

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 02.05.2024 12:06:41  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabfb73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
«15» 02 2021 г.



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ ПУНККАРЕ**

Методические указания для студентов направлений  
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

**Математическое моделирование нелинейных импульсных систем методом точечных отображений Пуанкаре:** методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 23 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 23.

Описываются методы математического моделирования импульсных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ХХ.ХХ.2021. Формат 60 × 84<sup>1/16</sup>.  
Усл. печ. л. 1,34. Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 50 экз. Заказ 455. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1. Цель работы

Изучение методов математического моделирования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью.

## 2. Постановка задачи

Будем рассматривать два класса нелинейных импульсных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

Начнем с математических моделей в виде дифференциальных уравнений с аддитивно входящими в правую часть обобщенными функциями в виде слагаемых[1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k \delta(t - t_k), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь  $\delta$  — дельта-функция Дирака,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ . В теории обобщенных функций  $\delta(t) = \eta'(t)$ , где  $\eta$  — функция Хевисайда:

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad \eta(t) = 1 \quad (t > 0).$$

Все решения уравнения (1) — это функции, которые в промежутках  $t_k < t < t_{k+1}$  абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

а в точках  $t = t_k$  имеют скачки, равные

$$\mathbf{x}(t_k^+) - \mathbf{x}(t_k^-) = \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{x}(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k^\pm} \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

Доказательство условия (15) приводится ниже.

## 3. Математическая модель гибридной системы управления

### 3.1. Математическая с непрерывным временем

Рассмотрим в качестве примера систему управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией первого рода [2-5], поведение которой опи-

сывается скалярным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k), \quad f(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0. \quad (3)$$

Моменты импульсации  $t_k$  в (3) определяются [2-5]

$$t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Phi(x)$  — неубывающая функция (частотная модуляционная характеристика).

Величины  $b_k$  в правой части (3) находятся как [2-5]

$$b_k = F(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $F(x)$  — невозрастающая функция (амплитудная модуляционная характеристика).

Функции  $\Phi$ ,  $F$  являются ограниченными и принимают положительные значения. В качестве модуляционных функций  $\Phi$ ,  $F$  в [2-5] выбрана функция Хилла:

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p},$$

где  $p = 1, 2, \dots$  — показатель функции Хилла, определяющая крутизну модуляционных характеристик;  $k_1, k_2, k_3, k_4, r$  — параметры, которые принимают положительные значения. На рис. 1 показаны примеры функций  $\Phi(x)$ ,  $F(x)$  при разных значениях  $p$ .

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках  $t_k$ ,  $k \geq 0$  (см. рис. 2).

**Предложение 1.** *Величины скачков в точках разрыва  $t = t_k$  определяются выражением*

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

**Доказательство.** В области  $t_{k-1} < t < t_{k+1}$  уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = -\lambda x + b_k \delta(t - t_k). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) в промежутке  $t_{k-1} < t < t_{k+1}$  будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \quad (5)$$

где  $x_{\pm}(t)$  — непрерывные функции, определенные соответственно в областях  $t_{k-1} < t < t_k$  и  $t_k < t < t_{k+1}$  и удовлетворяющие уравнению  $\dot{x} = -\lambda x$ .

Подставляя (5) в (4) и учитывая что  $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$ , имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = -\lambda x_-(t) - \lambda[x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k\delta(t - t_k). \end{aligned}$$

Поскольку  $\dot{x}_{\pm}(t) = -\lambda x_{\pm}(t)$ , то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x_{\pm}(t).$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Прежде чем продолжить, сделаем небольшое отступление. Трехмерный вариант математической модели (3) был предложен в [2] для описания регуляции тестостерона в мужском организме.

Известно, что в регуляции уровня *тестостерона* (Te) в мужском организме основную роль играют *лютеинизирующий гормон* (LH, luteinizing hormone) и *гонадотропин релизинг гормон* (GnRH, gonadotropin-releasing hormone). В отличие от Te, который генерируется в мужских половых органах (тестикулах), LH и GnRH генерируются в отделах головного мозга, соответственно в гипофизе и гипоталамусе. Поэтому динамика LH и GnRH тесно связана с динамикой нейронов мозга. При этом GnRH стимулирует секрецию LH, в свою очередь LH стимулирует секрецию Te, а Te подавляет секрецию GnRH и LH [3].

Как отмечается в [3], с точки зрения импульсной теории управления клетки гипоталамуса, генерирующие GnRH, можно рассматривать как импульсный элемент (импульсный модулятор), осуществляющий амплитудно-частотную модуляцию. При этом уровень Te выступает в качестве модулирующего сигнала, а уровень GnRH — в качестве модулированного импульсного сигнала. С увеличением уровня Te импульсы появляются реже, а их амплитуда (или площадь) уменьшается. Что касается наблюдаемого импульсного процесса секреции LH, то его можно рассматривать как реакцию непрерывной части системы на импульсный сигнал, поступающий от гипоталамуса [3].

В работах [2-5] исследуется трехмерная модель

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = -b_1x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_2x_2 + g_1x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = -b_3x_3 + g_2x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

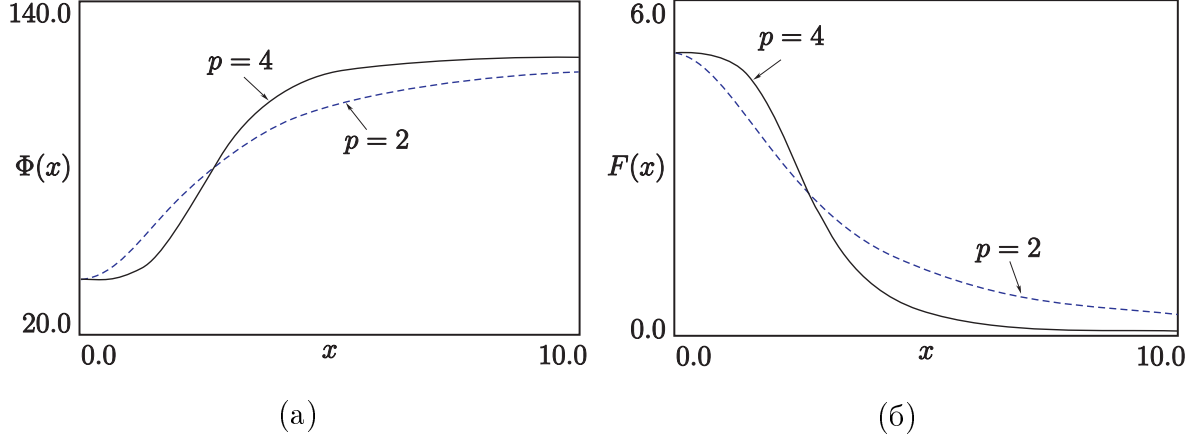


Рис. 1. Модуляционные характеристики  $\Phi(x)$ ,  $F(x)$  при разных значениях показателей  $p$  функции Хилла: (а) — частотная модуляционная характеристика  $\Phi(x)$ ; (б) амплитудная модуляционная характеристика  $F(x)$

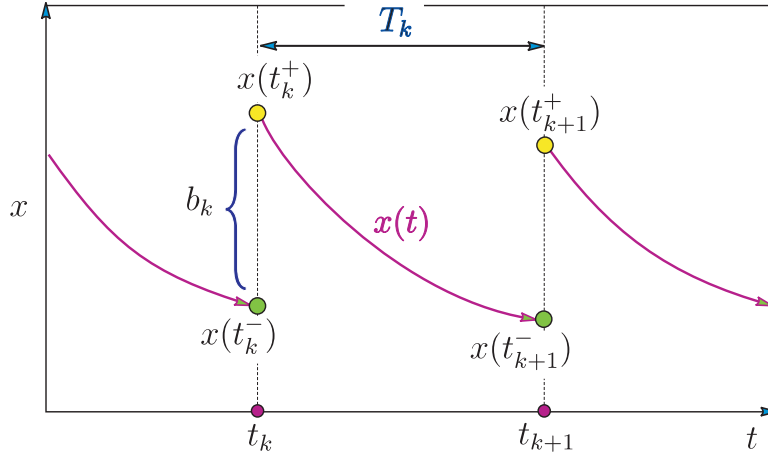


Рис. 2. Решение уравнения (7), где  $t_k$  и  $t_{k+1}$  — точки разрывов

Здесь  $x_1$  — концентрация GnRH;  $x_2$ ,  $x_3$  — концентрации LH и Te, соответственно. Переменная  $x_1(t)$  претерпевает скачки в моменты времени  $t_k$ ,  $k \geq 0$

$$x_1(t_k^+) = x_1(t_k^-) + \lambda_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad \lambda_k = F(x_3(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x_3(t_k^-)).$$

Уравнение(3) является скалярной версией модели (6).

### 3.2. Отображение Пуанкаре

Запишем уравнение (3) в эквивалентной форме [6]

$$\dot{x} = -\lambda x. \tag{7}$$

Здесь  $x(t)$  имеют скачки в моменты времени  $t_k$ ,  $k \geq 0$ :

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)).$$

В дальнейшем будем предполагать непрерывность  $x(t)$  слева от точек разрыва  $t = t_k$ . В промежутках между точками разрыва (в интервалах непрерывности)

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

уравнение (7) имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda x,$$

решение которого с начальным условием  $x(t_k) = x(t_k^+)$  находится

$$x(t) = e^{-\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+).$$

Отсюда для  $t = t_{k+1}^+$

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda(t_{k+1}-t_k^+)} x(t_k^+) \quad (8)$$

или

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} x(t_k^+), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)),$$

где  $x(t_k^+)$  ( см. рис. 2):

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)).$$

Подставляя выражение для  $x(t_k^+)$  в (8), получим

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} (x(t_k^-) + b_k), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)), \quad b_k = F(x(t_k^-)). \quad (9)$$

Обозначим  $x_k = x(t_k^-)$ . Тогда отображение Пуанкаре, порождаемое уравнением (7), записывается [6]

$$x_{k+1} = e^{-\lambda T_k} (x_k + b_k), \quad T_k = \Phi(x_k), \quad b_k = F(x_k), \quad (10)$$

$$\Phi(x_k) = k_1 + k_2 \frac{(x_k/r)^p}{1 + (x_k/r)^p}, \quad F(x_k) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x_k/r)^p}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (3) с разрывным решением сводится к гладкому отображению (10).

#### 4. Системы Филиппова

В этом разделе рассмотрим математические модели, относящиеся к системам Филиппова [1].

В качестве иллюстративного примера рассмотрим математическую модель системы управления с широтно-импульсной модуляцией, непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\mathcal{K}}{T \cdot s + 1}. \quad (11)$$

#### 4.1. Математическая модель с непрерывным временем

Состояние системы с передаточной функцией (11), описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью

$$T \frac{dy}{dt} + y = \mathcal{K} \cdot K_F(\xi), \quad (12)$$

где  $T$ ,  $\mathcal{K}$  – постоянная времени и коэффициент передачи объекта;  $K_F(\xi)$ ,  $\xi$  – выходной и входной сигналы модулятора, соответственно.

Импульсы  $K_F$  формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода (ШИМ-1):

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\xi)],$$

$$\xi = \alpha(V_3 - \beta y(k \cdot a)) - V_0(t/a - [t/a]), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $a$  – период модуляции,  $[\cdot]$  – функция, выделяющая целую часть аргумента,  $V_3$  – сигнал задания,  $\alpha$  – коэффициент усиления,  $\beta$  – чувствительность датчика обратной связи,  $V_0$  – опорный сигнал модулятора.

Параметры:  $T = 10^{-4}$  с;  $a = 2 \cdot 10^{-5}$  с;  $V_3 = 4.0$  В;  $V_0 = 4$  В;  $4 < \mathcal{K} < 10$  А;  $\beta = 1.0$  В/А;  $\alpha > 0$ .

Введем обозначения безразмерное время  $\tau = t/a$  и безразмерную динамическую переменную  $x = \frac{y}{\mathcal{K}}$ . Тогда уравнение движения (12) можно записать в форме

$$\dot{x} = \lambda(x - K_F), \quad K_F = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\varphi(\tau)|_{\tau=[\tau]} - \eta(\tau))], \quad (13)$$

$$[\tau] = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi(\tau) = q - x(\tau),$$

$$\eta(\tau) = \frac{P}{\alpha}(\tau - [\tau]), \quad \lambda = -\frac{a}{T}, \quad q = \frac{V_3}{\beta \cdot \mathcal{K}}, \quad P = \frac{V_0}{V_3}q.$$

#### 4.2. Получение дискретного отображения

Исследование динамической системы (13) можно свести к стробоскопическому отображению Пуанкаре.

В пределах интервала  $k < \tau < k + 1$

$$K_F = \begin{cases} 1, & k < \tau < \tau_k; \\ 0, & \tau_k < \tau < k + 1, \end{cases}$$



где  $\tau_k$  – момент переключения, который при ШИМ-1 определяется как:

$$\tau_k = \begin{cases} k, & q - x_k < 0; \\ k + 1, & q - x_k > \frac{P}{\alpha}; \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P} + k, & 0 < q - x_k < \frac{P}{\alpha}. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть  $k < \tau < \tau_k$ , тогда  $K_F = 1$  и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x - 1).$$

Решение этого уравнения с условием  $x(k) = x_k$ :

$$x(t) = e^{\lambda(\tau-k)} \left( x_k - \lambda \int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds \right). \quad (15)$$

Найдем

$$\int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds = \frac{1 - e^{-\lambda(\tau-k)}}{\lambda}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим

$$x(\tau) = 1 + e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для  $\tau = \tau_k$  имеем:

$$x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале  $\tau_k < \tau < k + 1$  сигнал на выходе модулятора  $K_F = 0$  и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1), \quad (17)$$

решение которого

$$x(\tau) = x(\tau_k)e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Подставляя выражение для  $x(\tau_k)$ , получаем

$$x(\tau) = e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1) + e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Для момента времени  $\tau = k + 1$  имеем:

$$x_{k+1} = e^{a\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(k+1-\tau_k)}. \quad (18)$$

Введем обозначение

$$z_k = \tau_k - k,$$

где  $z_k$  – относительная длительность импульса (коэффициент заполнения).

Покажем, что  $0 \leq z_k \leq 1$ .

Действительно, из неравенства  $k \leq \tau_k \leq k + 1$  следует, что

$$k \leq \tau_k \leq k + 1.$$

Отсюда

$$0 \leq \tau_k - k \leq (k + 1) - k$$

и

$$0 \leq \tau_k - k \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq z_k \leq 1.$$

Окончательно отображение, порождаемое уравнением движения (13), принимает вид:

$$x_{k+1} = e^\lambda(x_k - 1) + e^{\lambda(1-z_k)} \equiv Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Коэффициент заполнения импульсов  $z_k$  определяется в соответствии с алгоритмом (14):

$$z_k = \begin{cases} 0, & x_k > q, \\ 1, & x_k < q - P/\alpha, \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P}, & q - P/\alpha \leq x_k \leq q. \end{cases} \quad (20)$$

Итерация отображения (19) осуществляется в два шага:

- сначала по  $x_k$  вычисляется  $z_k$  в соответствии с алгоритмом (20);
- затем полученный  $z_k$  подставляется в (19) для расчета  $x_{k+1}$ .

Отображение (19) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda x + 1 - e^\lambda, & x \leq s^-, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda x - e^\lambda + e^{\lambda(1-z)}, & s^- < x < s^+, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = e^\lambda x, & x \geq s^+, \end{cases}$$

где  $z = \frac{\alpha}{P} \cdot (q - x)$ ,  $s^- = q - P/\alpha$ ,  $s^+ = q$ .

Как мы видим, в отличие от (10) отображение (19) является кусочно-гладким и непрерывным.

## 5. Бифуркационный анализ

Теперь мы переходим к решению задач бифуркационного анализа.

### 5.1. Неподвижные точки и циклы дискретных отображений

Рассмотрим одномерное дискретное отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где  $Q()$  — гладкая функция. Точку  $x_{k+1}$  называют *образом* ранга 1 (rank-1 image) точки  $x_k$ , а  $x_k$  — *прообразом* (preimage)  $x_{k+1}$ .

*Орбитой* дискретной системы (21) называется последовательность точек  $x_0, x_1 = Q(x_0), \dots, x_k = Q(x_{k-1}), \dots$

Точка  $x^0$  называется *неподвижной*, если

$$x^0 = Q(x^0), \quad (22)$$

т.е. удовлетворяет уравнению

$$x = Q(x).$$

В дискретной системе (21) *периодической орбитой* или *циклом* периода  $m$  называется конечное множество точек

$$x_0, \quad Q(x_0), \quad Q^2(x_0), \dots, Q^m(x_0) = x_0. \quad (23)$$

Каждая точка этого множества является неподвижной точкой  $m$ -й итерации  $Q^m$  функции  $Q$ , т.е. удовлетворяет уравнению:

$$Q^m(x) = x, \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x) \dots))}_{m \text{ раз}} \quad (24)$$

### 5.2. Устойчивость неподвижных точек и циклов

Начнем с анализа устойчивости неподвижной точки  $x^0$ .

Введем малое отклонение (возмущение) от неподвижной точки  $x^0$ :  $x_k = x^0 + \varepsilon_k$ , где  $\varepsilon_k$  — малое число.

Тогда возмущенное движение в окрестности  $x^0$  описывается уравнением

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0 + \varepsilon_k).$$

После разложения  $Q(x)$  в ряд Тейлора в окрестности  $x^0$  получим:

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0) + \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(x^0)}{\partial x^2} \varepsilon_k^2 + \dots \quad (25)$$

Отбросив нелинейные члены ряда, задачу можно свести к исследованию линеаризованного отображения

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k. \quad (26)$$

Неподвижная точка  $x^0$  называется *гиперболической*, если  $\left| \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \right| \neq 1$ . Ко-

эффициент  $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$  называется мультипликатором неподвижной точки.

Для гиперболических неподвижных точек отображений существует теорема *Хартмана-Гробмана*:

**Теорема Хартмана-Гробмана.** Пусть  $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет непрерывную первую производную. Тогда в некоторой окрестности  $\mathcal{D}$  гиперболической неподвижной точки  $\mathbf{x}^0$  ( $\mathbf{x}^0 = \mathbf{Q}(\mathbf{x}^0)$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ ) существует гомеоморфизм  $\varphi$ , взаимно однозначно отображающий траектории исходной системы на траекторию линеаризованной системы.

Таким образом, для гиперболических неподвижных точек отображений устойчивость по отношению к бесконечно малым и малым конечным возмущениям  $\varepsilon = x - x^0$  определяется свойствами линеаризованного отображения (26).

Неподвижная точка  $x^0$  устойчива, когда

$$|\rho| < 1, \quad \text{т.е.} \quad -1 < \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} < 1.$$

В этом случае в малой окрестности точки  $x^0$  по теореме Хартмана-Гробмана траектория отображения (21) эквивалентна траектории линейного отображения

$$x_{k+1} - x^0 = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} (x_k - x^0) \Rightarrow x_{k+1} = \rho x_k + c, \quad c = (1 - \rho)x^0.$$

Это означает, что поведение последовательности  $\varepsilon_k = x_k - x^0$  в малой окрестности  $x^0$  соответствует сходящейся геометрической прогрессии

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^0,$$

если  $|\rho| < 1$ .

Неподвижная точка  $x^0$  неустойчива при  $|\rho| > 1$ , когда геометрическая прогрессия оказывается расходящейся.

Неподвижная точка теряет устойчивость, когда  $\frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} = \pm 1$ .

Понятие гиперболичности и теорема *Хартмана-Гробмана* естественным образом обобщается на на цикл любого конечного периода  $m$ .

Цикл периода  $m$  устойчив, когда мультипликатор  $\rho_m$

$$\rho_m = \left| \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \right| < 1$$

Как мы отмечали ранее, этому циклу отвечает  $m$  устойчивых неподвижных точек  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  отображения

$$x_{k+1} = Q^m(x_k), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (27)$$

**Порядок анализа устойчивости** Рассмотрим задачу об устойчивости неподвижной точки и цикла.

1. Найти неподвижные точки из решения уравнения

$$x = Q(x). \quad (28)$$

Для цикла периода  $m$ :

$$x = Q^m(x), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) решаются численно.

2. Пусть  $x^0$  — неподвижная точка, то есть корень уравнения (28). Вычислить мультипликатор  $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$  неподвижной точки  $x^0$ .

3. Проверить выполнение неравенства  $|\rho| < 1$ : если  $|\rho| < 1$ , то  $x^0$  — устойчива; если  $|\rho| > 1$ , то  $x^0$  — неустойчива.

4. Для цикла достаточно найти одну неподвижную точку отображения (27), т.е. один корень уравнения (29). Тогда мультипликатор  $\rho_m$  цикла периода  $m$

$$\rho_m = \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x}$$

рассчитывается по алгоритму:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Q(x_k), \\ \rho_{k+1} = \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \rho_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_0 = x^*, \quad \rho_0 = 1. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь  $x^*$  — корень уравнения (29). Орбита  $x_1, x_2, \dots, x_m = x_0$ , рассчитанная рекуррентно по (30) при  $x_0 = x^*$  — это и есть цикл периода  $m$ .

### Пример

Найти неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = (\lambda - 1)x_k - \lambda x_k^3 \equiv Q(\lambda, x_k),$$

$$0 < \lambda < 4, \quad -1 < x_k < 1$$

и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра  $\lambda$ .

В этом примере мы рассматриваем задачу об устойчивости неподвижной точки, допускающей аналитическое решение.

### Решение

1. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = (\lambda - 1)x - \lambda x^3 \equiv Q(\lambda, x)$$

или

$$x = Q(\lambda, x), \quad \lambda x^3 - (\lambda - 2)x = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:  $x_1^0 = 0$ ,  $x_{2,3}^0 = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\lambda}}$ .

2. Найдем производную

$$\frac{\partial Q(\lambda, x)}{\partial x} = \lambda - 1 - 3\lambda x^2. \tag{31}$$

2.1. Подставив  $x_1^0 = 0$  в (31), получим мультипликатор  $\rho_1$  первой неподвижной точки  $x_1^0$ :  $\rho_1 = \lambda - 1$ .

Из неравенства

$$|\rho_1| < 1$$

находим область устойчивости  $x_1^0$ :  $0 < \lambda < 2$ .

2.2. Неподвижные точки  $x_{2,3}^0$  существуют только при  $\lambda \leq 2$ . Мультипликаторы  $\rho_{2,3}$ :

$$\rho_2 = \rho_3 = \lambda - 1 - 3\lambda x^2 \Big|_{x=x_{2,3}^0} = -2\lambda + 5$$

Из условия  $|\rho_{2,3}| < 1$  находим область устойчивости  $x_{2,3}^0$ :  $2 < \lambda < 3$ .

## 6. Бифуркационные условия

Пусть отображение зависящее от параметра  $\lambda$  вида

$$x_{k+1} = Q(\lambda, x_k)$$

имеет при  $\lambda = \lambda_0 = 0$  неподвижную точку  $x^0 = 0$ . Здесь  $Q(\lambda, x)$  — гладкая по  $x$  функция.

Строгое доказательство приводимых далее бифуркационных условий можно найти в специальной литературе (см., например, [7]).

### **А. Касательная бифуркация (fold or tangent bifurcation)**

- Пусть при  $\lambda = \lambda_0 = 0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и выполнены условия

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при  $\lambda = \lambda_0$  имеет место касательная бифуркация [7].

### **Б. Транскритическая бифуркация (transcritical bifurcation)**

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при  $\lambda = \lambda_0$  имеет место транскритическая бифуркация.

### **В. Вилообразная бифуркация (pitchfork bifurcation)**

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда при  $\lambda = \lambda_0$  имеет место вилообразная бифуркация.

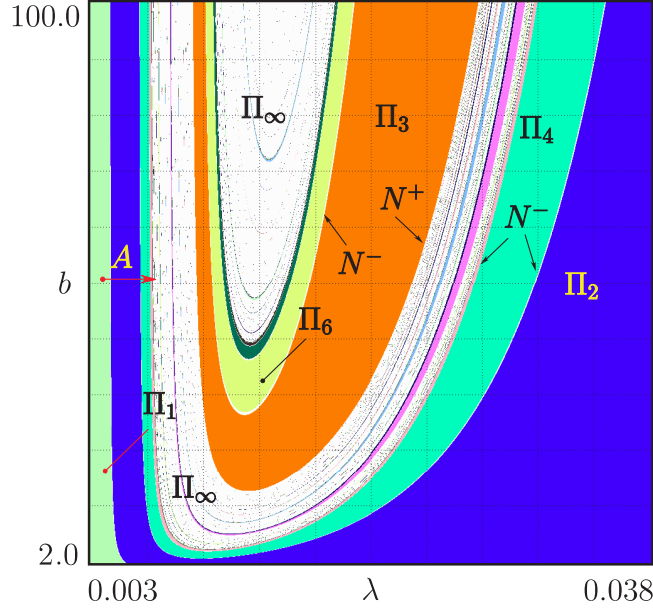


Рис. 3. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\lambda, b)$  при  $p = 4$  [6]. Здесь  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 6$  — области устойчивости циклов периода  $i$  и  $\Pi_\infty$  — области хаотической динамики, где  $N^+$ ,  $N^-$  — линии касательной (fold, tangent) бифуркации и бифуркации удвоения периода, соответственно

### Г. Бифуркация удвоения периода (flip or period-doubling bifurcation)

- Пусть при  $\lambda = \lambda_0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = -1.$$

и пусть

$$\frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда при  $\lambda = \lambda_0$  имеет место бифуркация удвоения периода [7].

## 7. Пример бифуркационного анализа

В этом раздел мы опишем бифуркационные явления в системе управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией. Настоящий раздел написан по материалам нашей публикации [6].



Рассмотрим дискретное отображение (10)

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

Пусть параметры динамической системы (10) имеют следующие значения:  $k_1 = 40$ ,  $k_2 = 80$ ,  $k_3 = 0.0001b$ ,  $k_4 = 5b$ , где  $2 < b < 100$ ,  $r = 2.7$ ,  $p = 4$ ,  $0.003 < \lambda < 0.038$ . В качестве варьируемых выберем  $\lambda$  и  $b$ .

Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = Q(x)$$

или

$$x = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

которое решалось численно.

Пусть  $x^0$  — неподвижная точка отображения (10). Мультипликатор неподвижной точки

$$\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = -\lambda\Phi'(x)e^{-\lambda\Phi(x)}(x + F(x)) + e^{-\lambda\Phi(x)}(1 + F'(x)).$$

На рис. 3 изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $(\lambda, b)$ , построенная численно [6]. Через  $\Pi_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 6$ , обозначены области устойчивости цикла периода  $k$ , а через  $\Pi_\infty$  — области с хаотической динамикой. Области  $\Pi_k$   $k = 1, 2, 4$  разделены бифуркационными кривыми удвоения периода  $N^-$  (flip). Бифуркационные линии  $N^-$  сгущаются и существуют трансверсальные им линии, вдоль которых происходят каскады бифуркации удвоения периода. Область  $\Pi_3$  снаружи ограничена кривой касательной бифуркации (fold)  $N^+$ .

На рис. 4(а) приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода. Такую диаграмму довольно просто построить на компьютере. Для этого надо рассчитать несколько тысяч итераций отображения. Первые 1000—5000 значений  $x_k$  оставить в «тени», а остальные, например 1500—2000 значений, отложить на плоскости  $(\lambda, x)$ . Первые члены следует отбросить с тем, чтобы исключить переходный процесс. Циклу периода 1 (неподвижной точке) будет соответствовать одна точка, циклу периода 2 — две точки на одной вертикали, циклу периода 4 — четыре и т.д.

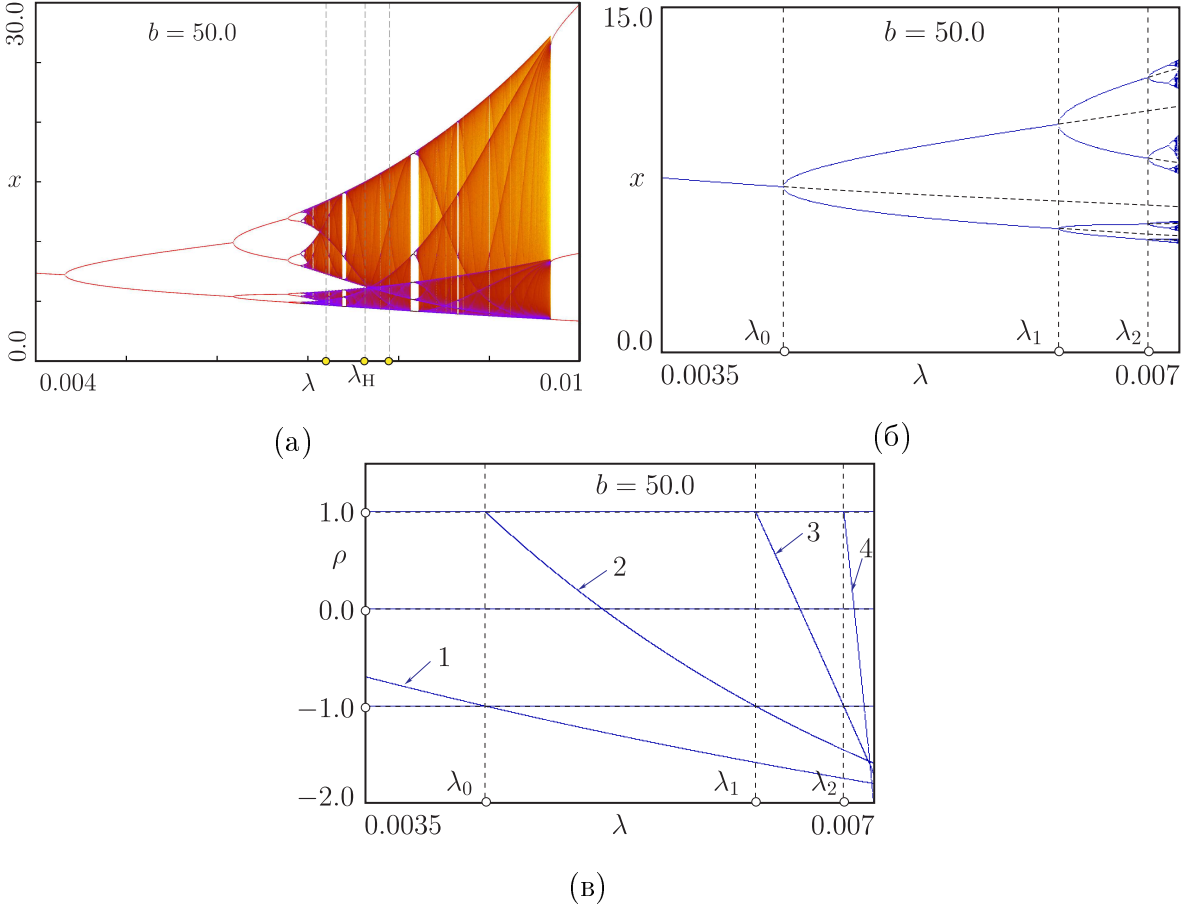


Рис. 4. (а) Переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. (б) Последовательность четырех бифуркаций удвоения периода [6]. Пунктирные линии соответствуют неустойчивым циклам. (в) Зависимости мультипликаторов циклов периода  $m$ ,  $m = 1, 2, 4, 8$ . Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены мультипликаторы 1-, 2-, 4-, и 8-циклов, соответственно [6]

На рис. 4(б), приведены результаты численных расчетов устойчивых и неустойчивых 1-, 2-, 4- и 8-циклов [6]. Пунктирные линии бифуркационной диаграммы отвечают неустойчивым циклам. На рис. 4(в), приведены зависимости мультипликаторов 1-, 2-, 4- и 8-циклов от параметра  $\lambda$ , обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, соответственно, при бифуркациях удвоения периода. Как можно видеть из рис. 4(б), переходе через точку  $\lambda_0$ , когда мультипликатор обращается в  $-1$  ( $\rho = -1$ ) при  $\lambda = \lambda_0$ , неподвижная точка (или 1-цикл) теряет устойчивость. В результате этого мягко возникает устойчивый 2-цикл, а 1-цикл продолжает существовать, но становится неустойчивым. Родившийся цикл периода 2 при дальнейшем увеличении  $\lambda$  теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода в точке  $\lambda_1$  и возникает цикл периода 4. Изменяя далее значение параметра  $\lambda$ , можно увидеть циклы периода 8, 16, 32, 64 и т.д. При этом каждый раз цикл теряет устойчивость, когда мультиплика-

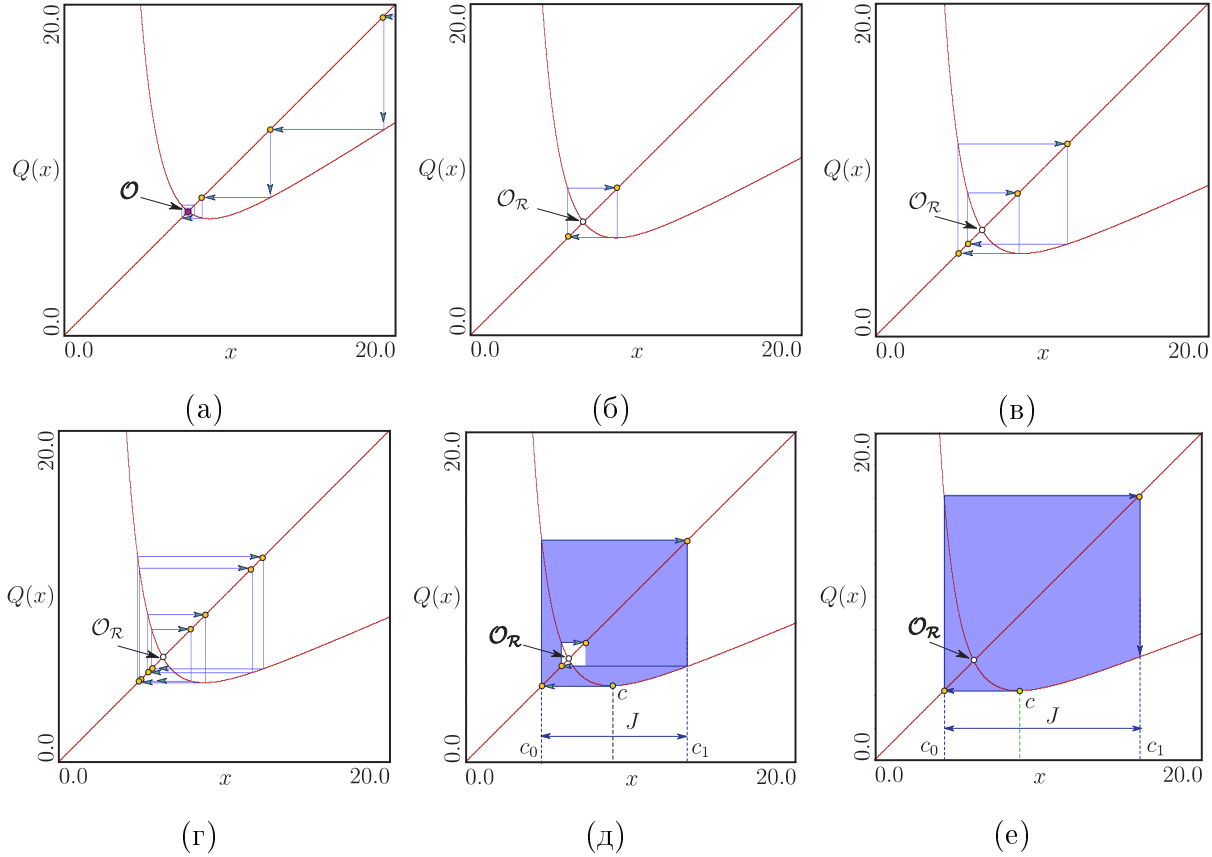


Рис. 5. Итерационные диаграммы: (а) — устойчивая неподвижная точка (цикл периода 1); (б)–(г) — устойчивые 2-, 4- и 8- циклы, соответственно; (д), (е) — однополосный и двухполосный хаотические аттракторы. Здесь  $O$ ,  $O_R$  — устойчивая и неустойчивая неподвижные точки

тор цикла обращается в  $-1$ . Потеря устойчивости приводит к возникновению устойчивого цикла удвоенного периода. Наконец, при некотором значении параметра динамика становится хаотичной [6].

На рис. 5 (а) приведена итерационная диаграмма в области значений  $\lambda$ , когда мультипликатор устойчивой неподвижной точки меняет знак с «+» ( $0 < \rho < 1$ ) на «-» ( $-1 < \rho < 0$ ) перед бифуркацией удвоения периода в точке  $\lambda = \lambda_0$ . а На рис. 5 (б)-(г) изображены итерационные диаграммы 2-, 4-, 8-циклов, соответственно, а на рис. 5 (д),(е) — хаотических аттракторов.

Точка  $c$  на рис. 5 (д),(е) — называется *критической точкой*, определяемая условием  $Q'(x) = 0$ . Для (10) точка  $c$  — точка локального экстремума (минимума) функции  $Q(x)$ . Точка  $c_0 = Q(c)$  называется образом ранга 1 критической точки  $c$ , а точки  $c_1 = Q^2(c)$ ,  $c_2 = Q^3(c)$  — соответственно образами ранга 2 и 3. Мы не будем обсуждать роль критических точек в бифуркационных переходах, а ограничимся лишь краткими комментариями. За подробностями отсылаем к специальным источникам ( см., например, [8]).

Точки  $c_0, c_1$  — определяют «размеры» хаотических аттракторов, изображенных на рис. 5 (д),(е). Область  $J$  на рис. 5 (д),(е) называется поглощающим инвариантным интервалом (invariant absorbing interval)  $Q(J) = J$  [8]. Переход от двухполосного хаотического аттрактора (рис. 5 (д)) к однополостному (рис. 5 (е)) происходит через гомоклиническую бифуркацию [9] в точке  $\lambda_H$  на рис. 4(а), когда  $Q^3(c) = \mathcal{O}_R$ . В точке  $\lambda = \lambda_H$  возникает так называемая *критическая гомоклиническая орбита* (critical homoclinic orbit) неподвижной точки  $\mathcal{O}_R$  [8].

## Лабораторные работы

### Лабораторная работа №1.

#### Бифуркации дискретных отображений

Для для отображений

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3, \quad x_{k+1} = \frac{(1+a)x_k}{1+ax_k}, \quad x_{k+1} = ax_k e^{-x_k} :$$

1. найдите неподвижные точки аналитически как функции параметра  $a$ ;
2. определите мультипликаторы в форме явной зависимости от параметра  $a$ ;
3. определите значения параметра  $a$ , отвечающие возможным бифуркациям;
4. проверьте выполнение бифуркационных условий;
5. подтвердите результаты аналитических исследований численными расчетами бифуркационных и итерационных диаграмм.

Для расчета итерационных диаграмм можно использовать программу <http://math.colgate.edu/math312/Spring1999/iterate.html>.

Указание: *Чтобы применить бифуркационные условия, приведенные в разделе 6., надо переписать отображения, поместив точку бифуркации (бифуркационное значение параметра) и неподвижную точку в начало координат.*

### Лабораторная работа №2.

#### Дискретные модели гибридных систем

1. Рассмотрите уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1.1. Постройте отображение в форме

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^+), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{т.е. } x(t_{k+1}^+) = Q(x(t_k^+)), \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)).$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для  $p = 4$ ,  $b = 50.0$  и  $0.0042 < \lambda < 0.0086$ . Сравните с диаграммой, приведенной на рис. 4(а). Объясните, будут ли различия в динамике.

1.3. Составить алгоритм численного расчета неподвижной точки и анализа ее локальной устойчивости. Постройте итерационные диаграммы для ситуаций  $0 < \rho < 1$ ,  $-1 < \rho < 0$ ,  $\rho < -1$ . Объясните наблюдаемую динамику.

2. Исследовательская задача.

### Лабораторная работа №3.

#### Исследование бифуркаций в гибридных и импульсных системах

1. Рассмотрите отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для  $p = 3$ ,  $b = 40.0$  и  $0.003 < \lambda < 0.03$ . Объясните наблюдаемую динамику.

1.3. Составить алгоритм численного расчета цикла периода-1 и анализа локальной устойчивости. Найдите численно порог рождения 2-цикла через бифуркацию удвоения периода. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

2. Исследовательская задача.

### Лабораторная работа №4.

#### Кусочно-гладкие дискретные модели импульсных систем

Рассмотрите модель системы управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Здесь  $x(t)$  имеют скачки в моменты времени  $t_k$ ,  $k \geq 0$ :

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b \cdot F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)),$$

где  $F(x)$ ,  $\Phi(x)$  кусочно-линейные функции [3]:

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_F x + b_F, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ F_2, & x > \Delta_2, \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_\Phi x + b_\Phi, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ \Phi_2, & x > \Delta_2. \end{cases}$$

$$a_F = \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad a_\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_F = \frac{F_1 \Delta_2 - F_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_\Phi = \frac{\Phi_1 \Delta_2 - \Phi_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}.$$

Параметры:  $\Delta_1 = 1.5$ ;  $\Delta_2 = 4$ ;  $F_1 = 3.0$ ;  $F_2 = 5.0$ ;  $\Phi_1 = 60.0$ ;  $\Phi_2 = 100.0$ ;  $1 < b < 10$ ;  $0.003 < \lambda < 0.038$ .

1. Постройте математическую модель в форме кусочно-гладкого отображения [9,10].

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^-), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x), & 0 \leq x < \Delta_1, \\ Q_{\mathcal{M}}(x), & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ Q_{\mathcal{R}}(x), & x > \Delta_2, \end{cases}$$

где  $Q_{\mathcal{L}}$ ,  $Q_{\mathcal{M}}$ ,  $Q_{\mathcal{R}}$  — гладкие функции.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде.

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде.

4. Определите характер потери устойчивости. Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

5. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации  $\lambda$ . Объясните, что происходит при насыщении модулятора.

## Лабораторная работа №5.

### Дискретные модели широтно-импульсных систем

1. Постройте стробоскопическое отображение для математической модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией (11). Описание ШИМ-2 и методика получения отображения приведены в [9,10]. Параметры те же самые, что и для модели (12) системы с ШИМ-1.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде (1-цикла или неподвижной точки отображения).

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде. Рассчитайте область устойчивости 1-цикла по коэффициенту усиления  $\alpha$ .

4. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации коэффициента усиления  $\alpha$ . Определите, как меняется динамика при потере устойчивости 1-цикла. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

### Библиографический список

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука.

2. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback//Automatica. 2008. Vol. 45(1). P. 78 – 85.

3. *Медведев А.В., Чурилов А.Н., Шепелявый А.И.* Математические модели регуляции тестостерона// Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Том 2. С. 147 – 158.

4. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation//Chaos. 2012. Vol. 22(1). P. 013121-1 – 013121-11.

5. *Churilov A.N., Medvedev F. Zhusubaliyev Zh.T.* Impulsive Goodwin oscillator with large delay: Periodic oscillations, bistability, and attractors// Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2016. Vol. 21. P. 171 – 183.

6. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Complex dynamics and chaos in a scalar linear continuous system with impulsive feedback//Proceedings of the American Control Conference (ACC2012). 2012. P.2419 – 2424.

7. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer-Verlag, 2004.

8. *Avrutin V., Schenke B., Gardini L.* Calculation of homoclinic and heteroclinic orbits in 1D maps//Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V.22. P.1201 – 1214 (статья в открытом доступе согласно лицензии BY-NC-ND: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>).

9. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

10. *Жусубалиев Ж. Т.* Бифуркации и хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. - 143 с.