0,5	1,2
2	1,2	0,6	15	0,6	1,2
3	0,5	1,0	16	1,5	0,4
4	1,0	0,9	17	0,5	1,4
5	0,6	1,0	18	1,0	0,4
6	0,5	1,5	19	1,5	0,4
7	1,0	0,5	20	1,0	0,6
8	1,5	0,5	21	0,6	0,4
9	0,5	0,8	22	0,7	0,6
10	0,9	0,7	23	0,8	0,4
11	0,5	0,8	24	0,6	0,6
12	1,0	0,8	25	0,7	0,9
13	1,5	0,6			

6. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

> **Внимание!** Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

$\lambda := 30 \quad \nu := 4 \quad N := 8$

$$\rho := \frac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 7.5$$

$$P0 := \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N-\rho)}\right]^{-1} \qquad P0 = 2.032 \times 10^{-4}$$

$k := 1..50$

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{p^k}{k!} P_0, \text{при } k=\overline{0,N}, \\ \dfrac{p^k}{N^{k-N} N!}, \text{при } k=\overline{N,\infty} \end{cases}$$

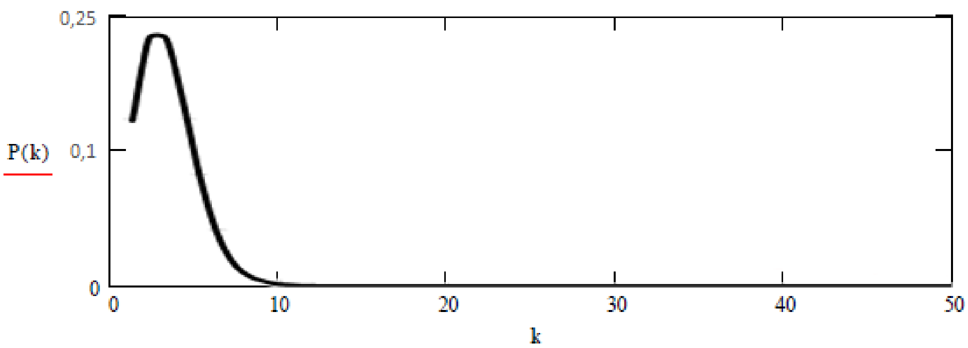


Рисунок 6.1 – Пример выполнения задания 2: график вероятностей P_k

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое нагрузка системы?
2. Дать понятие состояния СМО с ожиданием.
3. Привести формулу второго распределения Эрланга.
4. Что такое явление «взрыва» в СМО с ожиданием?
5. Определить вероятность любого состояния системы с ожиданием.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №7
ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Цель работы: овладение аналитическими методами и методами имитационного моделирования исследования одноканальных систем массового обслуживания с ограниченной очередью заявок.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием.

Будем предполагать, что входящий поток заявок на обслуживание есть простейший поток с интенсивностью λ.

Интенсивность потока обслуживания равна μ. Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживаний является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Будем считать, что размер очереди ограничен и не может вместить более m заявок, т.е. заявка, заставшая в момент своего прихода в СМО m+1 заявок (m ожидающих в очереди и одну, находящуюся на обслуживании), покидает СМО.

Система уравнений, описывающих процесс в этой системе, имеет решение:

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{1+\rho+\rho^2+...+\rho^{m+1}} \\ P_k = \rho^k P_0 \end{cases}.$$

Знаменатель первого выражения представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем ρ, откуда получаем

$$\begin{cases} P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \quad \rho = 1, \end{cases} \\ P_k = \rho^k P_0,\ k = 1, 2, ..., m+1. \end{cases},$$

и предельные вероятности приобретают вид:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

$$P_1 = \rho\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

$$P_2 = \rho^2\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

....

$$P_k = \rho^k\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной *m*.

Вероятность отказа в обслуживании заявки (отказ произойдет в случае, если канал занят и в очереди находятся *m* заявок):

$$P_{OTK} = P_{m+1} = \rho^{m+1}P_0$$

Относительная пропускная способность.

$$q = 1 - P_{OTK}$$

Абсолютная пропускная способность.

$$A = q\cdot\lambda$$

Среднее число находящихся в очереди заявок.

В случае, когда ρ отлично от 1, можно воспользоваться формулой

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\rho^2\left(1-\left(m+1-m\rho\right)\rho^m\right)}{\left(1-\rho\right)\left(1-\rho^{m+2}\right)}$$

При $\rho = 1$ можно прибегнуть к прямому подсчету

$$\overline{L}_{оч} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)}$$

Среднее число находящихся в системе заявок.

Поскольку среднее число находящихся в системе заявок $\overline{L}$

$$\overline{L}_{\Sigma} = \overline{L}_{оч} + \overline{L}_{обс}$$

где $\overline{L}_{обс}$ – среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, то зная $\overline{L}_{оч}$ остается найти $\overline{L}_{обс}$. Т.к. канал один, то число обслуживаемых заявок может равняться либо 0, либо 1 с вероятностями P_0 и $P_1 = 1 - P_0$ соответственно, откуда

$$\overline{L}_{обс} = 1\cdot\left(1-P_0\right)$$

и среднее число находящихся в системе заявок равно

$$\overline{L}_{\Sigma} = \overline{L}_{оч} + 1 - P_0$$

Среднее время ожидания заявки в очереди.

$$\bar{t}_{оч} = \frac{1}{\rho\mu}\overline{L}_{оч} = \frac{\overline{L}_{оч}}{\lambda}$$

т.е., среднее время ожидания заявки в очереди равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность потока заявок.

Среднее время пребывания заявки в системе.

Время пребывания заявки в системе $\bar{t}$ складывается из времени ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$ и времени обслуживания $\bar{t}_{обс}$. Если загрузка системы составляет 100%, то $\bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu}$, в противном случае $\bar{t}_{обс} = \frac{q}{\mu}$. Отсюда

$$\bar{t}_{\Sigma} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} = \frac{\overline{L}_{оч}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}$$

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Изучить методические указания к практической работе.
2. В приложение Microsoft Excel подготовьте таблицу следующего вида (рис. 7.1).

Параметры СМО					Аналитическая модель							Имитационная модель			
m	Ta	Ts	λ	μ	ρ	P0	Pотк	q	A	Lоч	Tоч	Pотк	q	A	Lоч

Рис.7.1. Структура таблицы

2. В столбцах для параметров СМО таблицы запишите исходные данные, которые определяются по правилу: *m*=1,2,3 (максимальная длина очереди). Для каждого значения *m* необходимо найти теоретические и экспериментальные значения показателей СМО для таких пар значений:

T_a = <порядковый номер в списке группы>

$$T_s = (0.5 \cdot T_a + 0,25 \cdot T_a \cdot i),\ i = 0,1,2,3,4$$

3. В столбцы с показателями аналитической модели впишите соответствующие формулы.

4. Для имитационной модели установите режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1.

5. Для каждой комбинации m, T_a, и T_s осуществите запуск модели.

6. Результаты запусков внесите в таблицу.

7. Внесите в соответствующие столбцы таблицы формулы для расчета среднего значения показателя $P_{отк}$, q и A.

	Параметры СМО					Аналитическая модель							Имитационная модель			
i	m	Ta	Ts	λ	μ	ρ	P0	Pотк	q	A	Lоч	Tоч	Pотк	q	A	Lоч
0	1	9	4,5	0,111	0,222	0,5	0,57	0,14	0,86	0,10	0,14	1,29	0,14	0,86	0,10	0,14
	2					0,5	0,53	0,07	0,93	0,10	0,27	2,4	0,07	0,93	0,10	0,27
	3					0,5	0,52	0,03	0,97	0,11	0,35	3,19	0,03	0,97	0,11	0,36
1	1	9	6,75	0,111	0,148	0,75	0,43	0,24	0,76	0,08	0,24	2,19	0,25	0,75	0,08	0,25
	2					0,75	0,37	0,15	0,85	0,09	0,51	4,63	0,16	0,84	0,09	0,54
	3					0,75	0,33	0,10	0,90	0,10	0,77	6,95	0,11	0,89	0,10	0,82
2	1	9	9	0,111	0,111	1	0,33	0,33	0,67	0,07	0,33	0,04	0,33	0,67	0,07	0,33
	2					1	0,25	0,25	0,75	0,08	0,75	0,08	0,24	0,76	0,08	0,73
	3					1	0,20	0,20	0,80	0,09	1,20	0,13	0,19	0,81	0,09	1,17
3	1	9	11,25	0,111	0,089	1,25	0,26	0,41	0,59	0,07	0,41	0,05	0,41	0,59	0,07	0,33
	2					1,25	0,17	0,34	0,66	0,07	0,95	0,11	0,33	0,67	0,07	0,75
	3					1,25	0,12	0,30	0,70	0,08	1,56	0,17	0,28	0,72	0,08	1,20
4	1	9	13,5	0,111	0,074	1,5	0,21	0,47	0,53	0,06	0,47	0,05	0,47	0,53	0,06	0,00
	2					1,5	0,12	0,42	0,58	0,06	1,11	0,12	0,39	0,61	0,07	0,00
	3					1,5	0,08	0,38	0,62	0,07	1,83	0,2	0,34	0,66	0,07	1,20
Канал	Число мест в очереди	Время между заявками	Среднее время обслуживания	Интенсивность поступления	Интенсивность обработки заявок	Привед. интенсивн. потока заявок	Вероятность, что СМО свободна	Вероятность отказа	Относит.пропускн. способность	Абсолютная пропускн. способн.	Среднее число заявок в очереди	Среднее число заявки в очереди	Вероятность отказа	Относит.пропускн. способность	Абсолютная пропускн. способн.	Среднее число заявок в очереди

Рис.7.2. Пример расчетов

8. Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами, сравнив результаты между собой.

9. Постройте для m на одной диаграмме графики зависимости $P_{отк}$ от T_s на теоретически и экспериментально полученных данных (для каждой m на отдельном графике).

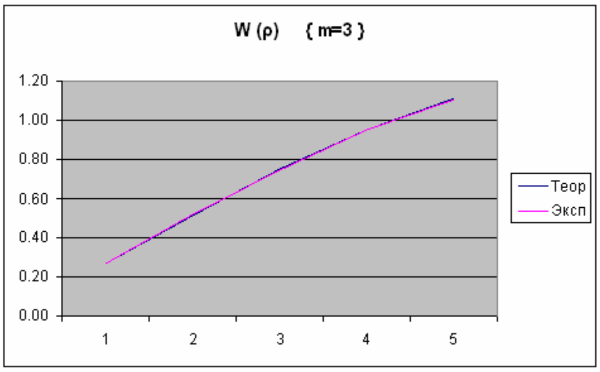


Рис.7.3. Пример графика для m=3

10. Оформить отчет по практическому занятию и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

> **Внимание!** Отчет должен содержать исходные данные, результаты расчетов и экспериментов с программной моделью, графики для *Ротк*, таблицу с данными для нахождения наилучшего *m*, график зависимости прибыли в единицу времени от *m*.
>
> Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте краткое описание одноканальной модели СМО с ограниченной очередью.
2. Какими показателями характеризуется функционирование одноканальной СМО с отказами?
3. Как рассчитывается вероятность p0?
4. Как рассчитываются вероятности pi?
5. Как найти вероятность отказа обслуживания заявки?
6. Как найти относительную пропускную способность?
7. Чему равна абсолютная пропускная способность?
8. Как подсчитывается среднее число заявок в системе?
9. Приведите примеры СМО с ограниченной очередью.
10. Задачи:

а) Порт имеет один грузовой причал для разгрузки судов. Интенсивность потока составляет 0,5 заходов в сутки. Среднее время разгрузки одного судна 2 суток. Если в очереди на разгрузку стоят 3 судна, то приходящее судно направляется для разгрузки на другой причал. Найти показатели эффективности работы причала.

б) В справочную железнодорожного вокзала поступают телефонные запросы с интенсивностью 80 заявок в час. Оператор справочной отвечает на поступивший звонок в среднем 0,7 мин. Если оператор занят, клиенту выдается сообщение "Ждите ответа", запрос становится в очередь, длина которой не превышает 4 запросов. Дайте оценку работы справочной и вариант ее реорганизации

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №8
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Цель работы: сравнить значения характеристик качества СМО с явными потерями, полученными в результате моделирования и рассчитанными по первой формуле Эрланга.

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Начальные условия моделирования: параметр поступающего потока $\lambda = 10\dfrac{m}{N_n N}$ (выз/мин), где N_n – номер по списку, m – сумма все цифр в шифре группы, N – количество каналов. Среднее время обслуживания и число каналов определяется вариантом из табл. 8.1.

Таблица 8.1 – Число каналов и среднее время обслуживания

N_n, вар	1,7,13	2,8,14	3,9,15	4,10,16	5,11,17	6,12,18
N	5	4	6	6	3	5
h, сек	40	55	75	112	33	80

2. Моделирование требуется осуществлять на интервале $[t_1, t_2]$ мин., где $t_1 = N_n + 1$, $t_2 = N_n + 200$. Поступление вызова моделируется аналогично практической работе «Изучение свойств и характеристик пуассоновского потока» (практическая работа №1), запоминается в массиве переменной $t_{пост}$ и подсчитывается счетчиком $K_{выз}$.

Процесс обслуживания моделируется по показательному закону распределения согласно выражению

$$\xi = -\frac{1}{\nu}\ln r\,;\ \nu = \frac{1}{h}.$$

Время освобождения канала определяется так: $t_{осв.i} = t_{пост} + \xi$

Полученными данными заполняется таблица 8.2.

Таблица 8.2

r	z	ξ	$t_{пост}$	$t_{осв}$	N канала
r_1	z_1	ξ_1	$t_{п1}$	$t_1+\xi_1$	1
r_2	z_2	ξ_2	$t_{п2}$	$t_2+\xi_2$	2
r_3	z_3	ξ_3	$t_{п2}$	$t_3+\xi_3$	3
					Потеря

Каналы занимаются последовательно. Если к моменту поступления требования заняты все каналы, то оно теряется и подсчитывается количество потерянных требований $K_{пот}$.

3. Определить модельную вероятность отказа требования:

$$\overline{P_{отк}} = \frac{K_{пот}}{K_{выз}},$$

где $K_{пот}$ – количество потерянных требований; $K_{выз}$ – общее количество требований.

Определить $P_{отк}$ по I формуле Эрланга:

$$P_{отк} = P_N = \frac{\rho^N / N!}{\sum_{k=0}^{N} \rho^k / k!},$$

где $\rho = \lambda h$.

4. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

Внимание! Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. Определить пропускную способность отдельных каналов при случайном занятии.

2. Определить пропускную способность отдельных каналов при последовательном занятии.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

Практическая работа №9
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Цель работы: сравнить значения характеристик качества СМО с неограниченной очередью, полученными в результате моделирования и теоретического расчета.

Задание на практическую работу

Внимание! Работа выполняется индивидуально. Работа выполняется с использованием программного продукта Microsoft Excel (или его аналогов). Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале преподавателя.

1. Начальные условия моделирования: параметр поступающего потока $\lambda = \frac{m}{N}$ (выз/мин), где m – сумма все цифр в шифре группы, N – количество каналов обслуживания. Среднее время обслуживания и число каналов определяется вариантом из табл. 9.1.

Таблица 9.1 – Число каналов и среднее время обслуживания

N_n, вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N	3	5	6	4	4	3	3	5	6	4	4	3	3	5	6	4	4	3
h, сек	45	60	150	60	90	50	35	120	180	70	80	40	20	50	140	80	95	50

2. Моделирование требуется осуществлять на интервале $[t_1, t_2]$ мин., где $t_1 = N_n + 1$, $t_2 = N_n + 200$. Поступление вызова моделируется аналогично практической работе «Изучение свойств и характеристик пуассоновского потока» (практическая работа №1), запоминается в массиве переменной $t_{пост}$ и подсчитывается счетчиком $K_{выз}$.

Процесс обслуживания моделируется по показательному закону распределения согласно выражению

$$\xi = -\frac{1}{\nu}\ln r\,;\ \nu = \frac{1}{h}.$$

Время освобождения канала определяется так: $t_{осв.i} = t_{пост} + \xi$

Полученными данными заполняется таблица 9.2.

Таблица 9.2

r	z	ξ	$t_{пост}$	$t_{осв}$	N канала
r_1	z_1	ξ_1	$t_{п1}$	$t_1+\xi_1$	1
r_2	z_2	ξ_2	$t_{п2}$	$t_2+\xi_2$	2
r_3	z_3	ξ_3	$t_{п2}$	$t_3+\xi_3$	3

Каналы занимаются последовательно. Если к моменту поступления требования заняты все каналы, то требование идет в накопитель и обслуживается, когда один из каналов освободится. Требование, находящееся в накопителе, считается приоритетным по сравнению с вновь поступившим требованием. При этом подсчитывается количество поступивших в накопитель требований $K_н$ и время нахождения требования в накопителе $t_{ож}$.

3. Определить модельную вероятность наличия очереди:

$$\overline{P_{оч}} = \frac{K_н}{K_{выз}},$$

где $K_н$ – количество требований, поступивших в накопитель; $K_{выз}$ – общее количество требований.

Определить теоретическую вероятность наличия очереди $P_{оч}$ по формуле:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)} P_0,$$

где $\rho = \lambda h$,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}}$$

4. Определить модельное среднее время нахождения требования в очереди $\overline{T_{ож}}$:

$$\overline{T_{ож}} = \frac{\sum_k t_{ож}(k)}{K_{выз}},$$

где k – требования на интервале $[t_1, t_2]$ мин; $t_{ож}$ – время нахождения каждого требования в накопителе; $K_{выз}$ – общее количество требований.

Определить теоретическое среднее время нахождения требования в очереди $T_{ож}$:

$$T_{ож} = \frac{\rho^n}{\nu(N-1)!(N-p)^2} P_0 .$$

5. Исходя из вероятности попадания в очередь и среднего времени ожидания высказать предположение о пользе СМО с заданными характеристиками.

6. Оформить отчет по практической работе и подготовиться к его защите. Для подготовки рекомендуется ответить на контрольные вопросы.

Внимание! Ответы на контрольные вопросы требуются только для самостоятельной подготовки к защите работы, они не включаются в отчет.

Контрольные вопросы и задания

1. Указать условие существования установившегося режима.
2. Вывести основные характеристики качества системы.
3. Дать понятие состояния СМО с ожиданием.
4. Привести формулу второго распределения Эрланга.
5. Что такое явление «взрыва» в СМО с ожиданием?
6. Определить вероятность любого состояния системы с ожиданием.

Перечень необходимого материально-технического оборудования

Выполнение практической работы предполагается в учебной аудитории кафедры космического приборостроения и систем связи. Учебная аудитория должна быть оснащена:

– учебной мебелью (столы и стулья для обучающихся, в количестве не меньше списочного состава студентов, стол и стул для преподавателя);

– доской;

– учебными компьютерами (в количестве не менее 1 устройство на 2 студентов), с установленной операционной системой Windows и программным продуктом Microsoft Office (или другим аналогичным программным продуктом).

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»

(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

_________ О.Г. Локтионова

«8» 08 2023 г.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Методические указания

по выполнению практической работы

для студентов, обучающихся по специальности

10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

по дисциплине «Теория электросвязи»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Проектирование системы передачи дискретных сообщений: методические указания по выполнению практической работы по дисциплине «Теория электросвязи» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. – Курск, 2023. – 18 с.

Методические указания направлены на практическое овладение методикой расчета информационных и вероятностных характеристик дискретных сообщений, передаваемых по каналу связи с помехами. Приведены варианты заданий для выполнения практической работы, а также необходимый объем теоретических сведений.

Методические указания соответствуют учебному плану по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины: «Теория электросвязи».

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,05. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 100 экз. Заказ. 817. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель практической работы:

– закрепление и углубление знаний о физических свойствах сообщений, сигналов, помех и каналов связи, их основных видах и информационных характеристиках, принципах и основных закономерностях обработки, передачи и приёма различных сигналов в телекоммуникационных системах;

– формирование умений проводить математический анализ и синтез физических процессов в аналоговых и цифровых устройствах формирования, преобразования и обработки сигналов;

– формирование умений рассчитывать пропускную способность, информационную эффективность и помехоустойчивость систем электрической связи;

– приобретение навыков практического использования методов кодирования дискретных сигналов;

– формирование навыков разработки математических моделей сигналов, каналов связи и определения их параметров по статистическим данным.

2 Задание на практическую работу

1. Составить обобщенную структурную схему системы связи для передачи дискретных сообщений, содержащую кодер источника, модулятор, канал связи, демодулятор и декодер. Изобразить качественные временные диаграммы сигналов во всех промежуточных точках структурной схемы. Все диаграммы должны сопровождаться словесными описаниями.

2. Определить энтропию и избыточность источника, выполнить кодирование источника (построить экономный код), рассчитать энтропию и избыточность кода, вероятности двоичных символов, передаваемых по каналу, скорость передачи информации по каналу без помех.

3. Рассмотреть случаи когерентного и некогерентного приёма путём взятия однократного отсчёта смеси высокочастотного сигнала с шумом на выходе линии связи и процесса на выходе детектора огибающей. Определить оптимальный по критерию идеального наблюдателя порог для принятия решения о принимаемом символе при когерентном и некогерентном приёме, условные вероятности ошибок первого и второго рода, среднюю

вероятность ошибки, скорость передачи информации при наличии помех. Сделать выводы по результатам расчетов.

4. Рассчитать согласованный фильтр для приёма элементарной посылки. Определить условные вероятности ошибок и среднюю вероятность ошибки при когерентном приёме с использованием согласованного фильтра. Оценить выигрыш в отношении сигнал-шум за счёт согласованной фильтрации.

5. Составить обобщенную структурную схему системы связи для передачи дискретных сообщений, использующую помехоустойчивое (канальное) кодирование. Опираясь на результаты п. 4, рассчитать вероятности однократной и двукратной ошибок в пределах одного кодового слова и охарактеризовать свойства кода по обнаружению и исправлению ошибок.

6. Внести в кодовую последовательность на выходе демодулятора двукратную ошибку в пределах одной кодовой комбинации. Выполнить процедуру декодирования полученной последовательности в соответствии с кодом Хэмминга, а затем произвести декодирование статистического кода. Оценить результат, сделать выводы.

3 Перечень необходимых исходных данных для выполнения практической работы

1. Алфавит источника сообщений с вероятностями символов согласно варианту (таблица 1). Вариант определяется по последней цифре номера зачётной книжки студента.

2. Код для сокращения избыточности источника (Шеннона-Фано или Хаффмена) определяется подвариантом (таблица 2).

3. Канальное кодирование – код Хемминга (7,4).

4. Способ передачи – амплитудная телеграфия (АТ) с пассивной паузой.

5. Форма посылки (радиоимпульс) прямоугольная.

6. Амплитуда сигнала на входе демодулятора U, длительность посылки τ, дисперсия шума на входе демодулятора σ^2 определяются подвариантом (таблица 2). Подвариант определяется по предпоследней цифре номера зачётной книжки студента.

Таблица 1 – Алфавит и вероятности символов

Номер варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а	0,069	0,035	0,091	0,105	0,055	0,02	0,064	0,032	0,099	0,082
б	0,019	0,11	0,024	0,025	0,1	0,057	0,102	0,058	0,083	0,061
в	0,052	0,049	0,067	0,105	0,054	0,052	0,064	0,089	0,107	0,07
д	0,007	0,089	0,082	0,02	0,116	0,025	0,085	0,064	0,077	0,023
е	0,09	0,001	0,119	0,094	0,087	0,151	0,092	0,085	0,121	0,111
ж	0,06	0,036	0,027	0,036	0,023	0,109	0,074	0,122	0,097	0,124
и	0,101	0,077	0,078	0,087	0,099	0,046	0,102	0,089	0,089	0,131
к	0,11	0,11	0,111	0,093	0,059	0,05	0,028	0,081	0,042	0,045
м	0,062	0,064	0,023	0,016	0,003	0,146	0,026	0,026	0,041	0,019
н	0,053	0,097	0,022	0,107	0,067	0,038	0,067	0,079	0,014	0,118
о	0,1	0,06	0,11	0,066	0,062	0,05	0,014	0,035	0,113	0,091
п	0,09	0,098	0,068	0,055	0,099	0,021	0,014	0,086	0,021	0,011
р	0,115	0,078	0,153	0,122	0,077	0,136	0,167	0,083	0,011	0,098
с	0,071	0,096	0,024	0,07	0,099	0,098	0,131	0,07	0,085	0,016

Таблица 2 – Параметры системы передачи дискретных сообщений

Номер подварианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Амплитуда сигнала U, В	2.8	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Длительность посылки τ, мкс	0,9	1,2	1,1	0,5	0,3	0,7	1,5	2,3	0,8	2,6
Дисперсия шума σ^2, В^2	1,0	2,5	4,0	4,5	3,2	6,0	4,8	6,5	9,0	12,0
Код	ШФ	Х	ШФ	Х	ШФ	Х	ШФ	Х	ШФ	Х

4 Требования к структуре, объему и оформлению практической работы

Структура практической работы должна включать:
– титульный лист;
– лист задания;
– реферат;
– содержание;
– обозначения и сокращения (при необходимости);
– введение;
– основную часть;
– заключение;
– список использованных источников;
– приложения (при необходимости).

Основная часть должна состоять из следующих разделов:
1) Структура системы связи.
2) Эффективное кодирование.
2.1) Построение эффективного кода.
2.2) Кодирование фамилии, имени и отчества автора.
3) Информационные характеристики источника и эффективного кода.
3.1) Энтропия и избыточность источника.
3.2) Характеристики кода.
4) Демодуляция методом однократного отсчета.
4.1) Когерентный прием. Определение порога, расчет условных вероятностей ошибок, средней вероятности ошибки, скорости передачи информации.
4.2) Некогерентный прием. Определение порога, расчет условных вероятностей ошибок, средней вероятности ошибки, скорости передачи информации.
5) Согласованный фильтр.
5.1) Определение импульсной и комплексной частотной характеристик согласованного фильтра.
5.2) Вычисление условных вероятностей ошибок, средней вероятности ошибки при когерентном приеме с использованием согласованного фильтра, скорости передачи информации.
5.3) Определение выигрыша в отношении сигнал-шум и в скорости передачи информации за счет согласованной фильтрации.

6) Помехоустойчивое кодирование.

6.1) Кодирование двоичной информационной последовательности (7,4)- кодом Хэмминга.

6.2) Декодирование последовательности, содержащей одиночную ошибку.

6.3) Декодирование последовательности, содержащей двукратную ошибку.

6.4) Декодирование эффективного кода, оценка результата.

В основной части все пункты выполнения практической работы должны располагаться в той последовательности, которая приведена выше, иметь ту же нумерацию и те же заголовки.

Рисунки и таблицы должны быть пронумерованы и озаглавлены, на графиках должны быть четко обозначены оси координат и указаны масштабы.

При вычислениях по формулам должна приводиться исходная формула, затем та же формула с подставленными в нее численными данными, и в конце – результат вычисления.

Графики временных или спектральных диаграмм, иллюстрирующие преобразования сообщения и сигнала в системе связи на выходе каждого из устройств, необходимо располагать один под другим с соблюдением масштабных соотношений по осям координат.

В заключении даётся краткий анализ полученных в каждом разделе основной части результатов.

5 Методические указания по выполнению практической работы

5.1 Структурная схема системы связи

Для построения структурной схемы системы связи в данной работе достаточно расположить слева направо прямоугольники, обозначающие основные элементы системы от источника сообщений до их получателя, и соединить их последовательно линиями. Требование изобразить временные диаграммы сообщений и сигналов в промежуточных точках структурной схемы направлено на то, чтобы побудить студента осознать сущность преобразований, которые претерпевают сообщения и сигналы при передаче. «Изобразить качественно» в данном случае означает, что не нужно соблюдать в точности количественные характеристики и соотношения, но все принципиальные черты сигналов и сообщений должны быть отражены. При этом следует разместить эти диаграммы друг под другом с соблюдением временного масштаба, для того, чтобы их можно было сопоставить.

5.2 Характеристики источника сообщений

Информационная производительность дискретного источника без памяти с алфавитом A характеризуется средним количеством информации на символ, которое определяется, как энтропия

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{K} p(a_k)\log_2(p(a_k)), \qquad (1)$$

где $p(a_k)$ – априорная вероятность символа a_k,
$k = 1, ..., K$, K – объем алфавита.

Отдельный символ несет тем больше информации, чем реже он встречается в длинной последовательности, вырабатываемой источником. При этом его индивидуальное количество информации умножается на соответствующее значение вероятности. В результате получается усредненная характеристика, которая позволяет рассчитывать приближенное количество информации в сообщениях данного источника с тем большей точностью, чем длиннее эти сообщения.

Нетрудно убедиться, что максимальную производительность при заданном объеме алфавита имеет источник с равновероятными символами, т.е. при $p(a_k)=1/K$, $\forall k$.

Для того, чтобы выразить степень отличия производительности источника от максимально достижимой при данном объеме алфавита, вводят числовой коэффициент избыточности.

$$k=(H_{max}-H)/H_{max}. \qquad (2)$$

Избыточность характеризует возможность сжатия сообщений данного источника и повышения скорости передачи информации путем статистического кодирования. Очевидно, избыточность может принимать значения от 0 до 1, и возможность сжатия тем выше, чем больше величина k.

5.3 Кодирование источника

Экономное (статистическое, энтропийное) кодирование основано на очень простой идее: чем чаще в сообщениях данного источника встречается некоторый символ, тем короче должна быть соответствующая ему кодовая комбинация. Так, в известном коде Морзе самой частой букве «е» соответствует самая короткая комбинация, состоящая из единственной точки, а сравнительно редкая в русскоязычных текстах буква «ш» кодируется четырьмя тире, разделенными паузами. Некоторые коды, называемые примитивными, не учитывают статистических свойств источника; таков, например, известный код Бодо, все комбинации которого имеют равную длину. Такие коды называют равномерными. Очевидно, статистический код должен быть неравномерным. В работе предполагается использование двоичного кода. В зависимости от подварианта применяется процедура построения кода Шеннона–Фано или Хаффмана. Первым шагом обеих процедур является расположение всех символов алфавита источника по вертикали в порядке убывания априорных вероятностей. Далее символы источника будут называться буквами, чтобы не путать их с символами кода. Дальнейшие шаги направлены на то, чтобы наименее вероятным буквам сопоставить наиболее длинные кодовые комбинации.

5.3.1 Кодирование источника по методу Шеннона – Фано

1) Все буквы, расположенные по вертикали в порядке убывания априорных вероятностей, делятся на две группы – верхнюю и нижнюю, так, что сумма вероятностей для обеих групп оказывается одинаковой или примерно одинаковой. В качестве первого символа кодового слова каждой букве верхней группы присваивается один кодовый символ (пусть это будет 0), а каждой букве нижней группы – другой кодовый символ (это будет 1).

2) Верхняя и нижняя группы делятся на подгруппы в соответствии с тем же принципом равной вероятности, затем в качестве второго символа кодового слова каждой букве первой подгруппы присваивается кодовый символ 0, а каждой букве второй подгруппы – кодовый символ 1. Это делается независимо для верхней и нижней групп символов алфавита.

3) Каждая подгруппа вновь делится на две части с соблюдением принципа равной (или близкой) вероятности, и к кодовым комбинациям справа дописываются символы 0 или 1 в зависимости от того, в верхней или нижней части находится буква. Эта процедура продолжается до тех пор, пока алфавит источника не будет исчерпан, т.е. пока в каждой подгруппе не останется по единственной букве.

5.3.2 Кодирование источника по методу Хаффмана

1) В вертикальной записи букв в порядке убывания априорных вероятностей две нижних буквы соединяются скобкой, из них верхней приписывается символ 0, нижней 1 (или наоборот). Эти символы становятся последними символами кодовых комбинаций, соответствующих данным буквам.

2) Вычисляется сумма вероятностей, соответствующих этим буквам.

3) Все буквы снова записываются в порядке убывания вероятностей, при этом только что рассмотренные буквы «склеиваются», т.е. учитываются, как единая буква с суммарной вероятностью.

4) Повторяются шаги 1, 2 и 3 до тех пор, пока не останется ни одной буквы, не охваченной скобкой.

Скобки после завершения процедуры образуют граф – дерево, корню которого соответствует вероятность 1, а листьями являются буквы. Чтобы получить кодовую комбинацию для некоторой буквы, нужно пройти по дереву от корня до листа, записывая в строку последовательно все символы 0 или 1, встречающиеся на этом пути. Необходимо обратить внимание на следующее свойство кодов Шеннона–Фано и Хаффмана: ни одна кодовая комбинация не является началом какой-либо другой кодовой комбинации (так называемое префиксное правило). Одной из важнейших характеристик статистического кода является средняя длина кодового слова (кодовой комбинации)

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{K} p(a_i)\mu_i, \qquad (3)$$

где μ_i – длина кодового слова, соответствующего символу a_i исходного алфавита.

Чем меньше средняя длина, тем выше скорость передачи информации при помощи данного кода, тем сильнее этот код сжимает сообщения.

Очевидно, что закодированное сообщение можно рассматривать как последовательность кодовых символов (нулей и единиц), порождаемую неким новым источником, для которого снова можно вычислить энтропию и избыточность. Избыточность этого нового источника (избыточность кода) должна быть меньше, чем избыточность исходного источника. При идеальном кодировании избыточность кода равна нулю. При этом его энтропия должна быть максимальной, а значит, кодовые символы должны быть равновероятны. Если код двоичный, то максимальная информационная «нагрузка» на символ равна 1 биту.

Т.о., оценить степень близости построенного кода к оптимальному можно по избыточности кода и по близости друг к другу вероятностей кодовых символов, которые рассчитываются согласно формулам

$$p_1 = \frac{\sum_{i=1}^{K} p(a_i) n_1(a_i)}{\bar{\mu}}, p_0 = \frac{\sum_{i=1}^{K} p(a_i) n_0(a_i)}{\bar{\mu}}, \quad (4)$$

где $n_1(a_i)$ и $n_0(a_i)$ – количество единиц и нулей соответственно в кодовой комбинации, соответствующей символу a_i исходного алфавита.

Скорость передачи информации I' по каналу без помех определяется только временем передачи одного кодового символа (равным длительности посылки τ), средней длиной кодового слова $\bar{\mu}$ и средним количеством информации, заключенной в кодовом слове, равным энтропии $H(A)$ исходного источника

$$I' = H(A)/(\bar{\mu}\tau).$$

5.4 Когерентный прием сигналов на фоне шума

В работе рассматривается цифровая демодуляция – восстановление кодовых символов 0 или 1 на основе наблюдения реализации случайного процесса на выходе линии связи. При этом предполагается, что наблюдаемый процесс представляет собой сумму сигнала $s(t)$ с шумом, если передается символ 1, и только шум – если передается 0. Сигнал в самом простом случае является точно известным, а неопределенность, связанная с передачей информации, заключается в самом факте его наличия или отсутствия в наблюдаемом процессе. О шуме также известно всё, что может быть известно о случайном процессе, а именно: шум считается гауссовским с нулевым средним, известной дисперсией и спектральной плотностью мощности $N_0/2$, постоянной в полосе частот, в которой сосредоточено 99% энергии сигнала.

Самый простой способ приема заключается во взятии мгновенного значения наблюдаемого процесса $z(t)$ в некоторый момент времени t_0 и сравнении его с порогом $y_П$. На основании этого однократного отсчета $y=z(t_0)$ и принимается решение о том, есть сигнал в наблюдаемом колебании, или оно представляет собой реализацию шума (иными словами, выполнена гипотеза H_0 или H_1). Очевидно, точно зная сигнал, следует выбрать в качестве t_0 такой момент, когда сигнал $s(t)$ принимает максимальное значение. Но шум в это время может принять отрицательное значение, так что сумма сигнала с шумом может оказаться ниже порога. Тогда произойдет ошибка, называемая ошибкой второго рода, или пропуском сигнала. Аналогично при отсутствии сигнала шумовая реализация может в момент t_0 превысить порог – тогда произойдет ошибка первого рода, или ложная тревога. Чтобы найти наилучшее значение порога и рассчитать вероятности ошибок, нужно рассмотреть условные плотности распределения вероятностей шума $w(y|H_0)$ и суммы сигнала и шума $w(y\,|H_1)$ в момент времени t_0, рисунок 1. Буквой a обозначено амплитудное значение прямоугольного радиоимпульса $s(t)$.

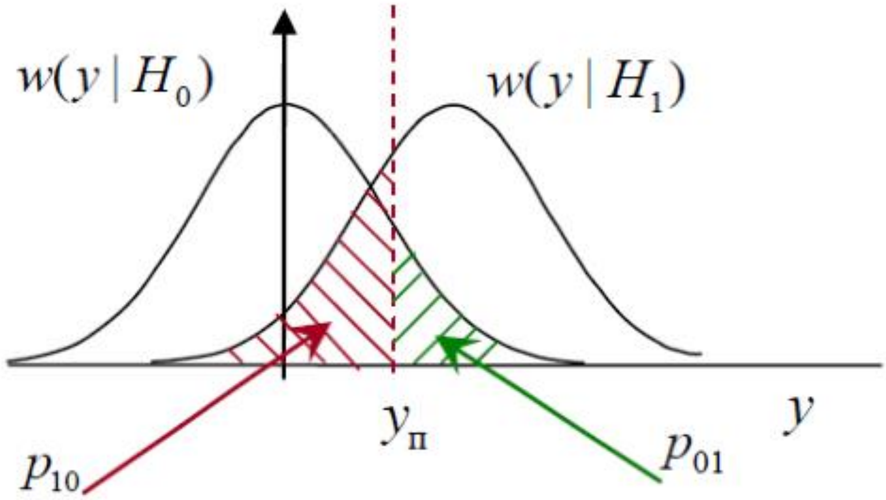


Рисунок 1 – Выбор порога при когерентном приеме

Из рисунка легко видеть, что вероятности ошибок первого p_{01} и второго p_{10} рода определяются, как площади фигур, ограниченных осью y, вертикальной прямой, проходящей через точку $y_П$ на оси абсцисс, и графиком плотности $w(y|H_0)$ и $w(y|H_1)$ соответственно. Если в качестве критерия оптимальности выбран критерий минимума суммарной условной вероятности ошибки, то следует выбрать порог, равный абсциссе точки пересечения плотностей (очевидно, что при этом сумма площадей заштрихованных фигур минимальна). Тогда решение на основании отсчета y будет приниматься в пользу той гипотезы, для которой больше значение $w(y|H_{0/1})$, то есть которая при данном наблюдаемом отсчете представляется более правдоподобной. Это правило можно записать в виде

$$\Lambda = \frac{w(y|H_1)}{w(y|H_0)} \gtrless_0^1, \tag{5}$$

где Λ – отношение правдоподобия.

Критерий минимума суммарной условной вероятности ошибки обычно называют для краткости критерием максимального правдоподобия. Этот критерий является частным случаем критерия минимума среднего риска (байесовского критерия) при одинаковых стоимостях ошибок и равных априорных вероятностях гипотез.

В данной практической работе следует применять критерий идеального наблюдателя (Котельникова), согласно которому порог выбирается так, чтобы обеспечить минимум средней вероятности ошибки

$$p_{ош}=p_0p_{01}+p_1p_{10}, \tag{6}$$

где p_0 – априорная вероятность гипотезы H_0 («сигнала нет»),
p_1– априорная вероятность гипотезы H_1 («сигнал есть»).

Выбор порога, оптимального по этому критерию, можно пояснить графически при помощи рисунка, аналогичного рисунку 1, если вместо условных плотностей $w(y|H_0)$ и $w(y|H_1)$ изобразить графики функций $p_0w(y|H_0)$ и $p_1w(y|H_1)$. Правило принятия решения, оптимальное по критерию Котельникова, можно записать через отношение правдоподобия в виде

$$\Lambda = \frac{w(y|H_1)}{w(y|H_0)} \gtrless_0^1 \frac{p_0}{p_1}. \qquad (7)$$

Априорные вероятности гипотез, необходимые для выбора порога, вычисляются при выполнении пункта 2 задания, как вероятности присутствия в кодовой последовательности символов 0 и 1 соответственно.

5.5 Некогерентный прием сигналов на фоне шума

Случай точно известного сигнала на практике является скорее исключением. Обычно некоторые параметры сигнала на приемной стороне канала связи неизвестны. В рамках практической работы рассматривается прием сигнала, имеющего форму прямоугольного радиоимпульса с известной амплитудой и случайной начальной фазой, имеющей равномерное распределение в интервале $(0, 2\pi)$. Физический смысл некогерентного приема методом однократного отсчета сводится к следующему: поскольку начальная фаза несущего колебания неизвестна (случайна), теперь нельзя выбрать момент t_0 измерения мгновенного значения так, чтобы значение сигнала $s(t_0)$ было максимальным. Поэтому сначала выполняется выделение огибающей наблюдаемого процесса, а затем берется её отсчет V в любой момент в пределах длительности посылки. Выбор порога $V_П$ для принятия решения на основе однократного отсчета огибающей производится аналогично когерентному случаю с той разницей, что теперь мгновенное значение имеет негауссово распределение при обеих гипотезах. Если сигнала нет (при гипотезе H_0), наблюдаемый процесс представляет собой гауссовский шум с нулевым средним, а его огибающая V в произвольный момент времени имеет распределение Рэлея $w(V|H_0)$. Если сигнал присутствует (при гипотезе H_1), огибающая гауссовского процесса имеет распределение Рэлея–Райса (обобщенное рэлеевское) $w(V| H_1)$, что соответствует ненулевому среднему, рисунок 2.

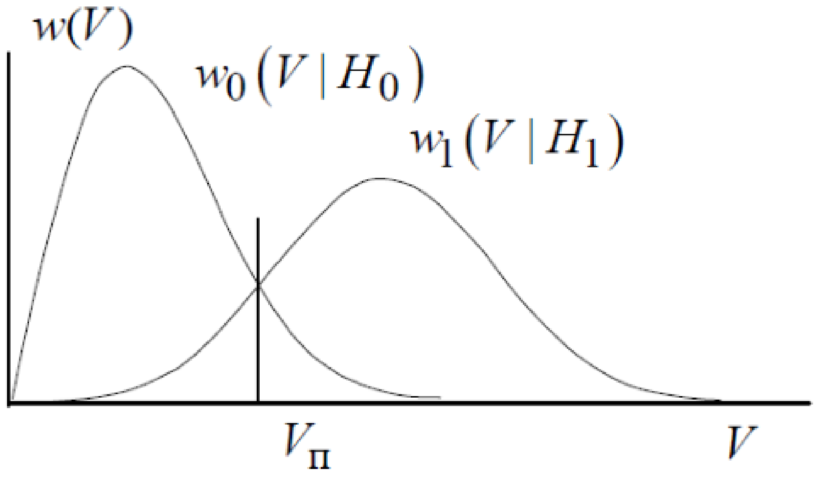


Рисунок 2 – Выбор порога при некогерентном приеме

Учет априорных вероятностей гипотез вполне аналогичен когерентному случаю.

5.6 Скорость передачи информации при наличии помех

Наличие в канале гауссовского шума вызывает ошибки при демодуляции и тем самым ограничивает скорость передачи информации: если ошибки следуют слишком часто, скорость передачи информации снижается, а если средняя вероятность ошибки достигает 0,5, скорость передачи становится равной нулю («обрыв канала»). Расчет скорости передачи информации в цифровом канале с помехами основывается на понятии совместной энтропии входа и выхода канала (под каналом здесь следует понимать отрезок системы связи от входа модулятора до выхода демодулятора).

На входе модулятора действует источник, алфавит которого (обозначим его B) содержит два символа – β_0=0 и β_1=1. Априорными вероятностями этих символов $p(\beta_0)$ и $p(\beta_1)$ следует считать, очевидно, вероятности нуля $p(0)$ и единицы $p(1)$, рассчитанные при выполнении пункта 2 задания (тогда же были рассчитаны энтропия кода и средняя длина кодового слова). Выход демодулятора можно считать другим источником $Г$ с двумя символами γ_0=0 и γ_1=1.Среднее количество передаваемой по каналу информации (приходящееся на один символ) равно

$$I(B,Г) = I(Г,B) = H(B) + H(Г) - H(B,Г). \qquad (8)$$

Для определения совместной энтропии $H(B,\Gamma)$ необходимо найти совместные вероятности всех сочетаний входных и выходных символов (β и γ), а для этого нужно вначале записать условные вероятности для выходных символов при заданных входных. Эти условные вероятности определяются, в свою очередь, условными вероятностями ошибок первого p_{01} и второго p_{10} рода, рассчитанными ранее (отдельно для когерентного и некогерентного приема):

$$p(\gamma_0|\beta_0)=1-p_{01}; \qquad p(\gamma_1|\beta_0)=1-p_{01};$$
$$p(\gamma_0|\beta_1)=1-p_{10}; \qquad p(\gamma_1|\beta_1)=1-p_{10}; \tag{9}$$

Совместные вероятности сочетаний входных и выходных символов

$$p(\beta_0,\gamma_0)=p(\beta_0)p(\gamma_0|\beta_0);\ \ p(\beta_0,\gamma_1)=p(\beta_0)p(\gamma_1|\beta_0);$$
$$p(\beta_1,\gamma_0)=p(\beta_1)p(\gamma_0|\beta_1);\ \ p(\beta_1,\gamma_1)=p(\beta_0)p(\gamma_1|\beta_1). \tag{10}$$

Для нахождения энтропии источника Γ требуются безусловные вероятности выходных символов

$$p(\gamma_0)=p(\beta_0,\gamma_0)+p(\beta_1,\gamma_0) \text{ и } p(\gamma_1)=1-p(\gamma_0)=p(\beta_0,\gamma_1)+p(\beta_1,\gamma_1). \tag{11}$$

Наконец, совместная энтропия входа и выхода цифрового канала

$$H(B,\Gamma)= -\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p(\beta_i,\gamma_i)\log_2 p(\beta_i,\gamma_i). \tag{12}$$

Скорость передачи информации по цифровому каналу с учетом помех

$$I'=\frac{I(B,\Gamma)}{\tau}, \tag{13}$$

где τ – длительность посылки.

5.7 Согласованный фильтр (СФ)

СФ для прямоугольного радиоимпульса имеет импульсную характеристику в виде такого же радиоимпульса, обращенного во времени (зеркальной копии). Модуль комплексной частотной характеристики СФ с точностью до произвольного постоянного множителя ψ совпадает с модулем спектральной плотности сигнала, аргумент КЧХ совпадает с аргументом спектральной плотности сигнала, взятым с минусом. Действие СФ на аддитивную смесь сигнала с шумом можно рассмотреть по отдельности в силу линейности фильтра. Отклик СФ на «свой» сигнал в момент максимума численно равен энергии сигнала. Для нахождения дисперсии шума на выходе СФ нужно умножить СПМ входного (квазибелого) шума на квадрат модуля КЧХ СФ и затем проинтегрировать по частоте. Согласованный фильтр обеспечивает максимальное отношение сигнал-шум на выходе, тем самым максимизируя потенциальную верность решений демодулятора (для реализации этих потенциальных возможностей, очевидно, нужно правильно выбрать порог).

Отношение сигнал-шум (ОСШ) по мощности в момент времени t_0 на выходе СФ

$$q^2 = \frac{2u_c^2(t_0)}{N_0 E_h} = \frac{2E^2}{N_0 E_h}. \tag{14}$$

Принимая $\psi = 1$, имеем $E_h = E$, тогда $q^2 = 2E/N_0$ (q^2 - безразмерная величина). Выигрыш в отношении сигнал-шум по сравнению со случаем однократного отсчета равен

$$\eta = \frac{2E/N_0}{a^2/\sigma^2} = \frac{2E\sigma^2}{a^2 N_0}. \tag{15}$$

Учитывая, что шум на входе СФ квазибелый с полосой ($-F$, F), содержащей 99% энергии сигнала,

$$\int_{-F}^{F} |S(f)|^2 df = 0{,}99 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\, df = 0{,}99E, \tag{16}$$

получим $F = 10{,}286/\tau$, тогда СПМ шума $N0/2 = \sigma^2/(2F)$, откуда легко найти выигрыш η.

5.8 Расчет вероятностей однократной и двукратной ошибок

В пределах одной кодовой комбинации длины n можно выполнить по формуле биномиального распределения вероятностей

$$P(k)=C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}p^{k}(1-p)^{n-k},$$

где k следует положить равным соответственно 1 или 2, а в качестве p принять среднюю вероятность ошибки при приеме одного символа $p_{\text{ош}}$, найденную при выполнении пункта 3.

6 Список литературы, используемой для выполнения практической работы

1. Бабанин И.Г., Коптев Д.С. Общая теория связи. Сигналы и аналоговые системы передачи информации: учеб. пособие / Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск, 2018. – 110 с.
2. Бабанин И.Г., Коптев Д.С., Мухин Общая теория связи. Цифровые системы передачи данных: учеб. пособие / Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск, 2019. – 106 с.
3. Коптев Д.С., Бабанин И.Г., Довбня В.Г. Теория радиотехнических сигналов: учеб. пособие / Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск, 2019. – 240 с.

7 Контрольные вопросы

1. Назовите основные информационные характеристики системы передачи дискретных сообщений
2. Что называется когерентным приемом?
3. Что называется некогерентным приёмом?
4. Какой фильтр называют согласованным?
5. Что такое квазибелый шум?
6. Как определяется порог принятия решения при когерентном приеме?
7. Назовите принципы кодирования дискретных сообщений.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
____
«_8_»_08_________ 2023 г.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ И КОДИРОВАНИЯ

Методические указания
по выполнению практических работ
для студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
по дисциплине «Теория электросвязи»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Основы теории информации и кодирования: методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория электросвязи» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. – Курск, 2023. – 49 с.

Методические указания по выполнению практических работ содержат краткие теоретические сведения об о природе информации, её свойствах, методах измерения её количества и качества, общих принципах кодирования информации в системах передачи, обработки и хранения, варианты заданий для выполнения работ, а также перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины: «Теория электросвязи».

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 2,848. Уч.-изд. л. 2,578. Тираж 100 экз. Заказ. 819. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическая работа №1
«Вероятностный подход к определению количества информации»

1 Цель работы

Ознакомиться с вероятностным подходом к определению количества информации. Проверить полученные теоретические сведения практическим путем, выполняя индивидуальные задания.

2 Краткие теоретические сведения

Понятие "количества информации" часто встречается в технической литературе, однако на практике определить количество информации очень непросто.

С 40-х годов XX века предпринимаются попытки использовать понятие информации для объяснения и описания самых разнообразных явлений и процессов. В решении этой проблемы существуют два основных подхода, которые исторически возникли одновременно. В конце 40-х годов XX века один из основоположников кибернетики американский математик Клод Шеннон развил вероятностный подход к измерению количества информации, а работы по созданию ЭВМ привели к «объемному» подходу.

Рассмотрим более подробно вероятностный подход.

В качестве примера разберем опыт, связанный с бросанием правильной игральной кости, имеющей N граней. Результатом данного опыта считаем выпадение грани с одним из следующих знаков: 1, 2, . . . *N*.

Введем в рассмотрение численную величину — **энтропию** (обозначим ее *H*). Энтропия - мера неопределенности некоторого опыта. В простейшем случае его исход зависит от выбора одного элемента из множества исходных.

Согласно шенноновской теории информации, в случае равновероятного выпадения каждой из граней величины *N* и *H* связаны между собой **формулой Хартли**

$$H = \log_2 N. \qquad (1)$$

При введении какой-либо новой величины важным является вопрос о единице измерения этой величины.

В соответствии с формулой Хартли становится очевидным, что энтропия H будет равна единице при N=2. Тогда, в качестве единицы измерения принимается количество информации, связанное с проведением опыта, состоящего в получении одного из двух равновероятных исходов (примером такого опыта может служить бросание монеты, при котором возможны два исхода- «орел», «решка»). Такая единица количества информации называется «бит».

В случае, когда вероятности P_i**,** результатов опыта (в примере, приведенном выше — бросания игральной кости) неодинаковы, имеет место формула Шеннона

$$H = -\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log_2 P_i \,. \qquad (2)$$

В случае равной вероятности событий $P_i = \frac{1}{N}$, формула Шеннона переходит в формулу Хартли (1).

Рассмотрим следующий пример. Необходимо определить количество информации, связанное с появлением каждого символа в сообщениях, записанные на русском языке. Считаем, что русский алфавит состоит из 33 букв и знака «пробел» для разделения слов.

По формуле Хартли

$$H = \log_2 34 \approx 5{,}09 \text{ бит.}$$

Однако в словах русского языка (равно как и в словах других языков) различные буквы встречаются неодинаково часто. В таблице 1 приведена вероятность частоты употребления различных знаков русского алфавита, полученная на основе анализа очень больших по объему текстов.

Таблица 1 – Частотность букв русского языка

i	Символ	*P(i)*	*i*	Символ	*P(i)*	*i*	Символ	*P(i)*
1	__	0,175	12	Л	0,035	23	Б	0,014
2	О	0,090	13	К	0,028	24	Г	0,012
3	Е	0,072	14	М	0,026	25	Ч	0,012
4	Ё	0,072	15	Д	0,025	26	Й	0,010

5	А	0,062	16	П	0,023	27	Х	0,009
6	И	0,062	17	У	0,021	28	Ж	0,007
7	Т	0,053	18	Я	0,018	29	Ю	0,006
8	Н	0,053	19	Ы	0,016	30	Ш	0,006
9	С	0,045	20	З	0,016	31	Ц	0,004
10	Р	0,040	21	Ь	0,014	32	Щ	0,003
11	В	0,038	22	Ъ	0,014	33	Э	0,003
						34	Ф	0,002

Найдем значение количества информации (энтропии) *H*. Для этого воспользуемся формулой Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{34} P_i \cdot \log_2 P_i \approx 4{,}72 \text{ бит.}$$

Полученное значение количества информации по Шеннону меньше вычисленного ранее. Это вытекает из основных свойств энтропии, как меры неопределенности сообщения. Количество информации, вычисляемое по формуле Хартли, является максимальным количеством информации, которое могло бы проходиться на один знак.

Аналогичные подсчеты количества информации можно провести и для других языков, например, использующих латинский алфавит — немецкий, французский и др. (26 различных букв и «пробел»).

По формуле Хартли получим

$$H = \log_2 27 \approx 4{,}76 \text{ бит.}$$

3 Пример выполнения задания

3.1 Задание

Подсчитать количество информации, приходящейся на один символ, в следующем тексте экономического содержания:

Организационно-правовые формы предприятий в своей основе определяют форму их собственности, то есть, кому принадлежит предприятие, его основные фонды, оборотные средства, материальные и денежные ресурсы. В зависимости от формы собственности в России в настоящее время различают три основные формы предпринимательской деятельности: частную, коллективную и контрактную.

3.2 Пример выполнения задания

Для выполнения поставленного задания воспользуемся текстовым редактором ***Microsoft Word*** и табличным процессором ***Microsoft Excel*.**

В качестве первого шага наберем заданный текст в текстовым редакторе ***Microsoft Word*.**

Выполним подсчет всех символов текста. Для этого воспользуемся функцией статистики подсчета числа знаков в документе. Перейдем на вкладке **Рецензирование** в раздел **Правописание,** выделим набранный текст и нажмем кнопку «статистика» (рис. 1)

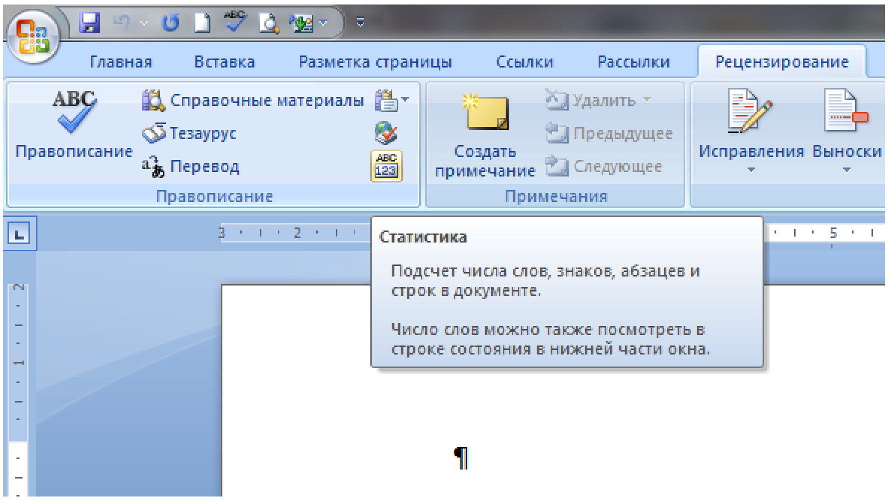


Рисунок 1 - Вид окна ***Microsoft Word***

В результате появиться окно, представленное на рисунке 2.

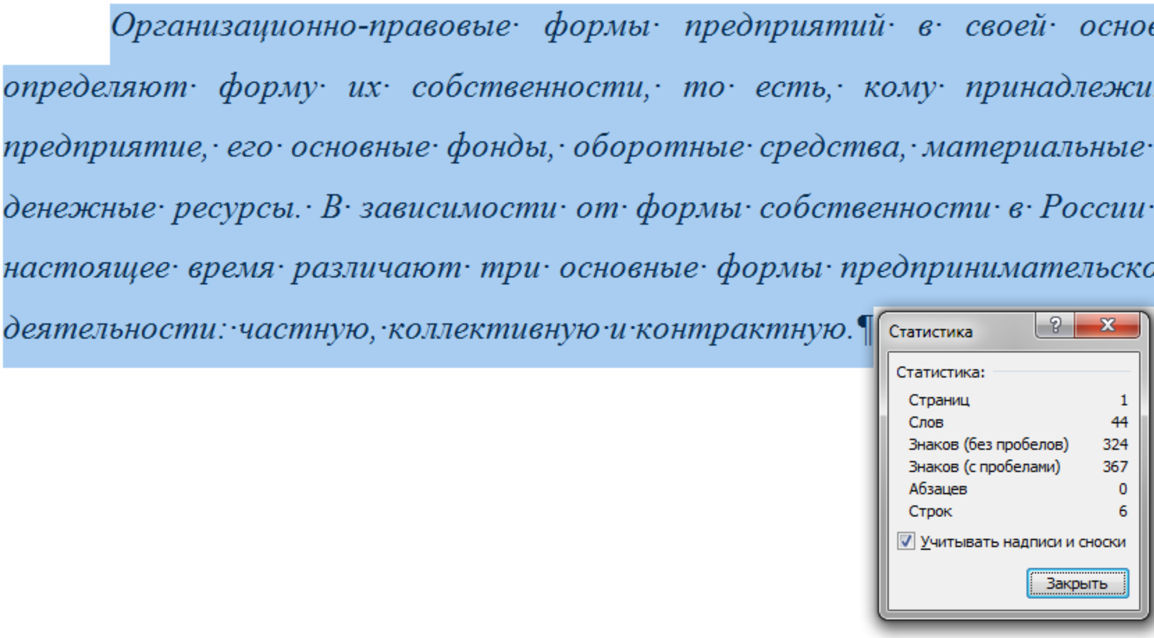


Рисунок 2 – Статистика подсчета числа знаков в документе

Таким образом, количество знаков в тексте вместе с пробелами – 367, число пробелов – 43 (367-324=43). Подсчитаем количество каждого символа в тексте и занесем в таблицу 2.

Определим **вероятность P_i каждого символа в тексте** как отношение количества одинаковых символов каждого значения ко всему числу символов в тексте. Вычисления в таблице будем производить в текстовом редакторе Word с помощью добавления в ячейку таблицы формулы выполнения простого расчета.

Каждая ячейка таблицы ***Word*** имеет адрес, состоящий из номера столбца (обозначаемого буквами латинского алфавита) и номера строки (обозначаемого арабскими цифрами). Для вычисления P_i необходимо поместить курсор в ячейку D2, где будет помещен результат.

Таблица 2 – Частотность букв в тексте

i	Сим-вол	Кол-во	*P(i)*	*i*	Сим вол	Кол -во	*P(i)*	*i*	Сим вол	Кол -во	*P(i)*
1	___	43	0,117	14	Р	24	0,065	27	Б	3	0,008
2	,	6	0,016	15	В	16	0,044	28	Г	2	0,005
3	.	2	0,005	16	Л	8	0,022	29	Ч	2	0,005
4	-	1	0,003	17	К	6	0,016	30	Й	3	0,008
5	:	1	0,003	18	М	9	0,025	31	Х	1	0,003

6	О	35	0,095	19	Д	9	0,025	32	Ж	2	0,005
7	Е	32	0,087	20	П	9	0,025	33	Ю	5	0,014
8	Ё	0	0,000	21	У	6	0,016	34	Ш	0	0,000
9	А	14	0,038	22	Я	5	0,014	35	Ц	1	0,003
10	И	25	0,068	23	Ы	11	0,030	36	Щ	1	0,003
11	Т	25	0,068	24	З	3	0,008	37	Э	0	0,000
12	Н	25	0,068	25	Ь	4	0,011	38	Ф	5	0,014
13	С	23	0,063	26	Ъ	0	0,000				
Σ		232		Σ		110		Σ		25	
								Σ		367	

На вкладке **Макет** в разделе **Данные** выбрать кнопку формула. Окно **Формула** заполнить как показано на рисунке 3.

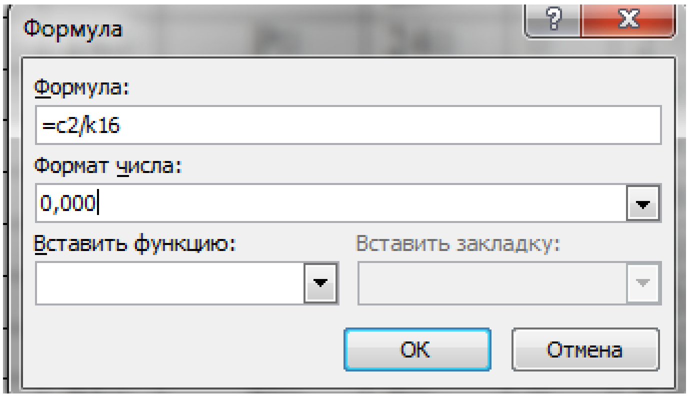


Рисунок 3 – Вставка формул в таблицу ***Microsoft Word***

Аналогично вычислим остальные значения P_i каждого символа. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

В предпоследней строке таблицы 2 знаком "Σ" обозначено суммарное количество знаков, а в последней строке знаком "Σ" обозначена общее количество всех знаков текста.

Далее по формуле Шеннона подсчитаем количество информации, приходящейся на один символ. Для этого выполним предварительные вычисления в табличном процессоре ***Excel***.

Откроем лист ***Excel*** и заполним его как показано на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	P(i)	$log_2 P_i$	$P_i \times log_2 P_i$	i	P(i)	$log_2 P_i$	$P_i \times log_2 P_i$	i	P(i)	$log_2 P_i$	$P_i \times log_2 P_i$
2	1	0,117	=LOG(B2;2)	=B2*C2	14	0,065	=LOG(F2;2)	=F2*G2	27	0,008	=LOG(J2;2)	=J2*K2
3	2	0,016	=LOG(B3;2)	=B3*C3	15	0,044	=LOG(F3;2)	=F3*G3	28	0,005	=LOG(J3;2)	=J3*K3
4	3	0,005	=LOG(B4;2)	=B4*C4	16	0,022	=LOG(F4;2)	=F4*G4	29	0,005	=LOG(J4;2)	=J4*K4
5	4	0,003	=LOG(B5;2)	=B5*C5	17	0,016	=LOG(F5;2)	=F5*G5	30	0,008	=LOG(J5;2)	=J5*K5
6	5	0,003	=LOG(B6;2)	=B6*C6	18	0,025	=LOG(F6;2)	=F6*G6	31	0,003	=LOG(J6;2)	=J6*K6
7	6	0,095	=LOG(B7;2)	=B7*C7	19	0,025	=LOG(F7;2)	=F7*G7	32	0,005	=LOG(J7;2)	=J7*K7
8	7	0,087	=LOG(B8;2)	=B8*C8	20	0,025	=LOG(F8;2)	=F8*G8	33	0,014	=LOG(J8;2)	=J8*K8
9	8	0		0	21	0,016	=LOG(F9;2)	=F9*G9	34	0		0
10	9	0,038	=LOG(B10;2)	=B10*C10	22	0,014	=LOG(F10;2)	=F10*G10	35	0,003	=LOG(J10;2)	=J10*K10
11	10	0,068	=LOG(B11;2)	=B11*C11	23	0,03	=LOG(F11;2)	=F11*G11	36	0,003	=LOG(J11;2)	=J11*K11
12	11	0,068	=LOG(B12;2)	=B12*C12	24	0,008	=LOG(F12;2)	=F12*G12	37	0		0
13	12	0,068	=LOG(B13;2)	=B13*C13	25	0,011	=LOG(F13;2)	=F13*G13	38	0,014	=LOG(J13;2)	=J13*K13
14	13	0,063	=LOG(B14;2)	=B14*C14	26	0		0	39			=J14*K14
15	Σ	=СУММ(B2:B14)		=СУММ(D2:D14)	Σ	=СУММ(F2:F14)		=СУММ(H2:H14)	Σ	=СУММ(J2:J14)		=СУММ(L2:L14)
16									Σ	=B15+F15+J15		
17												
18												
19					H=	=-(D15+H15+L15)						
20												

Рисунок 4 – Заполнение формулами листа книги ***Microsoft Excel***

При заполнении листа следует воспользоваться встроенной функцией логарифма числа по основанию 2. Для этого на вкладке **Формулы** выбираем **Математические** и щелкаем на этой кнопке. В появившемся выпадающем меню выбираем функцию LOG. Появится окно, представленное на рисунке 5. В поле число записываем адрес ячейки, в которой находится число, логарифм которого вычисляется, а в поле основание записываем "2", так как нам необходимо вычислить логарифм по основанию 2.

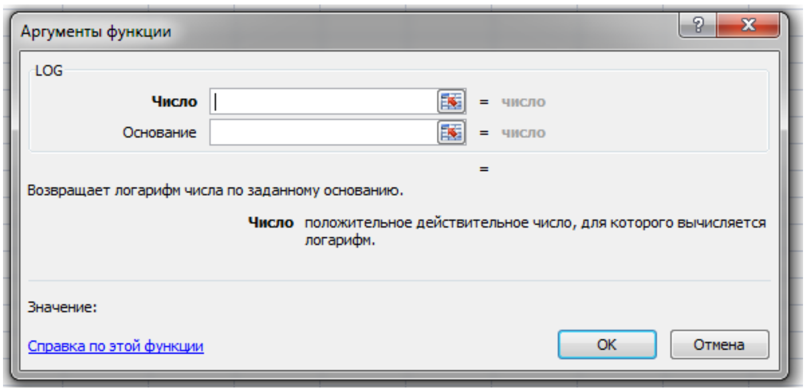


Рисунок 5 - Окно вычисления логарифма в ***Microsoft Excel***

Обратим внимание на то, что в ячейках C9, G14, K9 и K12 значения логарифма не вычисляются, так как количество соответствующих символов равно нулю, а следовательно и их частота в тексте равна нулю.

В строке с номером I5 в столбцах B, F, J вычислены суммарные вероятности по столбцу. Это необходимо сделать для контроля. В строке с номером 16 в столбце J вычислено контрольное значение вероятности. Это значение должно быть равно единице. В ячейке F19 вычисляется количество информации по формуле Шеннона (хисловые значения, полученные в Excel, приведены в таблице 3).

$$P(i) \cdot \log_2 P(i)$$

Таким образом, количество информации согласно формуле Шеннона, приходящейся на один символ, в данном тексте:

$$H=4.40199 \approx 4{,}40 \text{ бита.}$$

Максимальное количество информации, которое могло бы приходиться на один знак в данном тексте, вычисляемое по формуле Хартли:

$$H=\log_2 367 \approx 8{,}5196 \text{ бит.}$$

Таблица 3

i	$P(i)$	$\log_2 P(i)$	$P(i)\cdot\log_2 P(i)$	i	$P(i)$	$\log_2 P(i)$	$P(i)\cdot\log_2 P(i)$	i	$P(i)$	$\log_2 P(i)$	$P(i)\cdot\log_2 P(i)$
1	0,117	-3,0954	-0,3622	14	0,065	-3,9434	-0,2563	27	0,008	-6,9658	-0,0557
2	0,016	-5,9658	-0,0955	15	0,044	-4,5064	-0,1983	28	0,005	-7,6439	-0,0382
3	0,005	-7,6439	-0,0382	16	0,022	-5,5064	-0,1211	29	0,005	-7,6439	-0,0382
4	0,003	-8,3808	-0,0251	17	0,016	-5,9658	-0,0955	30	0,008	-6,9658	-0,0557
5	0,003	-8,3808	-0,0251	18	0,025	-5,3219	-0,1330	31	0,003	-8,3808	-0,0251
6	0,095	-3,3959	-0,3226	19	0,025	-5,3219	-0,1330	32	0,005	-7,6439	-0,0382
7	0,087	-3,5228	-0,3065	20	0,025	-5,3219	-0,1330	33	0,014	-6,1584	-0,0862
8	0			21	0,016	-5,9658	-0,0955	34	0		
9	0,038	-4,7179	-0,1793	22	0,014	-6,1584	-0,0862	35	0,003	-8,3808	-0,0251
10	0,068	-3,8783	-0,2637	23	0,03	-5,0589	-0,1518	36	0,003	-8,3808	-0,0251
11	0,068	-3,8783	-0,2637	24	0,008	-6,9658	-0,0557	37	0		
12	0,068	-3,8783	-0,2637	25	0,011	-6,5064	-0,0716	38	0,014	-6,1584	-0,0862
13	0,063	-3,9885	-0,2513	26	0						
Σ	0,631		-2,3970	Σ	0,301		-1,5311	Σ	0,068		-0,4740
								Σ	1		-4,4020

4 Задание для выполнения

Подсчитать количество информации, находящейся на один символ по методике, изложенной в настоящих методических указаниях, в стихотворении или песне, содержащей от 320 до 380 символов. У каждого студента текст должен быть свой. Выбирать текст только на русском языке.

5 Содержание отчета

По результатам выполненной практической работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

– цель работы;
– индивидуальное задание;
– порядок выполнения работы;
– таблицы, выполненные в Excel, содержащие формулы, по которым производятся вычисления;
– таблицы, выполненные в Excel, содержащие результаты расчетов;
– выводы по результатам исследований с анализом полученных результатов.

Практическая работа №2 «Статистическое моделирование случайных событий и дискретных случайных величин»

1 Цель работы

1) уяснение законов алгебры событий;
2) знакомство с видами единичного жребия, применяемыми в методе Монте-Карло для разыгрывания случайных событий и случайных величин;
3) изучение некоторых функций Excel и Mathcad.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Алгебра событий

Суммой событий A и B называется событие S = A + B, которое состоит в наступлении хотя бы одного из них.

Произведением событий A и B называется событие D = AB, состоящее в их совместном появлении.

Определения суммы и произведения событий распространяются на любое (конечное) число слагаемых или сомножителей.

Пример 1. Если A – появление 1 очка, B – 3-х очков, C – 5-ти очков при одном бросании игральной кости, то S = A + B + C – появление нечётного числа очков. Если A – появление дамы, а B – появление пиковой масти при вытягивании одной карты из колоды, то D = AB есть появление пиковой дамы.

События A и B называются несовместными, если они не могут наступить в одном и том же опыте. Ясно, что для таких событий P(AB) = 0.

Группа событий называется полной, если в результате опыта обязательно наступает хотя бы одно из этих событий.

Два события называются противоположными, если это несовместные события, образующие полную группу.

Пример 2. Рассмотрим в качестве опыта, приводящего к наступлению различных событий, одно бросание игральной кости. Пусть A – появление единицы, B - двойки, C - единицы, тройки или пятёрки, D - четвёрки или шестёрки. Тогда:

– событие A совместно с событием C, но несовместно с событиями B и D;

– события A, B, C и D в совокупности образуют полную группу, но даже если событие A исключить, группа не утратит полноты;

– ни одна пара событий, выбранная из группы A, B, C, D, не является парой противоположных событий;

–события C и B + D являются противоположными;

Вероятность суммы событий

Справедлива формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1)$$

Из этого основного утверждения вытекает целый ряд очевидных следствий:

1. Если события A и B несовместны, то P(A + B) = P(A) + P(B).

2. Если события A_1 A_2, ..., $A_п$ образуют полную группу несовместных событий, то $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$

3. Для двух противоположных событий $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Формулу для вероятности суммы трёх и более совместных событий мы не рассматриваем. В этом случае гораздо проще «действовать» через противоположное событие.

Пример 3. Найти вероятность того, что при бросании двух монет хотя бы на одной из них выпадет «орёл».

1[й] способ. Согласно классическому определению вероятности, получаем P(A) = 3/4, т.к. существует 4 равновозможных исхода («орёл»-«орёл», «орёл»-«решка», «решка»-«орёл» и «решка-решка»), из которых 3 исхода являются благоприятными.

2[й] способ. Рассматривая событие A как сумму двух событий («орёл» на первой монете, «орёл» на второй монете) по формуле (2.1) для вероятности суммы получаем P(A) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, где вероятность произведения событии (т.е. вероятность события «орёл»-«орёл») найдена по классическому определению.

2.2 Зависимость событий. Вероятность произведения событий

Условной вероятностью P(A\B) называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Событие А называется зависимым от события В, если $P(A|B) \neq P(A)$Зависимость событий всегда взаимна, т.е. если А зависит от события В, то и В зависит от события А.

Вероятность произведения двух событий определяется формулой:

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \qquad (2)$$

Для независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (3)$$

Решим пример 6 ещё одним (уже третьим) способом. Если А - появление хотя бы одного «орла», то противоположное событие А - появление «решек» на обеих брошенных монетах. Найдём $P(\bar{A}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, как вероятность произведения независимых событий (3). Тогда P(A) = 1 - P(A) = 3/4.

Пример 4. Студент сдаёт два экзамена: физику и математику. Он оценивает свои шансы получить «отлично» по физике как 1 против 3^x, «отлично» по математике как 1 против 2^x. Каковы шансы студента получить хотя бы одну оценку «отлично» на двух экзаменах?

Введём вероятности отличной сдачи экзаменов по физике $P(A_1) = 1/4$ и по математике $P(A_2) = 1/3$. Как и в примере 3, здесь возможны разные способы решения.

1. По формуле (1) с учётом (3) получим:
   $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A,)P(A_2) = 1/4 +1/3 -1/12 = 1/2$.
2. Через понятие противоположного события получим:
   $P(A) = 1 - (1 - P(A_1))(1 -P(A_2)) = 1\text{-}3/4*2/3 = 1/2$.

Есть и третий способ решения, который состоит в том, чтобы отдельно найти вероятность ровно одной оценки «отлично» и двух оценок «отлично», и затем найденные вероятности сложить. В данном случае этот способ нерационален, однако мы обратимся к нему ниже, в пункте Дискретные случайные величины (пример 5).

2.3 Формула полной вероятности

Пусть событие А может произойти вместе с любым из несовместных друг с другом событий Hi, H_2, ..., $H_п$, образующих полную группу (они называются гипотезами). Тогда вероятность события А определяется как

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i). \qquad (4)$$

Пример 4. Среди театральных зрителей женщин вдвое больше, чем мужчин. Из каждых 25 мужчин 1 является дальтоником, а среди женщин это заболевание встречается в 10 раз реже. Найти вероятность того, что выбранный наугад театральный зритель – дальтоник.

Обозначим события: H_1 - зритель - мужчина; H_2 - зритель - женщина; А - зритель - дальтоник.

Тогда $P(H_1) = 1/3$; $P(H_2) = 2/3$; $P(A|H_1) = 1/25$; $P(A|H_2) = 1/250$. Следовательно, по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{250} = \frac{12}{750} = 0.016$$

2.4 Дискретные случайные величины

Величина, принимающая в результате опыта заранее неизвестное числовое значение, называется случайной величиной. Случайная величина, имеющая набор изолированных возможных значений, называется дискретной (ДСВ). Законом распределения ДСВ называется правило, по которому каждому возможному значению ставится в соответствие вероятность, с которой случайная величина может принять это значение. Закон распределения может быть задан таблично (ряд распределения), графически (многоугольник распределения) и аналитически (формула).

Пример 5. Вернёмся к условиям примера 7, но переформулируем задачу. Студент сдаёт два экзамена: по физике и математике. Вероятность получения «пятёрки» по физике $P(A_1) = 1/4$, по математике $P(A_2) = 1/3$. Найти закон распределения случайной величины X - числа полученных студентом «пятёрок» на двух экзаменах.

$$P(X=0)=P\left(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\right)=P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)=3/4\cdot 2/3=1/2;$$

$$P(X=1)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=1/4\cdot 2/3+3/4\cdot 1/3=5/12;$$

$$P(X=2)=P\left(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=1/4\cdot 1/3=1/12$$

События, заключающиеся в том, что ДСВ примет свои возможные значения, образуют полную группу несовместных событий. Поэтому сумма вероятностей всех возможных значений ДСВ равна 1.

Биномиальный закон распределения

Одним из наиболее известных законов распределения ДСВ является так называемый биномиальный закон.

Случайная величина X, представляющая собой число наступлений некоторого события в серии n испытаний, в каждом из которых вероятность наступления этого события одинакова и равна p, имеет распределение, называемое биномиальным. Это распределение описывается формулой Бернулли:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,...,n, \qquad (5)$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ – число сочетаний из n по k.

Пример 6. Пусть случайная величина X- число наступлений некоторого события в серии из 3 испытаний, в каждом из которых вероятность наступления этого события одинакова и равна 1/4. Тогда X подчинена биномиальному закону распределения:

$$P(X=x_i)=C_3^{k_i}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_i}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x_i}, \text{ где } x_i=\overline{0.3},$$

или в табличном виде:

x_i	0	1	2	3

p_i	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

2.5 Единичные жребии в методе Монте-Карло

Рассмотрим общий подход к моделированию случайных событий и величин с помощью так называемых единичных жребиев (т.е. опытов со случайным исходом). Единичный жребий может быть реализован с помощью генерации случайного числа - значения случайной величины, равномерно распределённой на интервале от 0 до 1 (работа 1). Обозначим такое случайное число через y. Нас будут интересовать три вида единичного жребия, которые мы рассмотрим последовательно.

Произошло ли данное событие? Пусть нам известно, что событие А имеет вероятность p. Можно условиться считать, что если y приняло значение меньше p, то событие А произошло; при $y \geq p$ событие не произошло. Вопрос о том, почему «граничный» случай y = p, трактуется как не наступление события, не имеет никакого практического значения: учитывая точность компьютерного представления действительных чисел, вероятностью такого совпадения можно просто пренебречь. Во всяком случае, на результат статистического моделирования это никакого влияния не оказывает.

Какое из нескольких событий, образующих полную группу несовместных событий, произошло? Пусть события A_x, A_2,..., $A_к$ наступают с вероятностями P\, p_2, p_k образуя полную группу несовместных событий, так что:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

На рисунке 1 показан алгоритм, который можно принять для определения наступления того или иного события в зависимости от значения случайного числа y:

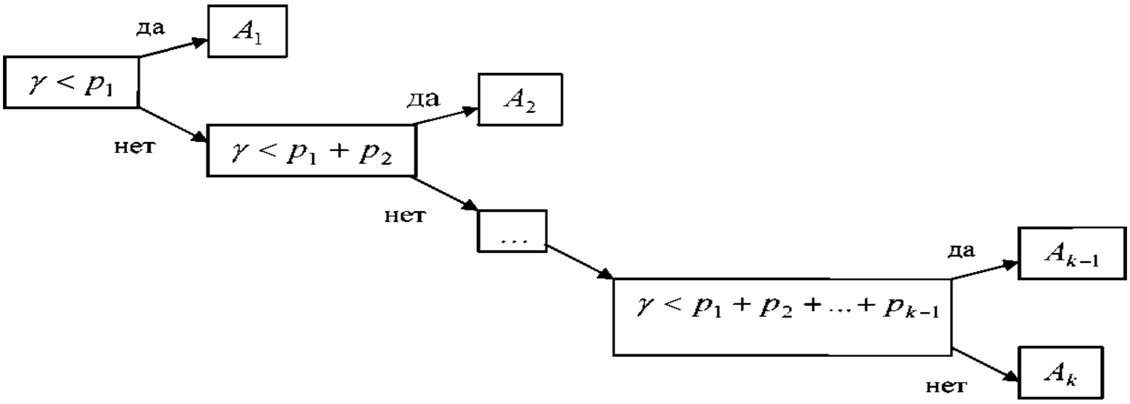


Рисунок 1 – Алгоритм определения наступления того или иного события в зависимости от значения случайного числа у

Пусть, например, $A_1, A_2, \ldots, A_5$ – равновозможные события, образующие полную группу несовместных событий (т.е. каждое из них имеет вероятность 0,2). Случайное число приняло значение у = 0,68. Поскольку

$$0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 < 0{,}68 < 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2,$$

считаем, что произошло событие A_4.

Какое значение приняла дискретная случайная величина? Рассмотрим дискретную случайную величину с известным законом распределения: значения $x_x, x_2, \ldots, x_k$ принимаются с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_к$ соответственно. Легко понять, что этот случай сводится к предыдущей задаче, поскольку равенства $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k]$ можно рассматривать как события $A_1, A_2, \ldots, A_к$. Пусть, например, случайная величина подчинена закону распределения, полученному в примере 6:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Допустим, что случайное число приняло значение 0,47.

Поскольку

$$\frac{27}{64} < 0.47 < \frac{54}{64},$$

считаем, что случайная величина X приняла значение 1.

3 Задания для практической работы

Задание 3.1. Смоделировать с помощью метода Монте-Карло случайные события, описанные в примере 5.

Задание 3.2. Смоделировать с помощью метода Монте-Карло ситуацию, описанную в примерах 4 и 6.

Задание 3.3. Разыграть по методу Монте-Карло дискретную случайную величину, описанную в примере 6.

Смысл настоящей работы состоит в том, чтобы, моделируя методом Монте-Карло случайные события, в которых отсутствует симметрия исходов, научиться статистически оценивать вероятности событий.

Инструкция по выполнению заданий в Excel

Для выполнения задания 3.1 создадим таблицу следующего вида:

	A	B	C	D	E
1		Доля мужчин в театре		0,333333333	
2		Вероятность дальтонизма у мужчины		0,04	
3		Вероятность дальтонизма у женщины		0,004	
4	№	Сл. число	Мужчина или женщина?	Сл.число	Дальтоник или нет?
5					

В ячейку D1 вводим число 1/3, поскольку по условию на одного мужчину в театре приходится две женщины. В ячейки D2 и D3 вводим вероятности дальтонизма у мужчин и женщин соответственно. В ячейки B5 и D5 вводим функцию СЛЧИС(). Для заполнения ячеек C5 и E5 необходимо воспользоваться логической функцией

ЕСЛИ (лог выражение; значение если истина; значение если ложь).

Учитывая сформулированные выше правила разыгрывания случайных событий, в ячейку C5 введём =ЕСЛИ(B5<$B$1;"муж";"жен"), а в ячейку E5 более сложное выражение

=ЕСЛИ(C5="муж";ЕСЛИ(05<$B$2;"да";"нет");ЕСЛИ(B5<$B$3;"да ";"нет"))

Значки доллара в адресах некоторых ячеек поставлены для того, чтобы при последующем автозаполнении эти адреса не корректировались.

«Растягиваем» таблицу вниз до испытания №10000 и вычисляем с помощью функции СЧЁТЕСЛИ следующие величины: число мужчин, число женщин, число дальтоников и вероятность дальтонизма у наугад отобранного зрителя. Как мы видели при решении примера 8, эта вероятность равна 0,016. Статистическая оценка вероятности при числе испытаний, равном 10000, как правило, оказывается в пределах 0,014-0,018.

Переходим к заданию 3.2. Начнём с моделирования ситуации, описанной в примере 4. Создадим таблицу следующего вида:

	A	B	C	D
1	Вероятность «5» по физике		0,25	
2	Вероятность «5» по математике		0,33333333	
3	№	По физике «5»?	По математике «5»?	Хотя бы одна пятёрка?
4	1	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<$C$1; "да";"нет")	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<$C$2; "да";"нет")	=ЕСЛИ(B4="да";"да"; ЕСЛИ(C4="да";"да"; "нет"))
5	…	…	…	…

Обратите внимание на то, что в данном случае, в отличие от задания 3.1, мы не стали вводить специальных столбцов для случайных чисел, а использовали функцию СЛЧИС() как «вложение» в функцию ЕСЛИ (подумайте, почему это было невозможно в задании 3.1). «Растягиваем» таблицу и вычисляем вероятность того, что на двух экзаменах получена хотя бы одна пятёрка, как отношение числа таких испытаний, в которых это произошло, к полному числу испытаний. Статистическая оценка этой вероятности при числе испытаний, равном 10000, как правило, оказывается в пределах 0,49 - 0,51 (точное значение, как мы видели при решении примера 4, равно 0,5).

В примере 6 задача поставлена чуть более широко: найти закон распределения случайной величины X - числа полученных студентом «пятёрок» на двух экзаменах. Решение этой задачи методом Монте-Карло может быть получено с помощью следующей таблицы в EXCEL:

	A	B	C	D
1	Вероятность «5» по физике		0,25	
2	Вероятность «5» по математике		0,33333333	
3	№	По физике «5»?	По математике «5»?	«Пятёрок» на двух экзаменах
4	1	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<$C$1;1;0)	=ЕСЛИ(СЛЧИС()<$C$2;1;0)	=B4+C4
5	…	…	…	…

В данном случае нам удобно отображать результат экзамена в виде двоичного кода: если оценка «5», то результат равен 1, в противном случае результат равен 0. В каждом испытании число полученных «пятёрок» суммируется. После этого необходимо подсчитать число испытаний, в которых было получено 0, 1 и 2 «пятёрки» и оценить соответствующие вероятности. Эти оценки должны быть близки к точным значениям вероятностей, полученным при решении примера 6.

Переходим к заданию 3.3. Как было отмечено выше, разыгрывание дискретной случайной величины, по сути дела, сводится к разыгрыванию полной группы событий.

В диапазон ячеек B1:E2 вводим заданный ряд распределения, в ячейку C3 - формулу, которая определяет значение случайной величины в зависимости от значения случайного числа.

	A	B	C	D	E
1		0	1	2	3
2	№	0,421875	0,421875	0,140625	0,015625
3	1	=СЛЧИС()	=ЕСЛИ(B3<$B$2;0; ЕСЛИ(B3<$B$2+$C$2;1; ЕСЛИ(B3<$B$2+$C$2+$D$2;2;3)))		
4	…	…	…	…	…

После «растягивания» таблицы для проверки подсчитайте число испытаний, в которых случайная величина приняла значения 0, 1, 2 и 3 и оцените соответствующие вероятности.

4 Дополнительное задание

Задание 4.1 Студент сдаёт тест, который включает в себя 32 задания по 8 разделам (дидактическим единицам), по 4 задания в каждом разделе. Дидактическая единица считается освоенной, если не менее чем 2 задания из 4 решены правильно. Студент считается сдавшим тест, если он освоил все 8 дидактических единиц. Известно, что студент правильно решает каждое тестовое задание с вероятностью p. С какой вероятностью он сдаст тест? Задачу решить следующими способами.

4.1.1 Аналитически найти вероятность освоения дидактической единицы как вероятность суммы несовместных событий (2, 3 или 4 правильных ответа), вычисляя отдельные слагаемые с помощью формулы Бернулли (2.5). Затем найти вероятность сдать тест как вероятность освоения всех 8 дидактических единиц. Ответ: $p_{test} = p^{16}\left(6-8p+3p^2\right)^8$.

4.1.2 Смоделировать результат выполнения каждого задания двоичным кодом: 0, если задание не выполнено; 1, если задание выполнено правильно. Организовать подсчёт правильно выполненных заданий в каждой дидактической единице и определение результата теста в целом. По серии испытаний оценить вероятность сдачи теста при заданном p .

4.1.3 Смоделировать результат прохождения каждой дидактической единицы как случайную величину, имеющую биномиальное распределение

$$P\left(X=k\right)=C_4^k p^k \left(1-p\right)^{4-k},\ k=0,1,2,3,4.$$

Определить результат теста в целом. По серии испытаний оценить вероятность сдачи теста при заданном p .

Сравнить результаты, получаемые всеми описанными способами.

5 Содержание отчета

По результатам выполненной практической работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

– цель работы;
– индивидуальное задание;
– порядок выполнения работы;
– таблицы, выполненные в Excel, содержащие формулы, по которым производятся вычисления;

– таблицы, выполненные в Excel, содержащие результаты расчетов;

– выводы по результатам исследований с анализом полученных результатов.

6 Контрольные вопросы

1. Что такое сумма событий, произведение событий, несовместные события, полная группа событий, противоположные события?

2. Запишите формулу для суммы двух событий, сформулируйте следствия из неё.

3. Что такое зависимые и независимые события?

4. Как вычисляется вероятность произведения событий?

5. Запишите и объясните смысл формулы полной вероятности.

6. Приведите примеры дискретных случайных величин.

7. Какая задача приводит к формуле Бернулли и биномиальному закону распределения?

8. Виды единичного жребия в методе Монте-Карло.

9. Проанализируйте результаты решения задания 3.1 - 3.3. Постройте график зависимости вероятности успешного прохождения всего теста данным студентом от вероятности правильного выполнения им тестовых заданий.

Практическая работа № 3
«Оценка обнаруживающих и корректирующих свойств кодов Хемминга»

1 Цель работы

- получение навыков составления кодов Хемминга и оценки его обнаруживающих и корректирующих свойств. Практическое усвоение методики кодирования цифровой информации «по Хеммингу» для заданных условий, определяющих свойства кода. Рассмотрение основных этапов реализации алгоритмов обнаружения и исправления ошибок на приемной стороне линии связи.

2 Теоретические сведения

Систематические коды представляют собой блоковые корректирующие коды, в которых информационные и проверочные символы расположены по строго определенной системе и всегда занимают строго определенные места в кодовых словах.

Наиболее известными систематическими кодами, получившими широкое практическое применение, являются коды Хэмминга.

Код Хемминга – это блочный код, позволяющий исправлять одиночные и фиксировать двойные ошибки, разработанный Ричардом Хеммингом в сороковых годах прошлого столетия.

Идея кодов Хемминга заключается в разбиении данных на блоки фиксированной длины и вводе в эти блоки контрольных бит, дополняющих до четности несколько пересекающихся групп, охватывающих все биты блока.

Ричард Хемминг рассчитал минимальное количество проверочных бит, позволяющих однозначно исправлять однократные ошибки.

Если длина информационного блока, который требуется закодировать – m бит. Количество контрольных бит, используемых для его кодирования, – k, то закодированный блок будет иметь длину: n = m+k бит. Для каждого блока такой длины возможны n различных комбинаций, содержащих ошибку. Таким образом, для каждого передаваемого информационного блока может существовать n –

блоков, содержащих однократную ошибку, и один блок – без ошибок. Следовательно, максимальное количество различных закодированных блоков, содержащих не больше одной ошибки, будет: $2^m(n+1)$, где n = m+k.

Двоичный код Хэмминга строится следующим образом:

1) Определяется число k проверочных символов из условия:

$$2^k \geq m + k + 1,$$

где m – число информационных символов.

2) Выбираются места расположения проверочных символов из условия, чтобы проверочные символы участвовали только в одной операции подсчета четности с целью упрощения процесса кодирования. Такими местами являются символы с номерами, являющиеся целыми степенями числа 2, т. е. 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. Символы в кодовых словах Хэмминга нумеруются слева направо.

3) Определяются значения символов слова, называемого синдромом:

$$S_k S_{k-1} ... S_{2S_1} \ ,$$

Из следующих уравнений:

а) $S_1 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus ... = 0$,

т. е. складываются по модулю 2 значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержит в последнем разряде 1.

б) $S_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus ... = 0,$

Складываются значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержит 1 в предпоследнем разряде.

в) $S_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus ... = 0,$

Складываются значения символов, двоичное представление номеров которых содержит 1 в третьем от конца разряде.

г) $S_4 = x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus ... = 0,$

Складываются значения символов, двоичное представление номеров которых содержит 1 в четвертом от конца разряде.

$x_1, x_2, x_3, x_4, ...$ – значения символов с номерами 1, 2, 3, 4, …

Местоположение ошибки, то есть определение символа с ошибкой осуществляется по значению синдрома. Если синдром состоит из одних нулей, т. е.

$$S_k S_{k-1} ... S_2 S_1 = 00...00 \ ,$$

То ошибка отсутствует. Если в синдроме есть символы, отличные от 0, то это говорит о наличии ошибки. Например, если $S_4 S_3 S_2 S_1 = 1000$, то это означает, что ошибка содержится в восьмом символе, так как $1000_2 = 8_{10}$.

Другими словами, синдром в коде Хэмминга определяет номер символа с ошибкой. Исправление ошибки осуществляется заменой 0 на 1 или, наоборот, 1 на 0.

Для исправления одиночной и обнаружения двойной ошибки, кроме проверок по синдрому, следует проводить еще одну проверку на четность для каждого кодового слов Хэмминга. Чтобы осуществить такую проверку, следует в конце каждого кодового слова добавить проверочный символ таким образом, чтобы сумма единиц в полученном слове всегда была четной. Тогда в случае одной ошибки проверка по синдрому укажет номер ошибочного символа, а проверка на четность укажет наличие ошибки. Если проверка по синдрому укажет на наличие ошибки, а проверка на четность не фиксирует ошибку, то в кодовом слове присутствуют две ошибки.

3 Порядок выполнения работы

Данная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к практической работе.

2) Для заданных кодовых слов построить кодовые слова Хэмминга.

3) Осуществить проверку работоспособности кода путем изменения значения одного из символов в любом кодовом слове Хэмминга.

4) Оформить и защитить отчет по выполнению практической работы.

4 Варианты заданий

Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя. Пусть требуется получить кодовые векторы Хэмминга для кодовых слов, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 – Варианты заданий для получения кодовых слов Хэмминга

Вариант	Передаваемые кодовые слова		
1	0010101	0111001	1000001
2	0001110	0100010	0001110
3	1100110	1011101	0100010
4	0101010	0100000	1101101
5	1111000	1000001	0010101
6	0000111	0001110	0001110
7	0111001	0100010	1100110
8	0100010	1101101	0101010
9	1011101	0010101	1111000
10	0100000	0001110	0100000
11	1000001	1100110	1100110
12	0001110	0101010	0101010
13	0100010	1111000	1111000
14	1101101	0100000	0100000
15	0101110	1000001	1000001

5 Содержание отчета

По результатам выполненной практической работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

- цель работы;
- индивидуальное задание;
- порядок выполнения работы;
- таблицы, выполненные в Excel, содержащие формулы, по которым производятся вычисления;

– таблицы, выполненные в Excel, содержащие результаты расчетов;

– выводы по результатам исследований с анализом полученных результатов.

6 Контрольные вопросы

1) Какие коды называют систематическими?

2) Сколько ошибок способен обнаруживать и исправлять код Хэмминга?

3) По какому правилу определяют число проверочных символов в коде Хэмминга?

4) В каких местах располагаются проверочные символы в кодовых словах Хэмминга?

5) По какому правилу строятся уравнения для нахождения проверочных символов в коде Хэмминга?

6) Какую информацию при декодировании кода Хэмминга дает синдром?

7) Каким образом обеспечивается обнаружение двойных ошибок в кодовых словах Хэмминга?

Практическая работа №4
«Практическое ознакомление с применением корректирующих кодов»

1 Цель работы

- практическое ознакомление с применением корректирующих кодов. Исследованию подлежат: вес кода; кодовое расстояние; код с проверкой на четность.

2 Теоретическое введение

Корректирующими называются коды, позволяющие обнаруживать и исправлять ошибки. Идею представления корректирующих кодов можно представить с помощью N-мерного куба. Возьмем трехмерный куб (рисунок 1), длина ребер, в котором равна одной единице. Вершины такого куба отображают двоичные коды. Минимальное расстояние между вершинами определяется минимальным количеством ребер, находящихся между вершинами. Это расстояние называется кодовым (или хэмминговым) и обозначается буквой d.

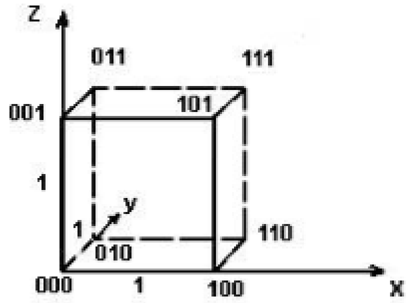


Рисунок 1 – Представление двоичных кодов с помощью куба

Иначе, кодовое расстояние – это то минимальное число элементов, в которых одна кодовая комбинация отличается от другой. Для определения кодового расстояния достаточно сравнить две кодовые комбинации по модулю 2. Так, сложив две комбинации:

$$+\ 10110101101$$

$$\begin{array}{r} \underline{11001010101} \\ 01111111000 \end{array}$$

определим, что расстояние между ними d=7.

Заметим, что кодовое расстояние d между комбинацией Xi и нулевой комбинацией X_0 = 00..0 называют весом W комбинации X_i, т.е. вес X_i равен числу "1" в ней. Для кода с N=3 восемь кодовых комбинаций размещаются на вершинах трехмерного куба. Такой код имеет кодовое расстояние d=1, и для передачи используются все восемь кодовых комбинаций 000,001,..,111. Такой код является не помехоустойчивым, он не в состоянии обнаружить ошибку.

Если выберем комбинации с кодовым расстоянием d=2, например, 000,110,101,011, то такой код позволит обнаруживать однократные ошибки. Назовем эти комбинации разрешенными, предназначенными для передачи информации. Все остальные 001,010,100,111 - запрещенные.

Любая одиночная ошибка приводит к тому, что разрешенная комбинация переходит в ближайшую, запрещенную комбинацию (см. рисунок 2). Получив запрещенную комбинацию, мы обнаружим ошибку. Выберем далее вершины с кодовым расстоянием d=3

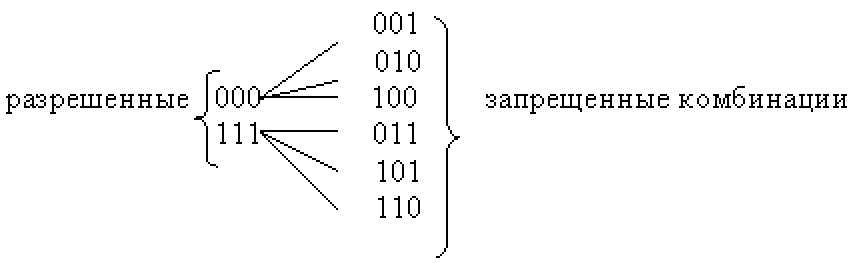


Рисунок 2 – Запрещенные комбинации

Такой код может исправить одну одиночную ошибку или обнаружить две ошибки. Таким образом, увеличивая кодовое расстояние можно увеличить помехоустойчивость кода. В общем случае кодовое расстояние определяется по формуле $d=t + l + 1$ где t - число исправляемых ошибок , l - число обнаруживаемых ошибок. Обычно $l>t$.

Большинство корректирующих кодов образуются путем добавления к исходной k - комбинации r - контрольных символов. В итоге в линию передаются $n=k+r$ символов. При этом корректирующие коды называются (n,k) кодами. Как можно определить необходимое число контрольных символов?

Для построения кода способного обнаруживать и исправлять одиночную ошибку необходимое число контрольных разрядов будет составлять $n-k \geq \log_2(n+1)$. Это равносильно известной задаче о минимуме числа контрольных вопросов, на которые могут быть даны ответы вида "да" или "нет", для однозначного определения одного из элементов конечного множества.

Если необходимо исправить две ошибки, то число различных исходов будет составлять C^2_n. Тогда $n-k \geq \log_2(1+C^1_n+C^2_n)$, в этом случае обнаруживаются однократные и двукратные ошибки. В общем случае, число контрольных символов должно быть не меньше

$$n-k \geq \log(1+C_n^1+C_n^2+...+C_n^t)=\log\sum_{i=0}^{t}C_n^i \qquad (1)$$

Формула 1 называется неравенством Хэмминга, или нижней границей Хэмминга для числа контрольных символов.

К основным характеристикам корректирующих кодов относятся:

- число разрешённых и запрещённых кодовых комбинаций;
- избыточность кода;
- число обнаруживаемых или исправляемых ошибок;
- минимальное кодовое расстояние;
- корректирующие возможности кодов.

Для блочных двоичных кодов, с числом символов в блоках равным n, общее число возможных кодовых комбинаций определяется значением

$$N_o = 2^n \qquad (2)$$

Число разрешённых кодовых комбинаций при наличии k информационных разрядов в первичном коде равно

$$N_k = 2^k \qquad (3)$$

Очевидно, что число запрещённых комбинаций равно:

$$N_з = N_o - N_k = 2^n - 2^k \qquad (4)$$

а с учётом r=n-k отношение будет:

$$N_o / N_k = 2^{n-k} = 2^r \qquad (5)$$

где *r* – число избыточных (проверочных) разрядов в блочном коде.

Избыточностью корректирующего кода называют величину

$$\chi = \frac{r}{n} = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} \qquad (6)$$

откуда следует:

$$B_k = \frac{k}{n} = 1 - \chi \qquad (7)$$

Эта величина показывает, какую часть общего числа символов кодовой комбинации составляют информационные символы. В теории кодирования величину B_k называют относительной скоростью кода. Если производительность источника информации равна H символов в секунду, то скорость передачи после кодирования этой информации окажется равной,

$$B = H \cdot \frac{k}{n}, \tag{8}$$

поскольку в закодированной последовательности из каждых n символов только k – символов являются информационными.

Если число ошибок, которые нужно обнаружить или исправить, значительно, то необходимо иметь код с большим числом проверочных символов. Чтобы при этом скорость передачи оставалась достаточно высокой, необходимо в каждом кодовом блоке одновременно увеличивать как общее число символов, так и число информационных символов. При этом длительность кодовых блоков будет существенно возрастать, что приведёт к задержке информации при передаче и приёме. Чем сложнее кодирование, тем длительнее временная задержка информации.

При применении двоичных кодов учитывают только дискретные искажения, при которых единица переходит в нуль ($1 \rightarrow 0$) или нуль переходит в единицу ($0 \rightarrow 1$). Переход $1 \rightarrow 0$ или $0 \rightarrow 1$ только в одном элементе кодовой комбинации называют единичной ошибкой (единичным искажением). В общем случае под кратностью ошибки подразумевают число позиций кодовой комбинации, на которых под действием помехи одни символы оказались заменёнными на другие. Возможны двукратные ($g = 2$) и многократные ($g > 2$) искажения элементов в кодовой комбинации в пределах $0 \le g \le n$.

Минимальное кодовое расстояние является основным параметром, характеризующим корректирующие способности данного кода. Если код используется только для обнаружения ошибок кратностью g0, то необходимо и достаточно, чтобы минимальное кодовое расстояние было равно

$$d_{min} \geq g_0 + 1. \tag{9}$$

В этом случае никакая комбинация изg0 ошибок не может перевести одну разрешённую кодовую комбинацию в другую разрешённую. Таким образом, условие обнаружения всех ошибок кратностью g0 можно записать в виде:

$$g_0 \leq d_{min} - 1. \tag{10}$$

Чтобы можно было исправить все ошибки кратностью gи и менее, необходимо иметь минимальное расстояние, удовлетворяющее условию

$$d_{min} \geq 2 \cdot g_i + 1. \tag{11}$$

В этом случае любая кодовая комбинация с числом ошибок g_i отличается от каждой разрешённой комбинации не менее чем в g_{i+1} позициях. Если условие (11) не выполнено, возможен случай, когда ошибки кратности g исказят переданную комбинацию так, что она станет ближе к одной из разрешённых комбинаций, чем к переданной или даже перейдёт в другую разрешённую комбинацию. В соответствии с этим, условие исправления всех ошибок кратностью не более g_i можно записать в виде:

$$g_i \leq \left(d_{min} - 1\right) \ / \ 2. \tag{12}$$

Из (9) и (11) следует, что если код исправляет все ошибки кратностью g_i, то число ошибок, которые он может обнаружить, равно $g_0 = 2 \cdot g_i$. Следует отметить, что соотношения (9) и (11) устанавливают лишь гарантированное минимальное число обнаруживаемых или исправляемых ошибок при заданном d_{min} и не ограничивают возможность обнаружения ошибок большей кратности. Например, простейший код с проверкой на чётность с $d_{min} = 2$ позволяет обнаруживать не только одиночные ошибки, но и любое нечётное число ошибок в пределах $g_0 < n$.

Вопрос о минимально необходимой избыточности, при которой код обладает нужными корректирующими свойствами, является одним из важнейших в теории кодирования. Этот вопрос до сих пор не получил полного решения. В настоящее время получен лишь ряд верхних и нижних оценок (границ), которые устанавливают связь между максимально возможным минимальным расстоянием корректирующего кода и его избыточностью.

Так, граница Плоткина даёт верхнюю границу кодового расстояния d_{min} при заданном числе разрядов n в кодовой комбинации и числе информационных разрядов k, и для двоичных кодов:

$$d_{\min} \le \frac{n \cdot 2^{k-1}}{2^k - 1} \tag{13}$$

или

$$r \ge 2 \cdot (d_{min} - 1) - log_2 d_{min} \tag{14}$$

при $n \ge 2 \cdot d_{min} - 1$.

Верхняя граница Хемминга устанавливает максимально возможное число разрешённых кодовых комбинаций (2^k) любого помехоустойчивого кода при заданных значениях n и d_{min}:

$$2^k \le 2^n / \sum_{i=0}^{\frac{d_{\min}-1}{2}} C_n^i \qquad (15)$$

где C_i^n- число сочетаний из n элементов по i элементам.

Отсюда можно получить выражение для оценки числа проверочных символов:

$$r \ge \log_2 (\sum_{i=0}^{\frac{d_{\min}-1}{2}} C_n^i) \qquad (16)$$

Для значений (d_{min}/n) ≤0.3 разница между границей Хемминга и границей Плоткина сравнительно невелика. Граница Варшамова-Гильберта для больших значений n определяет нижнюю границу для числа проверочных разрядов, необходимого для обеспечения заданного кодового расстояния:

$$r \ge \log_2 (\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i) \qquad (17)$$

Отметим, что для некоторых частных случаев Хемминг получил простые соотношения, позволяющие определить необходимое число проверочных символов:

$r \ge \log_2(n + 1)$ для $d_{min}= 3$,
$r \ge \log_2(2n)$ для $d_{min}= 4$.

Все приведённые выше оценки дают представление о верхней границе числа d_{min} при фиксированных значениях n и k или оценку снизу числа проверочных символов r при заданных k и d_{min}.

Существующие методы построения избыточных кодов решают в основном задачу нахождения такого алгоритма кодирования и декодирования, который позволял бы наиболее просто построить и реализовать код с заданным значением d_{min}. Поэтому различные корректирующие коды при одинаковых d_{min} сравниваются по сложности кодирующего и декодирующего устройств. Этот критерий является в ряде случаев определяющим при выборе того или иного кода.

Поясним идею проверки на чётность на примере простейшего корректирующего кода, который так и называется кодом с проверкой на чётность или кодом с проверкой по паритету (равенству).

В таком коде к кодовым комбинациям безизбыточного первичного двоичного k - разрядного кода добавляется один дополнительный разряд (символ проверки на чётность, называемый проверочным, или контрольным). Если число символов “1” сходной кодовой комбинации чётное, то в дополнительном разряде формируют контрольный символ 0, а если число символов “1” нечётное, то в дополнительном разряде формируют символ 1. В результате общее число символов “1” в любой передаваемой кодовой комбинации всегда будет чётным.

Таким образом, правило формирования проверочного символа сводится к следующему:

$$r_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k,$$

где i - соответствующий информационный символ(0 или1), k - общее их число, а под операцией"$\oplus$" здесь и далее понимается сложение по mod 2. Очевидно, что добавление дополнительного разряда увеличивает общее число возможных комбинаций вдвое по сравнению с числом комбинаций исходного первичного кода, а условие чётности разделяет все комбинации на разрешённые и не-разрешённые. Код с проверкой на чётность позволяет обнаруживать одиночную ошибку при приёме кодовой комбинации, так как такая ошибка нарушает условие чётности, переводя разрешённую комбинацию в запрещённую.

Критерием правильности принятой комбинации является равенство нулю результата S суммирования по mod 2 всех n символов кода, включая проверочный символ r_1. При наличии одиночной ошибки S принимает значение 1:

$$S = \underbrace{r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k}_{n} = \begin{cases} 0 - \textit{ошибки нет} \\ 1 - \textit{единичная ошибка} \end{cases}$$

Этот код является (k+1, k) – кодом, или (n, n-1) – кодом. Минимальное расстояние кода равно двум ($d_{min}=2$), и, следовательно, никакие ошибки не могут быть исправлены. Простой код с проверкой на чётность может использоваться только для обнаружения (но не исправления) однократных ошибок.

Увеличивая число дополнительных проверочных разрядов и формируя по определённым правилам проверочные символы r, равные 0 или 1, можно усилить корректирующие свойства кода так, чтобы он позволял не только обнаруживать, но и исправлять ошибки.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Исследование веса кодовой комбинации

1) Для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную необходимо в среде Mathcad задать функцию binary(x), где x – число в десятичной системе счисления. Пример реализации подобной функции представлен на рисунке 3;

$$
\mathrm{Binary}(N) := \left|\begin{array}{l}
p \leftarrow \mathrm{floor}\left(\dfrac{\ln(N)}{\ln(2)}\right) \\
\text{for } i \in 0..p \\
\quad b_{p-i} \leftarrow \mathrm{mod}\left(\mathrm{floor}\left(\dfrac{N}{2^i}\right), 2\right) \\
b^T
\end{array}\right.
$$

Рисунок 3 – Пример реализации функции binary

2) Проверьте работоспособность заданной функции;

3) В качестве исследуемой кодовой комбинации используйте дату рождения вашей мамы (например, 01.01.1970);

4) Переведите полученное число в двоичную систему счисления при помощи заданной ранее функции binary;

5) Посчитайте количество единиц в получившемся числе при помощи встроенной функции Mathcad “Сумма вектора”, которая находится в блоке “Векторы и матрицы” на Панели инструментов.

3.2 Исследование кодового расстояния:

1) В качестве исследуемых кодовых комбинаций используйте вашу дату рождения (например, 01.01.1995) и дату через 400 дней от вашей даты рождения;

2) Переведите полученные числа в двоичную систему счисления с помощью функции binary. Присвойте двум переменным получившиеся значения;

3) Для поразрядного сложения полученных чисел необходимо задать функцию XOR(x,y), где x – первое число, y – второе. Пример реализации подобной функции представлен на рисунке 4.

$$
\mathrm{XOR}(x,y) := \left|\begin{array}{l}
z \leftarrow 0 \\
\text{for } i \in 0..\mathrm{rows}(x) - 1 \\
\quad z_i \leftarrow x_i \oplus y_i \\
z
\end{array}\right.
$$

Рисунок 4 – Пример реализации функции xor

4) Посчитайте количество единиц в получившемся числе при помощи встроенной функции Mathcad “Сумма вектора”, которая находится в блоке “Векторы и матрицы” на Панели инструментов.

3.3 Исследование кода с проверкой на четность

1) В качестве исследуемой кодовой комбинации используйте ваш номер телефона без 8 (например, 9031112233);

2) Переведите полученное число в двоичную систему счисления с помощью функции binary. Присвойте переменной получившееся значение;

3) Посчитайте количество единиц в получившемся числе при помощи встроенной функции Mathcad “Сумма вектора”, которая находится в блоке “Векторы и матрицы” на Панели инструментов;

4) Транспонируйте полученную матрицу при помощи встроенной функции Mathcad “Транспонирование матрицы”, которая находится в блоке “Векторы и матрицы” на Панели инструментов;

5) Для транспонированной матрицы примените функцию reverse(T), где T – транспонированная матрица;

6) Необходимо добавить контрольный разряд. Для этого необходимо задать элемент T с индексом (n-1,0), где n – число разрядов в двоичном числе. Значения этого элемента зависит от того результата, который вы получили в шаге 3.3: если число четное, то контрольному разряду присваивается значение 0, нечетное – единица;

7) Для вывода скорректированного кода, необходимо выполнить обратные преобразования: для полученной матрицы используем функцию reverse(T), где T - транспонированная матрица, а затем транспонируем ее. Если все выполнено верно, то контрольный разряд окажется у вас старшим.

4 Содержание отчета

По результатам выполненной практической работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

– цель работы;

– индивидуальное задание;
– порядок выполнения работы;
– таблицы, выполненные в Excel, содержащие формулы, по которым производятся вычисления;
– таблицы, выполненные в Excel, содержащие результаты расчетов;
– выводы по результатам исследований с анализом полученных результатов.

5 Контрольные вопросы

1) Что называют корректирующими кодами?
2) Что такое кодовое расстояние и как его вычислить для двух кодовых комбинаций?
3) Что называют весом кодовой комбинации?
4) Назовите основные характеристики корректирующих кодов?
5) Что такое число разрешенных и запрещенных комбинаций?
6) Что такое избыточность корректирующего кода и относительная скорость кода?
7) Какой смысл имеют верхние границы Плоткина и Хэмминга?
8) Что такое граница Варшамова-Гилберта и чему она равна d_{min}=3 и 4?
9) В чем смысл кода с проверкой на четность? Охарактеризуйте его на примере трехразрядного кода с числом разрешенных комбинаций равным четырем.

Практическая работа №5
«Расчёт пропускной способности дискретного и непрерывного каналов связи»

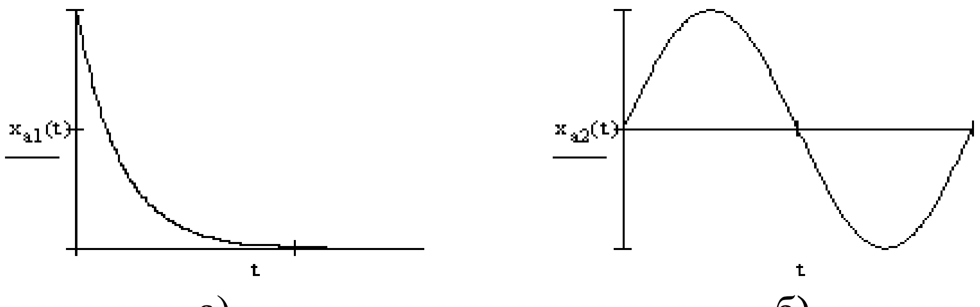
1 Цель работы

1) Провести анализ пропускной способности каналов связи.

2) Вычислить пропускную способность дискретного и непрерывного канала по заданным вариантам.

2 Теоретические сведения

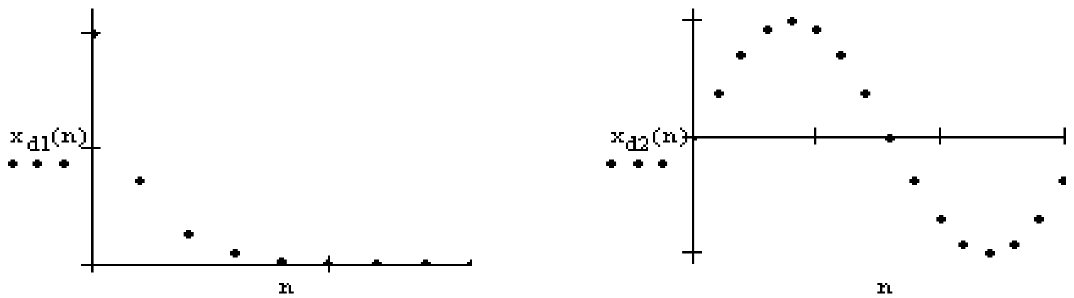
В современный телекоммуникационных системах имеются два вида каналов связи: дискретный и непрерывный. Они определяются типом сигналов, идущим по ним. Под сигналом понимается физический процесс (например, изменяющееся во времени напряжение), отображающий некоторую информацию или сообщение. Математически сигнал описывается функцией определенного типа. Аналоговые сигналы описываются непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией $x_a(t)$, причем сама функция и аргумент t могут принимать любые значения на некоторых интервалах $x^t{}_a \le x \le x^{tt}{}_a, t^t \le t \le t^{tt}$. . На рисунке 1 а представлен пример аналогового сигнала, изменяющегося во времени по закону $x_a(t) = A \cdot e^{-a(t)}$, где $A = 1, \alpha \succ 0$. Другой пример аналогового сигнала, показанный на рисунке 1 б, изменяется во времени по закону $x_a(t) = U_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$.



а) б)

Рисунок 1 – Аналоговые сигналы

Дискретные сигналы отличаются от аналоговых тем, что их значения известны лишь в дискретные моменты времени. Дискретные сигналы описываются решетчатыми функциями – последовательностями – $x_д(n \cdot t)$, где t =const – интервал (период) дискретизации, n=0,1,2,…. Сама функция $x_д(n \cdot t)$ может в дискретные моменты принимать произвольные значения на некотором интервале. Эти значения функции называются выборками или отсчетами функции. Другим обозначением решетчатой функции $x_д(n \cdot t)$ является x(n) или x_n. На рисунке 2 (а и б) представлены примеры решетчатых функций $x_д(t) = A \cdot e^{-a(t)}$ и $x_д(t) = U_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. Последовательность x(n) может быть конечной или бесконечной, в зависимости от интервала определения функции.



а б

Рисунок 2 – Дискретные сигналы

Важной характеристикой калана связи, как дискретного, так и непрерывного является его пропускная способность. Чем выше скорость передачи данных и ниже вероятность битовой ошибки, тем эффективнее система связи. Наибольшая возможная в данном канале скорость передачи информации называется его пропускной способностью. Пропускная способность канала есть скорость передачи информации при использовании «наилучших» (оптимальных) для данного канала источника, кодера и декодера, поэтому она характеризует только канал. С передачей одного элементарного сигнала связано некоторое количество информации I(s). Если общее число различных элементарных сигналов n, а вероятности их появления $p(a_i)$ (i = 1...n), то согласно формуле Шеннона:

$$I_s = -\sum_{i=1}^{n} p(a_i) \cdot \log_2 p(a_i) \qquad (1)$$

Однако, как обсуждалось выше, оптимальным будет такой вариант кодирования, при котором появление всех элементарных сигналов (знаков вторичного алфавита) оказывается равновероятным – в таком случае:

$$I_s = I_s \max = \log_2 n \qquad (2)$$

Это значение является предельным (наибольшим) для информационного содержания элементарного сигнала выбранного вторичного алфавита. Поскольку такое количество информации передается за время τ, можно ввести величину, характеризующую предельную интенсивность информационного потока через канал – пропускную способность канала С:

$$C = \frac{I_s^{\max}}{t} = L \cdot I_s^{\max} \qquad (3)$$

Данная величина является характеристикой канала связи, поскольку зависит только от его особенностей. Это выражение служит определением пропускной способности как идеального канала (без помех), так и реального канала с помехами – просто, как мы увидим далее, информационное содержание элементарного сигнала в реальном канале оказывается меньше $\log_2 n$.

Если $I_s \max$ выражено в битах, а t0 – в секундах, то единицей измерения С будет бит/с. Раньше такая единица называлась *бод*, однако, название не прижилось, и по этой причине пропускная способность канала связи измеряется в *бит/с*. Производными единицами являются:

1 Кбит/с = 10^3 бит/с;
1 Мбит/с = 10^6 бит/с;
1 Гбит/с = 10^9 бит/с.

При отсутствии в канале связи помех $I_s \max = \log_2 n$; тогда $C = L \cdot \log_2 n = \frac{\log_2 n}{t} = v_m \cdot \log_2 n$ – максимально возможное значение пропускной способности (это обстоятельство отражено индексом "0"); в реальном канале $I_s \max \le \log_2 n$ и, следовательно, C ≤C0.

Пропускная способность дискретного m-ичного канала определяется выражением:

$$C_{дк} = V \cdot \left[\log_2 n + p \cdot \log_2 n \frac{p}{n-1} + (1-p)\log_2(1-p) \right] \quad (4)$$

где: V - скорость модуляции, [Бод]

p - вероятность ошибки сигналов в канале

n - число вариантов кодовых символов (основание кода, например m=2, 4, 8, 16, ...)

Пропускная способность двоичного канала (т.е. при n=2) определяется выражением:

$$C_{ддк} = V \cdot \left[1 + p \cdot \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\right] \quad (5)$$

При расчетах необходимо учитывать, что микрокалькуляторы и программа Mathcad производят вычисления только с десятичными и натуральными логарифмами.

Для перехода от десятичного к двоичному логарифму необходимо воспользоваться выражением:

$$\log_2 p = \frac{\log_{10} p}{\log_{10} 2} \text{ [Бит]} \quad (6)$$

Пропускная способность непрерывного канала определяется выражением:

$$C_{нк} = F_k \cdot \log_2 \left[1 + \frac{P_c}{P_ш} \right] \qquad (7)$$

где: F – полоса пропускания канала, [Гц], $\frac{P_c}{P_ш} = h$ – отношение мощности сигнала к мощности шума в канале (ОСШ).

3 Задание на практическую работу

Номер варианта студента определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

1) Вычислить пропускную способность дискретного m-ичного канала по заданным вариантам.

2) Вычислить пропускную способность непрерывного канала по заданным вариантам.

|Таблица 1 – Варианты заданий

Вариант по списку (N)	Вероятность ошибки сигналов в канале (p)	Основание кода	Скорость модуляции в Битах	Полоса пропускания канала	Мощность сигнала	Мощность шума
1	0.(10modN)	2	50	3100	10^7	7500
2	0.(10modN)	4	100	6000	10^8	7700
3	0.(10modN)	8	200	12000	10^9	8500
4	0.(10modN)	16	50	3100	10^7	9500
5	0.(10modN)	32	100	6000	10^8	7500
6	0.(10modN)	2	200	12000	10^9	7700
7	0.(10modN)	4	50	3100	10^9	8500
8	0.(10modN)	8	100	6000	10^8	9500
9	0.(10modN)	16	200	12000	10^7	7500
10	0.(10modN)	32	50	3100	10^7	7700
11	0.(10modN)	2	100	6000	10^8	8500
12	0.(10modN)	4	200	12000	10^9	9500
13	0.(10modN)	8	50	3100	10^9	7500
14	0.(10modN)	16	100	6000	10^8	7700
15	0.(10modN)	32	200	12000	10^7	8500
16	0.(10modN)	2	50	3100	10^7	9500
17	0.(10modN)	4	100	6000	10^8	7500

18	0.(10modN)	8	200	12000	10^9	7700
19	0.(10modN)	16	50	3100	10^9	8500

4 Работа с MathCad

Следует познакомить MathCad с величинами, которыми мы будем оперировать. Для этого введем в рабочем поле наши величины, и присвоим им численные значения (взяты значения варианта №8): $p := 0.2 \;\; n := 8 \;\; V := 100$, p вычисляется как ноль целых, а его десятичная часть – остаток от деления 10 на номер варианта.

Затем нужно посчитать пропускную способность дискретного m-ичного канала, воспользовавшись формулой:

$$C_{дк} = V \cdot \left[\log_2 n + p \cdot \log_2 n \frac{p}{n-1} + (1-p)\log_2(1-p) \right].$$

Необходимо правильно ввести ее в среду MathCad, не забывая о том, что данная программа не может считать логарифмы по основанию 2. Учитывая сей факт, формула в среде MathCad будет иметь следующий вид:

$$C := V \cdot \left[\left[\frac{\log(n)}{\log(2)} + p \cdot \frac{\log\left[\frac{(n \cdot p)}{n-1}\right]}{\log(2)} + (1-p) \cdot \frac{\log(1-p)}{\log(2)} \right] \right].$$

Для расчета пропускной способности непрерывного канала связи воспользуемся формулой:

$$Cнк = F_k \cdot \log_2 \left[1 + \frac{P_c}{P_ш} \right]$$

Для вывода на экран результата вычисления нужно ввести “C=”.

5 Контрольные вопросы

1) Дайте определение сигнала.
2) Чем отличаются дискретные и двоичные сигналы?

3) Дайте определение пропускной способности канала.

4) Формула максимального значения пропускной способности канала.

5) Формула пропускной способности непрерывного канала.

6) Формула пропускной способности дискретного канала.