

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 02.05.2019 10:07:54

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e51c11e66673e943d14a48511da56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

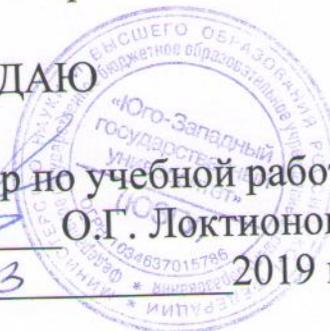
Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 4 » 03 2019 г.



АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ ГОРНЕРА

Методические указания к лабораторной работе №2
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная
техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Аппроксимация функций рядами с использованием схемы Горнера: методические указания к лабораторной работе №2 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 9 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,03. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 100 экз. Заказ 152.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ ГОРНЕРА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории аппроксимации функции.
2. Изучение основных методов непрерывной аппроксимации функций рядами Маклорена, многочленами Тейлора.
3. Аппроксимация на ЭВМ с помощью рядов и схемы Горнера элементарных функций.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Аппроксимация. Пусть имеется функция $f(x)$, вид которой очень сложен и для ее вычисления требуется много времени и при этом необходимо получить много ее значений или имеется функция, которая задана в некоторых точках таблицей своих значений

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (2.1)$$

а необходимо знать значения величины y практически при любых значениях аргумента x . Как это реально сделать? Для решения такой проблемы служит задача аппроксимации функций. Аппроксимация состоит в том, что данную функцию $f(x)$ приближенно заменяют (аппроксимируют) некоторой другой функцией, так, чтобы отклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области $[a, b]$ было минимально возможным, при этом функцию $f(x)$ называют аппроксимируемой, а функцию $\varphi(x)$ аппроксимирующей.

При приближении на непрерывном множестве точек отрезка $[a, b]$ аппроксимацию называют непрерывной (или интегральной). Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$ $i=0, 1, \dots$ отрезка $[a, b]$, то аппроксимацию называют точечной.

Если аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ строится для всего отрезка $[a, b]$ на котором задана функция $f(x)$, то говорят о глобальной аппроксимации, если же весь отрезок $[a, b]$ разбит на частичные отрезки и на каждом используется своя аппроксимирующая функция, то говорят о локальной аппроксимации.

Равномерное и среднеквадратичное приближения. Если приближение строится таким образом, что величина отклонения (модуль разности двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$) удовлетворяет условию

$$\bar{\Delta} = \max_{a,b} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \rightarrow 0, \quad a \leq x \leq b; \quad (2.2)$$

то такое приближение (2.2) называют равномерным приближением.

Часто используется среднеквадратичное приближение функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$. Здесь стараются получить минимальную величину среднеквадратичного значения модуля разности аппроксимируемой и аппроксимирующей функций на всем отрезке $[a,b]$:

$$\bar{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]^2 dx} \leq \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$\bar{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2} \leq \varepsilon \rightarrow 0.$$

Первая формула используется при непрерывной аппроксимации, а вторая при дискретной аппроксимации.

Аппроксимация многочленами (полиномами). Чаще всего для аппроксимации используются алгебраические многочлены (полиномы) следующего вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = P_n(x). \quad (2.4)$$

Максимальное значение степени у переменной x (значение величины n) называется порядком аппроксимирующего многочлена или порядком полинома.

Использование рядов для равномерной аппроксимации. Возможность построения многочлена, равномерно приближающего данную функцию следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации. В частности, если $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд, то в качестве аппроксимирующего многочлена можно взять частичную сумму ряда Маклорена. Вместо ряда Маклорена для равномерной аппроксимации могут использоваться ряды Тейлора, многочлены Чебышева, Лежандра и т.п..

Рассмотрим такие трансцендентные функции, которые являются суммами своих рядов Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k. \quad (2.5)$$

Беря несколько первых членов ряда Маклорена, получаем приближенную формулу:

$$f(x) \approx P_n(x), \quad (2.6)$$

где,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k. \quad (2.7)$$

Погрешность. Остаток ряда $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ представляет собой ошибку при замене $f(x)$ многочленом $P_n(x)$, т.е. определяет абсолютную погрешность вычисления $f(x)$ с использованием формулы (2.6). Для ряда (2.5) абсолютная погрешность будет не больше по абсолютной величине остаточного члена ряда Маклорена в форме Лагранжа:

$$R(x) \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right|, \quad \xi \in [0, x]; \quad (2.8)$$

где ξ некоторая неизвестная точка на отрезке $[0, x]$.

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x); \\ \sin(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + R_n(x); \\ \operatorname{sh}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2k!} + R_n(x); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |x^{n+1}|}{(n+1)!}; \quad (2.10)$$

где ξ - точка на отрезке $[0, X]$.

Схема Горнера. Для вычисления полиномов вида (2.4)

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.11)$$

часто применяется следующая формула

$$P_n(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + x \cdot (a_3 + \dots + x \cdot (a_{n-1} + xa_n))))), \quad (2.12)$$

которая позволяет значительно сократить количество выполняемых арифметических операций. Прием с помощью которого многочлен (2.11) представляется в виде (2.12) называется схемой Горнера.

III. ЗАДАНИЕ

1. Вычислить с помощью полинома n -ой степени $P_n(x)$, равномерно приближающего на отрезке $[a,b]$ функцию $f(x)$ из таблицы заданий.
2. Разработать текст программы для вычисления значений $P_n(x)$ с использованием схемы Горнера для значений аргумента x , приведенных в таблице заданий.
3. На ЭВМ набрать и отладить программу.
4. Провести вычисления полинома $P_n(x)$.
5. Оценить относительную погрешность вычисления $P_n(x)$.
6. Провести расчеты с помощью программы МATHCAD и сравнить результаты.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Вычислить с помощью полинома 5^{ой} степени $P_5(x)$ равномерно приближающего на отрезке $[a,b]$ функцию $f(x)=\sin(x)$ и оценить погрешность аппроксимации $R_n(x)$. Разработать программу вычисления этого полинома с использованием схемы Горнера и рассчитать значение полинома при $x_1 = 40^\circ$, $x_2 = 90^\circ$.

Порядок выполнения работы.

1. Переведем аргументы в радианы, сохраняя четыре верных знака:

$$x_1 = \frac{40^\circ}{180^\circ} \pi = 0.6982, \quad x_2 = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = 1.571.$$

2. Разложим функцию $f(x)=\sin(x)$ в ряд Маклорена, сохраняя члены ряда, для которых показатель степени при аргументе x меньше или равен 5. Согласно (2.10) имеем:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \quad (4.1)$$

3. Оценим погрешность аппроксимации. Так как производная любого порядка от $\sin(x)$ есть либо $\sin(x)$ то можем записать

$$R_5(x) \leq \frac{|x^6|}{6!} = \quad , \quad (4.2)$$

т.к. $|(\sin \xi)^{(n)}| \leq 1$.

4. Используя схему Горнера для полинома степени $n=5$, $P_5(x)$, переписываем выражение (4.1) в виде удобном для программирования:

$$P_5(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x^2(a_2 + x^2 a_3)), \quad (4.4)$$

где,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{120}. \quad (4.5)$$

5. Проводим вычисление по программе, которая приведена ниже:

$P_5(0.6982) \approx$.

6. Оцениваем относительную погрешность аппроксимации $f(x)$ полиномом $P_5(x)$

$$\delta f(x) = R_5(x)/|f(x)| \approx R_5(x)/|P_5(x)| = .$$

7. Примеры программ на Mathcad и на Delphi (в консольном режиме) для вычисления полинома $P_5(x)$ при $x_1=0.6982$, $x_2=1.571$.

$$a_0 := 0 \quad a_1 := 1 \quad a_2 := \frac{-1}{3!} \quad a_3 := \frac{1}{5!}$$

$$P_5(x) := a_0 + x \cdot [a_1 + x^2 \cdot (a_2 + x^2 \cdot a_3)]$$

$$R_5(x) := \frac{|x|^6}{6!} \quad \delta f(x) := \frac{R_5(x)}{|P_5(x)|}$$

$$x_1 := \pi \cdot \frac{40}{180} \quad x_2 := \pi \cdot \frac{90}{180}$$

$$x_1 = 0.6981 \quad x_2 = 1.5708$$

$$P_5(x_1) = 0.6428 \quad \delta f(x_1) = 2.5016 \times 10^{-4}$$

$$P_5(x_2) = 1.0045 \quad \delta f(x_2) = 0.0208$$

program lab2;

{Равномерное приближение функций.}

{P- функция, x - аргумент}

{R-абсолютная погрешность функции}

{RR-относительная погрешность функции}

var x,y,P,R,RR : **real**;

var a : **array**[0..4] **of** **real**;

var i,j : **integer**;

begin

a[0]:=0; a[1]:=1; a[2]:=-1/6.; a[3]:=1/120.;

for i:=1 **to** 2 **do** **begin**

readln (x);

```
P:=a[3];
for j:=2 downto 0 do begin
  if j=0 then y:=x else y:=x*x;
  P:=y*P+a[j];
```

вычисление по (4.4)

```
end;
R:=1.;
for j:=1 to 7 do R:=R*x/j;
```

вычисление по (4.2)

```
RR:=R/abs(P);
writeln('x=',x, ' ', 'P=',P, ' ', 'R=',R, ' ', 'RR=',RR);
```

end;

end.

7. Заполняем таблицу с результатами:

x	sin(x)	$\frac{\delta(\sin(x))}{ \sin(x) }$
0.6981	0.6428	$0,2502 \cdot 10^{-3}$
1.5708	1,0045	$0,208 \cdot 10^{-1}$

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Замечание: Пункт 1-4, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое аппроксимация функций.
2. Определение равномерного приближения.
3. Определение квадратичного приближения.
4. Понятие непрерывной и точечной аппроксимации.
5. Понятие глобальной и локальной аппроксимации.
6. Теорема Вейерштрасса.
7. Определение многочлена наилучшего равномерного приближения.

8. Формула остаточного члена ряда в форме Лагранжа для оценки погрешности аппроксимации функций с помощью ряда Маклорена.

9. В чем преимущество схемы Горнера?

10. Что такое рациональное приближение?

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№	Аппроксимируемая функция $f(x)$	Степень аппроксимирующего полинома (n)	x_1	x_2
1.	$\cos x$	5	62°	88°
2.	$x \cdot e^x$	4	0.15(рад)	0.56(рад)
3.	$x \cdot \sin x$	6	0.01(рад)	0.83(рад)
4.	$x^2 \cdot \cos x$	6	0.32(рад)	0.53(рад)
5.	$\operatorname{sh} x$	5	55°	97°
6.	$\operatorname{ch} x$	5	40°	93°
7.	$x \cdot \operatorname{sh} x$	6	0.25(рад)	1.27(рад)
8.	$x \cdot \operatorname{ch} x$	6	0.63(рад)	1.65(рад)
9.	$x^2 e^x$	4	0.78(рад)	1.80(рад)
10.	$x^2 \sin x$	5	0.91(рад)	1.94(рад)
11.	$x^2 \operatorname{sh} x$	5	0.35(рад)	1.37(рад)
12.	$x^2 \operatorname{ch} x$	6	0.43(рад)	1.45(рад)
13.	$\sin x + \cos x$	5	12°	94°
14.	$\sin x + e^x$	5	57°	159°
15.	$\operatorname{sh} x - e^x$	5	73°	175°
16.	$\cos x + \operatorname{sh} x$	4	65°	150°
17.	$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$	4	0.34(рад)	1.2(рад)
18.	$\cos x - \sin x$	4	60°	155°
19.	$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$	4	0.22(рад)	1.05(рад)
20.	$e^x + \cos x$	4	0.15(рад)	0.72(рад)