МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«__8__»___11___________2024 г.

Нейронные сети и нечёткие системы

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Нейронные сети и нечёткие системы» для студентов направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Курск 2024

УДК 004

Составители: Добрица В.П. Халин Ю.А.

Рецензент

к.т.н., доцент Титенко Е.А.

Нейронные сети и нечёткие системы: методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, Ю.А. Халин. – Курск, 2024. – 15 с.: Библиогр.: с. 15.

Содержат сведения по вопросам теории нейронных сетей и нечётких систем. Указывается порядок проведения практических занятий, правила оформления, содержание отчета.

Методические указания по проведению практических занятий по дисциплине «Нейронные сети и нечёткие системы» предназначены для студентов направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 8.11.24. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ.л. 1,3. Уч. –изд.л. 1,07. Тираж 50 экз. Заказ 1259.

Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

В данных методических рекомендациях изложены материалы по разделу «Однослойные нейронные сети» курса «Нейронные сети и нечёткие системы».

Рассмотрены следующие темы: выпуклые множества и их свойства, правило Хебба обучения нейронных сетей, правило Хебба в матричной форме, обучение нейронных сетей по правилу Розенблатта, обучение нейронных сетей с помощью псевдо обратных матриц, алгоритм Видроу - Хоффа обучения нейронных сетей.

По каждой теме представлены:

1) краткие теоретические положения;
2) перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3) задачи, выносимые на самостоятельную работу магистров.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Нейронные сети и нечёткие системы (математическое основы нейросетевого моделирования)» для направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

При выполнении практических заданий в каждой задаче магистру необходимо выбрать задание своего варианта. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Сделанные выводы обосновать. Отчет по работе должен содержать решения задач с полным обоснованием. Отчет по работе оформить на листах формата А4. На титульном листе должно быть указано: Университет, факультет, кафедра, предмет, номер практического занятия, группа, исполнитель, проверяющий.

Работа № 1 Геометрический метод обучения нейронных сетей.

Цель: изучить геометрический метод обучения нейронных сетей.

Краткие теоретические сведения

Обозначим через R^n - мерное векторное пространство. Каждая точка этого пространства $A(x_1, \dots, x_n)$ отождествляется с вектором $\overline{OA}$. Отрезком [A,B] между двумя точками $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(y_1, \dots, y_n)$ называется множество таких точек $C(z_1, \dots, z_n)$, для которых существует значение $0 \leq \gamma \leq 1$, что для каждого i выполняется равенство $z_i = (1-\gamma)x_1 + \gamma y_i$.

Множество $M \subseteq R^n$ называется выпуклым, если для любых двух точек $A, B \in M$ множества M весь отрезок [A,B] содержится в множестве M, т.е. $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \subseteq M$.

Пересечение выпуклых множеств является выпуклым.

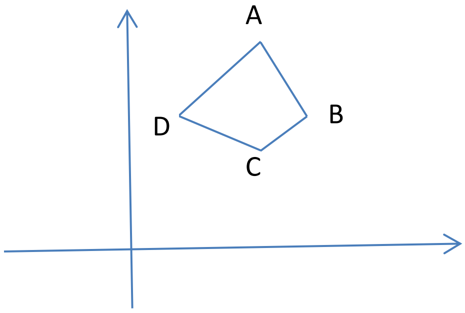
Гиперплоскость, заданная уравнением $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, разделяет все пространство R^nна два полупространства M_1 и M_2 таких, что множество Г решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ является границей между ними, $M_1 \cup \Gamma \cup M_2 = R^n$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cap \Gamma = \emptyset$, $M_2 \cap \Gamma = \emptyset$, и координаты точек одного из них делают левую часть уравнения положительной, а для другого – отрицательной. Соответственно они и называются положительным полупространством и отрицательным полупространством. Каждое из полу пространств с данной границей можно сделать и положительным и отрицательным. Достаточно просто поменять знаки коэффициентов в уравнении, задающем границу.

Если в однослойной нейронной сети с n входами и одним выходом определить функцию активации как пороговую знаковую, то эта сеть будет выделять эти полупространства, причем одно из них будет объединено с границей.

$$y = sign(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = \begin{cases} 1, \text{если} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a \geq 0, \\ 0, \text{если } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a < 0. \end{cases}$$

Такая нейронная сеть распознает в каком полупространстве находится точка по координатам этой точки.

Для двух и тех мерных пространств такой подход позволяет выделять выпуклые многоугольники и многогранники геометрическим методом. Поясним это на примере для плоскости.



Сначала строятся по сторонам многоугольника нейросети, определяющие положительной ту полуплоскость, в которой лежит данный многоугольник. В данном случае их будет $n = 4$. Обозначим выходные нейроны через $y_1, y_2, y_3 y_4$. Затем они объединяются в одну нейронную сеть с двумя входами $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ для каждого из нейронов $y_1, y_2, y_3 y_4$ и одним выходным нейроном y, функция активации которого задается формулой:

$$y = sign(y_1 + \cdots + y_n - (n - 0{,}5)).$$

Эта нейросеть будет давать значение 1 только для координат точек, лежащих в данном многоугольнике.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Нахождение прямой, проходящей через две данные точки.
2. Нахождение нейронной сети, выделяющей данную полуплоскость.
3. Нахождение нейронной сети, выделяющей данный многоугольник.

Практические задания по вариантам

Задача № 1. Используя геометрический метод обучения настроить однослойную нейронную сеть для указанной функции при подходящей функции активации.

Номер варианта	Функция
1	Логическая функция дизъюнкции.
2	Логическая функция конъюнкции.
3	Логическая функция импликации.
4	Логическая функция «штрих Шеффера».
5	Логическая функция «стрелка Пирса».
6	Логическая функция дизъюнкции в биполярном случае.
7	Логическая функция конъюнкции в биполярном случае.
8	Логическая функция импликации в биполярном случае.
9	Логическая функция «штрих Шеффера» в биполярном случае.
10	Логическая функция «стрелка Пирса» в биполярном случае.

Задача № 2. Подобрать подходящую нейронную сеть и провести её обучение геометрическим методом для задачи распознавания внутренней области выпуклого многоугольника с указанными вершинами.

Номер варианта	Координаты вершин многоугольника.
1	A(-1,-1), B(0,4), C(5,1), Д(4,-2), E(1,-3).
2	A(1,0), B(1,4), C(4,3), Д(2,1), E(-1,3).
3	A(-1,2), B(0,4), C(5,4), Д(4,2), E(1,-3).
4	A(-1,-1), B(0,4), C(5,1), Д(4,-2).
5	A(1,0), B(1,4), C(4,3), Д(2,2).
6	A(-1,2), B(0,4), C(5,4), Д(4,2).
7	A(-1,2), B(0,4), C(5,4).
8	A(1,0), B(1,4), C(4,3).
9	A(-1,-1), B(0,4), C(5,1).
10	C(5,1), Д(4,-2), E(1,-3).

Работа №2. Правило Хебба обучения нейронных сетей.

Цель: изучить правило Хебба обучения нейронных сетей. Понять и научиться применять матричную форму правила Хебба.

Краткие теоретические сведения.

Правило Хебба применяется для обучений однослойной нейронной сети. Оно основано на том, что связь между нейронами усиливается только тогда, когда оба нейрона находятся в активном состоянии. Активное состояние нейрона будем характеризовать значением 1, а пассивное – 0 или -1. Это обучение с учителем, поэтому должна быть задана обучающая серия. Обучение проводится по обучающей серии ровно одним проходом.

Формулы корректировки весовых коэффициентов между i-м входным нейроном и j – м выходным нейроном выглядят так:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + x_i^{t+1} y_j^{t+1},$$

$$T_j(t+1) = T_j(t) - y_j^{t+1},$$

причем, начальные значения рекомендуется выбирать так $w_{ij}(0) = 0$ а $T_j(0)$ = n, т.к. весовые коэффициенты в процессе обучения могут только возрастать, а пороговые значения – убывать.

Если рассматривается биполярный случай, кода используются значения 1 и -1, все начальные значения можно выбирать равными 0, т.к. в биполярном случае весовые коэффициенты и пороговые значения могут как возрастать, так и убывать.

Собрав эти вычисления за все время обучение и представив их в виде матриц, то итоговая формула обучения в виде матриц будет выглядеть так:

$$\bar{W} = \overline{W(0)} + \bar{X}^T \bar{Y},$$

где матрица $\bar{X}$ входных значений транспонируется.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Правило Хебба обучения однослойной нейронной сети.
2. Умножение матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Обучение нейронной сети по правилу Хебба в матричной форме.

Практические задания по вариантам

Задача № 1. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанной функции по правилу Хебба.

Номер варианта	Функция
1	Логическая функция «штрих Шеффера» в биполярном случае.
2	Логическая функция «стрелка Пирса» в биполярном случае.
3	Логическая функция дизъюнкции в биполярном случае.
4	Логическая функция конъюнкции в биполярном случае.
5	Логическая функция импликации в биполярном случае.
6	Логическая функция «стрелка Пирса».
7	Логическая функция «штрих Шеффера».
8	Логическая функция конъюнкции.
9	Логическая функция дизъюнкции.
10	Логическая функция импликации.

Задача № 2. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанной функции по правилу Хебба в матричной форме.

Номер варианта	Функция
1	Логическая функция «стрелка Пирса».
2	Логическая функция импликации.
3	Логическая функция «штрих Шеффера».
4	Логическая функция дизъюнкции.
5	Логическая функция конъюнкции.
6	Логическая функция импликации в биполярном случае.
7	Логическая функция дизъюнкции в биполярном случае.
8	Логическая функция «стрелка Пирса» в биполярном случае.
9	Логическая функция конъюнкции в биполярном случае.
10	Логическая функция «штрих Шеффера» в биполярном случае.

Работа №3. Правило Розеблатта. Псевдо обратные матрицы.

Цель: освоить алгоритм Розенблатта обучения нейронных сетей; научиться применять псевдо обратные матрицы для обучения нейронных сетей.

Краткие теоретические сведения.

Алгоритм Розенблатта является усовершенствованием правила Хебба. В этом случае обучение носит итерационный характер. Он продолжается до тех пор, пока не произойдет стабилизация весовых коэффициентов и пороговых значений для всей обучающей серии. Кроме того вводится коэффициент скорости обучения α, который выбирается из промежутка (0, 1). Весовые коэффициенты и пороговый значения на каком-то шаге могут не изменяться, если эталонное значение для выходного нейрона y_j^t (из обучающей серии) совпадает с вычисленным значением этого нейрона при предыдущих значениях весовых коэффициентов и порогового значения:

$$\widetilde{y_j^t} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(t-1)x_i^t - T_j(t-1).$$

Другими словами, если выполняется равенство $y_j^t = \widetilde{y_j^t}$, то полагаем

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) \text{ и } \quad T_j(t) = T_j(t-1).$$

В случае, когда $y_j^t \neq \widetilde{y_j^t}$, корректировка весовых коэффициентов и порогового значения проводится по формулам:

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) + \alpha x_i^t y_j^t \text{ и } \quad T_j(t) = T_j(t-1) - \alpha y_j^t.$$

Первоначальные значения весовых коэффициентов и пороговых значений рекомендуется выбирать так же, как и в правиле Хебба.

Пусть обучающая серия задана.

$$\begin{array}{ccc} x_1^1, \dots, x_n^1 & \to & y_1^1, \dots, y_m^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^L, \dots, x_n^L & \to & y_1^L, \dots, y_m^L \end{array}$$

Введем матрицу весовых коэффициентов

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & \dots & w_{nm} \end{pmatrix} = \overline{W}.$$

Обучающую серию тоже можно записать в матричной форме.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^L & \dots & x_n^L \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1^1 & \dots & y_m^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^L & \dots & y_m^L \end{pmatrix} = \bar{Y}.$$

В предположении, что нейронная сеть, удовлетворяющая этой обучающей серии, существует, должно выполняться матричное равенство:

$$\bar{Y} = \bar{X}\overline{W}.$$

Если бы $L = n$, то при обратимости матрицы $\bar{X}$ матрица весовых коэффициентов находилась бы легко, умножением равенства $\bar{Y} = \bar{X}\bar{W}$ слева на обратную к $\bar{X}$. Но этот случай исключительный. В общем случае $L \neq n$, поэтому используют псевдо обратную матрицу.

$$\bar{X}^{+} = (\bar{X}^{T}\bar{X})^{-1}\bar{X}^{T}.$$

Она существует, если обратима матрица $(\bar{X}^{T}\bar{X})$. В этом случае матрица весовых коэффициентов находится по формуле:

$$\bar{W} = \bar{X}^{+}\bar{Y}.$$

Заметим, что обучение псевдо обратными матрицами может не дать вычисляемых значений точно совпадающих с эталонными из обучающей серии, но при этом среднеквадратическая ошибка будет наименьшей возможной.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Алгоритм Розенблатта обучения нейронных сетей.
2. Установить отличие алгоритма Розенблатта от правила Хебба.
3. Научиться вычислять псевдо обратную матрицу..
4. Освоить метод обучения нейронных сетей с помощью псевдо обратных матриц.

Практические задания по вариантам

Задача № 1. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанной функции по правилу Розенблатта.

Номер варианта	Функция
1	Логическая функция импликации в биполярном случае.
2	Логическая функция «штрих Шеффера» в биполярном случае.
3	Логическая функция конъюнкции в биполярном случае.
4	Логическая функция «стрелка Пирса» в биполярном случае.
5	Логическая функция дизъюнкции в биполярном случае.
6	Логическая функция конъюнкции.
7	Логическая функция импликации.
8	Логическая функция «штрих Шеффера».
9	Логическая функция «стрелка Пирса».
10	Логическая функция дизъюнкции.

Задача № 2. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанных данных в виде таблицы с помощью псевдо обратных матриц для линейной функции активации.

Номер варианта	Табличное задание данных			
1	x_1	x_2	x_3	y
	1	1	0	1
	2	1	3	2
	2	2	-1	3
	0	2	3	2
2	x_1	x_2	x_3	y
	0	1	0	2
	3	1	1	1
	2	-2	-1	2
	0	1	-1	2
3	x_1	x_2	x_3	y
	1	0	0	1
	2	0	3	2
	2	2	-1	3
	0	-1	2	2

Работа №4. Алгоритм Видроу – Хоффа.

Цель: изучить алгоритм Видроу – Хоффа, адаптивный шаг обучения, приобрести навыки обучения нейронных сетей по этому алгоритму.

Краткие теоретические сведения.

Заметим, что функция активации в нейронах выходного слоя выбирается линейной. По алгоритму Видроу – Хоффа, который основан на правиле наискорейшего спуска, происходит минимизация среднеквадратической ошибки между вычисленными и эталонными значениями (из обучающей серии).

В алгоритме Видроу – Хоффа задаются коэффициент скорости обучения $\alpha \in (0,1)$ и необходимая точность $E_{эталон}$. Первоначальные значения весовых коэффициентов и пороговых значений $w_{ij}(0), T_j(0)$ выбираются случайным образом. Корректировка весовых коэффициентов и пороговых значений проводится на каждом шаге итерации по формулам:

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) - \alpha x_i^t (\widetilde{y_j^t} - y_j^t) \quad \text{и} \quad T_j(t) = T_j(t-1) + \alpha(\widetilde{y_j^t} - y_j^t) \ ,$$

где $\widetilde{y_j^t}$ – вычисленное значение выходного нейрона со значениями весовых коэффициентов и пороговых значений предыдущего шага итерации.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность, либо весовые коэффициенты и пороговые значения практически перестанут изменяться.

Заметим, что вместо постоянного коэффициента скорости обучения может выбираться адаптивный шаг обучения.

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+\sum_1^n x_i^2(t)},$$

при его смене на каждом шаге итерации, либо при так называемом «групповом обучении» адаптивный шаг вычисляется по формуле:

$$\alpha(t) = \frac{\sum_1^P \sum_1^m \alpha_j^k (\widetilde{y_j^k} - y_j^k)}{\sum_1^P \sum_1^m (\alpha_j^k)^2},$$

где $\alpha_j^k = \sum_p \left(\widetilde{y_j^p} - y_j^p\right)(1 + \sum_i x_i^k x_i^p$.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Разобраться с алгоритмом Видроу – Хоффа.
2. Научиться составлять блок-схему алгоритма, исключающую возможность «зацикливания».
3. Освоить методы вычисления адаптивного шага обучения.
4. Осуществить программную реализацию алгоритма Видроу – Хоффа.

Практические задания по вариантам

Задача № 1. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанной в задаче №1 работы №3 функции по алгоритму Видроу-Хоффа при $\alpha = 0{,}3$ и $E = 0{,}3$.

Задача № 2. Провести обучение однослойной нейронной сети для указанных данных в виде таблицы к задаче №2 работы №3 с помощью алгоритма Видроу-Хоффа с адаптивным шагом обучения при $E = 0{,}3$.

.

Библиографический список

1. Галушкин, Александр Иванович. Нейронные сети: основы теории [Текст] / А. И. Галушкин. - М. : Горячая линия - Телеком, 2012. - 496 с.
2. Шапкин, А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике , математическому программированию [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. - 8-е изд. - М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 432 с. // Режим доступа – http: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450779
3. Основы нейрокибернетики, генетические алгоритмы [Текст] : учебное пособие для студентов по специальности 230700, 230400, 010500, 060101, 060109 / Мин-во образования и науки РФ, ЮЗГУ; ТулГУ ; сост.: О. Г. Павлов, Ю. А. Халин. - Тула :ТулГУ, 2014. - 103 с.
4. Элементарное введение в технологию нейронных сетей с применением программ [Текст] / пер. с пол. И. Д. Рудинского. – М. : Горячая линия – Телеком. 2011. - 408 с.
5. Пегай А. Нечеткое моделирование и управление [Текст] : пер. с англ. / А. Пегай. – 2-е изд. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний. 2013. – 798 с.
6. Искусственные нейронные сети [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Использование программы MathLab в инженерной практике» для магистров направления подготовки 211000.68 «Конструирование и технология электронных средств» / Юго-Запад. гос. ун-т ; сост. Е. О. Брежнева. - Электрон.текстовые дан. (569 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 17 с.
7. Реализация нейронных сетей с помощью пакета NNTool системы MATLAB [Электронный ресурс] : методические указания для проведения лабораторных работ и выполнения самостоятельной внеаудиторной работы по дисциплине «Нейрокомпьютерные системы» для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост. Р. А. Томакова. - Электрон.текстовые дан. (564 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2016. - 17 с.