

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 02.05.2024 12:06:41
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.



ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Локальные бифуркации в двумерных отображениях: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 15 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 15.

Описываются бифуркации седло-узел, удвоения периода и Неймарка-Саккера в двумерных отображениях. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . . . 2021. Формат 60 × 84^{1/16}.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ *457*. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение бифуркаций седло-узел, удвоения периода и Неймарка-Саккера в двумерных отображениях.

2. Двумерные отображения

- 1. Рассмотрим двумерное отображение, зависящее от параметра

$$\mathbf{x} \mapsto F(\alpha, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$ – вектор переменных состояния и α – параметр; $F = (F_1, F_2)$ – гладкое отображение класса \mathbb{C}^r , $r \geq 1$.

- 2. Неподвижные точки отображения удовлетворяют системе двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(\alpha, x, y) = x, \\ F_2(\alpha, x, y) = y \end{cases} \quad (2)$$

которую можно записать в матричной форме

$$F(\alpha, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

- 3. Пусть \mathbf{x}_0 – неподвижная точка

$$\mathbf{x}_0 = F(\alpha, \mathbf{x}_0).$$

Локальная (линейная) устойчивость \mathbf{x}_0 определяется посредством линеаризации F в окрестности неподвижной точки, аналогично тому, как это делалось в одномерных отображениях.

В результате получаем линейное отображение:

$$\varepsilon \mapsto A\varepsilon, \quad \varepsilon = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Здесь A – матрица Якоби, вычисленная в неподвижной точке \mathbf{x}_0 :

$$A = \left. \frac{\partial F(\alpha, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

- 4. Локальная устойчивость неподвижной точки \mathbf{x}_0 определяется собственными значениями ρ_1, ρ_2 матрицы Якоби A , т.е. корнями характеристического уравнения

$$\chi(\rho) = \det(A - \rho I) = \rho^2 - \tau \cdot \rho + \delta = 0,$$

где I – единичная 2×2 матрица; $\tau = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ и $\delta = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ – след и определитель матрицы A , соответственно.

- 5. Собственные числа ρ_1, ρ_2 матрицы A , т.е. корни характеристического уравнения $\rho^2 - \tau \cdot \rho + \delta = 0$:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta})$$

называются мультипликаторами неподвижной точки.

- 6. Неподвижная точка \mathbf{x}_0 локально устойчива, если $|\rho_{1,2}| < 1$, т.е., оба мультипликатора находятся внутри единичного круга в комплексной плоскости $\{\rho \in \mathbb{C}^1 : |\rho| = 1\}$. Если хотя бы один из мультипликаторов окажется за границей единичного круга, то неподвижная точка неустойчива (см. рис. 1).
- 7. Речь идет об устойчивости гиперболических неподвижных точек!!!

3. Треугольник устойчивости

- Граница области устойчивости неподвижной точки задается условиями

$$\rho = +1; \quad \rho = -1; \quad e^{\pm i\theta_0} = 1.$$

Здесь ρ – наибольший по модулю действительный мультипликатор, например ρ_1 ; $e^{\pm i\theta_0} = 1$ – комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i\omega = re^{\pm i\theta}$, лежащая на границе единичного круга ($r = 1$), где $r = \sqrt{\mu^2 + \omega^2}$ и $\cos \theta = \mu/r$, $\sin \theta = \omega/r$ (рис. 2).

- В первом случае, когда $\rho = +1$, из характеристического уравнения

$$\chi(\rho) = \rho^2 - \tau \cdot \rho + \delta = 0$$

получим

$$\chi(+1) = 1 - \tau + \delta = 0.$$

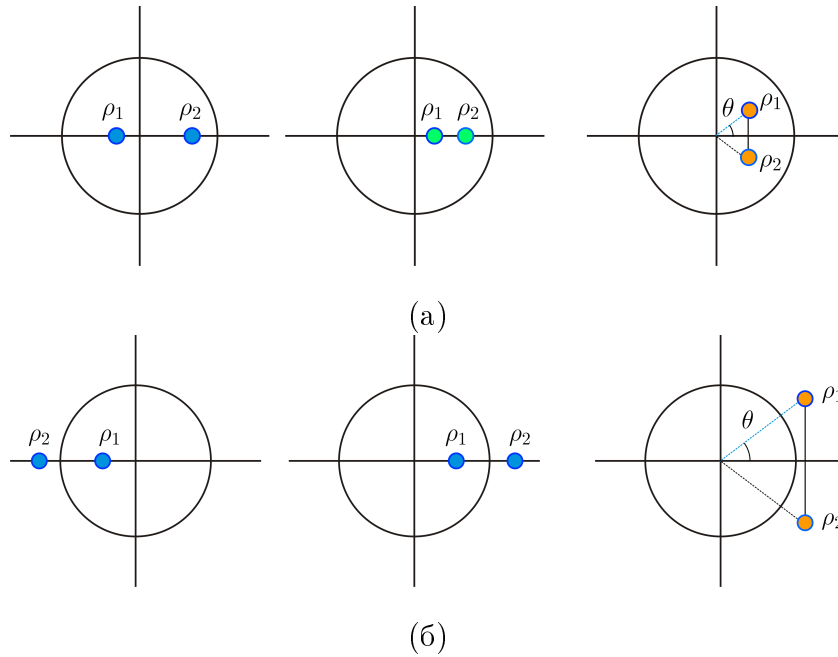


Рис. 1. (а) Расположение мультипликаторов в комплексной ρ - плоскости для случая устойчивости. (б) Расположение мультипликаторов в комплексной ρ - плоскости для случая неустойчивости

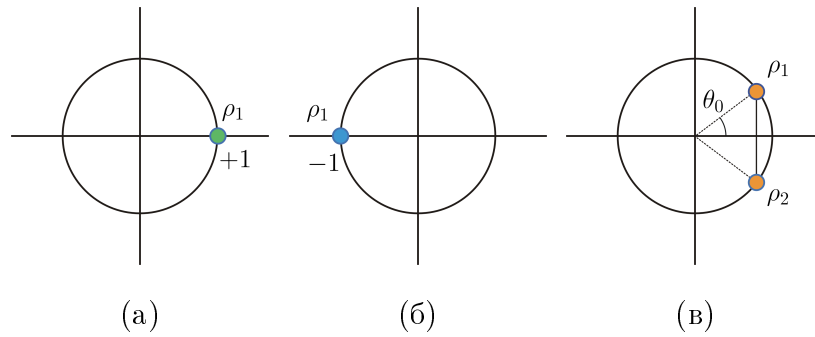


Рис. 2. (а) $\rho = +1$. (б) $\rho = -1$. (в) $e^{\pm i\theta} = 1$

Во втором случае, когда $\rho = -1$, имеем

$$\chi(-1) = 1 + \tau + \delta = 0.$$

В третьем:

$$\chi(e^{\pm i\theta_0}) = \delta - 1 = 0.$$

- Корни

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta})$$

уравнения

$$\rho^2 - \tau \cdot \rho + \delta = 0$$

комплексные, если

$$\delta > \tau^2/4.$$

Следовательно, граница комплексных мультипликаторов

$$\delta = \tau^2/4.$$

- На плоскости (τ, δ) полученные границы образуют треугольник устойчивости. Границы треугольника определяются тремя прямыми

$$\chi(1) = 1 - \tau + \delta = 0,$$

$$\chi(-1) = 1 + \tau + \delta = 0,$$

$$\chi(e^{\pm i\theta}) = \delta = 1.$$

- Внутренняя область треугольника

$$\chi(1) = 1 - \tau + \delta > 0,$$

$$\chi(-1) = 1 + \tau + \delta < 0,$$

$$\chi(e^{\pm i\theta}) = \delta < 1$$

образует область устойчивости.

4. Простейшие условия локальных бифуркаций

Обсудим поведение мультипликаторов на границе треугольника и перечислим основные бифуркации.

- При вариации параметров один из действительных мультипликаторов или комплексно-сопряженная пара мультипликаторов попадают на границу треугольника.
- А. Седло-узловая (fold), $\rho = +1$ (рис. 3(а)). Этой бифуркации отвечает правая граница треугольника устойчивости:

$$1 - \tau + \delta = 0.$$

- В. Удвоение периода (flip), $\rho = -1$ (рис. 3(б)). Этой бифуркации отвечает левая граница треугольника устойчивости:

$$1 + \tau + \delta = 0.$$

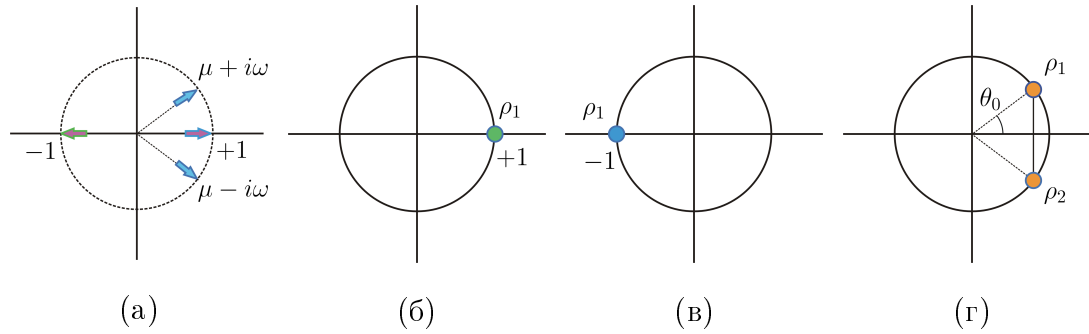


Рис. 3. (а) Движение мультипликаторов к границе единичного круга при вариации параметров. (б) Седло-узловая бифуркация, $\rho = +1$. (в) Бифуркация удвоение - периода, $\rho = -1$. (г) Бифуркация Неймарка-Сакера, $e^{\pm i\theta_0} = 1$

- Г. Бифуркация Неймарка-Сакера, $e^{\pm i\theta} = 1$ (рис. 3(в)). Этой бифуркации отвечает верхняя граница треугольника устойчивости:

$$\delta = 1.$$

- Д. Рассмотренные бифуркации называются бифуркациями коразмерности один. Мы исключили точки пересечения границ треугольника устойчивости (вершины треугольника). В этих точках имеют место бифуркации коразмерности два.

5. Пример

Рассмотрим отображение Хенона

$$x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2 - \beta y_k; \quad y_{k+1} = x_k.$$

Перепишем в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \alpha x^2 - \beta y \\ x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Здесь α – коэффициент нелинейности; β ($|\beta| < 1$) – коэффициент диссипации.

- 1. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} x = F_1(x, y) \\ y = F_2(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha x^2 - \beta y, \\ y = x, \end{cases}$$

$$F_1(x, y) = 1 - \alpha x^2 - \beta y, \quad F_2(x, y) = x.$$

Отсюда

$$x = 1 - \alpha x^2 - \beta x$$

или

$$\alpha x^2 + (1 + \beta)x - 1 = 0.$$

Таким образом отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\alpha} \left(-(\beta + 1) \pm \sqrt{(1 + \beta)^2 + 4\alpha} \right);$$

$$y_{1,2} = x_{1,2}$$

при $(1 + \beta)^2 + 4\alpha > 0$.

- 2. Найдем матрицу Якоби. Сначала найдем частные производные первого порядка по x и y :

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} = -2\alpha x; \quad \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = -\beta;$$

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Напомним, что для рассматриваемой задачи

$$F_1(x, y) = 1 - \alpha x^2 - \beta y, \quad F_2(x, y) = x.$$

Откуда матрица Якоби:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha x & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 3. Запишем условие седло-узловой бифуркации

$$\det(A - \rho I)|_{\rho=+1} = 0 \Rightarrow 1 - \tau + \delta = 0, \tag{3}$$

где x, y – координаты неподвижной точки;

$$\tau = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} = -2\alpha x + 0 = -2\alpha x; \tag{4}$$

$$\delta = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \beta.$$

Подставив выражения (4) для следа τ и определителя δ матрицы A в $1 - \tau + \delta = 0$, получим

$$1 - \tau + \delta = 1 + 2\alpha x + \beta = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) есть простейшее условие седло-узловой бифуркации, если x – координата неподвижной точки. Следовательно, границу седло-узловой бифуркации на плоскости параметров (β, α) можно найти, добавив уравнение для неподвижной точки

$$\alpha x^2 + (1 + \beta)x - 1 = 0,$$

к условию седло-узловой бифуркации (3):

$$1 + 2\alpha x + \beta = 0.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1 + \beta)x - 1 = 0, \\ 1 + 2\alpha x + \beta = 0. \end{cases}$$

Выразив x из второго уравнения

$$x = -\frac{1 + \beta}{2\alpha}$$

и, подставив в первое уравнение системы, получим уравнение бифуркационной кривой в форме явной зависимости от параметров α, β :

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \beta)^2}{4\alpha} - (1 + \beta) \cdot \frac{1 + \beta}{2\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow \\ -(1 + \beta)^2 = 4\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}. \quad (6)$$

- 4. Аналогично, условие бифуркации удвоения периода может быть записана как:

$$\det(A + I) = 1 + \tau + \delta = 0$$

или

$$1 - 2\alpha x + \beta = 0.$$

Добавив сюда уравнение для неподвижной точки, имеем

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1 + \beta)x - 1 = 0, \\ 1 - 2\alpha x + \beta = 0. \end{cases}$$

Исключив x из этой системы, получим уравнение искомой бифуркационной кривой удвоения периода

$$\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}. \quad (7)$$

- 5. В отображении Хенона бифуркация Неймарка-Сакера невозможна, т.к. условие диссипативности отображения $|\beta| < 1$, что означает $-1 < \delta < +1$. Поэтому в этом отображении реализуются только две бифуркации — седло-узловая (fold) и бифуркация удвоения периода (flip).

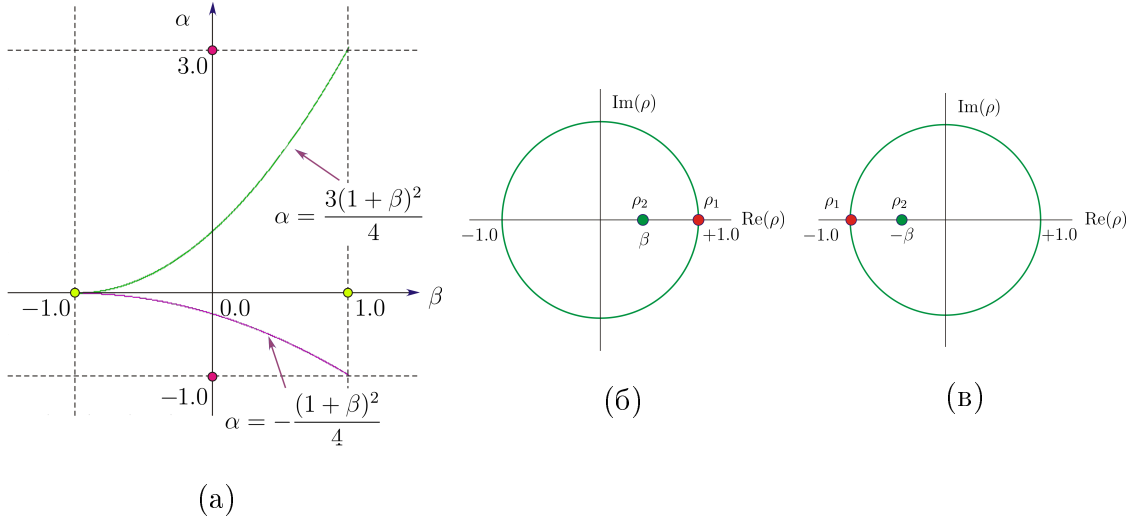


Рис. 4. (а) Двухпараметрическая диаграмма отображения Хенона. Коэффициент диссипации меняется в пределах $-1.0 < \beta < 1.0$. Граница седло-узловой бифуркации, определяемая функцией $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$, выделена малиновым цветом. Граница бифуркации удвоения периода, определяемая функцией $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$, обозначена зеленым цветом. Область, ограниченная кривыми $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$, $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$ и $\beta = +1.0$ есть область устойчивости неподвижной точки. (б) Расположение мультипликаторов неподвижной точки на линии $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$ седло-узловой бифуркации. (в) Расположение мультипликаторов неподвижной точки на линии $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$ бифуркации удвоения периода.

- 6. Построим графики полученных функций (6) и (7), т.е. бифуркационных границ на плоскости параметров (β, α) . На рис. 4 изображена двухпараметрическая диаграмма отображения Хенона, на которую нанесены полученные бифуркационные границы. Здесь коэффициент диссипации β меняется в пределах $-1.0 < \beta < 1.0$. Граница седло-узловой бифуркации (fold), определяемая функцией $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$, выделена малиновым цветом. Граница бифуркации удвоения периода, определяемая функцией $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$, обозначена зеленым цветом. Область, ограниченная кривыми $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$, $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$ и $\beta = +1.0$ есть область устойчивости неподвижной точки. Прямые $|\beta| = 1.0$ – определяют границы область диссипативности отображения. При выходе через границы $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$ и $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$, наблюдаются бифуркации седло-узел (fold) и бифуркация удвоения периода, соответственно.

- 5. Зная двухпараметрическую диаграмму (рис. 4), выполним однопараметрический бифуркационный анализ. На рис. 5 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы, рассчитанные для разных значений β . На рис. 5(а) изображена бифуркационная диаграмма для $\beta = -0.4$. Коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-\frac{(1 + \beta)^2}{4} < \alpha < 1.5$. Как можно видеть из этой диаграммы, бифуркация удвоения периода происходит при $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4} = \frac{3(1 - 0.4)^2}{4} = 3 \cdot 0.36/4 = 0.09 \cdot 3 = 0.27$.

На рис. 5(б) показана бифуркационная диаграмма для $\beta = 0.3$. Здесь коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-\frac{(1 + \beta)^2}{4} < \alpha < 2.5$. Несложно рассчитать точку бифуркации удвоения периода, подставив $\beta = 0.3$ в формулу $\alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4}$. Диаграмма на рис. 5(в) иллюстрирует седло-узловую (fold) бифуркацию при $\beta = 0.3$. Коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-0.5225 < \alpha < -0.25$. Седло-узловая (fold) бифуркация происходит в точке $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$. Подставив конкретное значение $\beta = 0.3$ в формулу $\alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4}$, получим точку искомой бифуркации. Здесь кривая 1, выделенная зеленым цветом отвечает седловой неподвижной точке, а светло-голубая, обозначенная цифрой 2, —

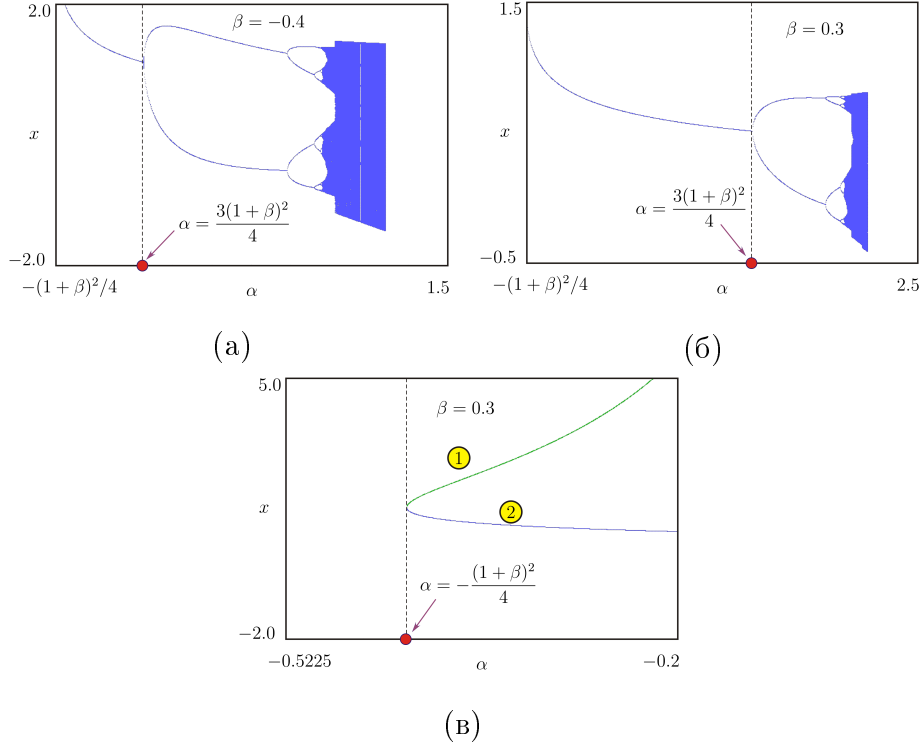


Рис. 5. (а) Бифуркационная диаграмма при $\beta = -0.4$. Коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-\frac{(1+\beta)^2}{4} < \alpha < 1.5$. Бифуркация удвоения периода происходит при $\alpha = \frac{3(1+\beta)^2}{4} = \frac{3(1-0.4)^2}{4} = 3 \cdot 0.36/4 = 0.09 \cdot 3 = 0.27$. (б) Бифуркационная диаграмма при $\beta = 0.3$. Коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-\frac{(1+\beta)^2}{4} < \alpha < 2.5$. Несложно рассчитать точку бифуркации удвоения, подставив $\beta = 0.3$ в формулу $\alpha = \frac{3(1+\beta)^2}{4}$. (в) Бифуркационная диаграмма при $\beta = 0.3$, иллюстрирующая седло-узловую (fold) бифуркацию. Коэффициент нелинейности варьировался в диапазоне $-0.5225 < \alpha < -0.25$. Седло-узловая (fold) бифуркация происходит в точке $\alpha = -\frac{(1+\beta)^2}{4}$. Подставив конкретное значение $\beta = 0.3$ в формулу $\alpha = -\frac{(1+\beta)^2}{4}$, получим точку искомой бифуркации.

устойчивой неподвижной точке. Как можно видеть из этой диаграммы, при уменьшении α седловая неподвижная точка сливается с устойчивой при $\alpha = -\frac{(1+\beta)^2}{4}$ и обе точки исчезают, если $(1+\beta)^2 + 4\alpha < 0$. При значениях параметров α и β , удовлетворяющих $(1+\beta)^2 + 4\alpha = 0$ (т.е. в точке бифуркации), существует негиперболическая неподвижная точка, один из мультипликаторов которого равен $+1$.

6. Порядок выполнения работы

- 1. Изучите теоретический материал.
- 2. Решите задачу, следуя материалам лекции, методических указаний и приведенному примеру.
- 3. Сформулируйте выводы.
- 4. Оформите отчет по лабораторной работе.

7. Задание на лабораторную работу

Задача 1

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha - x_k^2 + \beta y_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

найдите

- уравнение для неподвижных точек;
- матрицу Якоби;
- след τ матрицы Якоби;
- определитель δ матрицы Якоби.

Определите

- линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации;
- линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip);
- Напишите программу построения бифуркационных границ и постройте графики линий.
- Постройте бифуркационные диаграммы для $\beta = -0.5$; $\beta = -0.25$; $\beta = 0.5$; $\beta = 0.75$ при вариации α . Найдите точки бифуркации удвоения периода и седло-узловой бифуркации.

Задача 2

Для отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = \beta y_k - \alpha x_k + x_k^2.$$

найдите

- уравнение для неподвижных точек;
- матрицу Якоби;
- след τ матрицы Якоби;
- определитель δ матрицы Якоби.

Определите

- линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации;
- линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip);
- Напишите программу построения бифуркационных границ и постройте графики линий.
- Постройте бифуркационные диаграммы для $\beta = 0.525$ при вариации α в диапазоне $0.98 < \alpha < 1.45$.
- Найдите точку бифуркации Неймарка -Сакера.

Задача 3

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha x_k + y_k; \quad y_{k+1} = \beta x_k + x_k^3.$$

найдите

- уравнение для неподвижных точек;
- неподвижные точки как функции параметров α, β ;
- матрицу Якоби;
- след τ матрицы Якоби;
- определитель δ матрицы Якоби.
- мультипликаторы как функции параметров α, β ;

Определите

- линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации;
- линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip);
- Напишите программу построения бифуркационных границ и постройте графики линий.
- Постройте бифуркационные диаграммы для $\alpha = 0.6$ при вариации β в диапазоне $-1.25 < \beta < 0.75$.
- Найдите точку бифуркации Неймарка -Сакера.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Avrutin V., Schenke B., Gardini L.* Calculation of homoclinic and heteroclinic orbits in 1D maps//Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V.22. P.1201 – 1214 (статья в открытом доступе согласно лицензии BY-NC-ND: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>).

3. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

4. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.