

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 05.09.2026 09:03:33

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d47b179e561e11aabbf73e843d54e4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)**

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 26 » 12 2025 г.



Динамическое программирование

Методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Методы оптимизации» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения»

Курск – 2025

УДК 519.863

Составитель: Е.Н. Иванова

Рецензент

к.т.н., доцент Т.Н. Конаныхина

Динамическое программирование: методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Методы оптимизации» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2025. – 16 с.:– Библиогр.: с. 15.

Методические указания структурированы по этапам выполнения заданий на лабораторных и практических занятиях по теме Динамическое программирование, применяемым при реализации ОПОП ВО по модели «перевернутого обучения».

Предназначены для обучающихся по очной форме обучения по ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемым по модели «перевернутого обучения», осваивающих дисциплину «Методы оптимизации».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.12.25. Формат 60х84 1/16.

Усл.печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,8.

Тираж 100 экз. Заказ 1345 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практические занятия по теме № 4 «Динамическое программирование»

Цель занятий – приобретение обучающимися практического опыта в применении знаний, полученных при самостоятельном освоении темы № 4 «Динамическое программирование», в производственных ситуациях.

Планируемые результаты обучения:

Знать:	Уметь:	Иметь опыт деятельности:
обязанности и ответственность студентов при реализации дисциплины по технологии «перевернутого обучения» (УК-6.1) роль технологии «перевернутого обучения» в формировании у студентов компетенций, необходимых для будущего профессионального роста (УК-6.2) преимущества технологии «перевернутого обучения» для самообразования и непрерывного образования в	рационально распределять собственное время и эффективно использовать свои ресурсы при освоении нового учебного контента (УК-6.1) проводить самоконтроль в пределах самостоятельно изученного учебного контента (УК-6.2) использовать различные инструменты самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) использовать различные инструменты для выполнения	в самоорганизации и саморазвитии при решении учебных задач большого объема (УК-6.1) в проведении самооценки по критериям, установленным преподавателем (УК-6.2) в применении эффективных технологий самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) по использованию стандартных средств оптимизации (ОПК-2.1) по выбору информационных технологии при решении

течение жизни (УК-6.3) программно-технические платформы оптимизации (ОПК-2.1) основы теории оптимизации для возможности обоснования выбора информационной технологии решения оптимизационной задачи (ОПК-2.2) основы теории оптимизации и программирования (ОПК-2.3) основные научные методы исследований. (ОПК-4.3)	оптимизации (ОПК-2.1) обоснованно осуществлять выбор информационной технологии для решения оптимизационных задач различного вида (ОПК-2.2) реализовывать оптимизационные алгоритмы в виде программных приложений (ОПК-2.3) выбирать методы оптимизации с учетом специфики решаемой задачи (ОПК-4.3)	оптимизационных задач (ОПК-2.2) по разработке оригинальных программных средств, реализующих разработанные алгоритмы для решения оптимизационных задач (ОПК-2.3) навыками применения принципов и методов оптимизации (ОПК-4.3)
---	---	--

Необходимое материально–техническое оборудование: мультимедийная доска, компьютеры, мобильные устройства преподавателя и обучающихся.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 1

Теоретические основы динамического программирования

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 4 (входной контроль знаний).
2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 4.
3. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 4 (входной контроль знаний)

1.1 Проверка опорных конспектов по теме № 4

Проверка опорных конспектов по теме организуется преподавателем различными способами: демонстрация всеми обучающимися своих опорных конспектов; зачитывание вслух одним обучающимся записей, внесенных в опорный конспект; работа в парах (студенты обмениваются друг с другом своими опорными конспектами и помогают друг другу дописать пропущенное) и т.д.

1.2 Тестирование по теме № 4

Ответьте на вопросы и выполните задания в тестовой форме по теме № 4.

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 4

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

3. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем *(по содержанию темы № 4, изученному дома самостоятельно)*

Выполните предложенные задания

1. Сформулируйте свойство отсутствия последствий.
2. Запишите уравнение состояний.
3. Сформулируйте задачу пошаговой оптимизации.
4. Какое управление называется оптимальным?
5. что отражает основное функциональное уравнение динамического программирования?
6. Что называют условным оптимальным управлением на k-м шаге?
7. Метод динамического программирования – это метод _____ оптимизации/
8. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
9. Метод динамического программирования может применяться только для управления системами, в которых множества допустимых в каком-либо состоянии управлений и,

соответственно, выбор оптимального управления, не зависят от того, _____, то есть не зависят от _____.

10. Представьте общий алгоритм постановки и решения задачи динамического программирования, охарактеризуйте каждый этап

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Задача распределения капиталовложений. Планируется распределение начальной суммы средств $\bar{\xi}_0$ между n предприятиями $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Предполагается, что выделенные предприятию Π_k в начале планового периода средства x_k приносят доход $f_k(x_k)$ ($k = \overline{1, n}$). Будем считать, что:

- 1) доход, полученный от вложения средств в предприятие Π_k , не зависит от вложения средств в другие предприятия;
- 2) доход, полученный от разных предприятий, выражается в одинаковых единицах;
- 3) общий доход равен сумме доходов, полученных от всех средств, вложенных во все предприятия.

Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{\xi}_0, \quad x_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Запишите задачу в виде модели динамического программирования

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Предпринимателю необходимо составить план регулирования численности рабочих на последующие n недель. Он оценивает минимальные потребности в рабочей силе b_i , $i = \overline{1, n}$ на каждую из n недель, соответственно. Предприниматель имеет возможность регулировать количество имеющихся в наличии рабочих путем найма и увольнения. Пусть y_j – количество рабочих, имеющихся в наличии на j -й неделе. Определим $C_1(y_j - b_j)$ как величину

убытков, связанных с тем, что y_j превышает заданное значение b_j , а $C_2(y_j - y_{j-1})$ – как величину накладных расходов по найму новых рабочих ($y_j > y_{j-1}$). Необходимо составить оптимальный план регулирования численности рабочих для n -недельного периода планирования при условии, что исходное количество y_0 рабочих, имеющих в наличии к началу первой недели, составляет b_1 человек.

Опишите задачу в виде модели динамического программирования.

Чему соответствует каждый этап решений задачи?

Что выражает состояние на каждом этапе?

Что представляют собой варианты решения на каждом этапе?

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

С помощью метода динамического программирования определить оптимальное распределение капиталовложений, полная выделяемая сумма которых обозначена через K , между четырьмя предприятиями, чтобы общий прирост продукции, выраженный в относительных единицах, был максимальным.

В таблицах всех вариантов слева в первом вертикальном столбце указаны возможные доли выделения капиталовложений в тыс. у.е. В остальных столбцах приведены приросты продукции в относительных единицах $g_i(x)$ по каждому i -му предприятию ($i = \overline{1, 4}$) в зависимости от вложения средств x .

1)

Выделяемые капиталовложения, x , у.е.	Прирост продукции			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
100	50	40	90	70
200	100	30	100	80
300	150	80	120	170
$K=400$	200	100	130	200

2)

Выделяемые	Прирост продукции			
------------	-------------------	--	--	--

капиталовложения, x , у.е.	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	15	20	35	30
50	25	46	44	52
75	45	50	85	80
$K=100$	60	72	90	102

3)

Выделяемые капиталовложения, x , у.е.	Прирост продукции			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
40	24	30	26	38
80	50	70	68	49
120	65	84	112	78
$K=160$	134	149	120	150

4)

Выделяемые капиталовложения, x , у.е.	Прирост продукции			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	12	18	11	8
40	16	25	16	15
60	18	28	19	17
$K=80$	25	32	21	19

5)

Выделяемые капиталовложения, x , у.е.	Прирост продукции			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
5	7	7	6	8
10	8	12	8	11
15	9	18	15	12
$K=20$	10	20	20	13

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия.

Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 2

Алгоритмы решения задачи динамического программирования

1. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 4.

2. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.

3. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 4

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

2. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 4, изученному дома самостоятельно)

1. Динамическое программирование – это _____
2. Динамическое программирование используется для решения _____
3. Особенности математической модели динамического программирования заключаются в том, что _____
4. Условная оптимизация в задачах динамического программирования проводится в соответствии с алгоритмом _____
5. Безусловная оптимизация в задачах динамического программирования проводится в соответствии с алгоритмом _____
6. Функцию Беллмана и соответствующие оптимальные управления в задачах динамического программирования находят на этапе _____
7. На этапе условной оптимизации при выборе управления x_k учитывают _____
8. На этапе безусловной оптимизации при выборе управления x_k учитывают _____

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Задача о загрузке, или задача о рюкзаке (ранце). Самолет загружается предметами n различных типов. Каждый предмет типа

i имеет массу p_i и стоимость (ценность) C_i ($i = \overline{1, n}$). Максимальная грузоподъемность самолета равна W . Требуется определить максимальную стоимость груза, масса которого не должна превышать максимальной грузоподъемности самолета. Обозначим количество предметов типа i через x_i .

Составьте математическую модель задачи.

Что соответствует этапу в решении задачи?

Что является вариантом решения на каждом этапе?

Что выражает состояние на каждом этапе?

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Задача о загрузке, или задача о рюкзаке (ранце). Самолет загружается предметами n различных типов. Каждый предмет типа i имеет массу p_i и стоимость (ценность) C_i ($i = \overline{1, n}$). Максимальная грузоподъемность самолета равна W . Требуется определить максимальную стоимость груза, масса которого не должна превышать максимальной грузоподъемности самолета. Обозначим количество предметов типа i через x_i .

Запишите рекуррентное соотношение (для процедуры обратной прогонки).

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Самолет грузоподъемностью W загружается предметами четырех различных типов. Масса и стоимость предметов соответственно равны p_i и C_i ($i = \overline{1, 4}$). Требуется определить максимальную стоимость груза, масса которого не должна превышать максимальной грузоподъемности самолета.

1)

W	p_1	p_2	p_3	p_4
	22	16	18	14
83	C_1	C_2	C_3	C_4
	10	12	14	9

2)

W	p_1	p_2	p_3	p_4
	5	8	9	7

100	C_1	C_2	C_3	C_4
	10	20	42	16

3)

W	p_1	p_2	p_3	p_4
	24	48	16	8
94	C_1	C_2	C_3	C_4
	12	21	10	16

4)

W	p_1	p_2	p_3	p_4
	22	24	26	18
86	C_1	C_2	C_3	C_4
	16	18	22	15

5)

W	p_1	p_2	p_3	p_4
	16	12	14	15
74	C_1	C_2	C_3	C_4
	17	18	15	19

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 3

Текущий контроль успеваемости по теме № 4.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме лабораторной работы.

Шкала и критерии оценивания приведены в оценочных средствах по дисциплине «Методы оптимизации» для данной

ОПОП ВО, которые размещены на официальном сайте университета по ссылке <https://swsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Лабораторная работа № 3

Решение задач динамического программирования

Задание

Реализуйте программно алгоритмы решения задач динамического программирования:

1. задачи распределения капиталовложений;
2. задачи календарного планирования трудовых ресурсов;
3. задачи о замене оборудования.

Варианты

1. Для развития пяти предприятий выделено ξ_0 млн. руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная функцией полезности $g_i(x)$ ($i = \overline{1, 5}$).

x	$x_1 = \xi_0 / 5$	$x_2 = 2\xi_0 / 5$	$x_3 = 3\xi_0 / 5$	$x_4 = 4\xi_0 / 5$	$x_5 = \xi_0$
$g_1(x)$	$4,1 + k_1^1$	$5,2 + k_1^2$	$6,1 + k_1^3$	$7,4 + k_1^4$	$8,3 + k_1^5$
$g_2(x)$	$3,9 + k_2^1$	$4,8 + k_2^2$	$5,6 + k_2^3$	$7,8 + k_2^4$	$8,9 + k_2^5$
$g_3(x)$	$4,2 + k_3^1$	$5,1 + k_3^2$	$6,4 + k_3^3$	$7,2 + k_3^4$	$9,3 + k_3^5$
$g_4(x)$	$4,0 + k_4^1$	$5,4 + k_4^2$	$6,3 + k_4^3$	$7,5 + k_4^4$	$9,1 + k_4^5$
$g_5(x)$	$4,3 + k_5^1$	$4,9 + k_5^2$	$5,8 + k_5^3$	$6,9 + k_5^4$	$9,4 + k_5^5$

$$k_i^j = (i + N) \bmod 7 / j \quad (N - \text{номер по списку})$$

Составить оптимальный план распределения средств между предприятиями, предположив, что оно проводится в целых числах.

2. Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом: $(N \cdot 3 \cdot i) \bmod 7$ рабочих соответственно (N – номер по списку, i – номер недели). Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 у.е за одного рабочего в неделю, а наём рабочей силы на протяжении одной недели обходится в 400 у.е. плюс 200 у.е. за одного рабочего в неделю. Каждому уволенному рабочему выплачивается выходное пособие в размере 100 у.е. Сформируйте оптимальный план найма/увольнения рабочих на период строительства.

3. Рассмотрите задачу замены оборудования на протяжении n лет. Цена новой единицы оборудования равна c , стоимость продажи после t лет оборудования равна $s(t)$, годовая прибыль от эксплуатации является функцией возраста оборудования и равна $r(t)$. Сформулируйте задачу поиска оптимальной стратегии замены оборудования как задачу динамического программирования. Считая, что $n = 4$, возраст оборудования составляет 1 год, $c = 6000$ у.е., $s(t) = 5 - t$ при $t < 5$ и 0 в противном случае, $r(t) = 25 - t^2$ при $t < 5$ и 0 в противном случае.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача динамического программирования и в чем ее отличие от задач линейного программирования?
2. В чем заключаются особенности математической модели ДП?
3. Что лежит в основе метода ДП?
4. Какой критерий оптимальности используется в динамическом программировании?
5. Назовите причину эффективности процедуры метода динамического программирования.
6. Объясните недостаток динамического программирования в сравнении с симплексным методом линейного программирования.
7. Запишите рекуррентные уравнения Беллмана и сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
8. Опишите алгоритм обратной прогонки. В чем его отличие от алгоритма прямой прогонки?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тюхтина, А.А. Методы дискретной оптимизации. Часть 2 : Учебно методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 72 с. – Текст : непосредственный.

2. Карпюк, И. А. Исследование операций : учеб. пособие / И. А. Карпюк, Н. М. Куляшова, В. Д. Ширяев. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2018. – Текст : непосредственный.