МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«18» 12 2019г.

Математический анализ:
методические указания к практическим занятиям для студентов направления
10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Курск 2019

УДК 517
Составитель: В.И. Дмитриев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент Ю.А. Халин

Математический анализ: методические указания к практическим занятиям для направления 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.И. Дмитриев. Курск, 2019. 72 с. Библиогр.: с. 72.

В методических указаниях описываются краткие положения основ математического анализа. Изложены краткие теоретические сведения, приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 2,32 п.л . Уч.-изд. л. 1,18 . Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.8
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Основной формой обучения студентов является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия. Работа урывками не приносит положительных результатов.

Часто приходится слышать высказывания студентов о том, что теорию они знают, а решать задачи не умеют. Данная работа содержит методические указания по выполнению модуля системы РИТМо, который способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмическую работу студента при изучении разделов математического анализа: пределы числовой последовательности и функции, дифференцирование функции, исследование функции на непрерывность.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Рассмотрение решения типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности. Здесь же представлены индивидуальные задания, которые даны в объеме 50 вариантов. Номер варианта дает лектор. Он приводит общую нумерацию студентов в потоке.

Для подготовки к защите модуля представлен список контрольных вопросов.

Для выполнения модуля достаточно аккуратно записанных лекций и внимательного изучения методических рекомендаций, предложенных в данном учебном пособии. Кроме того, весь теоретический материал по данным темам хорошо представлен в учебных пособиях, указанных в списке литературы.

Практическая работа 1. Введение в математический анализ. Предел числовой последовательности и функции

Определение 1. Число A называется *пределом функции f(x)* в точке a, если для любого ε>0 найдётся такое число δ>0, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение 2. Число A называется *правым (левым) пределом* функции f(x) в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что из неравенства $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для обозначения правого (левого) предела функции f(x) в точке a используют следующую символику: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=B$).

Критерий существования предела. Для того, чтобы в точке $x=a$ существовал предел функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой оба односторонних предела

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

Достаточно распространенными в курсе математики являются последовательности, то есть функции $y=f(n)$, заданные на множестве натуральных чисел N. Чтобы подчеркнуть, что аргумент такой функции принимает только значения из множества натуральных чисел, его обозначают не x, а n. Для последовательностей f(n) достаточно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента n (при $n\to\infty$).

Определение 3. Число B называется *пределом последовательности* f(n), если для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех $n>M$ выполняется неравенство $|f(n)-B|<\varepsilon$.

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a(\infty)}[f(x)]^{\varphi(x)}=C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)} \varphi(x)=B$, то $C=A^B$;

2) если $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела C решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)} \varphi(x) = \infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$, то используем 2-ой замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x} = 3$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x) = 1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x} = 3^1 = 3$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2} = \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right] = 0$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = 1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2) = \infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e^{3}}=e^{-4}.$$

Замечание. Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$

Непрерывность функции

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке а***, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки а;

2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке а, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Те точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Различают разрывы двух видов.

1. Если в точке а существуют односторонние пределы функции, но, по крайней мере, один из них не равен значению данной функции в точке *a*, то говорят, что функция f(x) в точке *a* имеет разрыв первого рода. При этом возможны следующие случаи:

$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке а имеет устранимый разрыв);

$f(a-0)\neq f(a+0)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке а имеет разрыв с конечным скачком. При этом число $|f(a+0)-f(a-0)|$ называют скачком функции f(x) точке а).

2. Функция f(x) в точке а имеет разрыв второго рода, если в этой точке по крайней мере, один из односторонних пределов бесконечен или вовсе не существует.

Функция f(x) называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём в точке а она непрерывна справа ($f(a+0)=f(a)$), а в точке в - слева ($f(b-0)=f(b)$).

Непрерывные на отрезке функции обладают рядом важных свойств. Приведём одно из них.

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на интервале $(a;b)$ существует такая точка *с*, в которой данная функция равна нулю.

В задачах 1-5 определить, какого рода разрывы имеют следующие функции в точке *a*

Пример 1. $f(x)=2^{1/(x-3)}, \quad a=3$

Решение. Если $x\to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3-0} 2^{1/(x-3)}=0$. Если $x\to 3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3+0} 2^{1/(x-3)}=\infty$. Так как один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, *a*=3-точка разрыва 2-го рода.

Пример 2. $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$, a=1.

Решение. Выделим целую часть $f(x)=\dfrac{2(x-1)+7}{x-1}=2+\dfrac{7}{x-1}$. Если $x\to 1-0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=-\infty$. Если $x\to 1+0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=+\infty$.

Таким образом, функция при $x\to 1$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, x=1 является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 3. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}$, $a=-5$.

Решение. Если $x\to -5-0$, то $\dfrac{1}{x+5}\to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}=-\dfrac{\pi}{2}$. Если $x\to -5+0$, то $\dfrac{1}{x+5}\to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{\pi}{2}$. Итак, при $x\to -5$ функция имеет левый и правый конечные пределы, причём эти пределы различны. Следовательно, $x=-5$ является точкой разрыва 1-го рода. Разность между правым и левым пределами (скачок) в точке разрыва равна $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Пример 4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}$, $a=-1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x^2-x+1}=1$,

$\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x^2-x+1}=1$. Итак,

$f(-1-0)=f(-1+0)$, но не равны $f(-1)$, значит, a=1 является устранимой точкой разрыва.

Пример 5. $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{при} \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$, $a=1$.

Решение. Если $x\to 1-0$, то $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(2-x)=1$. Если $x\to 1+0$, то $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$. Один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, $a=1$-точка разрыва 2-го рода.

5. Индивидуальные задания

Задание 1

Вычислить предел функции, числовой последовательности, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Задания взять из таблицы 2.

Таблица 2

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3+2n^2+n}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$	17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^5}+1}$

8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$	19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3+1}$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$	21	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$	22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

Задание 2

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Задания взять из таблицы 3

Таблица 3

№ пп	Задание	№ пп	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$	15	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$
6	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$	19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$
7	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

8	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$
9	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	22	$\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$
10	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	23	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
11	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	24	$\lim\limits_{x\to -2/3}\dfrac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$	25	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Задание 3

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы 4.

Таблица 4

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to -\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot \mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\mathrm{tg}2x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-1}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi/2-x}$	23	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x-\pi/2}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{3x}$	24	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$	25	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sqrt{1+\operatorname{ctg}x}}{\operatorname{ctg}x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$

Задание 4

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы 5.

Таблица 5

№пп	Задание	№пп	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$	13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{5x^3}{2x+1}}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$	15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$	17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2x^2-1}{x+1}}$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$	18	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$

7	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$	19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$
8	$\lim\limits_{x\to0}(1+2x^2)^{\frac{\sin x}{x^2}}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$	21	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x-1}\right)^{x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$	22	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{\frac{4x^2+1}{x-1}}$	23	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{3x^3}{x^2+1}}$
12	$\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$	24	$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

Задание 5

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции. Задания взять из таблицы 6.

Таблица 6

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}; & -2\le x\le 2\\ 4-x; & 2<x<4\\ x-3; & 4\le x\le 6\end{cases}$	7	$f(x)=\begin{cases}x^2-2x; & -1\le x<2\\ \sqrt{x}; & 2\le x\le 4\end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases}x^2; & -2\le x<1\\ \sqrt{x-1}; & 1\le x<5\\ 7-x; & 5\le x<7\end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases}\lvert x\rvert; & -2\le x\le 2\\ \sqrt{x-1}; & 2<x<5\\ 2; & x=5\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi/2\\ 1; & x=\pi/2\\ \cos x; & \pi/2<x\le 3\pi/2\end{cases}$	9	$f(x)=\begin{cases}x+2; & x<-1\\ x^2; & -1\le x<2\\ 5-x; & x\ge 2\end{cases}$

4	$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{5}{x}; & x \le -1 \\ -6x; & -1 < x \le 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$	10	$f(x)=\begin{cases} 2x^3; & x \le 1 \\ 2(x-2)^2; & 1 < x \le 3 \\ 7-2x; & x > 3 \end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases} 3^x; & -1 \le x < 1 \\ 5-3x; & 1 \le x < 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}$	11	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x}; & x < 0 \\ \dfrac{2x+10}{3x+1}; & 0 \le x < 2 \\ 3; & x \ge 2 \end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x}; & x < -1 \\ 2-x^2; & -1 \le x < 2 \\ -3; & x \ge 2 \end{cases}$	12	$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}; & x < -2 \\ \sqrt{x+3}; & -2 \le x \le 6 \\ -1; & x > 6 \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
2. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?
3. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
4. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
5. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
6. Как раскрываются неопределенности видов $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[0\,\infty]$.
7. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.
8. Сформулируйте второй замечательный предел.
9. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называются точками разрыва функции?
10. Охарактеризуйте точки разрыва I рода, II рода.

11. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительности другой бесконечно малой.
12. Чему эквивалентны при $x \to 0$ функции: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\log_a (1+x)$, $a^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$?

Практическая работа №2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференцирование функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\Big|_{x=x_0}$. Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Так как дифференцирование функций с использованием только таблицы производных элементарных функций и основных правил дифференцирования не вызывает особых затруднений, то мы остановимся лишь на приемах вычисления производных сложных функций.

Производная сложной функции

Рассмотрим некоторую сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

В этой цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним и поэтому его называют независимой переменной. Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть $y = \sqrt{z}$ и $z = \cos x$. Здесь z есть аргумент функции y, но z, не будет независимой переменой. В результате, производная сложной функции $y = f[\varphi(z)]$ равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot y'_x.$$

Пример 1. Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \dfrac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \dfrac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции

$y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + x - 1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}} \cdot (x^2 + x - 1)' =$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Производная функции, заданной в неявном виде

В некоторых случаях функция определяется уравнением, которое нельзя элементарными средствами разрешить относительно y, и приходится рассматривать y как неявную функцию от x. В таком варианте существует особый способ нахождения производной. Известно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей данного тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции (полагая, что y – сложная функция, зависящая от x), получаем равенство, откуда и выражаем y'.

Пример 4. Найти производную от функции, определяемой уравнением $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. $(x^4 + y^4 - 4xy)' = 0'$,

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4(x'y + xy') = 0$$

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4y - 4xy' = 0$$

$$4y^3 \cdot y' - 4xy' = 4y - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - 4x) = 4y - 4x^3$$

$$y' = \frac{4y - 4x^3}{4y^3 - 4x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 5. Найти $y'(x)$ для заданной параметрически функции $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

Решение.

$$x'_t = (t - \sin t)'_t = 1 - \cos t$$

$$y'_t = (1 - \cos t)'_t = \sin t$$

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Если дана сложная функция, представляющая собой произведение или частное нескольких функций, причем числитель и знаменатель дроби в свою очередь содержат произведения, то следует обе части данного выражения сначала прологарифмировать по основанию у, применить соответствующие свойства логарифмов, а затем приступить к дифференцированию обеих частей. Этот прием носит название логарифмического дифференцирования. Его также используют, если функция содержит корни из дробей. К этому приему прибегают, если имеется показательно-степенная функция или функция вида $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 6. Найти производную функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}$.

Решение. Логарифмируем обе части равенства по основанию е

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x^2+x-2)+\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\ln(x^4-1).$$

Дифференцируем обе части, считая у сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1)+30x(x^2-1)(x+2)-12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{10x^4+15x^3+15x^2+15x+5+30x^4+60x^3-30x^2-60x-12x^4-24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}\cdot\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x+2)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

*Пример 7***.** Найти производную функции $y=(x^2-x+2)^{e^{x+1}}$**.**

Решение. Логарифмируем обе части по основанию e

$$\ln y = \ln(x^2-x+2)^{e^{x+1}}.$$

Используя свойство логарифма, получаем,

$$\ln y = e^{x+1}\ln(x^2-x+2).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (e^{x+1})'\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot[\ln(x^2-x+2)]'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = e^{x+1}\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+2}\cdot(2x-1)$$

$$y' = (x^2-x+2)^{e^{x+1}}\cdot e^{x+1}\left[\ln(x^2-x+2)+\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right].$$

Замечание. При дифференцировании степенно-показательной функции можно пользоваться формулой

$$(f(x)^{\varphi(x)})' = \varphi(x)\cdot f(x)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x)+f(x)^{\varphi(x)}\cdot\ln f(x)\varphi'(x),$$

если f(x) и φ(x) – дифференцируемые функции.

Задание 1

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 7.

Таблица 7

№ пп	Задание	№ пп	Задание
1	$y = x + \ln\frac{x-1}{x+1}$	13	$y = x^3 \ln x - x^2$
2	$y = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$	14	$y = \frac{tgx + ctgx}{tgx - ctgx}$
3	$y = x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx$	15	$y = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$
4	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	16	$y = \frac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
5	$y = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x}$	17	$y = \frac{\cos x}{1+\ln\cos x}$
6	$y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$	18	$y = (x^3+4)\ln(x^3+4)$
7	$y = \ln\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$	19	$y = \frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
8	$y = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$	20	$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
9	$y = arctg(x-1) + \frac{x-1}{x^2-2x+2}$	21	$y = \frac{4x - x^4}{1-3x^2}$
10	$y = (3x^3 - 2x^2 + 3x)e^{-x}$	22	$y = \sqrt{3x+1}(\ln(3x+1)-3)$
11	$y = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$	23	$y = \frac{x\ln x + 1}{x\ln x - 1}$
12	$y = \arccos e^x + \arccos\sqrt{1-e^x}$	24	$y = \frac{1}{3}tg^3\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$

Задание 2

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 8.

Таблица 8

№№ пп	Задание	№№ пп	Задание
1	$y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$	14	$y = \ln(x \sin x)$
2	$y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 3x}{1 + 3x}\right)^2}$	15	$y = \log_2 \frac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$
3	$y = 3\ln(2x^3 - 4x)^2$	16	$y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x^3 - 1}}$
4	$y = \ln \frac{x(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$	17	$y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$
5	$y = \sqrt[3]{\frac{1 - e^{4x}}{e^{4x}}}$	18	$y = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)^2$
6	$y = (xe^{2x} + 3)^5$	19	$y = \arccos\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$
7	$y = \sqrt{\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}$	20	$y = \log_3(x^3 - 1)$
8	$y = x\ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$	21	$y = \log_2[\log_3(x^2 - 3)]$
9	$y = \sin(x^2 + 2^x)$	22	$y = \ln \mathrm{arcctg}\sqrt{1 + x^2}$
10	$y = \ln \frac{x^3 - 9}{x^3 - 1}$	23	$y = \sqrt[3]{\ln \cos \frac{x+2}{3}}$
11	$y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$	24	$y = \frac{1}{2} \sqrt{\arccos\sqrt{x^2 + 2x}}$
12	$y = \ln \frac{x^2 - 2}{\sqrt{(6 - 2x^2)^3}}$	25	$y = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
13	$y = \sqrt{\frac{1 + e^{-4x}}{1 - e^{-4x}}}$	26	$y = \ln \cos\sqrt[3]{\mathrm{arctge}^{3x}}$

Задание 3

Используя логарифмическое дифференцирование, найти производную функции. Задания взять из таблицы 9.

Таблица 9

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$y=(x^2+2x)^{\sqrt{x}}$	16	$y=(\sqrt{x})^x$
2	$y=(\sqrt{x^2-1})^{x^3-3}$	17	$y=(x^2+5x)^{\frac{1}{x}}$
3	$y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$	18	$y=\left(\frac{x}{1-x}\right)^x$
4	$y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$	19	$y=(x^2+1)^{\cos x}$
5	$y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$	20	$y=(\cos x)^{\sin x}$
6	$y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^{\sqrt{x}}$	21	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$
7	$y=(\sin x)^{\arcsin x}$	22	$y=(x+1)^{\ln x}$
8	$y=(\cos x)^{\arccos x}$	23	$y=(\ln x)^{x^2-2}$
9	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{arctg}x}$	24	$y=(\log_2 x)^{2^x}$
10	$y=(\mathrm{arcctg}x)^{1+x^2}$	25	$y=(3^x)^{\log_3 2}$
11	$y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$	26	$y=(\cos 2x)^{\mathrm{ctg}2x}$
12	$y=(\sqrt{x^2-4})^{\ln x}$	27	$y=(\sqrt{x^2+1})^{\ln\sqrt{x^2+1}}$
13	$y=(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$	28	$y=(\mathrm{arctg}e^x)^{e^{-x}}$
14	$y=x^{\cos x}$	29	$y=(\sqrt{e^x})^{\ln x}$
15	$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{x^3-3}$	30	$y=(\sqrt{1+\ln^2 x})^{e^x}$

Задание 4

Найти производную неявно заданной функции. Задания взять из таблицы 10.

Таблица 10

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$y^2 + xy + x^2 = 1$	16	$x - \cos^2 y - \ln\cos x = 0$
2	$x^3 + 2xy - y^3 = 0$	17	$x - \sin y \cdot e^{\cos x} = 0$
3	$\sin\frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y} = \mathrm{tg}(x - y)$	18	$y = \ln\cos x - y^2$
4	$y\ln y - xe^y = 1$	19	$\mathrm{ctg}\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$
5	$x = 1 - ye^{xy}$	20	$y\cos x + x\sin y = x + y$
6	$y = x + \mathrm{arctg}y$	21	$y\cos x + x\cos y = 0$
7	$y = \sin(x + y)$	22	$e^x - e^y = e^{x+y}$
8	$x + y = \arcsin x + \arccos y$	23	$x^2 y = e^{\frac{x}{y}}$
9	$3^x + 3^y = 3^{x+y}$	24	$x + y + e^y \mathrm{arcctg}x = 0$
10	$x^3 + y^3 = xy$	25	$\ln x = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$
11	$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} = x$	26	$x^2 - xy + y^2 = 1$
12	$x\cos y - \sin y + \sin 2y = 0$	27	$x\sin y - y\sin x = 0$
13	$y\cos x - \sin(x - y) = 0$	28	$\frac{x}{y} = \mathrm{arcctg}\frac{x}{y}$
14	$x^2(x + y) = (x - y)$	29	$e^x - e^y + 2^{xy} + 1 = 0$
15	$y = x^3 + x\sqrt{e^y}$	30	$x^2 - \sin(xy) + 2y = 0$

Задание 10

Найти производную функции, заданной параметрически. Задания взять из таблицы 11.

Таблица 11

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	9	$\begin{cases} x = 2^{-t} \\ y = 2^{2t} \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \ln(t+1) \\ y = \dfrac{1}{t+1} \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = 3t+6t^2 \\ y = t^2+3t^3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t^3+t^2+t \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t-1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t-1}\right)^2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков ее механический и геометрический смысл?
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.
4. В чем заключается суть логарифмического дифференцирования и в каких случаях его целесообразно применять?
5. Каково правило дифференцирования функции, заданной неявно?
6. Как находится первая производная функция, заданной параметрически?

Практическая работа №3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C;$
5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C;$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$
12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
14. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$
15. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$
16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - ctgx\right| + C$;

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|tgx + \frac{1}{\cos x}\right| + C$.

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

1.1. Примеры выполнения задания 1

Данные задания могут быть выполнены методом разложения подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью «табличного интегрирования» (этот метод основан на линейности неопределенного интеграла).

Пример 1. Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 8}{\sqrt{x} - 2} dx$; б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$;

в) $\int \frac{4 - \sqrt{9 - x^2}}{9 - x^2} dx$; г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x} dx$.

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

$$а)\ \int \frac{\sqrt{x^3} - 8}{\sqrt{x} - 2} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^3 - 2^3}{\sqrt{x} - 2} dx = \int \frac{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)}{\sqrt{x} - 2} dx =$$

$$= \int (x + 2\sqrt{x} + 4)\, dx = \int x dx + 2\int x^{1/2} dx + 4\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

б) $$\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx =$$
$$= \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx = 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= 2 \cdot (-\mathrm{ctg} x) + 3 \cdot \mathrm{tg} x + C = 3 \cdot \mathrm{tg} x - 2 \cdot \mathrm{ctg} x + C.$$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

в) $$\int \frac{4 - \sqrt{9 - x^2}}{9 - x^2} dx = \int \left(\frac{4}{9 - x^2} - \frac{\sqrt{9 - x^2}}{9 - x^2} \right) dx =$$
$$= -4\int \frac{dx}{x^2 - 9} - \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = -4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \ln\left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| - \arcsin \frac{x}{3} + C =$$
$$= -\frac{2}{3} \cdot \ln\left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| - \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

г) $$\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x} dx = \int \left(\frac{5^x \cdot e^x}{2^x} - \frac{3^x}{2^x} \right) dx = \int \frac{5^x \cdot e^x}{2^x} dx - \int \frac{3^x}{2^x} dx =$$
$$= \int \left(\frac{5 \cdot e}{2} \right)^x dx - \int \left(\frac{3}{2} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{5 \cdot e}{2} \right)^x}{\ln\left(\frac{5 \cdot e}{2} \right)} - \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2} \right)} + C =$$
$$= \frac{\frac{5^x \cdot e^x}{2^x}}{\ln 5 + \ln e - \ln 2} - \frac{\frac{3^x}{2^x}}{\ln 3 - \ln 2} + C =$$
$$= \frac{5^x \cdot e^x}{2^x \cdot (\ln 5 + 1 - \ln 2)} - \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \qquad (1.1)$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины **a** справедливо равенство:

$$d(x + a) = dx, \qquad (1.2)$$

поэтому $\int f(x)dx = \int f(x)d(x + a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a \cdot x) = a \cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d(a \cdot x), \qquad (a \neq 0) \qquad (1.3)$$

поэтому $$\int f(x)dx = \frac{1}{a} \cdot \int f(x)d(a \cdot x). \qquad (1.4)$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sin(7x + 2)dx$; б) $\int \sqrt[3]{3 - x}\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{4x + 3}$; г) $\int e^{-2x+7}dx$;

д) $\int 5^{7x-3}dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4 - \frac{x}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x + 2)dx = \frac{1}{7} \cdot \int \sin(7x + 2)d(7x + 2) = -\frac{1}{7} \cdot \cos(7x + 2) + C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k \neq 0$ имеют место формулы

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C \qquad (1.5)$$

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C$$

(1.6)

б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = -\int (3-x)^{1/3}d(3-x) = -\dfrac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C =$

$= -\dfrac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n\neq -1, k\neq 0)$$

(1.7)

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \dfrac{dx}{4x+3} = \dfrac{1}{4}\cdot\int\dfrac{d(4x+3)}{4x+3} = \dfrac{1}{4}\cdot\ln|4x+3|+C.$

Отметим, что при $k\neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot\ln|kx+b|+C.$$

(1.8)

г) $\int e^{-2x+7}dx = -\dfrac{1}{2}\int e^{-2x+7}d(-2x+7) = -\dfrac{1}{2}\cdot e^{-2x+7}+C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k\neq 0$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b}+C. \qquad (1.9)$$

д) $\int 5^{7x-3}dx = \dfrac{1}{7}\int 5^{7x-3}d(7x-3) = \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{5^{7x-3}}{\ln 5}+C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \dfrac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot\int\dfrac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot \mathrm{tg}\left(4-\frac{x}{3}\right)+C$

(см. табличный интеграл 8).

Пример 3. Найти интегралы

а) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx$;

в) $\int x^3 (2 + x^4)^5 dx$; г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;

д) $\int \frac{3^x}{4 + 3^x} dx$; е) $\int (x + 3) \cdot \cos(x^2 + 6x) dx$.

Решение.

а) сделаем замену переменной полагая $t = -x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t = -x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)' dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2 dx} = \int e^{-x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x + 2)$, тогда обозначим $t = \sin x + 2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} d(\sin x + 2) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int t^{-1/3} dt =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{2}(\sin x + 2)^{2/3} + C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t = 2 + x^4$.

Тогда $dt = d(2 + x^4) = (2 + x^4)' dx = 4x^3 dx$, т.е. $dt = 4x^3 dx$, откуда $x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3(2+x^4)^5dx=\int(2+x^4)^5\cdot x^3dx=\int t^5\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^5dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{24}\cdot t^6+C=\frac{1}{24}\cdot(2+x^4)^5+C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)$ и заменой $t=\arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^3d(\arcsin x)=$$

$$=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\cdot\arcsin^4 x+C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t=4+3^x$. Тогда $dt=(4+3^x)'dx=3^x\cdot\ln 3dx$, откуда $3^x dx=\frac{1}{\ln 3}dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int\frac{3^x}{4+3^x}dx=\int\frac{1}{4+3^x}\cdot 3^x dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln 3}dt=\frac{1}{\ln 3}\cdot\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln|t|+C=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln|4+3^x|+C=\log_3(4+3^x)+C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t=x^2+6x$. Тогда $dt=d(x^2+6x)=(x^2+6x)'dx=(2x+6)dx=2(x+3)dx$, т.е. $dt=2(x+3)dx$ и $(x+3)dx=\frac{1}{2}dt.$

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int(x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx=\int\cos(x^2+6x)\cdot(x+3)dx=$$

$$=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos tdt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin(x^2+6x)+C.$$

Задание 1.
Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1.	$\int \frac{3dx}{\sqrt{4-x^2}}$	2.	$\int \frac{5x^8+3}{x^3}\,dx$
3.	$\int \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	4.	$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$
5.	$\int \frac{2^x-3^x}{4^x}\,dx$	6.	$\int \frac{2dx}{x^2-9}$
7.	$\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$	8.	$\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$
9.	$\int \frac{2^x\cdot e^x-1}{2^x}\,dx$	10.	$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
11.	$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$	12.	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
13.	$\int \frac{x^2+5x+6}{x+2}\,dx$	14.	$\int \frac{1+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$
15.	$\int \frac{7dx}{\sqrt{8-x^2}}$	16.	$\int \frac{2x\sin^2 x+3}{\sin^2 x}\,dx$
17.	$\int \left(\sin x+\frac{e^x}{2}+\sqrt[6]{x}\right)dx$	18.	$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$
19.	$\int \frac{3^x+4^x}{2^x}\,dx$	20.	$\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\,dx$

Задание 2.
Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

31.	$\int \sin\left(1-\frac{2x}{3}\right)dx$	32.	$\int \frac{1}{\sin^2(5x+1)}\,dx$	33.	$\int \frac{1}{5-3x}\,dx$
34.	$\int (1-5x)^{1/5}\,dx$	35.	$\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx$	36.	$\int 2^{1-7x}\,dx$

37.	$\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right) dx$	38.	$\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^4 dx$	39.	$\int 2^{\frac{x+1}{2}} dx$
40.	$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} dx$	41.	$\int \frac{1}{(1-3x)^{1/5}} dx$	42.	$\int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{5}} dx$
43.	$\int \frac{1}{(2x-1)^{1/2}} dx$	44.	$\int \frac{1}{3-5x} dx$	45.	$\int \frac{1}{1-7x} dx$
46.	$\int \frac{1}{3^{2-4x}} dx$	47.	$\int \sin\left(1-\frac{x}{3}\right) dx$	48.	$\int \frac{1}{(2x-1)^3} dx$
49.	$\int \frac{1}{4x-1} dx$	50.	$\int \left(1-\frac{x}{4}\right)^5 dx$	51.	$\int \cos\left(1-\frac{x}{7}\right) dx$

Задание 3.

Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

21.	$\int x \cos x^2 \, dx$	22.	$\int x \cdot e^{1-x^2} dx$
23.	$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$	24.	$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
25.	$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x} dx$	26.	$\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x} dx$
27.	$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx$	28.	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
29.	$\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$	30.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$
31.	$\int 2^{x^2} \cdot x \, dx$	32.	$\int e^x \cos(e^x) \, dx$
33.	$\int x \cdot e^{4-x^2} dx$	34.	$\int e^{x^3} \cdot x^2 \, dx$
35.	$\int \frac{2^x}{2^x+3} dx$	36.	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
37.	$\int x^2 (2+x^3)^4 \, dx$	38.	$\int (x^3-4x)^{10} (3x^2-4) \, dx$

39.	$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$	40.	$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx$

Задание 4.

Найти интеграл, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

1.	$\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$	2.	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
3.	$\int \mathrm{arctg}\,2x\,dx$	4.	$\int \ln x\,dx$
5.	$\int \arcsin(x+1)\,dx$	6.	$\int (1-3x)\cdot 2^x dx$
7.	$\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$	8.	$\int \ln(1-x)\,dx$
9.	$\int (2x-1)\cos x\,dx$	10.	$\int x\ln 2x dx$
11.	$\int (2x+1)\cdot e^{2x}dx$	12.	$\int x\cdot 2^{-x}dx$
13.	$\int (x+1)\mathrm{arctg}x\,dx$	14.	$\int \arcsin(x+2)\,dx$
15.	$\int (1-x)\ln x\,dx$	16.	$\int \ln(1-3x)\,dx$
17.	$\int (2x-3)\cos 3x\,dx$	18.	$\int (x+1)\cdot\sin 5x\,dx$
19.	$\int x\cdot e^{1-x}dx$	20.	$\int \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$

Задание 5.

Найти интеграл от выражений, содержащих квадратный трехчлен.

1.	$\int \frac{2x-3}{x^2-6x+25}dx$	2.	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$
3.	$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$	4.	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$
5.	$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	6.	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$

7.	$\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$	8.	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$
9.	$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx$	10.	$\int \frac{2x+2}{2x^2+x+1}dx$
11.	$\int \frac{x+1}{x^2-10x+26}dx$	12.	$\int \frac{5x-1}{x^2+6x+18}dx$
13.	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$	14.	$\int \frac{4x-1}{4x^2+2x+3}dx$
15.	$\int \frac{2x-1}{4x^2+4x+5}dx$	16.	$\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$
17.	$\int \frac{x}{2x^2-4x+10}dx$	18.	$\int \frac{2x}{6x-10-x^2}dx$
19.	$\int \frac{x+1}{x^2-6x+15}dx$	20.	$\int \frac{2x+1}{15x-7-3x^2}dx$

Задание 6.

Найти интеграл от рациональной дроби, предварительно разложив ее на сумму простейших дробей.

1.	$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+4x+4)}dx$	2.	$\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$
3.	$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$	4.	$\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+4)}dx$
5.	$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$	6.	$\int \frac{x+7}{x^3-2x^2+2x}dx$
7.	$\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$	8.	$\int \frac{x^3+x}{x^4-4x^2+4}dx$
9.	$\int \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$	10.	$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x^2+9)}dx$

11.	$\int \frac{x+3}{(x^2+2)(x^2-2x+1)}dx$	12.	$\int \frac{x^2+2x+5}{(x^2+4x+4)(x^2+4)}dx$
13.	$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-4)(x^2-5x+6)}dx$	14.	$\int \frac{x^2+x-3}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$
15.	$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-81}dx$	16.	$\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+4x^2}dx$
17.	$\int \frac{x^2-x+5}{x^3+x^2}dx$	18.	$\int \frac{2x-1}{x^3+x^2+4x+4}dx$
19.	$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+1)(x-1)}dx$	20.	$\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-4x}dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
6. Объясните суть непосредственного интегрирования.
7. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
8. Найдите интеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двумя способами.
9. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
10. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
19. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
20. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^m x dx$, $\int ctg^n x dx$.
21. Методы нахождения интегралов вида $\int stc^{2m} x dx$, $\int \cos ec^{2n} x dx$.

Практическая работа №4. Определённый интеграл и его приложение

2. Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.1

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int\limits_1^3 \left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int\limits_1^4 \left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int\limits_1^2 \left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int\limits_2^4 \left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int\limits_2^5 \left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int\limits_0^1 \left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int\limits_1^2 \frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int\limits_1^2 \left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int\limits_{-2}^{-1} \left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int\limits_1^2 \left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int\limits_1^2 \left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int\limits_1^3 \frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int\limits_0^1 \left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

17	$\int_2^3\left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2\left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$
19	$\int_1^2\left(\frac{5}{x}-e^{2x+1}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$	20	$\int_1^9\left(\frac{x^{3/2}+x+5}{x}+\cos 2x\right)dx$

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.2

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^8\frac{dx}{1+\sqrt{6x+1}}$	2	$\int_0^1\frac{xdx}{1+\sqrt{5x+1}}$
3	$\int_2^3\frac{xdx}{1-\sqrt{4x+1}}$	4	$\int_1^2\frac{dx}{5+\sqrt{3x-1}}$
5	$\int_2^3\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$	6	$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_6^7\frac{2x^2dx}{\sqrt{x-5}}$	8	$\int_{-1}^1\frac{3xdx}{\sqrt{x+4}}$
9	$\int_2^3\frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{1+7x}-6}$
11	$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+4}dx$	12	$\int_0^4\frac{dx}{2+\sqrt{6x+1}}$
13	$\int_1^2\frac{xdx}{1-\sqrt{3x+1}}$	14	$\int_1^2\frac{xdx}{1-\sqrt{7x+1}}$

15	$\int\limits_{1}^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	16	$\int\limits_{0}^{7}\frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$
17	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\sqrt{8x+1}}$	18	$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	20	$\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Таблица 2.3

№	$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$	№	$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x^2+4}$	2	$\int\limits_{0}^{1}(3x+7)^{10}dx$
3	$\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln^3 x}{x}dx$	4	$\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$
5	$\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{tg}^8 x}{\cos^2 x}dx$	6	$\int\limits_{1}^{2}\frac{3x^2dx}{x^3+5}$
7	$\int\limits_{0}^{1/2}\frac{\arccos^3 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8	$\int\limits_{1}^{2}\frac{2+\ln x}{x}dx$
9	$\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x^4+1}$	10	$\int\limits_{0}^{1}\frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)}$
11	$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{arctg}^2 x+x}{1+x^2}dx$	12	$\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

13	$\int_{2}^{3}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$	14	$\int_{0}^{1}xe^{x^2+1}dx$
15	$\int_{2,5}^{3}(2x-5)^{17}dx$	16	$\int_{1}^{2}\frac{ctg^{10}x}{\sin^2 x}dx$
17	$\int_{1}^{2}x^2 5^{x^3-1}dx$	18	$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
19	$\int_{0}^{1/2}\frac{8x-\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

Задание 4. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

Таблица 2.4

№	$\int_{a}^{b}f(x)dx$	№	$\int_{a}^{b}f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2xdx$	2	$\int_{-3}^{0}(x+3)\sin 4xdx$
3	$\int_{1}^{2}xe^{x}dx$	4	$\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3xdx$
5	$\int_{1}^{2}(4-3x)e^{-3x}dx$	6	$\int_{0}^{1}(4x+3)\cos 2xdx$
7	$\int_{1}^{2}\mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}dx$	8	$\int_{0}^{1}(3x+4)e^{3x}dx$
9	$\int_{1}^{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}dx$	10	$\int_{1}^{3}\ln(2x+3)dx$
11	$\int_{0}^{\pi}(6x-10)\sin 2xdx$	12	$\int_{0}^{1}(x+1)\ln(x+1)dx$

13	$\int_{-1}^{0} \arcsin(x+1)dx$	14	$\int_{0}^{1} \ln(x^2+4)dx$
15	$\int_{0}^{2} (1-6x)\cos x dx$	16	$\int_{0}^{\frac{1}{9}} \arccos(9x-1)dx$
17	$\int_{1}^{2} \frac{xdx}{\cos^2 x}$	18	$\int_{1}^{2} \frac{xdx}{\sin^2 x}$
19	$\int_{2}^{4} x\sin^2 xdx$	20	$\int_{1}^{3} \mathrm{arcctg}\, 2xdx$

Задание 5 . Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Таблица 2.5

№	$\int_{a}^{b} f(x)dx$	№	$\int_{a}^{b} f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+2}$	2	$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$
3	$\int_{1}^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$
5	$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, 2x}{\pi(1+4x^2)}dx$	6	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+6}$
7	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	8	$\int_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
9	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+10}$	10	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x-6}$

11	$\int\limits_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	12	$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
13	$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)}$	14	$\int\limits_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$
15	$\int\limits_{11/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-11x+2}$	16	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+2}$
17	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	18	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$
19	$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$	20	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3x}$

Задание 6. Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся

Таблица 2.6

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int\limits_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int\limits_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int\limits_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$

9	$\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x-2)^3}$
13	$\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int\limits_{-1/5}^{0}\frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int\limits_{2}^{4}\frac{2dx}{(2-x)^2}$
19	$\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int\limits_{3/2}^{4}\frac{dx}{(2x-3)^2}$

Задание 7. Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь

Таблица 2.7

№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$	№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$
1	2	3	4
1	$y=x^2-4x+3$ $y=x+3$	2	$y=x^2-8x+7$ $y=-5x+5$
3	$y=x^2+4x$ $y=x+4$	4	$y=9x^2+6x+1$ $y=-x+1$
5	$y=(x-2)^2$ $y=4x-8$	6	$y=-(x+3)(x-2)$ $y=x-2$
7	$y=3x-x^2$ $y=-x$	8	$y=2x^2-4x+1$ $y=2x-3$

9	$y=-x^2-8x+1$ $y=-x-2$	10	$y=x^2-2x$ $y=\frac{1}{2}x+5$
11	$y=(x+1)(x-4)$ $y=5x-4$	12	$y=x^2+6x+1$ $y=2x+1$
13	$y=2x^2+8x+1$ $y=6x+1$	14	$y=(x-1)^2$ $y=x+1$
15	$y=-x^2+x+5$ $y=-2x+7$	16	$y=x^2+3x+1$ $y=4x+1$
17	$y=-2x^2+5x-3$ $y=-3x-3$	18	$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ $y=4x+1$
19	$y=(x+5)(x-1)$ $y=3.5x-3.5$	20	$y=x^2+x+6$ $y=4x+6$

Задание 8. Вычислить длины дуг кривых

Таблица 2.8

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	2	3	4
1	$y=2e^{\frac{x}{2}}$, $\ln 3 \le x \le \ln 8$	2	$y=\frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$
3	$\begin{cases} x=\frac{1}{6}t^6 \\ y=2-\frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ox,Oy	4	$2y-x^2+3=0$ Между точками пересечения с осями Ox
5	$y=e^x$, $0 \le x \le 1$	6	$y=e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

7	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$	8	$y = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}, \ 0 \le x \le 9$
9	$y = \frac{x^2}{4}, \ 0 \le x \le 2$	10	$y = 4 - \frac{x^2}{2}, \ y \ge 0$
11	$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3, \ 0 \le x \le 5$	12	$y = \int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
13	$y = \int\limits_0^x \sqrt{\sin 2t}\,dt, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$	14	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
15	$\begin{cases} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	16	$x = a\cos t$ $y = -2a \ln \sin t$, от т.А (0,0) до В (x_0, y)
17	$\rho = 7(1 - \sin\varphi), \ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	18	$\rho = 2\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
19	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \ \pi \le t \le 2\pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi$

Контрольные вопросы

1.Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить методом интегрирования по частям.

2.Сформулируйте теорему о разложении многочлена на неприводимые множители.

3.Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей (в случае различных действительных корней знаменателя).

4.Изложите правило разложения правильной рациональней дроби на сумму простейших дробей (в случае кратных действительных корней знаменателя).

5.Сформулируйте правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда знаменатель имеет некратную пару комплексно-сопряженных корней.

6. Сформулируйте правило разложения правильной рациональной

дроби на сумму простейших дробей в случае, когда знаменатель имеет кратную пару комплексно-сопряженных корней.

7. Объяснить методы нахождения неопределенных коэффициентов.
8. В чем суть универсальной тригонометрической подстановки?

Практическая работа №5. Числовые и функциональные ряды

2.2. Пример 2

Вычислить значение определенного интеграла $J = \int\limits_0^{0,5} \frac{Ln(1-x)}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Интеграл J является несобственным. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Ln(1-x)}{x} = -1$, то положим f(0) = -1.

Разложим подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрируем

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{Ln(1-x)}{x} dx = \int\limits_0^{0,5} \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots}{x} dx =$$

$$= -\int\limits_0^{0,5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots\right) dx = -\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4} + \frac{1}{2^3 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n^2} + \cdots\right).$$

Определим, сколько слагаемых надо взять, чтобы погрешность вычислений не превышала 0,001. Для этого применим метод мажорирования.

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+2}(n+2)^2} + \frac{1}{2^{n+3}(n+3)^2} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{1}{4(n+3)^2} + \frac{1}{8(n+4)^2} + \cdots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+1)^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}(n+1)^2} = \frac{1}{2^n (n+1)^2},$$

$$R_n \le \frac{1}{2^n (n+1)^2} < 0,001.$$

Для *n* = 5 $\frac{1}{32 \cdot 36} = \frac{1}{1152} < 0,001$. Поэтому берем 5 слагаемых в разложении

$$\int_0^{0,5} \frac{Ln(1-x)}{x} dx \approx -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{72}+\frac{1}{256}+\frac{1}{800}\right) = -0,5807.$$

-0,5817 < J < -0,5797.

2.3. Пример 3

Вычислить значение определенного интеграла $y = \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Интеграл y является несобственным. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$, то положим F(0) = 2.

Обозначим $f(x) = e^{2x} - 1$. Разложим f(x) в степенной ряд

$$f(x) = e^{2x} - 1 = 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - n-ый остаток, допускающий оценку Лагранжа.

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \quad \text{где} \quad M = \max_{x\in[0,1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Так как $f^{(n+1)}(x) = e^{2x} \cdot 2^{n+1}$ и экспонента достигает максимального значения на правом конце отрезка, то $M = e^2 \cdot 2^{n+1}$. Следовательно,

$$|R_n(x)| \le \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{x} dx = \int_0^1 (2 + \frac{2^2}{2!}x + \frac{2^3}{3!}x^2 + \ldots + \frac{2^n}{n!}x^{n-1} + \frac{R_n(x)}{x})dx =$$

$$= (2x + \frac{2^2}{2!\cdot 2}x + \frac{2^3}{3!\cdot 3}x^2 + \frac{2^4}{4!\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{2^n}{n!\cdot n}x^n)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx =$$

$$= 2 + \frac{2^2}{2!\cdot 2} + \ldots + \frac{2^n}{n!\cdot n} + R_n,$$

где $R_n = \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx.$

Оценим R_n сверху:

$$|R_n| \le \int_0^1 \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| dx \le \int_0^1 \frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^n\, dx = \frac{9\cdot 2^{n+1}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\Bigg|_0^1 = \frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Теперь подберем n так, чтобы

$$\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} < 0{,}001.$$

Для этого n будем иметь $|R_n| < 0{,}001$ и требуемая точность

$$n=8 \qquad \frac{9\cdot 2^9}{9!\cdot 9} = \frac{4}{2835} > 0{,}001;$$

$$n=9 \qquad \frac{9\cdot 2^{10}}{10!\cdot 10} = \frac{4}{15750} < 0{,}001.$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{x}dx \approx 2 + \frac{2^2}{2!2} + \frac{2^3}{3!3} + \frac{2^4}{4!4} + \frac{2^5}{5!5} + \frac{2^6}{6!6} + \frac{2^7}{7!7} + \frac{2^8}{8!8} + \frac{2^9}{9!9} \approx 3{,}7165,$$

$$3{,}7155 < J < 3{,}7175.$$

Необходимо взять в сумме 9 слагаемых, и необходимая точность будет достигнута.

Индивидуальные задания

1.2.1. Задание 1

Записать ряд в развернутой форме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, если задан общий член a_n ряда. Выражение для общего члена взять в таблице

n	a_n	n	a_n
1	2	3	4
1	$\frac{n\cdot 2^n}{n!}$	12	$\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$
2	$\frac{n^2}{(n+2)!}$	13	$(-1)^n\cdot\frac{1+2^n}{n^3}$
3	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)^2}$	14	$\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$
4	$\frac{n^2}{n!}$	15	$\frac{-1+2\cdot(-1)^{n+1}}{n!}$

5	$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	16	$\dfrac{\cos\dfrac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+1}}$
6	$\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$	17	$(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n^2}{3^n\cdot(n+2)!}$
7	$(-1)^n\cdot\dfrac{n^2+1}{2^n\cdot n!}$	18	$\dfrac{\ln n}{n}$
8	$\dfrac{7\cdot13\cdot19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{(n^3)!}$	19	$(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{2^{n^2}}$
9	$(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n^2+1}{2^n}$	20	$\dfrac{1}{(n+1)+\sin n}$
10	$\dfrac{n+1}{3n}$	21	$(-1)^n\cdot\dfrac{n\cdot3^{n+1}}{2^n}$
11	$(-1)^n\cdot(2n-1)(2n+5)$	22	$n^{\frac{1}{n^2+1}}$

1.2.2. Задание 2

Для ряда $a_1+a_2+\ldots,$ определить его общий член a_n и записать ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

Таблица 1.2

n	$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots$
1	2
1	$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1\cdot2}{3^2\cdot2}+\dfrac{1\cdot2\cdot3}{3^3\cdot3}-\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{3^4\cdot4}+\ldots$
2	$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{2\cdot3}-\dfrac{27}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{64}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\ldots$
3	$\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{16}+\dfrac{16}{25}+\ldots$
4	$4-\dfrac{7}{2}+\dfrac{10}{6}-\dfrac{13}{24}+\dfrac{16}{120}-\ldots$
5	$1+\dfrac{6}{4\cdot9}+\dfrac{8}{9\cdot16}+\dfrac{10}{16\cdot25}+\ldots$

6	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5\cdot 6}}+\ldots$
7	$\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}+\ldots$
8	$\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}-\frac{24}{10000}+\ldots$
9	$\frac{6}{2!}+\frac{7}{4!}+\frac{8}{6!}+\frac{9}{8!}+\ldots$
10	$-3+\frac{5\cdot 3}{2}-\frac{7\cdot 5}{3}+\frac{9\cdot 7}{4}-\ldots$
11	$4+\frac{10}{4}+\frac{28}{9}+\frac{82}{16}+\frac{244}{25}+\ldots$
12	$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{27}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi}{81}}{4}+\ldots$
13	$\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}+\frac{6}{\ln 4}+\frac{24}{\ln 5}+\ldots$
14	$-\frac{3\cdot 9}{4}+\frac{9\cdot 16}{16}-\frac{27\cdot 25}{64}+\frac{81\cdot 36}{256}-\ldots$
15	$1+\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$
16	$0-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2\cdot 2^2}}+\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{3\cdot 2^3}}-\frac{\cos\frac{\pi}{16}}{\sqrt{4\cdot 2^4}}+\ldots$
17	$\frac{1}{3+\cos 2}+\frac{1}{4+\cos 3}+\frac{1}{5+\cos 4}+\frac{1}{6+\cos 5}+\ldots$
18	$-\frac{\pi}{8}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{4}}{8}-\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{9}}{18}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{16}}{32}-\ldots$
19	$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots$
20	$-1+\frac{3}{5}-\frac{4}{10}+\frac{5}{17}-\frac{6}{26}+\ldots$

1.2.3. Задание 3

Найти сумму ряда

Таблица 1.3

n	a_n	n	a_n
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+4)}$	11	$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{(n-2)(n-4)}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{6^{n+1}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n + 1)^2}{3^{3n-1}}$
3	$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2}{(n-4)(n-6)}$	13	$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{3}{(n-4)(n-7)}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{4^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + 3^n}{7^{n+1}}$
5	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-3)}$	15	$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-5)}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+5^n}{3^{2n-1}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4}{2^{3n-1}}$
7	$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{(n-9)(n-10)}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+10)(n+8)}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{3^{2n}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{10^{n-1}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2) \cdot n}$	19	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n - 1)^2}{5^{n-1}}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{2n}}{8^{n+1}}$

1.2.4. Задание 4

Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

Таблица 1.4

n	a_n	n	a_n
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2(n^2+4)}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}+(n-1)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{n+5}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+9}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2+1}\right)$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+5^n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 5n}{n!}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n-1}}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+n^2\cdot\sqrt[3]{n}}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4n}}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(3n-1)\cdot 5^{3n-1}}$

1.2.5. Задание 5

Исследовать сходимость ряда, применяя признак Даламбера.

Таблица 1.5

n	a_n	n	a_n
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n(n-1)!}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!\cdot 2^{n+1}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(2n)!}{2n!}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot e^{-n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n\cdot n!}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot n!}{(2n)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2\cdot 4^n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(n^2+2)\cdot 2^n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt{2^n+3}}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{2^n}$

1.2.6. Задание 6

Исследовать сходимость ряда, применяя признак Коши (с радикалом).

Таблица 1.6

n	a_n	n	a_n
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^3}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)^{n}$	15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-3}\right)^{n-2}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$	17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^3}$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n}$	19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$	21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n-1}$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{5^n}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n}$	23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$
12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

1.2.7. Задание 7

Исследовать сходимость ряда, применяя интегральный признак Коши

Таблица 1.7

n	a_n	n	a_n
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 2n}$

2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$	15	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$
3	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{1+n^4}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
6	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{n^3+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{1+n^3}$
8	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$	21	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^4+9}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot \ln(n+3)}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5n}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+4}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{(n+2)}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln 2n}$	26	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n-1)}$

Задание 3

Разложить функцию f(x) в ряд по степеням $x - x_0$.

Таблица 1.3

Индивидуальные задачи к заданию 3

n	f(x)	x_0	n	f(x)	x_0

1	2	3	4	5	6
1	Sin(x+3)	0	20	$\frac{-3}{x^2+x-2}$	0
2	Ln(10x-3)	1	21	$\sqrt{2x+7}$	1
3	$\frac{1}{x^2-3x+2}$	0	22	Ln(3x + 2)	1
4	e^{3x+2}	1	23	e^x	3
5	$\frac{2}{x^2-4x+3}$	0	24	x^2Cos(x + 1)	0
6	Cos(x-2)	0	25	$\frac{2x+2}{3x^2-2x-1}$	0
7	$\sqrt[3]{1+x^2}$	0	26	x · Sin(2x + 1)	0
8	Ln(x + 2)	0	27	$\frac{Shx}{x}+Cos\ x$	0
9	e^{2x+1}	2	28	$\sqrt[3]{1+x}$	7
10	$\frac{x+1}{2x^2+3x-2}$	0	29	Ln(3x + 1)	0,2
11	$Sin\frac{\pi x}{4}$	2	30	$\frac{2x-1}{3x^2+5x-2}$	-1
12	$\sqrt{1+x}$	3	31	x arctg x	0
13	$Ch\frac{x}{3}$	0	32	Ln(1 + 6x + 8x^2)	0
14	Ln(2x + 5)	0	33	$(3+e^{-x})^2$	0
15	$\frac{7}{x^2-3x-10}$	0	34	x Sin(x + 2)	-2
16	$Sin\frac{x}{3}$	1	35	$\frac{x-2}{6x^2+x-1}$	0
17	e^{3x-1}	1	36	x – Ln(2x + 1)	0
18	$\sqrt[3]{7+x}$	1	37	$\sqrt{4+x^2}$	0
19	Cos(3x – 1)	1	38	x Cos(x – 2)	2

1.2.4. Задание 4

Вычислить значение функции f(x) в заданной точке x_0 ($f(x_0)$) с точностью до 0,001.

Таблица 1.4

Индивидуальные задачи к заданию 4

n	$f(x_0)$	N	$f(x_0)$	n	$f(x_0)$	n	$f(x_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt[3]{7}$	15	$\sqrt[3]{1,06}$	29	Sin 0,4	43	$\sqrt[6]{68}$
2	Sin 0,21	16	$1/\sqrt[4]{e}$	30	$1/\sqrt[3]{e}$	44	Sin 15°
3	$\sqrt[3]{9}$	17	$\sqrt[3]{145}$	31	Cos 0,31	45	Cos 0,26
4	Cos 0,22	18	Cos 0,24	32	$\sqrt{27}$	46	Ln 2,26
5	$1/\sqrt{e}$	19	$\sqrt[5]{246}$	33	$\sqrt[4]{17}$	47	$\sqrt[4]{18}$
6	Ln 1,1	20	Ln 1,05	34	Ln 3,03	48	Cos 18°
7	Cos 0,4	21	Cos 0,25	35	Cos 10°	49	$\sqrt[6]{556}$
8	$\sqrt[3]{10}$	22	$\sqrt[3]{72}$	36	Cos 0,21	50	$e^{-1/6}$
9	Ln 1,2	23	Ln 1,5	37	$e^{-0,3}$	51	$e^{-0,15}$
10	Sin 9°	24	$e^{-0,1}$	38	Sin 0,22	52	Ln 1,03
11	Ln 1,3	25	Sin 36°	39	Cos 9°	53	Sin 0,25
12	Sin 10°	26	Cos 15°	40	Ln 2,04	54	$\sqrt[5]{252}$
13	$\sqrt[5]{36}$	27	$\sqrt[3]{130}$	41	Ln 1,12	55	Cos 36°
14	Sin 18°	28	Ln 1,08	42	$e^{-0,4}$	56	$\sqrt[3]{66}$

1.2.5. Задание 5

Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x)\,dx$ с точностью до 0,001.

Таблица 1.5

Индивидуальные задачи к заданию 5

n	f(x)	b	n	f(x)	b
1	2	3	4	5	6
1	$\operatorname{Cos} x^3$	1	9	$\sqrt[4]{1+x^3}$	0,5
2	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	0,5	10	$\frac{\operatorname{Ln}(1+x/2)}{x}$	1
3	$\frac{\operatorname{Sin} x}{x}-1$	0,5	11	$\frac{e^{2x^2}-1}{x}$	0,1
4	$\frac{\operatorname{Sin} 2x}{2}-x$	0,5	12	$\frac{\operatorname{Ln}(1+3x)}{x}$	0,1
5	$\frac{\operatorname{Ln}(1+x^2)}{x}$	0,8	13	$\operatorname{Sin}\sqrt{\frac{x}{2}}$	0,5

6	e^{-2x^2}	0,2	14	$\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$	1
7	$\frac{\mathrm{Sh}\ x}{x} - \mathrm{Ch}\ x$	1	15	$\frac{1}{x} \cdot \mathrm{arctg}\ x$	0,5
8	$\mathrm{Cos}\sqrt{x}$	1	16	$x\ \mathrm{Ln}(1 + x^3)$	0,4
17	$\mathrm{Cos}\ (10x^2)$	0,1	35	$\frac{e^{x^2} - 1}{x}$	1
18	e^{-7x^2}	0,5	36	$\mathrm{arctg}\sqrt{x}$	0,36
19	$\arcsin \frac{x}{2}$	0,1	37	$\frac{\mathrm{Sin}\sqrt{x}}{x}$	1
20	$\frac{1}{1+x^3}$	0,2	38	$\frac{\mathrm{Ln}(1+x/3)}{x}$	1

Контрольные вопросы

1. Что называется функциональным рядом?
2. Область сходимости функционального ряда.
3. Ряд Тейлора для функции $f(x)$ по степеням $x - a$.
4. Что называется степенным рядом?
5. Область сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
6. Оценка остатка функционального ряда.
7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теорема о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема Вейерштрасса.
11. Разложение в ряд основных функций: e^x, Cos x, Sin x, Ln(1+x), $(1+x)^m$.
12. Условия разложимости функций в ряд Тейлора.

Практическая работа №6. Интегральное исчисление функций многих переменных

1.1. ЗАДАЧА 1

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{2y} f(x, y)\, dx .$$

РЕШЕНИЕ. Область интегрирования органичена прямыми y = 1, y = 3, x = (= 2y. На рис.2.1. она представляет трапецию ABCD.

Рис.2.1. Область интегрирования

При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область ABCD прямой BH, параллельной Oy на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют уравнения y = 1 и y = x/2.

Поэтому интеграл при изменении порядка интегрирования окажется равным сумме двух интегралов

$$\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{2y} f(x, y)\, dx = \int_{0}^{2} dx \int_{1}^{3} f(x, y)\, dy + \int_{2}^{6} dx \int_{x/2}^{3} f(x, y)\, dy.$$

2.2. ЗАДАЧА 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

где D – круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4$ (рис.2.2)

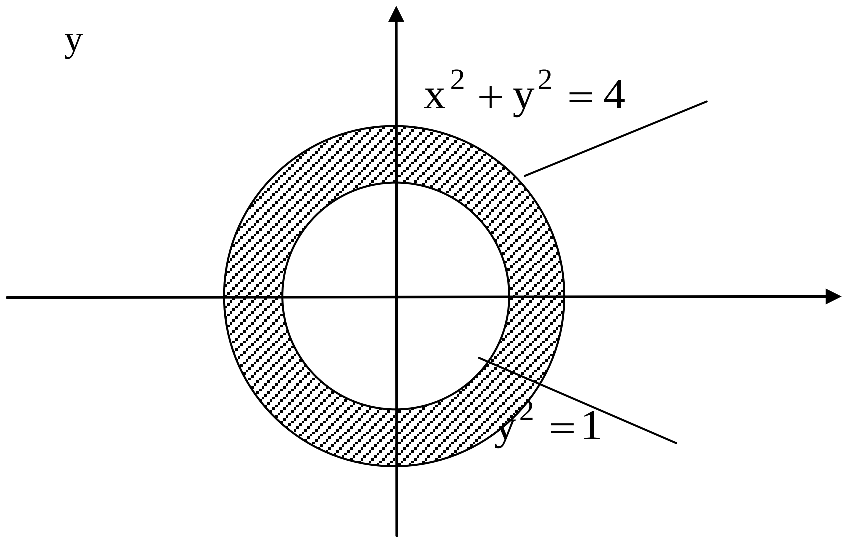

Рис.2.2. Область интегрирования D

РЕШЕНИЕ. Преобразуем двойной интеграл, отнесенный к декартовым координатам (x,y), в двойной интеграл в полярных координатах (ρ,φ). Имеем $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Якобиан соответствующего преобразования равен ρ.

Очевидно, что точкам (x,y)∈D взаимно однозначно соответствуют точки (ρ,φ) области $G=\{(\rho,\varphi): 0\le\varphi<2\pi, \quad 1\le\rho\le 2\}$. Поэтому данный интеграл равен

$$\iint\limits_G \frac{1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_G d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \rho\Big|_1^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

2.3. ЗАДАЧА 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y^2=x^3,\ y^2=8(6-x)^3.$

РЕШЕНИЕ. Построив данные полукубические параболы $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$, получим криволинейный четырехугольник OABC на рис.2.3, O(0;0), B(6;0), C(4;8)

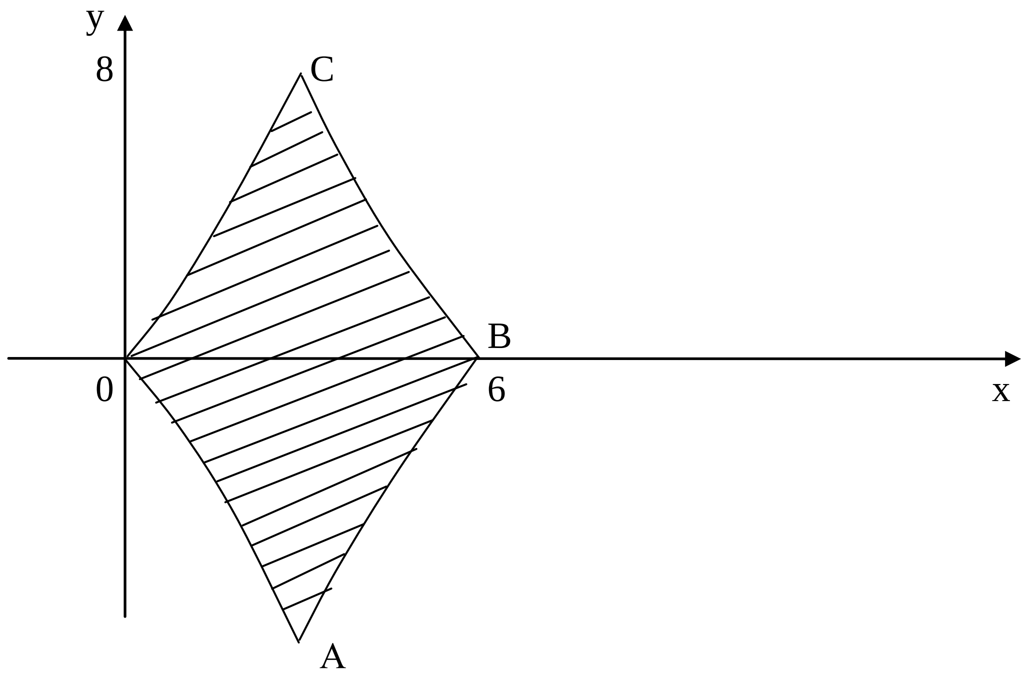

Рис.2.3. Графики функций $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$

Вследствие симметричности фигуры относительно оси Ox, ее площадь S равна удвоенной площади фигуры D - криволинейного треугольника OBC:

$$S = 2\iint\limits_D dxdy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}y^{2/3}} dx = 2\int_0^8 x\Big|_{y^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}y^{2/3}} dy = 2\int_0^8 (6-\frac{3}{2}y^{2/3})dy =$$

$$= 2(6y - \frac{9}{10}y^{5/3})\Big|_0^8 = 2(48 - \frac{9}{10}\cdot 32) = 38\frac{2}{5}.$$

2.4. ЗАДАЧИ 4-5

. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2$, $z = h \quad (h > 0)$.Найти координаты центра масс тела, предполагая, что оно однородно

РЕШЕНИЕ. Данное тело ограничено снизу параболоидом $z = \frac{x^2 + y^2}{h}$, сверху плоскостью z=h и проектируется в круг $x^2 + y^2 \le h$ плоскости XOY.

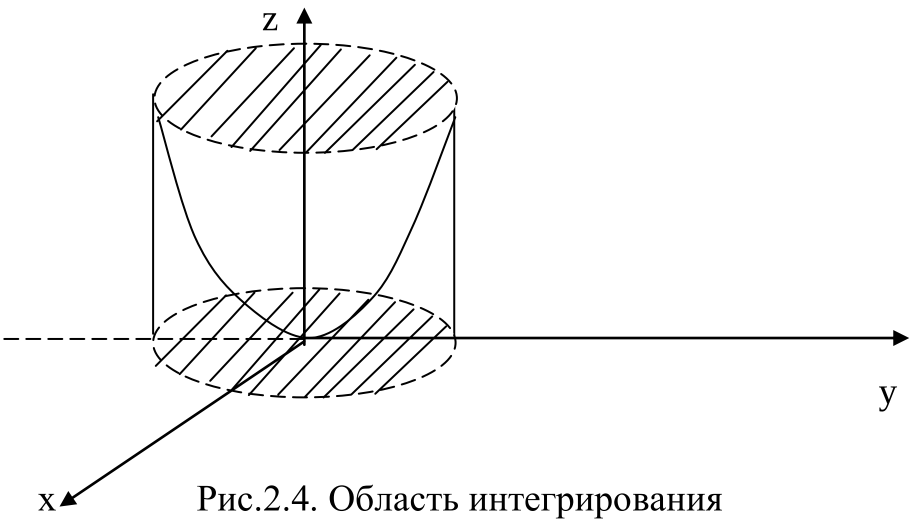

Рис.2.4. Область интегрирования

Используем цилиндрические координаты:

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi,$$

$$z = z,$$

в которых уравнение параболоида будет

$$z = \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}{h}, \qquad \text{т.е.} \qquad z = \frac{\rho^2}{h}.$$

Объем тела равен

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iiint\limits_{(V^*)} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_{\rho^2/h}^{h} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right)\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi = \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{3}.$$

Координаты центра масс тела вычисляются по формулам

$$X_c = \frac{M_{yz}}{M}, \quad Y_c = \frac{M_{zx}}{M}, \quad Z_c = \frac{M_{xy}}{M}, \text{ где}$$

$$M = \iiint\limits_{(V)} \xi(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\xi(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{zx}=\iiint\limits_{(V)} y\xi(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z\xi(x,y,z)dxdydz,$$

где $\xi(x,y,z)$ - плотность тела в точке (x,y,z). Для однородного тела можно положить $\xi(x,y,z)=1.$

Находим:

$$M=\iiint\limits_{(V^*)}\rho d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)\rho d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{h\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{4}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi h^3}{3}.$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V^*)}\rho^2\cos\varphi d\varphi d\rho dz=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2 d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\left(\rho^2 h-\frac{\rho^4}{h}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}h-\frac{\rho^5}{5h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{5}\right)d\varphi=\frac{2h^4}{15}\sin\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$M_{zx}=\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2 d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^h\left(\rho^2 h-\frac{\rho^4}{h}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2h^4}{15}\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{2h^4}{15}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=-\frac{2h^4}{15}\cdot\cos\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho d\rho\int_{\rho^2/h}^h zdz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\rho^2/h}^h d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho\left(\frac{h^2}{2}-\frac{\rho^4}{2h^2}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\left(\frac{\rho h^2}{2}-\frac{\rho^5}{2h^2}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2h^2}{4}-\frac{\rho^6}{12h^2}\right)\Bigg|_0^h=\int_0^{2\pi}\left(\frac{h^4}{4}-\frac{h^2}{12}\right)d\varphi=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{h^4}{4}-\frac{h^2}{12}\right).$$

Таким образом

$$X_c = 0, \quad Y_c = 0, \quad Z_c = h - \frac{1}{3h}.$$

Индивидуальные задания

Задание 1

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, сделав чертеж области интегрирования.

Таблица 3.1

№	Задание	№	Задание
1	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	10	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x,y)dx$
2	$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	11	$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$
3	$\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$	12	$\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$
4	$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	13	$\int_2^6 dx \int_{2x-4}^{x+2} f(x,y)dy$
5	$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$	14	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{6-2y} f(x,y)dx$
6	$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$	15	$\int_0^4 dx \int_{\frac{16-x^2}{8}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$
7	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$	16	$\int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy$
8	$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	17	$\int_0^6 dx \int_{\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{12x}} f(x,y)dy$

9	$\int_0^2 dy \int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$	18	$\int_0^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{5-y} f(x,y)dx$

Задание 2

Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$. Предварительно сделать чертеж области интегрирования.

№№	f(x,y)	Уравнения линий, ограничивающих область D
1	$\frac{y^2}{x}$	$y = x, y = 2x, x = 2, x = 4$
2	x^3y^2	$x^2 + y^2 = R^2$
3	$x^2 + y$	$y = x^2, y^2 = x$
4	$\frac{x^2}{y^2}$	$x = 2, y = x, yx = 1$
5	$\cos(x + y)$	$x = 0, y = \pi, y = x$
6	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$
7	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, a > 1$	$y = x, y = -x, x^2 + y^2 = 1.$
8	$\sqrt{x^2 - y^2}$	$y = x, y = -x, x = 1$
9	$\ell^{\frac{x}{y}}$	$y^2 = x, x = 0, y = 1.$
10	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$y = \frac{x^2}{2}, y = x$

11	x	$x+y=2, x^2+(y-1)^2=1$
12	y	$y=0, (x-1)^2+y^2=1, (y\ge 0)$
13	$x+2y$	$y=x-x^2, y=1-x^2, x=0$
14	x^2	$y=\frac{1}{x}, x=1, x=2$
15	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$y^2=2px, x=p$
16	xy^2	$y^2=2px, x=p$
17	xy	$x^2+y^2=R^2, x\ge 0, y\ge 0$
18	y	$x^2+(y-a)^2=a^2$
19	x^2+y^2	$x^2+y^2=2ax$
20	$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2=a^2(x\ge 0)$

Задание 3

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.

№№	Уравнения линий	№№	Уравнения линий
1	$x=y^2-2y; x+y=0$	15	$3x^2=25y; 5y^2=9x$
2	$y=2-x; y^2=4x+4$	16	$xy=4; x+y=5$
3	$y^2=4x-x^2; y^2=2x$ (вне параболы)	17	$x+y=1; x+3y=1;$ $x=y; x=2y$
4	$3y^2=25x; 5x^2=9y$	18	$\rho=4\sin\varphi; \rho=2\sin\varphi$
5	$y=4x-x^2; y=2x^2-5x$	19	$\rho=a\cos 2\varphi$

6	$x = 4 - y^2; x + 2y - 4 = 0$	20	$\rho = a\sin 3\varphi$
7	$\rho = 2(1 - \cos\varphi); \rho = 2$ (вне кардиоиды)	21	$(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$
8	$\rho = 2(1 + \cos\varphi); \rho = 2\cos\varphi$	22	$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$
9	$(x^2 + y^2)^5 = a^4x^4y^2$	23	$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
10	$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^3y$	24	$(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$
11	$(x^2 + y^2)^3 = a^4x^2$	25	$y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4$
12	$(x^2 + y^2)^5 = a^6xy^3$	26	$(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2)$
13	$(x^2 + y^2)^3 = a^4y^2$	27	$y = \cos x; y = \cos 2x;$ $y = 0; (x \geq 0)$
14	$x = y; x = 2y;$ $x + y = 6; x + 3y = 6$	28	$y = x; y = 5x; x = 1$

Задание 4

Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями. Найти координаты центра масс этого тела в предположении, что оно однородно.

№№	Уравнения поверхностей	№№	Уравнения поверхностей
1	$z = 0; z = y; x = 0$ $x = 4; y = \sqrt{25 - x^2}$	10	$z = 0; z = x^2; y = 0;$ $x + y = 4$
2	$z = 0; z = 16 - x^2;$ $y = 0; x + y = 8; x = 0$	11	$z = 0; z = 4\sqrt{y}; x = 0;$ $2x + y = 6$

3	$z=0; z=y^2;$ $x+2y=8; x=0;$	12	$z=0; z=9-x^2; x=0;$ $x+2y=8; y=0;$
4	$z=0; z=9-x^2;$ $x=0; y=0;$ $2y+x=6$	13	$z=0; z=2y; x=0;$ $x=6; x+y=9$
5	$z=0; z=1-x^2;$ $y=0; y=5-x$	14	$z=0; z=y^2;$ $x^2+y^2=9$
6	$z=0; z=4-x^2;$ $x=0; y=0; x+y=6$	15	$z=0; z=9-x^2;$ $y=0; x+y=3$
7	$z=0; z=4-y^2;$ $x=0; x+y=6$	16	$z=0; z=4-x-y;$ $x^2+y^2=4$
8	$z=0; z=\frac{1}{4}y^2;$ $2x-y=0; x+y=9$	17	$z=0; z=2x; y=0;$ $y=2; x=\sqrt{16-y^2}$
9	$z=0; z=x^2+y^2;$ $x=0; x^2+y^2=4; y=x$	18	$z=0; y+z=4; y=x^2$
19	$z=0; z=x^2+y^2;$ $x^2+y^2=9$	28	$z=0; x+z=9;$ $x=y^2$
20	$z=0; z=x^2;$ $y=2x;$ $x+y=6$	29	$z=0; y=\sqrt{x};$ $y=2\sqrt{x};$ $x+z=9$

Контрольные вопросы

1. Двойной интеграл. Области интегрирования
2. Двойной интеграл в полярных и криволинейных координатах.
3. Якобиан преобразования координат
4. Геометрические приложения двойного интеграла
5. Тройной интеграл и его приложения

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.

2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. –Ч. 2. – 432 с.

3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. –М. : Физматлит, 2009. – Ч. 3. – 544 с.

4. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. − М.: Флинта, 2012. − 165с. – Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

Дополнительная учебная литература

5. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. - 464 с.

6. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - Т. 1. - 416 с.

7. Туганбаев, А.А. Математический анализ. Ряды. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А.Туганбаев. – 3-е изд., доп. − М.: Флинта, 2012. − 48с. // Режим доступа − http: //biblioclub.ru/.

8. Тютюнов, Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст] : [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. - Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.

9. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.