МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
«14» 11 __________ 2025 г.

Методология математического моделирования

Методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения»

Курск – 2025

УДК 519.6, 519.7

Составитель: Е.Н. Иванова

Рецензент
к.т.н., доцент Т.Н. Конаныхина

Методология математического моделирования: методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2025. – 24 с.: – Библиогр.: с. 24.

Методические указания структурированы по этапам выполнения заданий на лабораторных и практических занятиях по теме Методология математического моделирования, применяемым при реализации ОПОП ВО по модели «перевернутого обучения».

Предназначены для обучающихся по очной форме обучения по ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемым по модели «перевернутого обучения», осваивающих дисциплину «Математическое моделирование нелинейных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 14.11.25. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,3.
Тираж 100 экз. Заказ 1254 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практические занятия
по теме № 2 «Методология математического моделирования»

Цель занятий – приобретение обучающимися практического опыта в применении знаний, полученных при самостоятельном освоении темы № 2 «Методология математического моделирования», в производственных ситуациях.

Планируемые результаты обучения:

Знать:	**Уметь:**	**Иметь опыт деятельности:**
основы стилистики научных текстов (УК-4.2) обязанности и ответственность студентов при реализации дисциплины по технологии «перевернутого обучения» (УК-6.1) роль технологии «перевернутого обучения» в формировании у студентов компетенций, необходимых для будущего профессионального роста (УК-6.2) преимущества технологии «перевернутого обучения» для	составлять и редактировать научные тексты (УК-4.2) рационально распределять собственное время и эффективно использовать свои ресурсы при освоении нового учебного контента (УК-6.1) проводить самоконтроль в пределах самостоятельно изученного учебного контента (УК-6.2) использовать различные инструменты самообразования и непрерывного образования (УК-6.3)	в сфере создания, редактирования научных текстов (УК-4.2) в самоорганизации и саморазвитии при решении учебных задач большого объема (УК-6.1) в проведении самооценки по критериям, установленным преподавателем (УК-6.2) в применении эффективных технологий самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) по проведению научных исследований для решения

самообразования и непрерывного образования в течение жизни (УК-6.3) научные принципы и методы исследований (ОПК-4.1) основные методы исследований (ОПК-4.2) новые научные принципы для решения профессиональных задач (ОПК-4.3)	аргументированно выбрать метод научного познания (ОПК-4.1) использовать методы исследования на основе моделирования (ОПК-4.2) выбирать методы моделирования с учетом специфики решаемой задачи (ОПК-4.3)	практических задач (ОПК-4.1) по использованию методов математического моделирования (ОПК-4.2) по применению принципов и методов математического моделирования (ОПК-4.3)

Необходимое материально–техническое оборудование: мультимедийная доска, компьютеры, мобильные устройства преподавателя и обучающихся.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 1
Моделирование как научный прием

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 2 (входной контроль знаний).
2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 2.
3. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 2 (входной контроль знаний)

1.1 Проверка опорных конспектов по теме № 2

Проверка опорных конспектов по теме организуется преподавателем различными способами: демонстрация всеми обучающимися своих опорных конспектов; зачитывание вслух одним обучающимся записей, внесенных в опорный конспект; работа в парах (студенты обмениваются друг с другом своими опорными конспектами и помогают друг другу дописать пропущенное) и т.д.

1.2 Тестирование по теме № 2

Ответьте на вопросы и выполните задания в тестовой форме по теме № 2.

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 2

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

3. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем *(по содержанию темы № 2, изученному дома самостоятельно)*

1. Вставьте на местах пропуска нужные термины и определения.

Моделирование – _______.

Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию ______, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели.

Этап построения математической модели системы разбивается на две части: _______ и _______.

Реальный изучаемый объект (физическая система, процесс, явление) называется ______.

Модель воспроизводит (имитирует) те свойства и характеристики реального объекта, которые _____ для достижения поставленной цели моделирования.

Какую роль играет моделирование? Назовите не менее трех вариантов использования моделирования.

По степени абстрагирования модели от оригинала различают _____ и _____ модели.

_______ модель отображает пространственные и геометрические свойства объекта оригинала (например, макеты архитектурных сооружений, выставочные модели самолетов, локомотивов, судов, автомобилей).

_______ модель воспроизводит физические свойства оригинала. Такая модель представляет собой увеличенную или уменьшенную копию оригинала.

_______ модель отличается от оригинала по своей физической природе, но динамика ее внутренних процессов может быть описана теми же математическими соотношениями, которыми описывают процессы в моделируемой системе-оригинале.

_______ модель отображает свойства объекта (оригинала) посредством схемы, графа, графика, чертежа, диаграммы, химической формулы и т.д.

_______ модель отображает свойства объекта (оригинала) на языке математических и логических соотношений.

_______ модель – программа, реализующая алгоритм (вычислительную схему) решения математической модели.

_______ модель представляет собой электронный эквивалент исследуемого объекта. Это комплекс специальных программных и аппаратных средств (абстрактная и физическая составляющие).

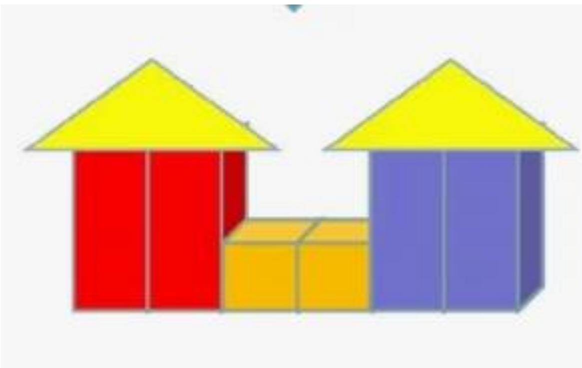
_______ модель представляет по своей сути компьютерную модель, воспроизводящую (имитирующую) структуру и алгоритм функционирования сложной системы во времени.

Практическое задание для станции № 2 (общее)

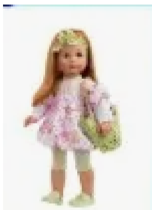
Распределите по категориям: оригинал, модель

1) $y = kx$

2) 

3) 

4) 

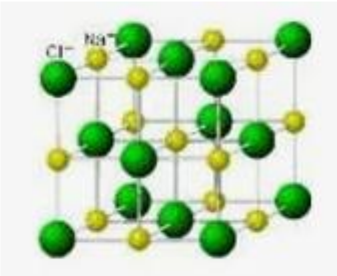
5) 

6) 

7) 

8) 

9) 

10) 

Ответ аргументируйте

Практическое задание для станции № 3 (общее)

1.Представьте работу

а) светофора;

б) кодового замка с кодом 1234
в виде мнемонической модели.

2. Оригинал – механическая система – маятник, совершающий колебания $x(t)$ относительно положения равновесия. Возможность взаимного замещения механической и электрической систем при моделировании основана на следующих положениях:

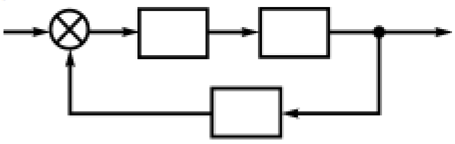
– аналогом кинетической энергии механической системы является энергия магнитного поля электрической системы (накапливается на индуктивности);

– аналогом потенциальной энергии механической системы является энергия электрического поля электрической системы (накапливается в конденсаторе).

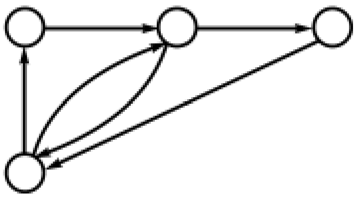
Представьте аналоговую модель.

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Подберите объект-оригинал, для которого модель может быть представлена как:



1)



2)

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 2
Математическое моделирование

1. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
2. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1 Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем *(по содержанию темы № 2, изученному дома самостоятельно)*

Заполните пропуски

______ отображает свойства объекта (оригинала) на языке математических и логических соотношений.

______ – программа, реализующая алгоритм (вычислительную схему) решения математической модели.

Назовите не менее трех первых математических моделей.

Назовите не менее трех целей математического моделирования.

Математическая модель должна соответствовать ______.

Модель считается _______, если она отображает заданные свойства объекта (процесса) с требуемой точностью.

______ модели означает ее устойчивость к погрешностям (неточностям) в исходных данных.

______ модель – содержательное описание моделируемого объекта.

Первый этап математического моделирования – _________.

Второй этап математического моделирования – _________.

Третий этап математического моделирования – _________.

Четвертый этап математического моделирования – _________.

Пятый этап математического моделирования – _________.

В зависимости от способа получения математические модели делят на _________.

__________ получают на основе изучения свойств исследуемого объекта и процессов, происходящих в нем.

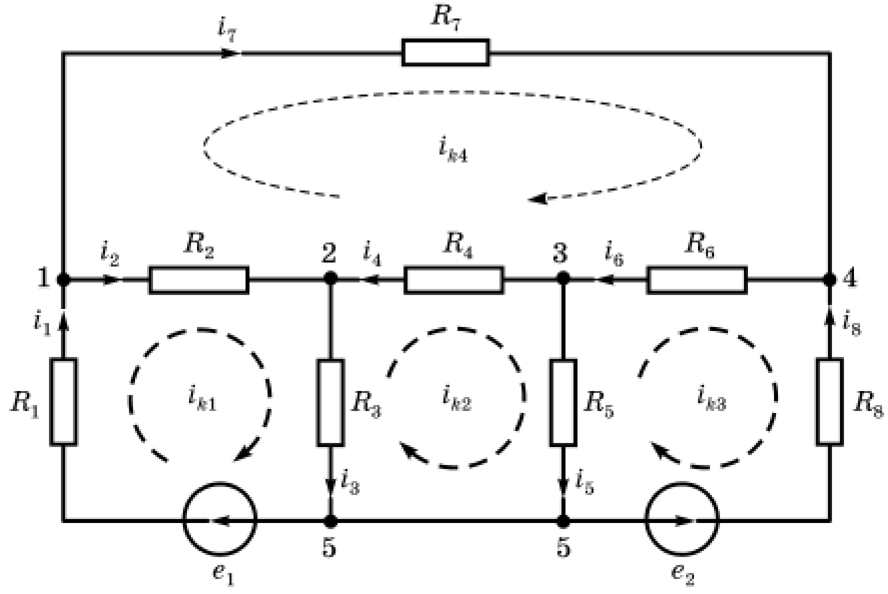
__________ применяют в следующих случае, когда отсутствует информация о физических свойствах изучаемого объекта и о механизме протекающих в нем процессов.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называют ________.

________ математические модели описывают установившиеся (равновесные) режимы работы физических систем.

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Сформировать математическую модель объекта – линейной цепи постоянного тока, используя метод контурных токов.



Практическое задание для станции № 3 (общее)
По заданной модели восстановить объект-оригинал.

1) $i = au^2$

2) $i = a\dfrac{du}{dt}$

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)
Представить математические модели нелинейных элементов:
1) индуктивность;
2) емкость;
3) диод;
4) ключевой элемент.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 3

Текущий контроль успеваемости по теме № 2.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме лабораторной работы.

Шкала и критерии оценивания приведены в оценочных средствах по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для данной ОПОП ВО, которые размещены на официальном сайте университета по ссылке https://swsu.ru/sveden/education/eduop/.

Лабораторная работа № 1
Модели линейных систем

Теоретическое обоснование

При рассмотрении системы как объекта управления возникает задача выбора входящего сигнала (управления) для получения желаемого выхода. Тем самым можно определить цели управления. Основными целями управления для линейных систем являются:

$y(\bullet) \equiv y_0 = const$ - стабилизация;

$y(\bullet) \equiv y_0(\bullet)$ - слежение.

Стабилизация является частным случаем слежения.

Для достижения цели управления можно использовать принцип разомкнутого управления или принцип обратной связи.

Рассмотрим линейный объект управления $y(\bullet) = H_\tau(u(\bullet))$. В качестве цели управления выберем слежение $y(\bullet) \equiv y_0(\bullet)$, т.е. $H_\tau(u(\bullet)) = y_0(\bullet)$. Управление будем строить по принципу разомкнутого управления $u(\bullet) = H_\tau^{-1}(y_0(\bullet))$. Схема работы данного принципа представлена на рис. 1.

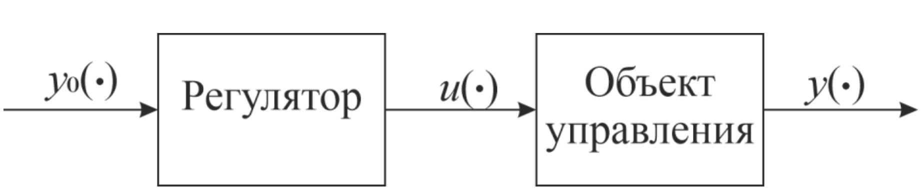


Рисунок 1 – Принцип разомкнутого управления

В данном случае будем использовать измерения результата для построения регулятора, т.е. получим следующую систему:

$$\begin{cases} y(t) = H_\tau\left(u(t)\right) \\ u(t) = L_\tau\left(y(t)\right) \end{cases}$$

где L_τ - оператор обратной связи. Схема работы данного принципа представлена на рис. 2.

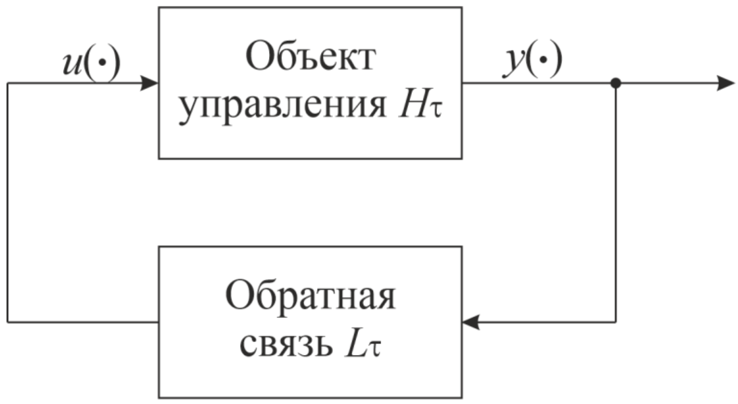


Рисунок 2 – Принцип обратной связи

Линейные динамические системы удобно представлять в двух формах: в функциональной форме «вход-выход» и в канонической форме пространства состояний.

Линейная форма в форме пространства состояний

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^t$. Матрицы A, B, C заданы и имеют соответствующие размерности.

Переход от системы в форме «вход-выход» к системе в форме пространства состояний.

Рассмотрим непрерывную линейную систему в функциональной форме «вход-выход», которая имеет следующий вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \ldots + b_n u \qquad (2)$$

Будем считать, что сигналы входа и выхода скалярны, т.е. $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$. Введем переменные состояния следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y, \\
&x_2 = \dot{y} + a_1 y - b_1 u, \\
&x_3 = \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} + a_2 y - b_2 u, \\
&\ldots \\
&x_n = y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y - b_1 u^{(n-2)} - \ldots - b_{n-1} u.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Дифференцируя уравнения (3), получаем выражения для $\dot{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 - a_1 x_1 + b_1 u, \\
&\dot{x}_2 = \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} = x_3 - a_2 x_1 + b_2 u, \\
&\ldots \\
&x_n = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \dot{y} - b_1 u^{(n-1)} - \ldots - b_{n-1} \dot{u} = -a_n x_1 + b_n u.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Полученную систему в форме пространства состояний (4) можно представить в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$
A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \; C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{n}
$$

Переход от системы в форме пространства состояний к форме «вход-выход»

Рассмотрим непрерывную линейную систем в форме пространства состояний:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu \\
&y = Cx
\end{aligned} \tag{5}
$$

Характеристический многочлен матрицы А является ее аннулирующим многочленом, т.е.:

$$a(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I = 0 \tag{6}$$

Тождество (6) носит название тождества Гамильтона-Кэли (или просто тождество Кэли).

Следующая система рекуррентно выводится из многочлена $a(\lambda) = \det(\lambda I - A)$:

$$\begin{aligned} a_{(1)}(\lambda) &= \big(a(\lambda) - a(0)\big)\lambda^{-1} = \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ a_{(k)}(\lambda) &= \big(a_{(k-1)}(\lambda) - a_{(k-1)}(0)\big)\lambda^{-1}, \; k = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

Продифференцируем n раз переменную состояния x в уравнении (5) и умножим каждую из полученных производных на соответствующий коэффициент многочлена $a(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Результат:

$$\begin{array}{r|l}
a_n \times & x = Ix, \\
a_{n-1} \times & \dot{x} = Ax + Bu \\
a_{n-2} \times & \ddot{x} = A^2x + ABu + B\dot{u} \\
a_{n-3} \times & \dddot{x} = A^3x + A^2Bu + AB\dot{u} + B\ddot{u} \\
\ldots & \ldots \\
1\times & x^{(n)} = A^n x + A^{n-1}Bu + A^{n-2}B\dot{u} + \ldots + Bu^{(n-1)} \\
\hline
\sum C \times & a(d/dt)y = \underbrace{Ca(A)x}_{0 \text{ по тождеству Кэли}} + \\
& +\underbrace{Ca_{(1)}(A)Bu + Ca_{(2)}(A)B\dot{u} + \ldots + Ca_{(n)}Bu^{(n-1)}}_{=b(d/dt)u}
\end{array}$$

Итоговая сумма – запись динамической системы в форме «вход-выход».

Задание 1

Дана каноническая модель непрерывной системы в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$. Начальные данные – нулевые.

Перейти к функциональной модели «вход-выход» и построить передаточную функцию системы.

Вариант 1

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 2

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 4

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 5

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 6

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 7

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 8

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 9

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Вариант 10

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Пример выполнения работы

Дана каноническая модель непрерывной системы в пространстве состояний:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^3$, $u(t)\in\mathbb{R}$, $y(t)\in\mathbb{R}$. Начальные данные – нулевые.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Перейти к функциональной модели «вход-выход» и построить передаточную функцию системы.

Решение

Определим характеристический многочлен матрицы A:

$$a(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-2 & -3\\ -1 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-6\lambda-6.$$

Учитывая полученный многочлен $a(\lambda)$ и выражение (7), получим следующее:

$$a_{(1)}(A) = A^2 - A - 6I, \qquad a_{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$a_{(2)}(A) = A - I,$$

$$a_{(3)}(A) = I,$$

$$a_{(2)}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; a_{(3)}(A) = I$$

$$a(d/dt)y = Ca_{(1)}(A)Bu + Ca_{(2)}(A)B\dot{u} + \ldots + Ca_{(n)}Bu^{(n-1)} =$$

$$= b(d/dt)u$$

$$Ca_{(1)}(A)B = -10,$$

$$Ca_{(2)}(A)B = 1,$$

$$Ca_{(3)}(A)B = 1$$

Уравнение в функциональной форме «вход-выход»:

$$\dddot{y} - \ddot{y} - 6\dot{y} - 6y = \ddot{u} + \dot{u} - 10u$$

Найдем передаточную функцию исследуемой системы, основываясь на модели «вход-выход»:

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda - 10}{\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 6}$$

Передаточная функция исходной системы в пространстве состояний:

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 10}{\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 6}$$

Задание 2

Дана функциональная модель непрерывной системы в форме «вход-выход», $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$. Начальные данные – нулевые.

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

Вариант 1

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 6\dot{y} - 6y = 2\dot{u} + u$$

Вариант 2

$\dddot{y} + 2\ddot{y} - \dot{y} - 2y = -\ddot{u} + 2\dot{u} - 8u$

Вариант 3

$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$

Вариант 4

$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 4\dot{y} - y = \ddot{u} - 2\dot{u} - u$

Вариант 5

$\dddot{y} - 2\ddot{y} - \dot{y} - 2y = -2\dot{u} - 2u$

Вариант 6

$\dddot{y} - \ddot{y} - 6\dot{y} + 6y = \ddot{u} + \dot{u} - 10u$

Вариант 7

$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 2\ddot{u} - 6\dot{u} + 4u$

Вариант 8

$\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} - 3y = \ddot{u} + 5u$

Вариант 9

$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u$

Вариант 10

$\dddot{y} - \ddot{y} - 4\dot{y} + 6y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u$

Пример выполнения работы

Дана функциональная модель непрерывной системы в форме «вход-выход»:

$\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} - 3y = \ddot{u} + \dot{u} - u$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$. Начальные данные – нулевые.

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

Решение

Используем формулы (4):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

где $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Задание 3

Дана система в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^3$, B – единичная матрица размера 3x3.

Промоделировать систему с ненулевыми начальными данными. Найти собственные числа замкнутой системы и построить графики.

Вариант 1

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант 2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Вариант 3

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Вариант 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант 6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант 7

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Вариант 8

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Вариант 9

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\ -3 & 4 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

Вариант 10

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Пример выполнения задания

Дана система в пространстве состояний

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^3$, B – единичная матрица размера 3x3.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -4\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Промоделировать систему с ненулевыми начальными данными. Найти собственные числа замкнутой системы и построить графики.

Решение

Собственные числа матрицы A:

$\lambda_1=2,2478$; $\lambda_2=-1+2,1332i$; $\lambda_2=-1-2,1332i$

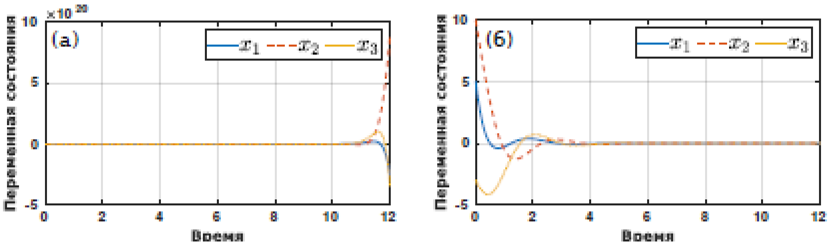


Рисунок 3 – Динамика исследуемой системы: а) без управления; б) с управлением

Контрольные вопросы

1 Назовите основные цели управления для линейных систем.

2 Назовите формы представления линейных динамических систем.

3 Запишите систему в форме пространства состояний в матричном виде.

4 Запишите характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы.

5 По каким направлениям возможна классификация математических моделей?

БИБЛИОГРАФИЧЕКИЙ СПИСОК

1. Плотников, С.А. Математическое моделирование систем управления / С.А. Плотников, Д.М. Семенов, А.Л. Фрадков. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 193 с.

2. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н.В. Голубева. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 192 с.