

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 08.12.2025 06:11:19

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d79e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 14 » 11 2025 г.



Формы представления математических моделей. Фазовый портрет и его свойства

Методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения»

Курск – 2025

УДК 519.6, 519.7

Составитель: Е.Н. Иванова

Рецензент
к.т.н., доцент Т.Н. Конаныхина

Формы представления математических моделей. Фазовый портрет и его свойства: методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2025. – 15 с.:– Библиогр.: с. 15.

Методические указания структурированы по этапам выполнения заданий на лабораторных и практических занятиях по теме Формы представления математических моделей. Фазовый портрет и его свойства, применяемым при реализации ОПОП ВО по модели «перевернутого обучения».

Предназначены для обучающихся по очной форме обучения по ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемым по модели «перевернутого обучения», осваивающих дисциплину «Математическое моделирование нелинейных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 14.11.25 Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,8.

Тираж 100 экз. Заказ 1256 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практические занятия

по теме № 3 «Формы представления математических моделей.
Фазовый портрет и его свойства»

Цель занятий – приобретение обучающимися практического опыта в применении знаний, полученных при самостоятельном освоении темы № 3 «Формы представления математических моделей. Фазовый портрет и его свойства», в производственных ситуациях.

Планируемые результаты обучения:

Знать:	Уметь:	Иметь опыт деятельности:
обязанности и ответственность студентов при реализации дисциплины по технологии «перевернутого обучения» (УК-6.1) роль технологии «перевернутого обучения» в формировании у студентов компетенций, необходимых для будущего профессионального роста (УК-6.2) преимущества технологии «перевернутого обучения» для самообразования и непрерывного	рационально распределять собственное время и эффективно использовать свои ресурсы при освоении нового учебного контента (УК-6.1) проводить самоконтроль в пределах самостоятельно изученного учебного контента (УК-6.2) использовать различные инструменты самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) разрабатывать математические модели объектов	в самоорганизации и саморазвитии при решении учебных задач большого объема (УК-6.1) в проведении самооценки по критериям, установленным преподавателем (УК-6.2) в применении эффективных технологий самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) по разработке математических моделей объектов различной природы; по проведению экспериментальных исследований на

<p>образования в течение жизни (УК-6.3)</p> <p>технологии разработки математических моделей объектов различной природы (ОПК-1.3)</p> <p>программно-технические платформы моделирования (ОПК-2.1)</p> <p>научные принципы и методы исследований (ОПК-4.1)</p>	<p>различной природы; составлять планы экспериментальных исследований на основе математических моделей (ОПК-1.3)</p> <p>использовать различные инструменты для проведения экспериментов на основе математических моделей (ОПК-2.1)</p> <p>аргументированно выбрать метод научного познания (ОПК-4.1)</p>	<p>основе математических моделей (ОПК-1.3)</p> <p>по моделированию функционирования объектов различной природы (ОПК-2.1)</p> <p>по проведению научных исследований для решения практических задач (ОПК-4.1)</p>
--	--	---

Необходимое материально–техническое оборудование: мультимедийная доска, компьютеры, мобильные устройства преподавателя и обучающихся.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 1

Формы представления математических моделей

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 3 (входной контроль знаний).
2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3.
3. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 3 (входной контроль знаний)

1.1 Проверка опорных конспектов по теме № 3

Проверка опорных конспектов по теме организуется преподавателем различными способами: демонстрация всеми обучающимися своих опорных конспектов; зачитывание вслух одним обучающимся записей, внесенных в опорный конспект; работа в парах (студенты обмениваются друг с другом своими опорными конспектами и помогают друг другу дописать пропущенное) и т.д.

1.2 Тестирование по теме № 3

Ответьте на вопросы и выполните задания в тестовой форме по теме № 3.

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 3

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

3. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 3, изученному дома самостоятельно)

1. Вставьте на местах пропуска нужные термины и определения.

Алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ может содержать только _____ функции, которых над переменной x производятся арифметические операции, возведение в степень с рациональным показателем и извлечение корня.

_____ называется уравнение, в состав которого входят _____ функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические функции, возведение в иррациональную степень.

_____ называется модель, в математическое описание которой в качестве независимой переменной входит время.

_____ – значения совокупности параметров в данный момент времени.

Динамические системы могут быть _____ и _____. _____ системы (в механике – гамильтоновы) характеризуются неизменным во времени запасом энергии (потери (рассеяние) энергии полагаются равными нулю).

_____ называют динамические системы, в которых запас энергии со временем уменьшается за счет трения или рассеяния.

Динамическая система называется _____, если она не подвержена внешним воздействиям (независима от внешних факторов).

Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называют соотношение вида: _____.

_____ называется объект, параметры которого не изменяются во времени.

_____ модели означает независимость ее коэффициентов от времени.

Посредством решения ОДУ производится: _____.

Проекция интегральной кривой $x(t)$ на фазовое пространство называется _____ или _____.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее _____, и указан _____.

Если рассматривать динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде _____ (изображающей) точки в _____ пространстве динамической системы.

Изменению состояния системы во времени отвечает движение _____ точки вдоль _____ траектории.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют _____ или _____ системами.

Если же система имеет бесконечное число степеней свободы, она называется _____.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на _____ и _____.

_____ системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют гамильтоновыми.

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются _____.

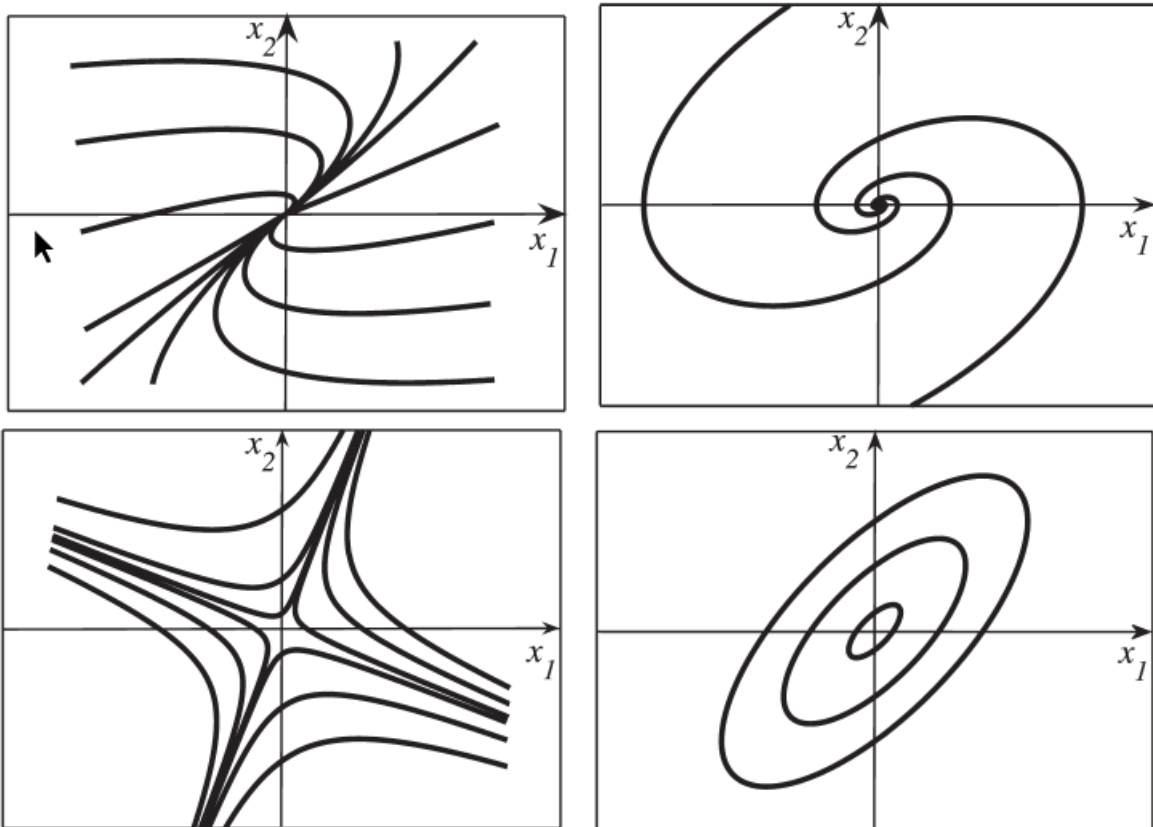
Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются _____.

Системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с _____ или _____.

Динамические системы называются _____, если они не зависят явным образом от времени.

_____ называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

Практическое задание для станции № 2 (общее)



Для каждого изображения определите тип фазового портрета и вид собственных чисел системы.

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Задана матрица системы первого приближения

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-3\gamma}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1-\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Определить собственные значения системы и тип точки покоя в зависимости от значения параметра γ .

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Задана матрица системы первого приближения

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Определить собственные значения системы и тип точки покоя. Изобразить фазовый портрет точки покоя.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 2

Текущий контроль успеваемости по теме № 3.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме лабораторной работы.

Шкала и критерии оценивания приведены в оценочных средствах по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для данной ОПОП ВО, которые размещены на официальном сайте университета по ссылке <https://swsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Лабораторная работа № 2 **Численное моделирование**

Теоретическое обоснование

Рассмотрим основные конструкции и подходы к построению численных методов решения дифференциальных уравнений.

Основной идеей является дискретизация рассматриваемых интервалов и функций.

Для дискретизации временного отрезка $[t_0, t_0 + T]$ разобьем его на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ шагом $h = \frac{T}{N}$,
 $t_{m+1} = t_m + h$.

Пусть $x(t)$ – решение задачи Коши для дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Для дискретизации функций обозначим через x_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m используют различные методы.

Метод Эйлера

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, y_m)$$

Получаемые приближения имеют погрешности первого порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h)$$

Метод Эйлера с пересчетом

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + \frac{h}{2} \left(f(t_m, x_m) + f\left(t_m + h, x_m + hf(t_m, x_m)\right) \right)$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2)$$

Метод Коши

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{h}{2} f(t_m, x_m)\right)$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2).$$

Метод Рунге — Кутты четвертого порядка

Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = hf(t_m, x_m)$$

$$K_2 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = hf(t_m + h, x_m + K_3)$$

Получаемые по методу Рунге — Кутта приближения имеют погрешности четвертого порядка

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^4)$$

Задание

Провести численное моделирование системы, математическая модель которой представлена дифференциальным уравнением на основе метода:

- 1) Эйлера;
- 2) Эйлера с пересчетом;
- 3) Коши;
- 4) Рунге-Кутта 4-го порядка.

1. $y' = \frac{1+xy}{x^2}$, $x \in [2; 3]$, $h = 0,1$, $y_0 = y(2) = 0,5$

2. $y' = y - \frac{2x}{y}$, $x \in [2; 3]$, $h = 0,1$, $y_0 = y(2) = 1$

3. $y' = \frac{2t-5}{t^2}y + 5$, $t \in [2; 3]$, $h = 0,1$, $y_0 = y(2) = 0,1$

4. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}$, $x \in [0,6; 1,6]$, $h = 0,1$, $y_0 = y(0,6) = 0,8$

5. $y' = 2(x^2 + y)$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1$, $y_0 = y(0) = 1$

Контрольные вопросы

1 В какой форме получается решение дифференциального уравнения при использовании численных методов?

- 2 На какие два класса делятся приближенные численные методы?
- 3 Запишите схему одношаговых методов.
- 4 Сформулируйте идею одношаговых методов.
- 5 Как определить порядок численного метода и его точность?

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 3 **Фазовый портрет и его свойства**

1. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
2. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1 Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 3, изученному дома самостоятельно)

Заполните пропуски

Если рассматривать динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде _____ (изображающей) точки в _____ пространстве динамической системы.

Изменению состояния системы во времени отвечает движение _____ точки вдоль _____ траектории.

Если этот оператор применить к начальному состоянию $x_0(t)$, то мы получим $x(t)$, то есть состояние в момент времени $t > t_0$. Так как $x_0(t)$ и $x(t)$ принадлежат одному и тому же фазовому пространству динамической системы, то говорят, что оператор T_t отображает _____ пространство системы на себя и называют оператором _____ или просто _____.

Предположим, что в фазовом пространстве системы существуют два множества: V и $L \in V$, где V – совокупность всех точек x_0 фазового пространства, для которых $x(t) \in L$ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$. В этом случае будем называть L – _____ динамической системы.

Если все начальные точки x_0 из области V стремятся к L в пределе при $t \rightarrow +\infty$, то предельное множество L является _____ и называется _____, а область V – _____.

Если же стремление к предельному множеству происходит в пределе при $t \rightarrow -\infty$, то предельное множество является _____ и называется _____.

Множество V может состоять из двух подмножеств W^S и W^U , причем точки из W^S стремятся к предельному множеству L в прямом времени, из W^U – в обратном. В этом случае предельное множество L называется _____, или _____. Множества W^S и W^U являются, соответственно _____ и _____. Инверсия времени переводит _____ в _____, и наоборот.

Самым простым предельным множеством является _____, которое может быть _____, _____, либо _____.

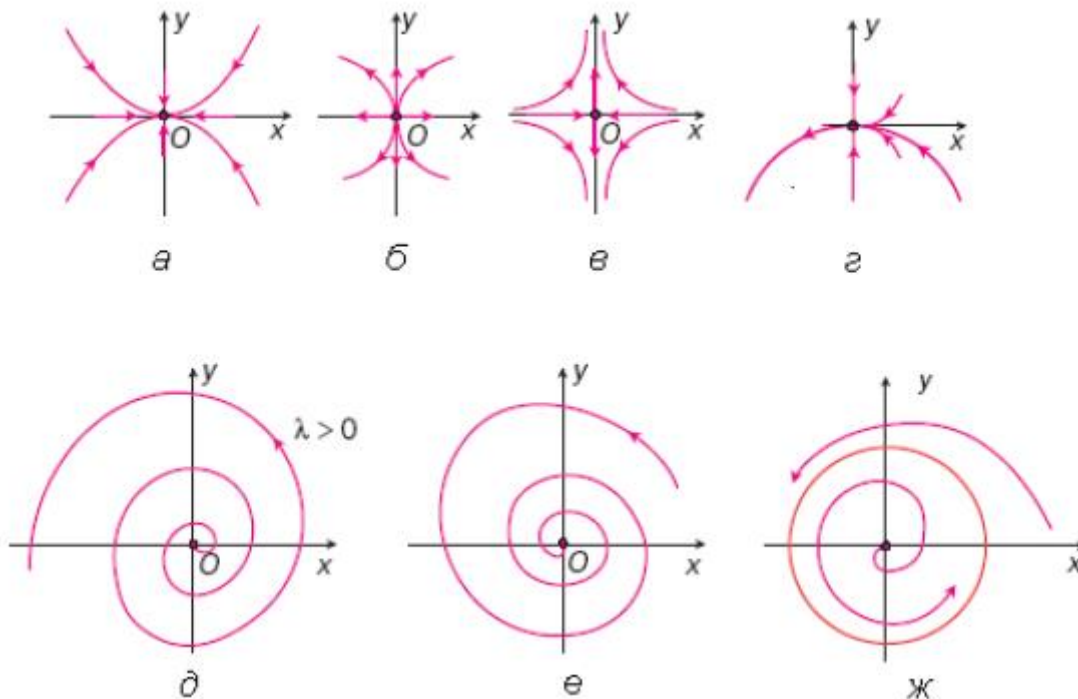
Точка типа центр не является ни _____, ни _____, ни _____, так как отсутствует какое-либо _____ к центру. Центр – это особый случай _____, для которого $V = L$.

Предельные множества в форме замкнутых кривых, вблизи которых (в любой малой трубчатой окрестности) других замкнутых кривых нет, называются _____ и соответствуют режимам _____ динамической системы.

Предельные циклы могут являться _____, _____ или _____ – _____ (притягивает к себе траектории снаружи и изнутри), _____ (отталкивает от себя траектории снаружи и изнутри) и _____ (притягивает траектории снаружи и отталкивает изнутри, либо наоборот) предельный цикл, соответственно.

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Определите тип каждого предельного множества.



Практическое задание для станции № 3 (общее)

Провести анализ фазового портрета модели Мальтуса, принимая $k(x) = a + bx + cx^2$.

Провести исследование фазового портрета модели Ланкастера, принимая $a(x, y) = a_0 + \varepsilon x$; $b(x, y) = b_0 + \varepsilon y$.

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Уравнения движения по координате θ имеют вид

$$\dot{\omega} = \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega$$

где $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$. Провести построение фазового портрета системы для

случаев

- 1) $0 < \lambda < 1$
- 2) $\lambda = 0$
- 3) $-1 < \lambda < 0$

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дорошин, А. В. Математическое моделирование в нелинейной динамике: учеб. пособие / А. В. Дорошин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008.
2. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н.В. Голубева. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 192 с.
3. Башкирцева, И. А. Компьютерное моделирование нелинейной динамики : Непрерывные модели : учеб. пособие / И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 84 с.