

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 05.09.2026 09:03:33

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d406c99d09203a5b73e945454e48516be5640882

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 26 » 12 2025 г.



Нелинейное программирование

Методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Методы оптимизации» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения»

Курск – 2025

УДК 519.863

Составитель: Е.Н. Иванова

Рецензент

к.т.н., доцент Т.Н. Конаныхина

Нелинейное программирование: методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Методы оптимизации» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2025. – 16 с.:– Библиогр.: с. 16.

Методические указания структурированы по этапам выполнения заданий на лабораторных и практических занятиях по теме Нелинейное программирование, применяемым при реализации ОПОП ВО по модели «перевернутого обучения».

Предназначены для обучающихся по очной форме обучения по ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемым по модели «перевернутого обучения», осваивающих дисциплину «Методы оптимизации».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.12.25 Формат 60х84 1/16.

Усл.печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,8.

Тираж 100 экз. Заказ 1344 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практические занятия по теме № 3 «Нелинейное программирование»

Цель занятий – приобретение обучающимися практического опыта в применении знаний, полученных при самостоятельном освоении темы № 3 «Нелинейное программирование», в производственных ситуациях.

Планируемые результаты обучения:

Знать:	Уметь:	Иметь опыт деятельности:
обязанности и ответственность студентов при реализации дисциплины по технологии «перевернутого обучения» (УК-6.1) роль технологии «перевернутого обучения» в формировании у студентов компетенций, необходимых для будущего профессионального роста (УК-6.2) преимущества технологии «перевернутого обучения» для самообразования и непрерывного образования в	рационально распределять собственное время и эффективно использовать свои ресурсы при освоении нового учебного контента (УК-6.1) проводить самоконтроль в пределах самостоятельно изученного учебного контента (УК-6.2) использовать различные инструменты самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) обоснованно осуществлять выбор информационной технологии для	в самоорганизации и саморазвитии при решении учебных задач большого объема (УК-6.1) в проведении самооценки по критериям, установленным преподавателем (УК-6.2) в применении эффективных технологий самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) по выбору информационных технологии при решении оптимизационных задач (ОПК-2.2) по разработке оригинальных

течение жизни (УК-6.3) основы теории оптимизации для возможности обоснования выбора информационной технологии решения оптимизационной задачи (ОПК-2.2) основы теории оптимизации и программирования (ОПК-2.3) основные научные методы исследований. (ОПК-4.3)	решения оптимизационных задач различного вида (ОПК-2.2) реализовывать оптимизационные алгоритмы в виде программных приложений (ОПК-2.3) выбирать методы оптимизации с учетом специфики решаемой задачи (ОПК-4.3)	программных средств, реализующих разработанные алгоритмы для решения оптимизационных задач (ОПК-2.3) навыками применения принципов и методов оптимизации (ОПК-4.3)
---	---	--

Необходимое материально–техническое оборудование:
 мультимедийная доска, компьютеры, мобильные устройства преподавателя и обучающихся.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 1

Задача нелинейного программирования

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 3 (входной контроль знаний).
2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3.
3. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 3 (входной контроль знаний)

1.1 Проверка опорных конспектов по теме № 3

Проверка опорных конспектов по теме организуется преподавателем различными способами: демонстрация всеми обучающимися своих опорных конспектов; зачитывание вслух одним обучающимся записей, внесенных в опорный конспект; работа в парах (студенты обмениваются друг с другом своими опорными конспектами и помогают друг другу дописать пропущенное) и т.д.

1.2 Тестирование по теме № 3

Ответьте на вопросы и выполните задания в тестовой форме по теме № 3.

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

3. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 3, изученному дома самостоятельно)

Вставьте на местах пропуска нужные термины и определения

1. Целевая функция задачи нелинейного программирования служит _____ системы.

2. В задачах нелинейного программирования условной оптимизации условие существования экстремума _____

3. В задачах целочисленного программирования неизвестные параметры могут принимать только _____ значения.

4. В задачах стохастического программирования в целевой функции или в функциях ограничений содержатся _____ величины, которые подчиняются законам теории _____.

5. Основная идея метода множителей Лагранжа заключается в преобразовании задачи к задаче _____ оптимизации, дополненную некоторыми параметрами.

6. В классе выпуклых функций возможно нахождение оптимального решения задачи нелинейного программирования, основываясь на отыскании _____ точки.

7. Условия оптимальности Куна и Таккера можно сформулировать в виде задачи нахождения решения некоторой системы нелинейных _____ и _____.

8. Условия Куна-Таккера включают обобщенное уравнение _____, уравнения и неравенства, определяющие ограничения, ограничения на _____ множителей.

9. Метод Куна-Таккера относится к классу _____ методов.

10. Область допустимых решений задачи нелинейного программирования задается как ограничениями типа _____, так и ограничениями типа _____.

11. Целевая функция по форме может быть различной: _____, _____, _____, при этом она должна быть непрерывной и _____.

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Постройте область допустимых значений для системы ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 26 \end{cases}$$

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Для задачи нелинейного программирования

$$u = 4x - 6y^2 + z^4 \rightarrow \max$$

при наличии ограничений

$$\begin{cases} z \geq x - 2y^2 - 3 \\ z \leq 1 \end{cases}$$

запишите функцию Лагранжа и условия Куна-Таккера.

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Дана функция двух переменных

1. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 1$

2. $f(x, y) = 2xy^2 + y^3 - 2x - 5y + 1$

3. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 12xy - 15y + 1$

4. $f(x, y) = 3xy + y^2 - 2x - 3y + 1$

5. $f(x, y) = x^2y + y^2x - 2x - 3y + 1$

Найти:

1) частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$;

2) градиент функции $f(x, y)$ в точке $(1; 3)$;

- 3) производную функции $f(x, y)$ по направлению вектора $(-4; -3)$ в точке $(1; 3)$;
- 4) первый дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $(1; 1)$;
- 5) критические точки функции $f(x, y)$;
- 6) вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$;
- 7) второй дифференциал функции $f(x, y)$;
- 8) экстремумы функции $f(x, y)$;
- 9) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ на множестве $\{-3 \leq x \leq 3; -3 \leq y \leq 3\}$.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 2

Методы решения задачи нелинейного программирования

1. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3.
2. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
3. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам

тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

2. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (*по содержанию темы № 3, изученному дома самостоятельно*)

1. Сформулируйте необходимое условие экстремума для функции одной переменной.

2. Сформулируйте необходимое условие экстремума для функции нескольких переменных.

3. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции одной переменной.

4. Сформулируйте условия локального минимума в точке.

5. Какие точки называют стационарными точками функции?

6. Сформулируйте условие локального максимума в точке.

7. Запишите общий вид матрицы Гессе для функции трех переменных.

8. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции нескольких переменных.

9. Сформулируйте условие для положительно определенной квадратичной формы.

10. Сформулируйте условие для отрицательно определенной квадратичной формы.

11. Сформулируйте критерий Сильвестра.

12. Сформулируйте условие положительно определенной матрицы через ее собственные числа.

13. Сформулируйте условие отрицательно определенной матрицы через ее собственные числа.

14. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции Лагранжа.

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Определите стационарные точки функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - x_2x_3$$

При идентификации характера стационарных точек используйте все известные вам способы.

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Используя метод прямого поиска и метод множителей Лагранжа решите задачу условной оптимизации на максимум.

$$f(x_1, x_2) = (120 - x_1)x_1 + (300 - 2x_2)x_2 \rightarrow \max$$

при ограничении: $x_1 + x_2 = 150$

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Дана функция двух переменных:

$$1. f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 1$$

$$2. f(x, y) = x^2y + 2y^3 - 6x - 5y + 1$$

$$3. f(x, y) = 5x^2y + y^3 - 4x - 5y + 1$$

$$4. f(x, y) = x^2y + y^3 - 2x^2 - 15y + 1$$

$$5. f(x, y) = xy^2 + y^3 - 2x - y + 1.$$

Найти:

1) стационарные точки прямым методом;

2) стационарные точки методом множителей Лагранжа;

3) классифицировать стационарные точки всеми известными вам методами

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 3

Текущий контроль успеваемости по теме № 3.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме лабораторной работы.

Шкала и критерии оценивания приведены в оценочных средствах по дисциплине «Методы оптимизации» для данной ОПОП ВО, которые размещены на официальном сайте университета по ссылке <https://swsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Лабораторная работа № 2

Решение задач нелинейного программирования с ограничениями типа равенства

Теоретическое обоснование

Метод прямой оптимизации применяется, когда ограничения $g_i(x)$ типа равенства описываются простыми, желательно линейными функциями. Из каждого ограничения последовательно выражается одна переменная, а в других ограничениях вместо нее производится подстановка. В результате получается одно уравнение, или система уравнений с меньшим количеством переменных. Таким образом, задача сводится к задаче безусловной однопараметрической оптимизации. Поскольку предполагалось, что ограничения представлены простыми функциями, решить полученную систему уравнений не должно составить труда. Подставив найденные значения в ограничения, находим все неизвестные переменные.

Стационарных точек может быть несколько. Тогда по теореме о достаточном условии экстремума функции с одной переменной определяется, какие из них являются минимумами, а какие – максимумами. Глобальные экстремумы выбираются из найденных минимумов и максимумов.

Геометрический смысл применения метода прямой оптимизации может быть проиллюстрирован рисунком 1. Линии уровня целевой функции $f(x_1, x_2)$ обозначены вложенными эллипсами. Областью допустимых значений D является отрезок функции ограничения. Решение сводится к нахождению координат (x_1^*, x_2^*) точки касания отрезка (области D) линией уровня (эллипсом) с оптимальным значением целевой функции $f(x_1, x_2)$.

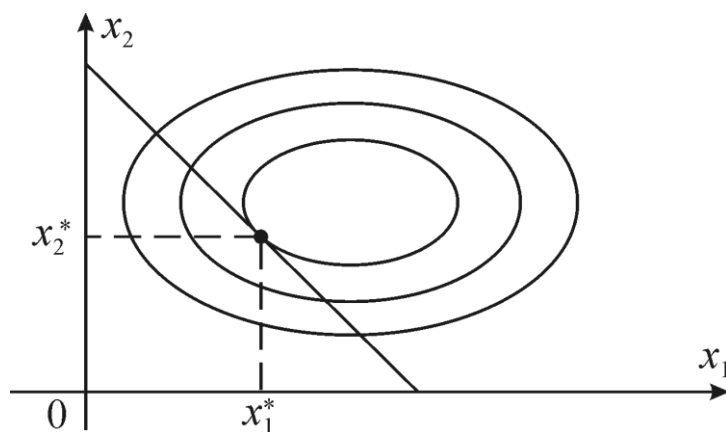


Рисунок 1 – Графическая иллюстрация метода прямой оптимизации

Целевая функция и/или функции ограничений могут иметь сложный вид. Поэтому необходимое условие экстремума может выполняться в нескольких точках. Очевидно, одни экстремумы в этом случае являются локальными минимумами, другие – локальными максимумами. Определить, в какой точке какой экстремум позволяет теорема о достаточном условии экстремума, подставляя поочередно найденные корни во вторую производную и анализируя результат подстановки в соответствии с теоремой. Затем из всех локальных максимумов простым сравнением отбирается глобальный максимум, который и является решением задачи. Задачи на минимум решаются аналогично.

Задачу на условный экстремум можно свести к задаче на безусловный экстремум для специальным образом построенной функции Лагранжа.

Каждому ограничению g_i поставим в соответствие переменную λ_i . Построим функцию Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X),$$

где $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Если ограничения $g_i(X) = 0$ выполняются, то функция Лагранжа при любых λ превращается в исходную функцию.

Тогда локальные экстремумы задачи условной оптимизации являются и точками локальных экстремумов функции Лагранжа.

Теорема (необходимое условие экстремума для функции Лагранжа):

Если x^* – точка локального экстремума и в окрестности этой точки функции $f(x)$, $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы, то в этой точке частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x), \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (1)$$

Для формулировки достаточных условий оптимальности рассмотрим окаймленную матрицу Гессе H^β :

$$H^\beta = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^T & Q \end{pmatrix},$$

где P – матрица частных производных ограничений:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

P^T – транспонированная матрица P ;

m – количество ограничений;

n – количество переменных;

Q – матрица вторых частных производных функции Лагранжа:

$$Q = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Теорема (достаточное условие экстремума для функции Лагранжа):

Стационарная точка функции Лагранжа x^* является точкой локального минимума, если в окаймленной матрице Гессе, вычисленной в стационарной точке, все угловые миноры, начиная с порядка $2m+1$ имеют знаки, определяемые множителем $(-1)^m$.

Стационарная точка функции Лагранжа x^* является точкой локального максимума, если все угловые миноры окаймленной матрицы Гессе, начиная с порядка $2m+1$ образуют знакопеременный ряд, в котором знак первого члена ряда определяется множителем $(-1)^{m+1}$.

Достаточное условие оптимальности можно сформулировать также в другой форме: если рассмотреть определитель, построенный из окаймленной матрицы Гессе:

$$\det H^\beta = \left\| \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^T & Q - \lambda E \end{pmatrix} \right\| = 0,$$

то стационарная точка функции Лагранжа является точкой максимума, если все $n-m$ действительных корней многочлена (1)

меньше нуля. Если же корни больше нуля, стационарная точка функции Лагранжа является точкой минимума.

Задание

Реализуйте программно алгоритм поиска максимума функции

$$f(x_1, x_2) = (A - ax_1)x_1 + (B - bx_2)x_2 \rightarrow \max$$

при ограничении: $x_1 + x_2 = C$

Задача должна решаться следующими способами:

1. Методами прямой оптимизации.
2. С использованием функции Лагранжа.

Варианты

№	C	A	B	a	b
1	190	295	120	2,3	1,2
2	200	290	140	2,2	1,1
3	140	285	135	2,1	1,0
4	130	280	130	2,0	1,3
5	120	275	125	1,9	1,2
6	110	270	120	2,5	1,1
7	100	265	140	2,4	1,0
8	160	340	135	2,3	1,3
9	170	335	130	2,2	1,2
10	180	330	125	2,1	1,1

Контрольные вопросы

- 1 Определение условной и безусловной оптимизации
- 2 Что такое нелинейная оптимизация?
- 3 В какой форме могут быть представлены ограничения в задаче нелинейной оптимизации?
- 4 Какие методы вам известны для решения задач нелинейной оптимизации?
- 5 Сформулируйте достаточное условие оптимальности Лагранжа.
- 6 Сформулируйте необходимое условие экстремума функции Лагранжа.
- 7 Сформулируйте достаточное условие экстремума функции с одной переменной.

8 Сформулируйте необходимое условие экстремума функции с одной переменной.

9 Как получить окаймленную матрицу Гессе?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методы оптимальных решений. Нелинейное программирование : методические указания для выполнения лабораторных работ / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: В.В. Беляев, А.В. Чиргин. – СПб, 2021. – 46 с.

2. Богданова, Е.Л. Оптимизация в проектном менеджменте: нелинейное программирование : учебно-методическое пособие / Е.Л. Богданова, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: университет ИТМО, 2017. – 183 с.