

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 12.03.2025 09:52:36
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba4766fd12d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова
« *Л* » _____ 2022 г.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математический анализ»
для всех направлений подготовки

Курск 2022

УДК 51

Составители: В.И. Дмитриев

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры высшей математики *Н.А. Хохлов*

Математический анализ: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» для всех направлений подготовки / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.И. Дмитриев – Курск, 2022. – 15с.

Излагаются методические рекомендации к практическим занятиям по математическому анализу. Содержатся примеры типовых задач с разбором методов их решения.

Методические указания соответствуют требованиям Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования для всех направлений подготовки.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж ____ экз. Заказ ____ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Практические занятия по математическому анализу – один из самых важных инструментов для достижения компетенции ОПК-3 «Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности».

1. Множества, отображения множеств

Цель занятия: освоить базовые понятия математики – понятия множества и отображения (функции).

Типовая задача. f – отображение множества \mathbb{R}_+ всех положительных чисел, в множество \mathbb{N}_0 целых неотрицательных чисел, определяемое условием: если $x \in \mathbb{R}_+$, то $f(x)$ – наименьшее целое число, большее \sqrt{x} . Найдите образ интервала $(0; 100)$ при этом отображении.

2. Операция предельного перехода для последовательностей и функций. Непрерывность

Цель занятия: 1) овладеть основной операцией математического анализа – операцией предельного перехода;

2) изучить основные свойства непрерывных функций.

Типовые задачи

1) Перечислите свойства метрики, лежащие в основе операции предельного перехода.

2) Сформулируйте определение предела последовательности, функции.

3) Найдите расстояние Хемминга между двоичными последовательностями (0111011) и (1100101) .

4) Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

5) Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.

Решение задачи 4

Имеем дело с неопределенностью вида (1^∞) . Такую неопределенность можно раскрыть по нижеследующей схеме:

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = (1^\infty) = e^p,$$

где $p = \lim_{x \rightarrow a} (u(x) - 1) \cdot v(x)$ – вспомогательный предел.

$$\begin{aligned} \text{В нашей задаче } p &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Мы воспользовались 1-м замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$).

В итоге искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. Производная. Техника дифференцирования

Цель занятия: изучить правила дифференцирования и овладеть техникой отыскания производных элементарных функций.

Типовая задача. Найдите производную функции $y = \ln^2(\arcsin 2x)$.

Решение. Действуем по цепному правилу: на каждом шаге дифференцируем текущую внешнюю функцию:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \ln(\arcsin 2x) \cdot (\ln(\arcsin 2x))' = 2 \ln(\arcsin 2x) \cdot \frac{1}{(\arcsin 2x)} \cdot (\arcsin 2x)' = \\ &= \frac{2 \ln(\arcsin 2x)}{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{4 \ln(\arcsin 2x)}{\sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arcsin 2x}. \end{aligned}$$

4. Исследование функций одной переменной средствами дифференциального исчисления

Цель занятия: изучить методы исследования функций стандартными методами дифференциального исчисления.

Типовые задачи

- 1) Найдите промежутки монотонности функции $y = xe^{-x}$.
- 2) Укажите промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = 2\sqrt{x} + x^2$.
- 3) Найдите наибольшее значение функции $y = x^2\sqrt{1-x}$ на отрезке $[0; 1]$.
- 4) Составьте разложение по целым положительным степеням x функции $\frac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4 (формула Тейлора).
- 5) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ (правило Лопиталья).
- 6) Постройте график функции $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

5. Методы неопределенного интегрирования

Цель занятия: освоить основные методы отыскания первообразных: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных функций.

Типовые задачи

- 1) Найдите $\int x^2(5-x)^7 dx$.
- 2) Найдите $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ (подведение под знак дифференциала).
- 3) Найдите $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ (замена переменной).
- 4) Найдите $\int \operatorname{arctg} x dx$ (интегрирование по частям).
- 5) Найдите $\int \frac{3x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x^2+1)} dx$ (интеграл от рациональной функции. Указание: разложите подынтегральную дробь в сумму простейших дробей $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$).

6. Вычисление определенного интеграла. Приложения

Цель занятия: изучить основные формулы для вычисления определенного интеграла и освоить его стандартные приложения в геометрии и физике.

Типовые задачи

1) Вычислите $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Вычислите $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx$.

3) Вычислите $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

4) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y + x = 2$.

5) Найдите площадь, ограниченную циклоидой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, и $y = 0$.

6) Найдите длину дуги кривой $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$.

7) Площадь сечения тела плоскостью $x = c$ выражается формулой $S(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$, $0 \leq c \leq \frac{\pi}{4}$. Найдите объем этого тела.

Решение задачи 6

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \\ &= \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} d\left(\frac{9}{4}x+1\right) = \left[1+\frac{9}{4}x=t\right] = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10}-1) \end{aligned}$$

7. Исследование числовых рядов

Цель занятия: изучить основные методы исследования числовых рядов.

Типовые задачи

1) Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$.

Решение.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6}.$$

Мы воспользовались формулой для суммы сходящейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad (|q| < 1)$$

2) Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ на сходимость, т.е. выясните, конечна или бесконечна сумма этого ряда.

Указание: примените признак Даламбера.

3) Докажите, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится.

Указание: примените признак Лейбница.

4) Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n! \cdot 2^n}$ с точностью до 0,001.

Указание: вычисляя последовательно члены ряда, найдите первый член, который меньше 0,001 (по модулю); сумма всех предыдущих членов даст требуемый ответ.

8. Исследование степенных рядов

Цель занятия: освоить основные факты теории степенных рядов и научиться их использованию.

Типовые задачи

1) Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

2) Напишите разложение в степенной ряд по степеням x функции $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Исходим из стандартного разложения $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

справедливого при всех x . Заменим в этом разложении x на $-x^2$,

получим требуемое: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$.

3) Используя предыдущее разложение, разложите в степенной

ряд неэлементарную функцию Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

$$\text{Решение. } \Phi(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Степенной ряд можно интегрировать почленно, что было сделано.

4) Найдите решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2(x)$ с начальным условием $y(0) = 1$ в виде степенного ряда.

Решение. Условие задачи требует представить решение $y = y(x)$ данной задачи Коши как сумму степенного ряда (ряда Маклорена)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Тем самым задача сводится к отысканию производных $y^{(n)}(0)$. По условию $y(0) = 1$. Возьмем $x = 0$ в равенстве $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ и найдем $y'(0)$: $y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 1$. Чтобы найти

$y''(0)$, продифференцируем равенство $y' = x^2 + y^2$: $y'' = 2x + 2y \cdot y'$,
– и возьмем $x = 0$:

$y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 2$. Далее описанную процедуру следует
продолжить: $y''' = 2 + 2y'^2 + 2y \cdot y''$ и $x = 0$: $y'''(0) = 8$. И т.д.

9. Ряды Фурье, гармонический анализ

Цель занятия: изучить стандартные методы гармонического анализа функций.

Типовые задачи

1) Проверьте, что функция $\sin x$ и $\cos x$ ортогональны друг другу на промежутке $[-\pi; \pi]$.

2) Разложите в ряд Фурье 2π – периодическую функцию f , заданную на промежутке $[-\pi; \pi]$ формулой $f(x) = x^2$.

3) Найдите сумму ряда Фурье 2π – периодической функции, заданной на основном периоде $[-\pi; \pi]$ формулой $f(x) = x + 2^x$ в точке $x_0 = \pi$.

Указание: в точке x_0 функция f терпит разрыв.

10. Частные производные, градиент, производные по направлению функции многих переменных

Цель занятия: изучить основной технический аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных.

Типовые задачи

1) $z = x^y$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2) Найдите направление наибыстрейшего возрастания функции $f(x, y, z) = x + y^2 - 2xyz^3$ в точке $P(1, -2, -1)$.

Решение. Направление наискорейшего роста функции f в точке P указывает вектор $\text{grad } f(P)$, координатами которого являются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(P)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2yz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1)^3 = -3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2xz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -6xyz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 12.$$

Ответ: вектор $(-3, -2, 12)$.

11. Исследование функций многих переменных средствами дифференциального исчисления

Цель занятия: освоить стандартные методы исследования поведения функций многих переменных.

Типовая задача

Точка $P(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z = z(x, y)$. Известна матрица частных производных второго порядка функции z в точке P : $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Определите, является ли точка P точкой экстремума функции z ; если является, то – какого именно: максимума или минимума.

12. Вычисление кратных интегралов

Цель занятия: освоить методы сведения кратного интегрирования к повторным интегрированиям.

Типовая задача

Вычислите двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$, где D – область плоскости Oxy , ограниченная линиями $y = 0$, $y = 2x - x^2$.

13. Приложения кратных интегралов

Цель занятия: познакомиться с основными схемами применения кратных интегралов.

Типовые задачи.

1) Область D на плоскости Oxy ограничена линиями $y = x$ и $y = \sqrt{x}$. D представляет собой материальную пластинку переменной плотности $\rho(x, y) = x + y^2$. Какова масса этой пластинки?

Решение. Масса есть двойной интеграл от плотности:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) \, dx dy = \iint_D (x + y^2) \, dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x + y^2) \, dy = \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{3} x\sqrt{x} - x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{12} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60} \end{aligned}$$

2) Имеется материальная плоская пластинка $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 5\}$, причем плоскость в точке (x, y) задается формулой $\rho(x, y) = xy$. Найдите координаты центра масс пластинки.

14. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель занятия: освоить элементарные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Типовые задачи

1) Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\ln x}{y^2 + 1}.$$

Указание: это уравнение с разделяющимися переменными.

2) Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

на интервале $(0, \infty)$.

Указание: это линейное уравнение первого порядка, можно решать методом Бернулли: $y = u \cdot v$.

3) Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' - 16y = e^{2x}.$$

Указание: это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

15. Ряды и интегралы в комплексной области

Цель занятия: освоить понятие аналитической функции, познакомиться с теоремами Коши.

Типовая задача. Вычислите интеграл $\int_L \frac{e^z}{z-1} dz$, где L – 1) окружность $|z| = \frac{1}{2}$, 2) окружность $|z| = 2$.

Решение. 1) Так как функция $\frac{e^z}{z-1}$ аналитична в круге $|z| < 1$, то по теореме Коши данный интеграл равен 0. 2) Функция $f(z) = e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости, точка z_0 лежит внутри окружности $|z| = 2$; по интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^z}{z-1} dz = f(1) = e, \text{ т.е. } \int_L \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi e i.$$

21. Особые точки аналитических функций. Вычеты

Цель занятия: познакомиться с теоремой Коши о вычетах - сведение глобальной величины (интеграла) к величинам локальным (вычетам).

Типовая задача. Вычислите интеграл $\int_L \frac{dz}{(z^2 + 1) \sin z}$, где L - окружность с центром $\frac{i}{2}$ радиуса 1.

Указание: внутри контура L лежит две особые точки $z_0 = 0$ и $z_1 = i$. Это полюсы первого порядка. Вычеты в этих точках равны соответственно 1 и $\frac{1}{2i \sin i}$.

16. Методы операционного исчисления

Цель занятия: изучить основные схемы применения операционного исчисления.

Типовые задачи.

1) Найдите изображение оригинала $t^n e^{\lambda t}$.

2) По заданному изображению $\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$ найдите оригинал.

(Ответ: $t \cos wt$).

3) Опишите схему применения операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4) Решите задачу Коши $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$ операционным методом. (Ответ: $\frac{2}{9}e^t - \frac{2}{3}te^{-2t} - \frac{2}{9}e^{-2t}$).

Указание. Изображение решения имеет вид $\frac{2}{(p-1)(p+2)^2}$. Ори-

гинал можно восстановить, разложив эту дробь в сумму простейших дробей.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.

2. Сборник задач по математике для вузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. – Ч. 2. – 432 с.

3. Сборник задач по математике для вузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. – Ч. 3. – 544 с.

4. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. – М.: Флинта, 2012. – 165с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/>.

5. Магазинников, Л.И. Высшая математика: Дифференциальное исчисление [Электронный ресурс] : учебное пособие / Магазинников, Л.И., Магазинников А.Л.; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. Режим доступа <http://biblioclub.ru/>

6. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с.

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. – Т. 1. – 416 с.

8. Туганбаев, А.А. Математический анализ. Ряды. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А.Туганбаев. – 3-е изд., доп. – М.: Флинта, 2012. – 48с. // Режим доступа – <http://biblioclub.ru/>.

9. Тютюнов, Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст] : [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и

производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. - Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.

10. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.