МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
« 8 » 08 ________ 2023 г.

СВЯЗАННЫЕ И БЕЗДИСПЕРСНЫЕ МОДЫ СВЕТА

Методические указания
по выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Связанные и бездисперсные моды света: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 13 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x841/16.
Усл. печ. л. 0,76. Уч.-изд. л. 0,68. Тираж 100 экз. Заказ 749. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

- изучить связанные и бездисперсные моды света.

2 Краткие теоретические сведения

Если при изучении распространения по волноводам электромагнитных волн сосредоточить внимание на самой среде, в которой разыгрываются волновые процессы, то придется иметь дело с очень сложными взаимодействиями. Но существует и другой подход. Многое в поведении волн не зависит от конкретной природы и характера возмущений, связанных с волной. Многое можно узнать о волнах, рассматривая их как определенный вид, или моду, возмущения среды, в которой движутся волны. Употребляя слово волна, мы будем подразумевать только одну из мод. Здесь мы используем термин “мода” для волн, распространяющихся с постоянной скоростью в средах, не изменяющихся с расстоянием. Скорость волны υ можно выразить разными способами:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{w}{k}.$$

Моды, скорость υ которых не зависит от частоты, называются бездисперсными модами, при этом распространяющийся импульс сохраняет свою исходную форму. Следовательно, дисперсная мода – это такая мода, для которой скорость зависит от частоты, так что импульсы расплываются при
своем распространении.

На рисунке 1 показано, как устроен часто применяющийся элемент СВЧ-схем, известный под названием направленного ответвителя. Волновод – это металлическая труба, по которой может распространяться электромагнитная волна. Два одинаковых волновода W_1 и W_2 имеют общую стенку некоторой длины L. В этой стенке проделаны отверстия так, что волна одного волновода взаимодействует, или связывается, с волной другого волновода. В результате этого некоторая доля α мощности P_1 в первом волноводе передается в волновод W_2, а часть $(1\text{-}\alpha)P_1$ − остается в волноводе W_1.

Доля α мощности, которая переходит из одного волновода в другой, зависит от длины пути, на котором волны связаны, и от силы связи, то есть размера отверстий. При некоторой величине связи мы получим α = 1, а это означает, что вся мощность переходит из одного волновода в другой. Во многих других приборах, в том числе и в усилительных лампах бегущей волны, используются связанные волны, то есть связанные моды. К чему приводит наличие такой связи, можно установить путем простого математического анализа.

Рассмотрим сначала векторы, которые представляют волну в ее последовательных равноудаленных положениях вдоль пути распространения (рисунок 2). Положим, что волна представлена вектором, длина которого $\left|\vec{E}\right|$ равна E_0. Положим далее, что при $t = 0$ и $z = z_0$ вектор $\vec{E}$ направлен вправо $(0 = \theta)$. В некотором положении z_1 на малом расстоянии от z_0 в направлении распространения волны мы имеем (снова при $t = 0$):

$$\theta = \theta_1 = -\left(z_2 - z_0\right)$$

Волна здесь представлена вектором той же длины E_0, направленным немного вниз и вправо. Далее, в точке z_2

$$\theta = \theta_1 = -\left(z_2 - z_0\right) = -k\left(z_1 - z_0\right) - k\left(z_2 - z_1\right).$$

При продвижении вперед по пути распространения волны угол θ возрастает и векторы, представляющие волну, располагаются так, как показано на рисунке 2. Теперь посмотрим, что случится с вектором $\vec{E}$ (которым определяются и модуль, и фаза волны), если сдвинуться от точки z к точке $z_+ dz$, где dz – очень малое расстояние (рисунок 3). При $z+dz$ вектор $\vec{E}$ имеет ту же длину E_0, что и при $z = 0$, но повернут на небольшой угол по часовой стрелке. Вектор $\vec{E}$ при $z + dz$ можно получить, добавив к $\vec{E}$ при z малый вектор $d\vec{E}$, который составляет прямой угол с $\vec{E}$.

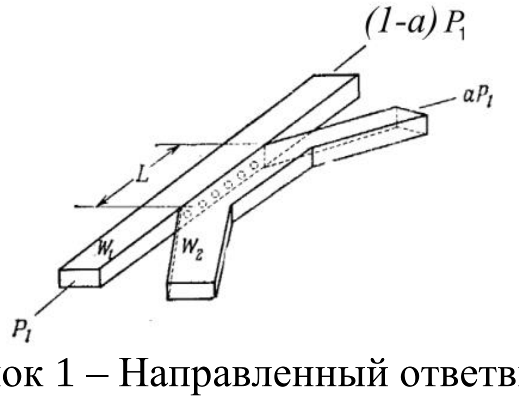


Рисунок 1 – Направленный ответвитель

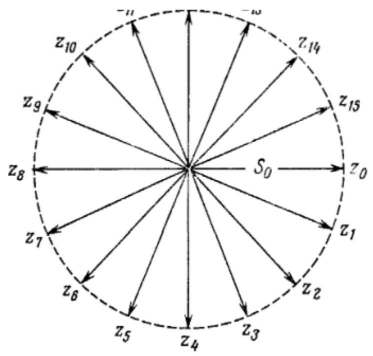


Рисунок 2 – Поляризация векторов

Угол θ, образуемый вектором $\vec{E}$ с осью, на расстоянии dz должен изменяться на величину – kdz. Будучи выражен через длину $\left|d\vec{E}\right|$ малого вектора и длину $\left|\vec{E}\right| = E_0$ вектора, представляющего волну, этот угол равен $\dfrac{\left|d\vec{E}\right|}{\left|\vec{E}\right|}$.

На комплексной плоскости величина $\vec{E}kdz$ представляется вектором длиной $\left|\vec{E}\right|kdz$, направленным так же, как и вектор $\vec{E}$. Малый вектор длиной $\left|d\vec{E}\right|$, который мы прибавляем к $\vec{E}$ при z, чтобы получить $\vec{E}$ при z + dz, должен быть повернут на *90°* по часовой стрелке относительно $\vec{E}$.

$$dE = -jEkdz$$

$$E_z + dz$$

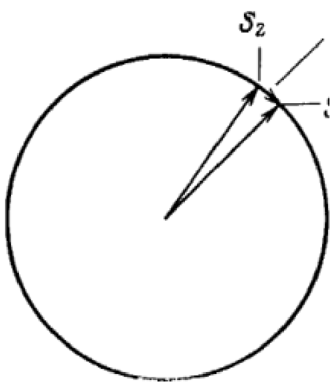


Рисунок 3 – Вектор $\vec{E}$ сдвинутый от точки z к точке $z_+ dz$

Так как можно повернуть вектор на *90°* по часовой стрелке, умножив его на мнимую единицу -*i*, следовательно, в комплексном обозначении мы можем написать:

$$dE = -ikEdz. \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой уравнение распространения моды волны. Его решение имеет простой вид

$$E = E_0 e^{-ikz} \tag{2}$$

Уравнение (1) означает, что скорость изменения величины *E* с расстоянием пропорциональна величине *E*, причем коэффициент пропорциональности *k* – постоянная величина, как предполагалось в равенстве (1). Но когда две моды связаны, они взаимодействуют, и изменение напряженности одной из них сказывается на напряженности другой [1].

Пусть E_1 и E_2 – напряженности двух мод, которые взаимодействуют за счет некоторой связи между ними. Тогда дифференциальные уравнения для E_1 и E_2 будут иметь вид:

$$\frac{dE_1}{dz} = -ik_1E_1 - iME_2 \tag{3}$$

$$\frac{dE_2}{dz} = -ik_2E_2 - iME_1 \tag{4}$$

где k_1, k_2 – постоянные распространения двух мод в отсутствие взаимодействия, а М характеризует связь или взаимодействие между данными модами. То, что коэффициенты k_1, k_2 и *M* – действительные величины в уравнениях (3) и (4), гарантирует нам, что эти уравнения консерватuвные, то есть, что полная энергия не изменяется при переходе от *z* к *z + dz*.

Решения уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$E_1 = E_{10} e^{-ikz}, \tag{5}$$

$$E_2 = E_{20} e^{-ikz}. \tag{6}$$

Продифференцировав обе части равенств (5) и (6), мы получим:

$$\frac{dE_1}{dz} = -ikE_{10}e^{-ikz} = -- ikE_1, \tag{7}$$

$$\frac{dE_2}{dz} = -ikE_{20}e^{-ikz} = -ikE_2 \tag{8}$$

Из равенств (7), (8) и (3), (4) следует, что

$$(k - k_1)E_1 = ME_2, \tag{9}$$

$$(k - k_2)E_2 = ME_1. \tag{10}$$

Перемножив левые и правые стороны обоих равенств и разделив их затем на E_1E_2, получим

$$(k - k_2)(k - k_2) = M^2, \tag{11}$$

или

$$k^2 - (k_1 + k_2)k + (k_1 k_2 - M^2) = 0. \qquad (12)$$

Решение этого квадратного уравнения таково:

$$k = \frac{k_1 + k_2 \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4(M^2 - k_1 k_2)}}{2}. \qquad (13)$$

или, после небольших преобразований,

$$k = \frac{k_1 + k_2 \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4M^2}}{2} \qquad (14)$$

Если $M = 0$, то есть, если нет связи между модами, то формула (14) дает два значения величины k:

$$k = k_1,$$

$$k = k_2.$$

Так и должно быть. При $M \neq 0$ мы тоже получаем два значения величины k, но они не равны k_1 и k_2. Посмотрим, каков смысл этого. Применим наши уравнения к случаю двух одинаковых связанных волноводов в направленном ответвителе (рисунок 1). Фазовые постоянные обоих волноводов (в пренебрежении связью) одинаковы. Обозначим эту общую фазовую постоянную в отсутствие связи через k_0, тогда

$$k_1 = k_2 = k_0. \qquad (15)$$

Из формулы (14) с учетом равенства (15) мы получим две фазовые постоянные (соответствующие знакам «+» и «-»), которые обозначим через $k_{МЕДЛ}$ и $k_{БЫСТР}$:

$$k_{МЕДЛ} = k_0 + M, \qquad (16)$$

$$k_{БЫСТР} = k_0 - M. \qquad (17)$$

В этом примере $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности волн в двух волноводах. Соотношение (9) мы можем переписать в виде:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{k - k_0}{M}. \qquad (18)$$

Мы видим, что для волн с фазовыми постоянными $k_{МЕДЛ}$ и $k_{БЫСТР}$ [формулы (16) и (17) отношения амплитуд $E_{2МЕДЛ} / E_{1МЕДЛ}$ и $E_{2БЫСТР} / E_{1БЫСТР}$ даются выражениями

$$\frac{E_{2МЕДЛ}}{E_{1МЕДЛ}} = \frac{k_0 + M - k_0}{M} = 1, \qquad (19)$$

$$\frac{E_{2БЫСТР}}{E_{1БЫСТР}} = \frac{k_0 - M - k_0}{M} = -1. \qquad (20)$$

В отсутствие связи (*M=0*) мы имеем две моды. Одна распространяется в волноводе 1 с амплитудой E_1 и фазовой постоянной k_0, а другая распространяется в волноводе 2 с амплитудой E_1 и фазовой постоянной k_0.

При наличии связи ($0 \neq M$) у нас тоже две моды. Но каждая из них представляет собой волну в обоих волноводах. Одна мода, «медленная» волна, имеет фазовую постоянную $k_{МЕДЛ}$; при такой моде напряженность волны одинакова в обоих волноводах. Другая мода, «быстрая» волна, имеет фазовую постоянную $k_{БЫСТР}$; при такой моде напряженности в обоих волноводах равны, но противоположны по знаку.

Предположим, что при $z=0$ две волны в волноводе 1 имеют одинаковую напряженность $E_0/2$. Тогда в соответствии с формулами (19) и (20) в волноводе 2 напряженности волн равны и противоположны по знаку В волноводе 1 полная напряженность двух волн $E_{1ПОЛН}$ будет:

$$E_{1ПОЛН} = \frac{E_0}{2}\left(e^{-i(k_0+M)z} + e^{-i(k_0-M)z}\right). \tag{21}$$

В волноводе 2 полная напряженность волны $E_{ПОЛН}$ будет:

$$E_{2ПОЛН} = \frac{E_0}{2}\left(e^{-i(k_0+M)z} + e^{-i(k_0-M)z}\right) \tag{22}$$

Мы видим, что при $z=0$ полная напряженность волны в волноводе 1 равна E_0 , а в волноводе 2 равна нулю. А как будет изменяться эта напряженность с расстоянием? Мы можем переписать выражения (21) и (22) в виде:

$$E_{1ПОЛН} = \frac{E_0}{2} y^{-ik_0 z}\left(e^{iMz} + e^{-iMz}\right) = E_0 e^{-ik_0 z}\cos Mz, \tag{23}$$

$$E_{2ПОЛН} = -\frac{iE_0}{2i} e^{-ik_0 z}\left(e^{iMz} - e^{-iMz}\right) = -iE_0 e^{-ik_0 z}\sin Mz. \tag{24}$$

Мы видим, что с увеличением z полная напряженность волны в волноводе 1 постепенно уменьшается, а напряженность волны в волноводе 2 постепенно увеличивается. При $Mz=2/\pi$ напряженность волны в волноводе 1 равна нулю, а в волноводе 2 она равн а iE_0, то есть по абсолютной величине такая же, как в волноводе 1 при $z=0$. При $Mz = 2/\pi$ вся мощность переходит из волновода 1 в волновод 2. В случае, если фазовые постоянные связанных волноводов не одинаковы, связь опятьтаки приводит к наличию двух мод, каждая со своей амплитудой в каждом из волноводов. Но амплитуды каждой из мод уже не будут равны в двух волноводах. Одна мода будет иметь фазовую постоянную, близкую к k_1 , то есть, к фазовой постоянной волновода 1, и при такой моде напряженность волны в волноводе 1 будет больше, чем в волноводе 2. Для другой моды фазовая постоянная будет близка к k_2 фазовой постоянной волновода 2, и при такой моде напряженность волны в волноводе 2 будет больше, чем в волноводе 1. При неодинаковых фазовых постоянных волноводов полный переход мощности из одного волновода в другой оказывается невозможным. Фазовые постоянные мод могут по-разному изменяться с изменением частоты. Представим себе, что график зависимости ω от k для двух мод в отсутствие связи имеет вид штриховых прямых на рисунке 4. Далее, предположим, что имеется некоторая связь между модами.

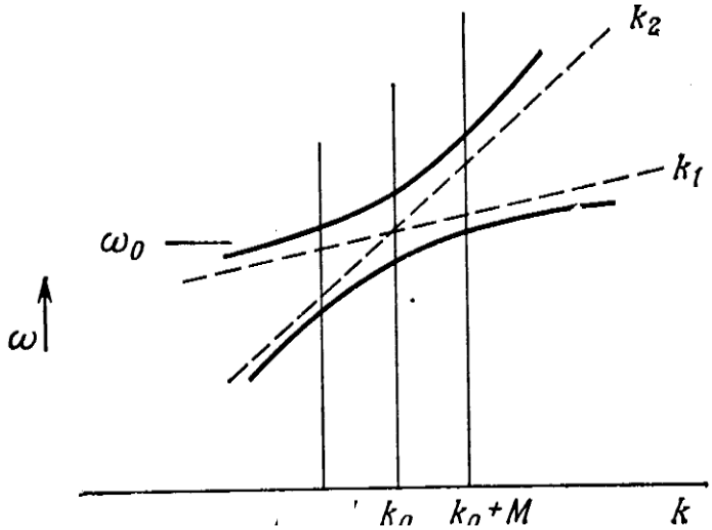


Рисунок 4 – График зависимости ω от k для двух мод в отсутствие связи.

На частоте ω_0 фазовые постоянные k_1 и k_2 имеют одинаковую величину k_0 Из сказанного ранее вытекает, что в таком случае мы имеем две волны с фазовыми постоянными k_0+M и k_0-M. Из формулы (14) мы найдем, что зависимость ω от k для двух связанных мод имеет вид сплошных линий, показанных на рисунке 4. Эти кривые представляют собой гиперболы, для которых штриховые прямые служат асимптотами [1].

Пример № 1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD задачу определения поля в волноводе.

Решение:

Решим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d}{dz}E_1 = -jk_1E_1 - jME_2$$

$$\frac{d}{dz}E_2 = -ik_2E_2 - jME_1$$

Для решения данной системы уравнений воспользуемся соотношениями:

$$E_1 = E_1 + jE_{11}$$

$$E_2 = E_2 + jE_{22}$$

Подставим в систему и получим:

$$\frac{d}{dz}\left(E_1 + jE_{11}\right) = -jk_1E_1 + k_1E_{11} - jME_2 + ME_{22}$$

$$\frac{d}{dz}\left(E_2 + jE_{22}\right) = -jk_2E_2 + k_2E_{22} - jME_1 + ME_{11}$$

Выделим действительную и мнимую часть и получим систему уравнений; затем решим её, используя функцию rkfixed.

$$\frac{d}{dz}E_1 = k_1E_{11} + mE_{22}$$

$$\frac{d}{dz}E_{11} = -k_1E_1 - ME_2$$

$$\frac{d}{dz}E_2 = k_2E_{22} + ME_{11}$$

$$\frac{d}{dz}E_{22} = -k_2E_2 - ME_1$$

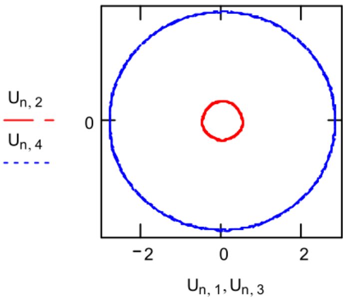
1) Частный случай: отсутствии связи между модами и $\kappa_1 = \kappa_2$:

$$M := 0 \qquad k_1 := 2 \quad k_2 := 2$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D(z,E) := \begin{pmatrix} k_2E_1 + ME_3 \\ -k_2E_0 - ME_2 \\ k_2E_3 + ME_1 \\ -k_2E_2 - ME_0 \end{pmatrix}$$

$$U := rkfixed\left(E, 0, 50, 600, D\right)$$

$$n := 0..300$$



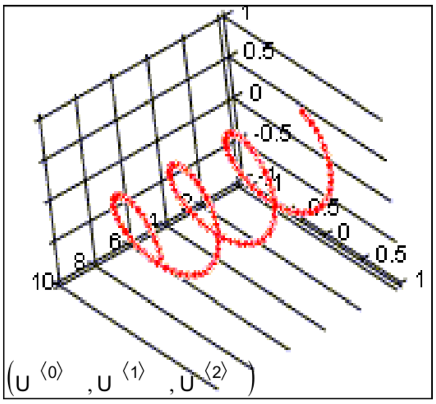


Рисунок 5 – Случай отсутствия связи между модами.

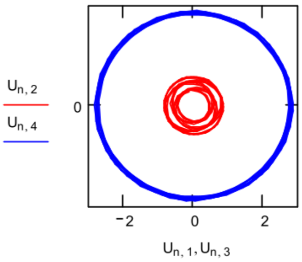
2) Наличие связи между модами:

$$M := 0.15 \qquad k_1 := 5 \quad k_2 := 3$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D(z,E) := \begin{pmatrix} k_2 E_1 + M E_3 \\ -k_2 E_0 - M E_2 \\ k_2 E_3 + M E_1 \\ -k_2 E_2 - M E_0 \end{pmatrix}$$

$$U := rkfixed(E, 0, 50, 600, D)$$

$$n := 0..300$$



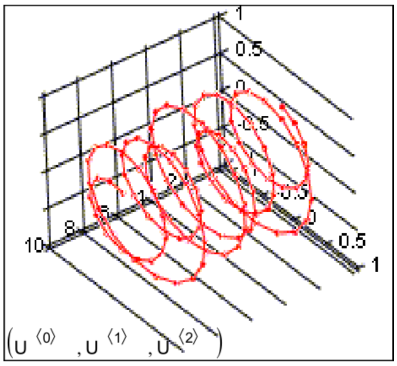


Рисунок 6 – Случай наличия связи между модами.

3) Изменение напряженности мод с расстоянием:

$$E_0 := 1 \;\; k_0 := 3 \;\; z := 0, 0.1..6\pi \quad E(z) := E_0 e^{-ik_0 z} \cos(Mz)$$

- напряженность двух мод в первом волноводе:

$$E_2(z) := -iE_0 e^{-ik_0 z} \sin(Mz)$$

- напряженность двух мод во втором волноводе:

$$k := 1..100 \quad w := 1..100 \quad x_k := 10\frac{k}{100} \quad x_{2w} := 10\frac{w}{100}$$

$$H1_{k,0} := x_k \quad H_{w,0} := X_w \quad H_{1k,1} := \mathrm{Re}\big(E(x_k)\big) \; H2_{w,1} := \mathrm{Re}\big(E2(x_w)\big)$$

$$H1_{k,2} := \mathrm{Im}\big(E(x_k)\big) \qquad H2_{w,2} := \mathrm{Im}\big(E2(x_w)\big)$$

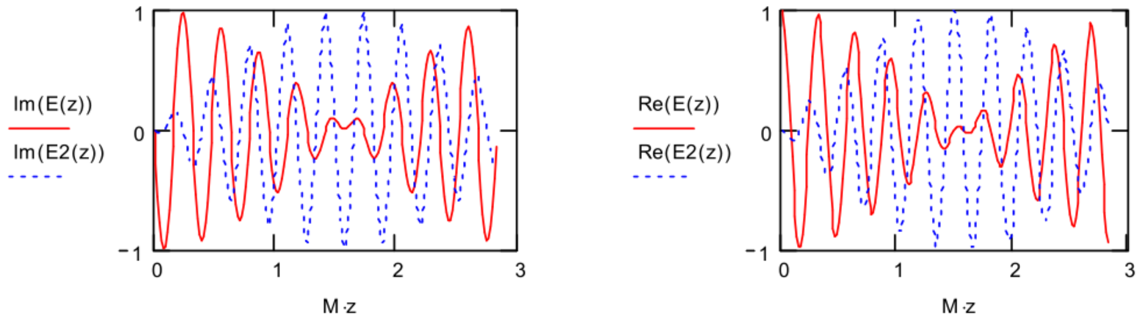


Рисунок 6 – Напряжённости мод в первом и втором волноводах

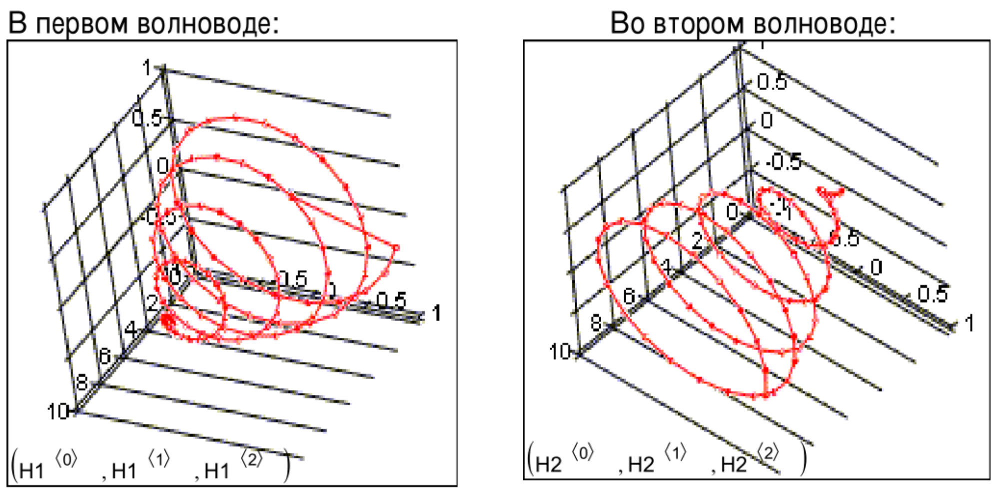


Рисунок 7 – Трёхмерное представление напряжённостей мод в волноводах

3 Контрольные вопросы

1. Объясните почему при неодинаковых фазовых постоянных волноводов полный переход мощности из одного волновода в другой оказывается невозможным?
2. Какие моды называются бездисперсными?
3. Как ведут себя моды при наличии и отсутствии связи?
4. Запишите выражения для волн с фазовыми постоянными $k_{МЕДЛ}$ и $k_{БЫСТР}$.

5. Запишите частный случай, при котором связь между модами отсутствует.