

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 19.09.2024 09:49:32  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

## МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра уникальных зданий и сооружений



## ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям  
по дисциплине «Динамика и устойчивость сооружений»  
для студентов направления подготовки  
08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений

Курск 2017

УДК 624.04

Составитель: С.Ю. Савин

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *В.И. Колчунов*

**Динамика и устойчивость стержневых систем:** методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Динамика и устойчивость сооружений» для студентов направления подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.Ю. Савин. - Курск, 2017. - 31 с. Библиогр.: с. 31.

В настоящих методических указаниях рассмотрены расчет статически неопределимой рамы на устойчивость методом перемещений и динамический расчет симметричной статически неопределимой рамы.

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по дисциплине «Динамика и устойчивость сооружений» студентами специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Указания могут быть также полезны магистрам направления 08.04.01 «Строительство», аспирантам направления 08.06.01 «Техника и технология строительства», а также студентам бакалавриата по направлению 08.03.01 «Строительство» при выполнении ими научно-исследовательской работы.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017 . Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 1,80 . Уч.-изд.л. 1,63 . Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

## Содержание

Введение .....	4
1 Расчет плоских рам на устойчивость .....	5
2 Динамический расчет плоских рам .....	17
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	27
Литература. ....	31

## **Введение**

Данные методические указания предназначены для подготовки к практическим занятиям и выполнения самостоятельной работы студентов по дисциплине «Динамика и устойчивость сооружений». В указаниях приведено подробное решение двух задач: расчет статически неопределимой рамы на устойчивость методом перемещений и динамический расчет симметричной статически неопределимой рамы. Методические указания содержат краткие теоретические сведения и рекомендации, необходимые для выполнения подготовки к практическим занятиям, вспомогательные табличные материалы, способствуют лучшему усвоению учебного материала. Дополнительный теоретический материал, необходимый для освоения предмета, приведен в учебной литературе [1], [2].

## 1 Расчет плоских рам на устойчивость

Системы, применяемые в качестве строительных конструкций, действием внешней нагрузки должны находиться в состоянии устойчивого равновесия. Положение сооружения и форма равновесия в упругодеформированном состоянии считаются устойчивыми, если при сколь угодно малом отклонении от исследуемой формы равновесия сооружение, будучи представлено самому себе, полностью возвращается в исходное состояние.

Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое определяет собой появление потери устойчивости. Границу этого перехода называют критическим состоянием системы, а соответствующие нагрузки - критическими.

Расчет на устойчивость проводится либо для определения величины нагрузки, либо для исследования состояния устойчивости. Для решения этих вопросов существует статический, динамический и энергетический методы.

Сущность статического метода заключается в следующем:

- задается предполагаемая, отклонённая форма равновесия системы;
- записывается уравнение равновесия бесконечно малого элемента в деформированном состоянии под действием всех внутренних и внешних сил;
- путем решения этих уравнений, находится форма потери устойчивости и соответствующая ей критическая нагрузка.

При динамическом методе составляется уравнение собственных колебаний системы, находящейся под действием сжимающей силы. Затем определяется значение силы, при которой частота собственных колебаний равна нулю. Эта величина и будет критической силой.

Энергетический метод основан на анализе приращения энергии в предполагаемом отклоненном состоянии системы после потери устойчивости.

Трудность определения критической силы возрастает с увеличением числа степеней свободы  $m$ . Степенью свободы  $m$  системы называется число независимых геометрических параметров, полностью определяющих возможные перемещения всех её точек.

Если рассматривается реальная система, то степень свободы  $m = \infty$ , то есть, чтобы полностью определить деформацию системы, необходимо задать прогибы во всех её точках (рис. 1.1).



Рисунок 1.1

Если же балка обладает большой жёсткостью и можно принять  $EI = \infty$ , то перемещения всех точек системы будут зависеть от вида связей (рис. 1.2, а, б)

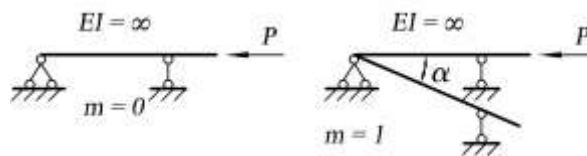
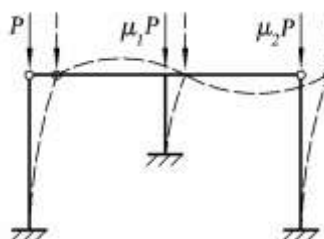


Рисунок 1.2

Исследование устойчивости ведётся при следующих допущениях.

1. Рассматривается только узловое приложение нагрузки, следовательно, поперечный изгиб стержней не учитывается.
2. Стержни рамы считаются нерастяжимыми и несжимаемыми.
3. Расстояние между узлами при деформации не меняется (это допущение применяется только при статическом методе расчёта).
4. Приращением продольных сил  $\Delta N$ , возникающим в момент потери устойчивости, пренебрегаем.

Рассмотрим раму, изображённую на рис. 1.3. С ростом нагрузки до величины  $P_{кр}$  прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и рама приобретает другое равновесное состояние (показано пунктиром). Так как новое, изогнутое состояние является равновесным, то расчёт рам можно производить одним из известных методов - методом сил, перемещений, комбинированным и т.п.





Неизвестными в канонических уравнениях (1.1) и (1.2) являются силы ( $X_i$ ) или перемещения ( $Z_i$ ), возникающие в момент перехода системы из прямолинейной формы равновесия в криволинейную. Коэффициенты канонических уравнений  $\delta_{ik}$  и  $r_{ik}$  определяются с учётом действия продольной силы, т. е. в их значения входит параметр  $P$ .

Так как нас интересует изогнутое равновесное состояние, когда  $X_i \neq 0$  и  $Z_i \neq 0$ , то для решения задачи необходимо приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов канонические уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим расчёт рам на устойчивость методом перемещений. Коэффициенты канонических уравнений определяется статическим методом, путём вырезания узлов и стержней и составления уравнений равновесия:

$$\sum M = 0, \text{ или } \sum X = 0 (\sum Y = 0).$$

Расчёт на устойчивость методом перемещений применяется в случае, когда внешняя сосредоточенная нагрузка приложена к узлам рамы и действует вдоль стержней.

Эпюры изгибающих моментов от единичных угловых и линейных перемещений строятся при помощи специальных таблиц, приводимых в учебниках по строительной механике [1].

Для стержней, находящихся под действием продольных перемещений значения усилий приведены в таблице 1.1.

В таблице 1.2 представлены значения трансцендентных функций, отражающих влияние продольной силы на величину изгибающего момента.



Таблица 1.1 - Значения опорных моментов и поперечных сил в элементах основной системы метода перемещений

№ п.п.	Схема элемента	$M_0$	$M_l$	$Q_0 = Q_l$
1		$4i\mu_1(\lambda)$	$2i\mu_2(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3(\lambda)$
2		$2i\mu_2(\lambda)$	$4i\mu_1(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3(\lambda)$
3		$-\frac{6i}{l}\mu_3(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3(\lambda)$	$\frac{12i}{l^2}\mu_4(\lambda)$
4		$3i\mu_7(\lambda)$	0	$-\frac{3i}{l}\mu_7(\lambda)$
5		$-\frac{3i}{l}\mu_7(\lambda)$	0	$\frac{3i}{l^2}\mu_8(\lambda)$
6		$i \cdot \lambda / \operatorname{tg} \lambda$	$-i \cdot \lambda / \operatorname{tg} \lambda$	0

Продолжение таблицы 1.1

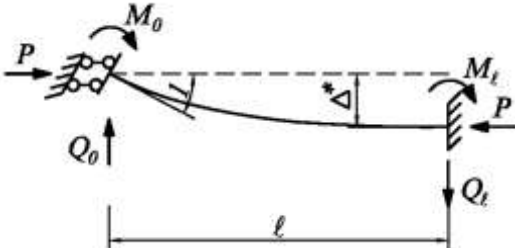
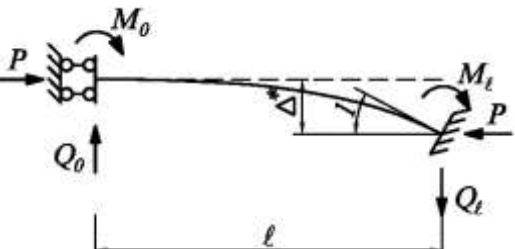
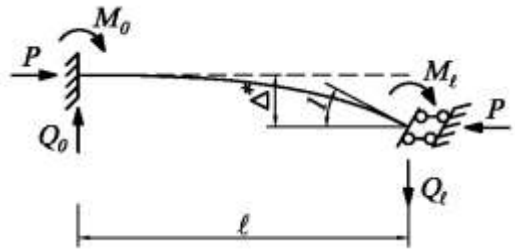
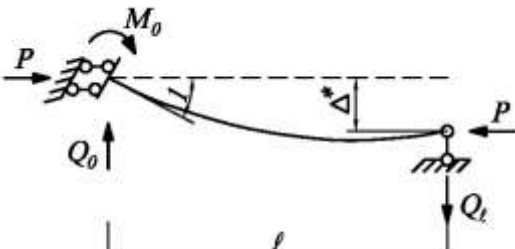
№ п.п.	Схема элемента	$M_0$	$M_l$	$Q_0 = Q_l$
7		$i \cdot \lambda / \operatorname{tg} \lambda$	$-i \cdot \lambda / \sin \lambda$	0
8		$-i \cdot \lambda / \sin \lambda$	$i \cdot \lambda / \operatorname{tg} \lambda$	0
9		$-i \cdot \lambda / \sin \lambda$	$i \cdot \lambda / \operatorname{tg} \lambda$	0
10		$-i \cdot \lambda \operatorname{tg} \lambda i$	0	0
$i = \frac{EI}{l};$		$\lambda = l \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}}$		

Таблица 1.2 - Числовые значения функций для расчёта рам и неразрезных балок на устойчивость по методу перемещений

$$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \lambda} \frac{\operatorname{tg} \lambda - \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda/2) - \lambda/2}; \quad \mu_2(\lambda) = \frac{\lambda}{4 \sin \lambda} \frac{\lambda - \sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda/2) - \lambda/2};$$

$$\mu_3(\lambda) = \frac{1}{12} \frac{\lambda^2 \operatorname{tg}(\lambda/2)}{\operatorname{tg}(\lambda/2) - \lambda/2}; \quad \mu_4(\lambda) = \frac{1}{24} \frac{\lambda^3}{\operatorname{tg}(\lambda/2) - \lambda/2};$$

$$\mu_7(\lambda) = \frac{1}{3} \frac{\lambda^2 \operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \lambda - \lambda}; \quad \mu_8(\lambda) = \frac{1}{3} \frac{\lambda^3}{\operatorname{tg} \lambda - \lambda}.$$

$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda)$	$\mu_4(\lambda)$	$\mu_7(\lambda)$	$\mu_8(\lambda)$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	0,99967	1,00017	0,99983	0,99900	0,99933	0,99600
0,20	0,99867	1,00067	0,99933	0,99600	0,99733	0,98400
0,30	0,99700	1,00150	0,99850	0,99000	0,99398	0,96398
0,40	0,99465	1,00268	0,99733	0,98400	0,98928	0,93595
0,50	0,99164	1,00420	0,99583	0,97499	0,98321	0,89988
0,60	0,98794	1,00607	0,99399	0,96398	0,97575	0,85575
0,70	0,98356	1,00829	0,99180	0,95097	0,96687	0,80353
0,80	0,97849	1,01088	0,98929	0,93595	0,95653	0,74320
0,90	0,97271	1,01385	0,98642	0,91892	0,94470	0,67470
1,00	0,96622	1,01720	0,98321	0,89988	0,93134	0,59801
1,10	0,95901	1,02095	0,97966	0,87882	0,91639	0,51305
1,20	0,95107	1,02511	0,97575	0,85575	0,89978	0,41978
1,30	0,9424	1,02970	0,97150	0,83070	0,88140	0,31810
1,40	0,93292	1,03476	0,96687	0,80353	0,86131	0,20798
1,50	0,92268	1,04029	0,96188	0,77438	0,83928	0,08928
1,60	0,91164	1,04631	0,95653	0,74320	0,81523	-0,03810
1,70	0,89978	1,05286	0,95081	0,70997	0,78905	-0,17428
1,80	0,88708	1,05996	0,94470	0,67470	0,76059	-0,31941
1,90	0,87350	1,06765	0,93822	0,63738	0,72969	-0,47365
2,00	0,85903	1,07596	0,93134	0,59801	0,69614	-0,63719
2,10	0,84362	1,08495	0,92406	0,55657	0,65973	-0,81027
2,20	0,82726	1,09465	0,91639	0,51305	0,62019	-0,99315
2,30	0,80988	1,10511	0,90829	0,46746	0,57719	-1,18614
2,40	0,79147	1,11640	0,89978	0,41978	0,53038	-1,38962
2,50	0,77196	1,12858	0,89083	0,37000	0,47930	-1,60403

Продолжение таблицы 1.2

$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda)$	$\mu_4(\lambda)$	$\mu_7(\lambda)$	$\mu_8(\lambda)$
2,60	0,75131	1,14172	0,88145	0,31811	0,42341	-1,82992
2,70	0,72946	1,15591	0,87161	0,26411	0,36206	-2,06794
2,80	0,70635	1,17123	0,86131	0,20798	0,29444	-2,31889
2,90	0,68191	1,18780	0,85054	0,14970	0,21954	-2,58380
3,00	0,65605	1,20573	0,83928	0,08927	0,13608	-2,86392
3,10	0,62869	1,22515	0,82751	0,02668	0,04243	-3,16090
3,20	0,59974	1,24621	0,81523	-0,03810	-0,06353	-3,47687
3,30	0,56907	1,26910	0,80242	-0,10508	-0,18466	-3,81466
3,40	0,53657	1,29401	0,78905	-0,17428	-0,32481	-4,17814
3,50	0,50208	1,32118	0,77512	-0,24572	-0,48939	-4,57273
3,60	0,46546	1,35086	0,76059	-0,31941	-0,68622	-5,00622
3,70	0,42650	1,38338	0,74546	-0,39538	-0,92703	-5,49036
3,80	0,38499	1,41909	0,72969	-0,47365	-1,23028	-6,04362
3,90	0,34068	1,45842	0,71326	-0,55424	-1,62687	-6,69687
4,00	0,29328	1,50187	0,69614	-0,63719	-2,17165	-7,50598
4,10	0,24244	1,55006	0,67831	-0,72252	-2,98023	-8,58356
4,20	0,18775	1,60369	0,65973	-0,81027	-4,31561	-10,1956
4,30	0,12874	1,66364	0,64037	-0,90046	-6,99473	-13,1581
4,40	0,06480	1,73096	0,62019	-0,99315	-15,3271	-21,7805
4,50	-0,00477	1,80698	0,59914	-1,08836	+227,932	+221,182
4,60	-0,08086	1,89330	0,57719	-1,18614	14,6693	7,61598
4,70	-0,16455	1,99197	0,55429	-1,28654	7,81862	0,45529
4,80	-0,25723	2,10559	0,53038	-1,38962	5,40232	-2,27768
4,90	-0,36067	2,23754	0,50540	-1,49543	4,14630	-3,85703
5,00	-0,47718	2,39226	0,47930	-1,60403	3,36148	-4,97185
5,10	-0,60985	2,57570	0,45200	-1,71551	2,81297	-5,85703
5,20	-0,76290	2,79604	0,42341	-1,82992	2,39864	-6,61469
5,30	-0,94221	3,06482	0,39347	-1,94737	2,06681	-7,29653
5,40	-1,15634	3,39886	0,36206	-2,06794	1,78835	-7,93165
5,50	-1,41816	3,82360	0,32909	-2,19174	1,54548	-8,53785
5,60	-1,74806	4,37945	0,29444	-2,31889	1,32655	-9,12678
5,70	-2,18035	5,13461	0,25797	-2,44953	1,12346	-9,70654
5,80	-2,77765	6,21392	0,21954	-2,58380	0,93021	-10,2831
5,90	-3,66787	7,87265	0,17897	-2,72186	0,74208	-10,8613
6,00	-5,15938	10,7270	0,13608	-2,86392	0,55509	-11,4449
6,10	-8,23363	16,7392	0,09065	-3,01018	0,36560	-12,0377
6,20	-18,5906	37,3084	0,04243	-3,16090	0,17003	-12,6433

**Задание 1.1** Для рамы, изображенной на рис. 1.5, а, требуется определить критическую силу.

**Решение.** Выберем основную систему, изображенную на рис. 1.5, б. Система канонических уравнений будет представлена однородными уравнениями:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 = 0. \end{cases}$$

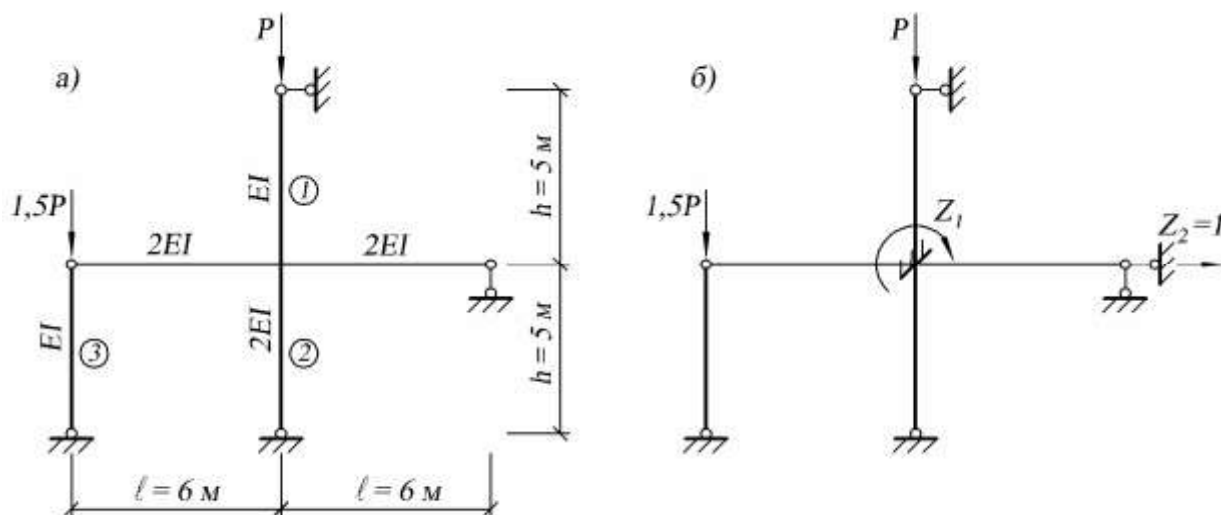


Рисунок 1.5

Нулевое решение этих уравнений возможно только в случае, когда определитель системы будет равен нулю.

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0,$$

где  $r_{11}$  – реактивный момент в защемлении 1 от поворота этой заделки на угол, равный 1 (определяется вырезанием узла 1 с эпюры  $M_1$  (рис. 1.6, а));

$r_{12}$  – реактивный момент в защемлении 1 от единичного линейного смещения связи 2 (определяется вырезанием узла 1 с эпюры  $\bar{M}_2$  (рис 1.6, б));

$r_{22}$  - реактивное усилие в связи 2 от смещения по направлению этой же связи на 1 (определяется путём рассмотрения равновесия рамы, отрезанной от опор (рис. 1.6, б)).

При этом вместо отброшенных связей к сечениям прикладываются реактивные усилия.

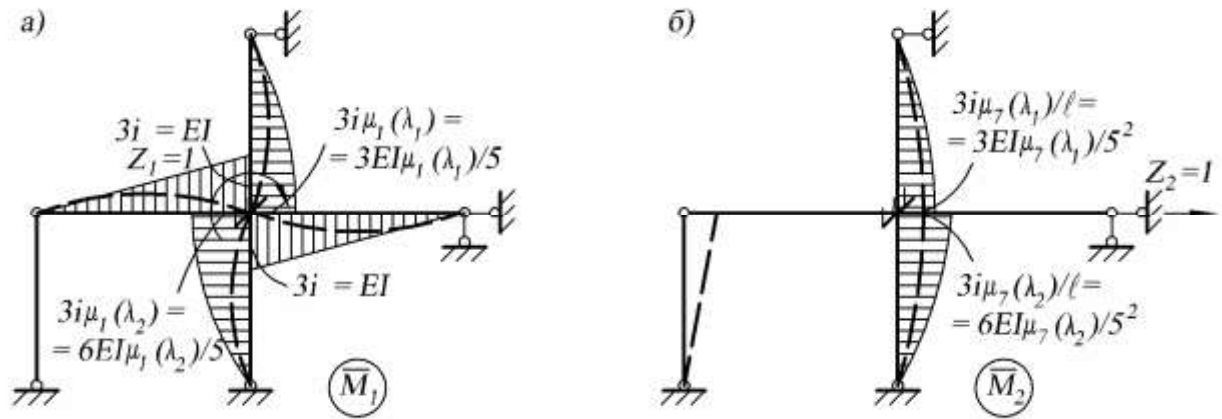


Рисунок 1.6

На основании теоремы о взаимности перемещений имеем  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ . Единичные эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1.6) строятся при помощи таблицы 1.1.

Подсчитаем параметры  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = 5 \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} = \lambda; \quad \lambda_2 = 5 \cdot \sqrt{\frac{P}{2EI}} = 0,707\lambda; \quad \lambda_3 = 5 \cdot \sqrt{\frac{1,5P}{EI}} = 1,22\lambda.$$

Определим коэффициенты канонических уравнений, для чего вырежем жесткие узлы рамы с эпюр  $M_1$  и  $M_2$  и рассмотрим равновесие этих узлов (рис. 1.7):

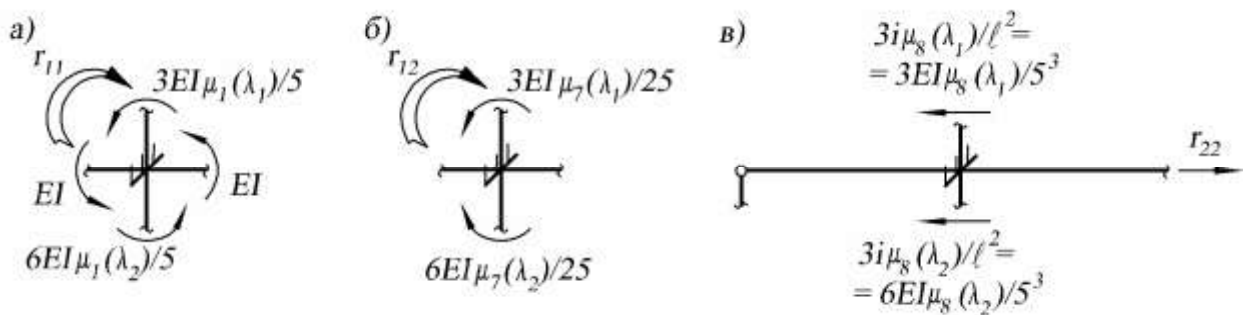


Рисунок 1.7

$$\begin{aligned}
r_{11} &= EI + EI + \frac{3}{5}EI \cdot \mu_7(\lambda_1) + \frac{6}{5}EI\mu_7(\lambda_2) = \\
&= 2EI + \frac{3}{5}EI \cdot \mu_7(\lambda) + \frac{6}{5}EI\mu_7(0,707\lambda); \\
r_{12} = r_{21} &= \frac{3}{25}EI \cdot \mu_7(\lambda_1) - \frac{6}{25}EI\mu_7(\lambda_2) = \\
&= \frac{3}{5}EI \cdot \mu_7(\lambda) - \frac{6}{25}EI\mu_7(0,707\lambda); \\
r_{22} &= \frac{3}{125}EI \cdot \mu_8(\lambda_1) + \frac{6}{125}EI\mu_8(\lambda_2) = \\
&= \frac{3}{125}EI \cdot \mu_8(\lambda) + \frac{6}{125}EI\mu_8(0,707\lambda).
\end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов в развёрнутое выражение определителя (D) и разделив его на EI, получим следующее уравнение устойчивости:

$$\begin{aligned}
D = \left[ 2 + \frac{3}{5} \cdot \mu_7(\lambda) + \frac{6}{5} \cdot \mu_7(0,707\lambda) \right] \cdot \left[ \frac{3}{125} \mu_8(\lambda) + \frac{3}{125} \mu_8(0,707\lambda) \right] - \\
- \left[ \frac{3}{25} \mu_7(\lambda) - \frac{6}{25} \mu_7(0,707\lambda) \right]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Теперь необходимо найти такое значение параметра  $\lambda$ , при котором определитель обращается в нуль. Параметр  $\lambda$  меняется в пределах от нуля до  $2\pi$ . Зададимся значением  $\lambda$  близким к среднему:  $\lambda = 3$ . По таблице 1.2 находим:

$$\begin{aligned}
\lambda_7(3) &= 0,13608; \lambda_7(0,707 \cdot 3) = \lambda_7(2,121) = 0,65973; \\
\lambda_8(3) &= -2,86392; \lambda_8(2,121) = -0,81027.
\end{aligned}$$

При этом определитель  $D = -0,32941$ .

Принимая  $\lambda = 1,5$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\lambda_7(1,5) &= 0,83928; \lambda_7(0,707 \cdot 1,5) = \lambda_7(1,06) = 0,91639; \\
\lambda_8(1,5) &= -0,08928; \lambda_8(1,06) = 0,51305.
\end{aligned}$$

При этом определитель  $D = 0,08224$ .

Построим график зависимости D от  $\lambda$  и из подобия треугольников (рис. 1.8) найдем, что при  $\lambda = 1,8$ ,  $D = 0$ .

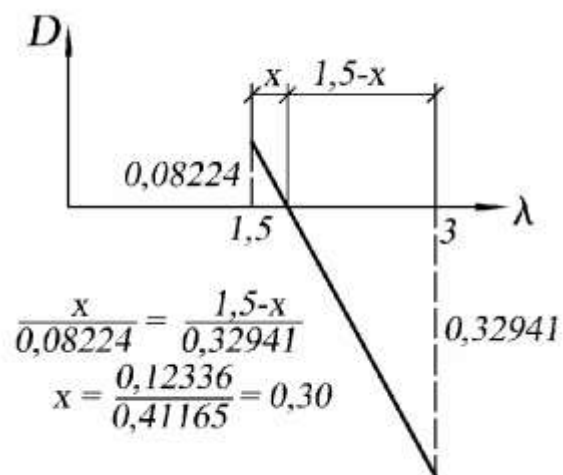


Рисунок 1.8

По этому значению параметра  $\lambda$  найдем критическую силу:

$$P_{\text{кк}} = \frac{\lambda^2 \cdot EI}{h^2} = \frac{1,8^2 \cdot EI}{5^2} = 0,648EI.$$



## 2 Динамический расчет плоских рам

При действии на сооружение динамических нагрузок возникают силы инерции масс этих нагрузок и самого сооружения, которые играют существенную роль.

Все динамические нагрузки вызывают колебания конструкций, на которые они действуют.

Динамический расчёт производится как для проверки прочности, так и для определения величин динамических перемещений, которые не должны превышать допустимых пределов.

Для решения задач динамики применяются два способа: статический и энергетический.

Статический способ заключается в том, что сооружение рассчитывается на действие заданных нагрузок и вызванных ими сил инерции с применением уравнения динамического равновесия. При этом силы инерции масс определяются как произведения масс или их моментов инерции на ускорения, т. е. на вторые производные линейных или угловых перемещений по времени:

$$\begin{cases} \sum X - mX'' = 0; & \sum M_x - I_x\alpha'' = 0; \\ \sum Y - mY'' = 0; & \sum M_y - I_y\beta'' = 0; \\ \sum Z - mZ'' = 0; & \sum M_z - I_z\gamma'' = 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  - моменты инерции массы тела относительно оси вращения;

$\alpha, \beta, \gamma$  - углы поворота (вращения) тела относительно координатных осей.

Энергетический способ, основанный на применении закона сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергии упругой системы является величиной постоянной во времени.

Рассмотрим свободные колебания системы со многими степенями свободы.

Степенью свободы в задачах динамики называют количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех масс при невозможных упругих деформациях системы. Каждой форме колебаний соответствует своя частота. Совокупность частот данной системы составляет её спектр частот. Наиболее опасной, в смысле возникновения резонанса, является

наименьшая частота, её называют частотой основного тона колебаний. Резонанс на низшей частоте приводит к наибольшему динамическому эффекту.

Предположим, что система совершает свободные колебания (рис. 2.1, а). При движении этой системы на нее будут действовать в качестве дополнительных внешних сил инерционные силы, приложенные к массам (рис 2.1, б).

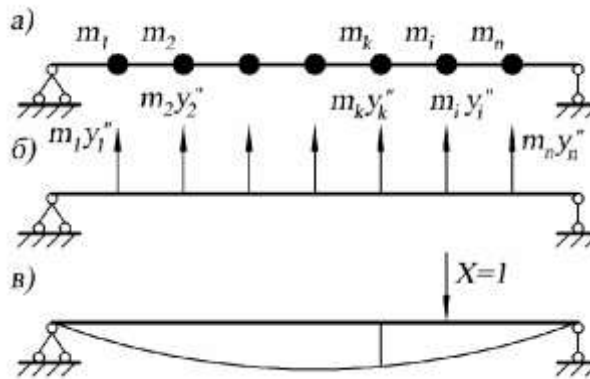


Рисунок 2.1

Определим перемещение массы  $m_k$ , полученное от действия инерционной силы  $m_i y_i''$ , приложенной к массе  $m$ . Для этого приложим к точке  $i$  единичную силу и найдём перемещение  $\delta_{ki}$  (рис.2.1, в). Тогда

$$y_{ki} = \delta_{ki} \cdot (-m_i y_i'') \quad (2.2)$$

Общее перемещение точки  $K$  от действия всех инерционных сил будет равно:

$$y_k = -\delta_{k1} \cdot m_1 y_1'' - \delta_{k2} \cdot m_2 y_2'' - \dots - \delta_{kn} \cdot m_n y_n'' \quad (2.3)$$

Количество таких уравнений будет соответствовать числу степеней свободы.

Пусть балка имеет три степени свободы, значит она характеризуется тремя частотами свободных колебаний  $w_1, w_2, w_3$ . Составим выражения для перемещений точек приложения сосредоточенных масс под действием их сил инерции в виде канонических уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -\delta_{11} \cdot m_1 y_1'' - \delta_{12} \cdot m_2 y_2'' - \delta_{13} \cdot m_3 y_3''; \\ y_2 = -\delta_{21} \cdot m_1 y_1'' - \delta_{22} \cdot m_2 y_2'' - \delta_{23} \cdot m_3 y_3''; \\ y_3 = -\delta_{31} \cdot m_1 y_1'' - \delta_{32} \cdot m_2 y_2'' - \delta_{33} \cdot m_3 y_3'' \end{cases} \quad (2.4)$$

Перемещения  $\delta_{ki}$  в этой системе находятся способом Верещагина от единичных сил, приложенных в местах действия сил инерции.

Система дифференциальных уравнений (2.4) имеет следующие решения:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_2 = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_3 = a_3 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  - амплитуды колебаний соответственных масс.

Ускорения определяются как вторые производные от перемещений:

$$\begin{cases} y_1'' = a_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_2'' = a_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_3'' = a_3 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставив в выражения (2.4) значения  $y$  и  $y''$  и сократив все члены на  $\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ , после преобразований получим:

$$\begin{cases} \left( \delta_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot a_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_2 + \delta_{13} \cdot m_3 \cdot a_3 = 0; \\ \delta_{21} \cdot a_1 + \left( \delta_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot a_2 + \delta_{23} \cdot m_3 \cdot a_3 = 0; \\ \delta_{31} \cdot a_1 + \delta_{32} \cdot m_2 \cdot a_2 + \left( \delta_{33} \cdot m_3 - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot a_3 = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

Существование отличных от нуля амплитуд  $a_1, a_2, a_3$  возможно лишь в том случае, когда определитель этой системы будет равен нулю, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} \cdot m_1 & -\frac{1}{\omega^2} \delta_{12} \cdot m_2 & \delta_{13} \cdot m_3 \\ \delta_{21} \cdot m_1 & \delta_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{23} \cdot m_3 \\ \delta_{31} \cdot m_1 & \delta_{32} \cdot m_2 & \delta_{33} \cdot m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Если раскрыть этот определитель, то получится одно уравнение третьей степени относительно  $1/\omega^2$ , которое при решении даст три

значения частот  $\omega$ . Это уравнение, записанное в общем виде, называется вековым уравнением:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} \cdot m_1 & -\frac{1}{\omega^2} \delta_{12} \cdot m_2 & \dots & \delta_{1n} \cdot m_n \\ \delta_{21} \cdot m_1 & \delta_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \dots & \delta_{2n} \cdot m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} \cdot m_1 & \delta_{n2} \cdot m_2 & \dots & \delta_{nn} \cdot m_n - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.9)$$

Для симметричных систем с симметрично расположенными массами возможны симметричные и обратно-симметричные формы колебаний. В этом случае перемещения вычисляются как групповые от симметричных единичных сил. При этом, поскольку групповые перемещения находятся от парных единичных сил, соответствующая масса должна входить в вековое уравнение с коэффициентом 0,5.

**Задание 2.1** Для рамы, изображенной на рис. 2.2, требуется определить частоты собственных колебаний, а так же построить эпюру динамических моментов в раме от вибрационной нагрузки.

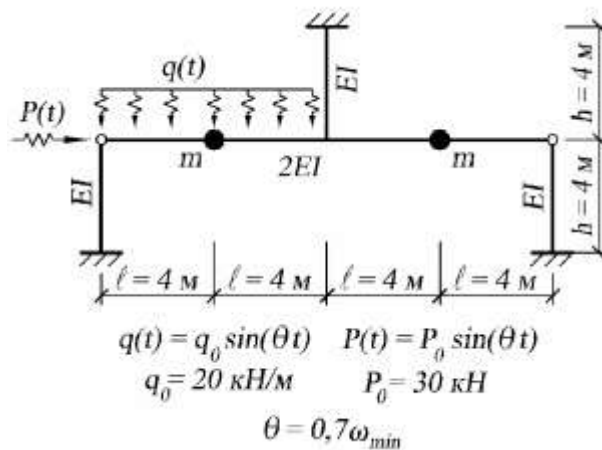


Рисунок 2.2

**Решение.**

Приложим единичные силы по направлению возможных перемещений сосредоточенных масс (рис. 2.3). Степень свободы заданной системы равна трем.

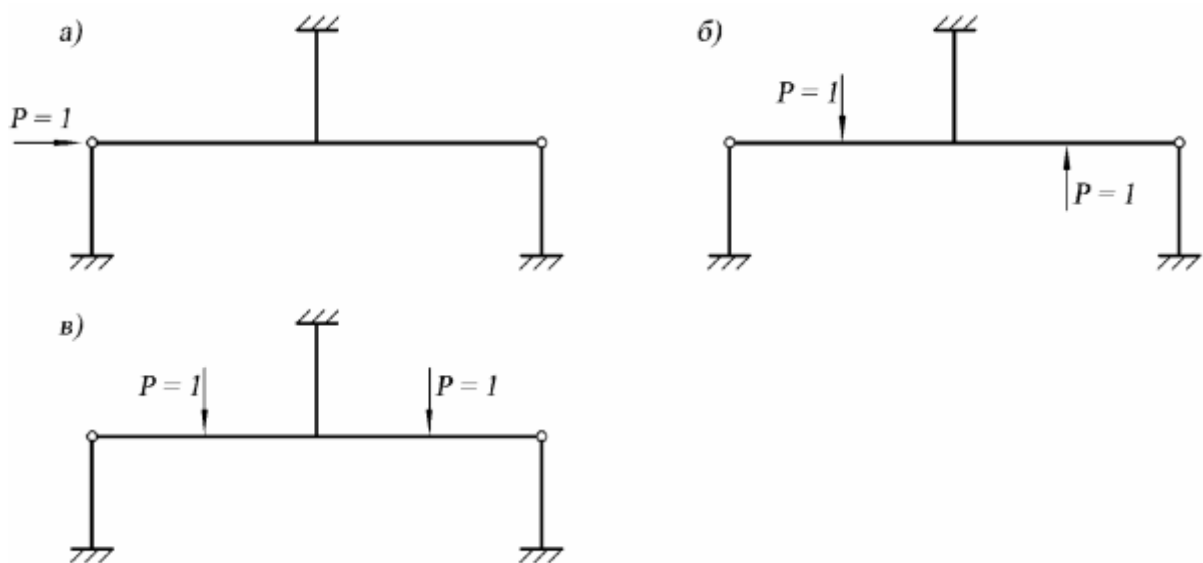


Рисунок 2.3

Для заданной системы вековое уравнение имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & -\frac{1}{m_1 \omega^2} \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \omega^2} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} - \frac{1}{m_3 \omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Для определения коэффициентов векового уравнения - единичных перемещений  $\delta_k$  - необходимо построить эпюры единичных изгибающих моментов от действия сил  $P=1$  и выполнить соответствующие перемножения этих эпюр. Заданная система является статически неопределимой. Для построения единичных эпюр изгибающих моментов можно воспользоваться, например, методом сил [1], приняв силы  $P=1$  в качестве внешней нагрузки. Эти эпюры представлены на рис. 2.4.

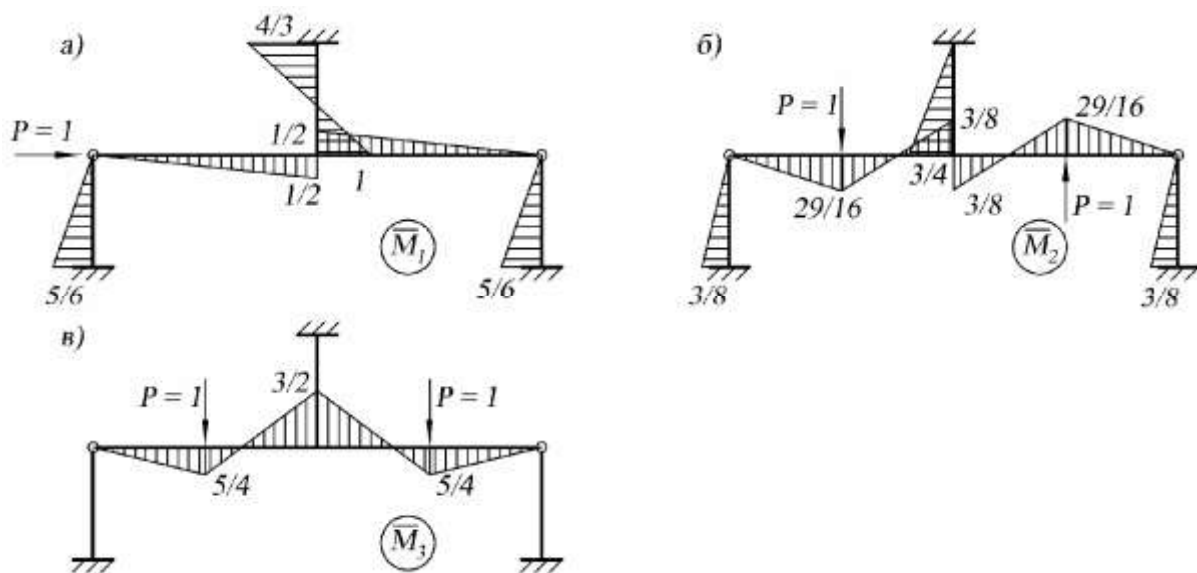


Рисунок 2.4

Определяем коэффициенты векового уравнения:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1^2 = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \left( 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \left( \frac{4}{3} \right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \right) \right] = \frac{40}{9EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{29}{16} + 2 \cdot \frac{4}{2 \cdot 6} \times \left( 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{29}{16} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{16} \right) + \frac{4}{6} \cdot \left( -2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2^2 = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{16} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{29}{16} + 2 \cdot \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 2 \cdot \left( \frac{29}{16} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{3}{8} \right)^2 - 2 \cdot \frac{29}{16} \cdot \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \right] = \frac{55}{6EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_3 = 0;$$

$$\delta_{33} = \bar{M}_3^2 = \frac{1}{2EI} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \left( 2 \cdot \left( \frac{5}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{2}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \right) \right] = \frac{14}{3EI}.$$

Подставляем значения коэффициентов в вековое уравнение:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{40}{9EI} - \frac{1}{2m\omega^2} & \frac{2}{EI} & 0 \\ \frac{2}{EI} & \frac{55}{6EI} - \frac{1}{0,5m\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3EI} - \frac{1}{0,5m\omega^2} \end{vmatrix} = 0;$$

$$D = \left( \frac{14}{3EI} - \frac{1}{0,5m\omega^2} \right) \begin{vmatrix} \frac{40}{9EI} - \frac{1}{2m\omega^2} & \frac{2}{EI} \\ \frac{2}{EI} & \frac{55}{6EI} - \frac{1}{0,5m\omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Решаем уравнение, приравнявая поочередно нулю правый и левый сомножители. Решение уравнения дает три значения частоты:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{9,674m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{3,798m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{EI}{2,331m}}.$$

Дальнейший расчет ведем по основной частоте:

$$\theta = 0,7 \cdot \omega_{\min} = 0,7 \cdot \sqrt{\frac{EI}{9,674m}} = \sqrt{\frac{EI}{19,74m}}.$$

Записываем уравнение движения системы в режиме вынужденных колебаний:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \delta_{11}^* + I_2 \cdot \delta_{12} + I_3 \cdot \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0; \\ I_1 \cdot \delta_{21} + I_2 \cdot \delta_{22}^* + I_3 \cdot \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0; \\ I_1 \cdot \delta_{31} + I_2 \cdot \delta_{32} + I_3 \cdot \delta_{33}^* + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

Главные коэффициенты определяют по формуле:

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m \cdot \omega^2};$$

$$\delta_{11}^* = \frac{40}{9EI} - \frac{19,74\text{m}}{2\text{m} \cdot EI} = -\frac{5,43}{EI}; \quad \delta_{22}^* = \frac{55}{6EI} - \frac{19,74\text{m}}{0,5\text{m} \cdot EI} = -\frac{30,32}{EI};$$

$$\delta_{33}^* = \frac{14}{3EI} - \frac{19,74\text{m}}{0,5\text{m} \cdot EI} = -\frac{34,32}{EI}.$$

Для определения грузовых коэффициентов уравнения, необходимо построить грузовую эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис 2.5, а) и перемножить с соответствующими единичными эпюрами. Для построения грузовой эпюры изгибающих моментов можно воспользоваться методом сил. Эта эпюра представлена на рис. 2.5, б.

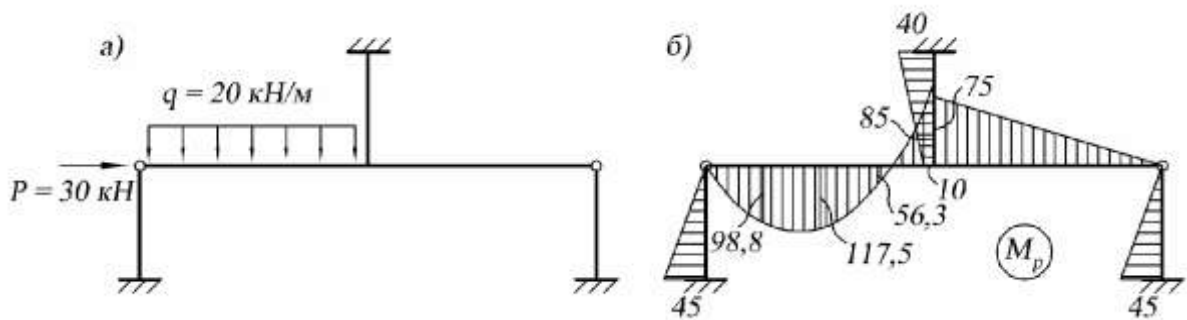


Рисунок 2.5

Определяем грузовые коэффициенты уравнения:

$$\Delta_{1p} = \bar{M}_1 M_p = \frac{1}{EI} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot 45 + \frac{8}{2 \cdot 6} \cdot \left( 4 \cdot 117,5 \cdot \frac{1}{4} - 85 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2}{3} \cdot 75 + \frac{4}{6} \cdot \left( -2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 40 + 10 \cdot \frac{1}{3} - 40 \cdot 1 \right) \right] = \frac{240}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \bar{M}_2 \cdot M_p = \frac{1}{EI} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 45 + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 4 \cdot 98,8 \cdot \frac{29}{32} + 117,5 \cdot \frac{29}{16} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 117,5 \cdot \frac{29}{16} + 4 \cdot 56,3 \cdot \frac{11,5}{16} + 85 \cdot \frac{3}{8} \right) + \frac{4}{6} \cdot \left( 2 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} + 40 \cdot \frac{3}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( -2 \cdot 75 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{29}{16} \cdot 37,5 - \frac{3}{8} \cdot 37,5 + \frac{29}{16} \cdot 75 \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{16} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 37,5 \right] = \frac{512,4}{EI};$$

$$\Delta_{3p} = \bar{M}_3 \cdot M_p = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 4 \cdot 98,8 \cdot \frac{5}{8} + 117,5 \cdot \frac{5}{4} \right) + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 117,5 \cdot \frac{5}{4} - 4 \cdot 117,5 \cdot \frac{1}{8} + \right. \right.$$



$$+ 85 \cdot \frac{3}{2} \Big) + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot \left( 2 \cdot 75 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot 37,5 + \frac{3}{2} \cdot 37,5 - \frac{5}{4} \cdot 37,5 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 37,5 \Big] =$$

$$= \frac{213,3}{EI}.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение:

$$\begin{cases} -\frac{5,43}{EI} \cdot I_1 + \frac{2}{EI} \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + \frac{240}{EI} = 0; \\ \frac{2}{EI} \cdot I_1 - \frac{30,32}{EI} \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + \frac{512,4}{EI} = 0; \\ 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - \frac{34,32}{EI} \cdot I_3 + \frac{213,3}{EI} = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем значения инерционных сил:

$$I_1 = 51,6 \text{ кН}; \quad I_2 = 20,3 \text{ кН}; \quad I_3 = 6,2 \text{ кН};$$

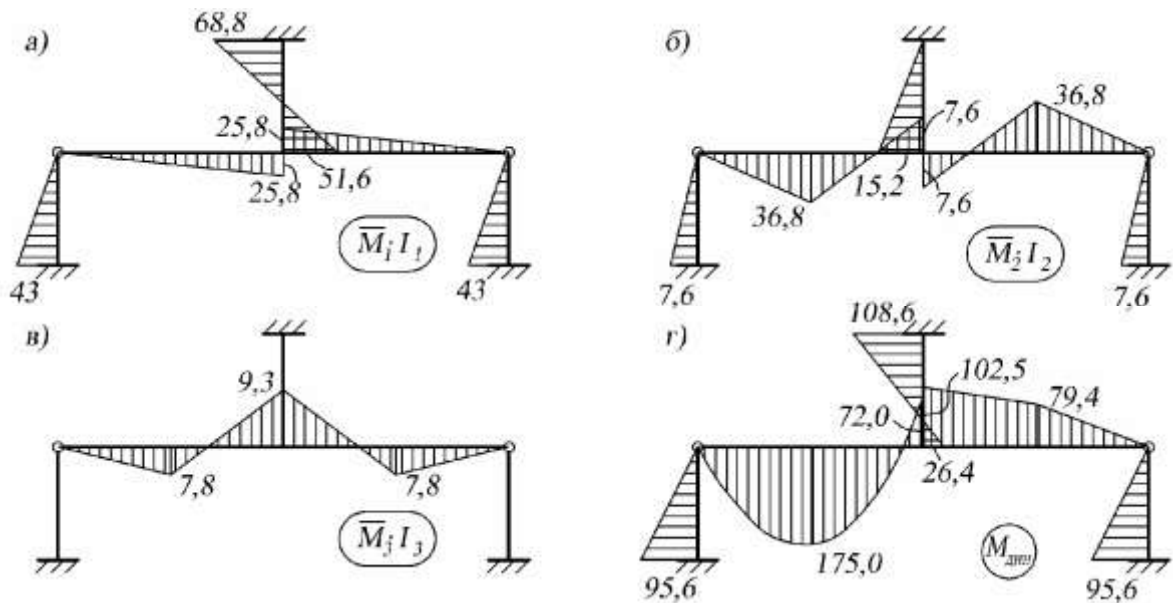


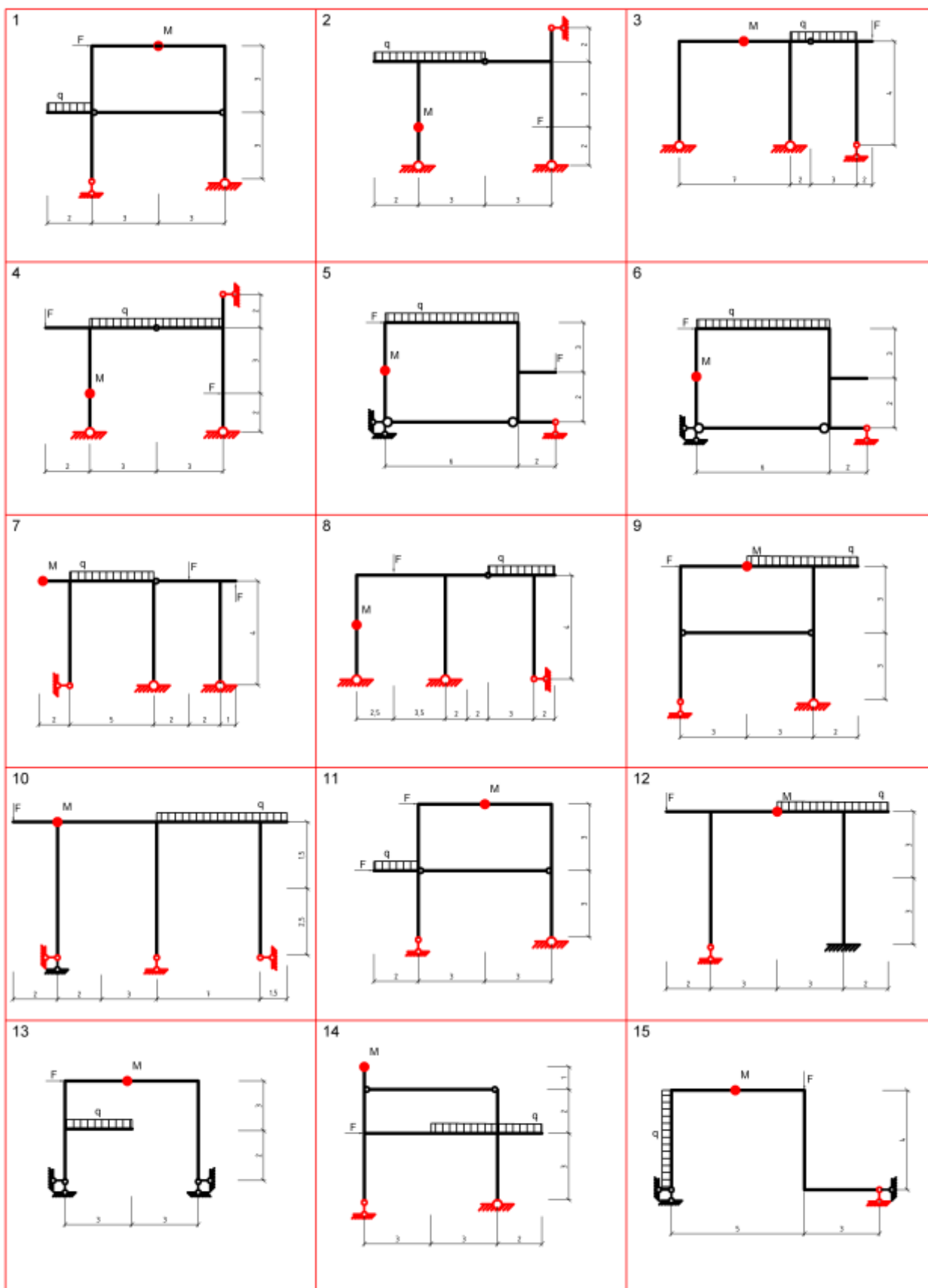
Рисунок 2.6

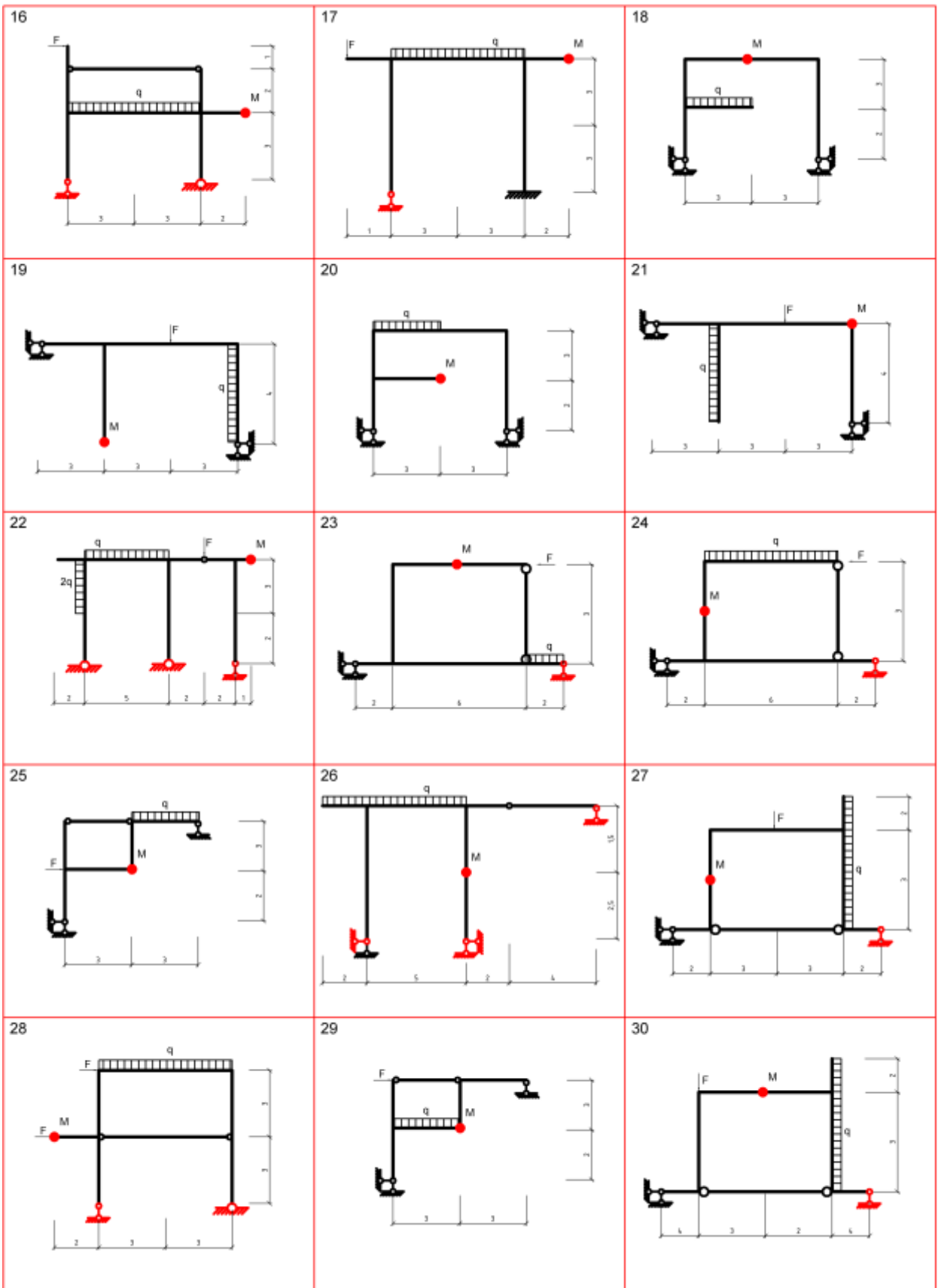
Строим «исправленные» эпюры изгибающих моментов, умножая единичные на соответствующие значения инерционных сил (рис. 2.6, а-в). Окончательную эпюру динамических моментов в раме строим,

суммируя «исправленные» и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 2.6, г):

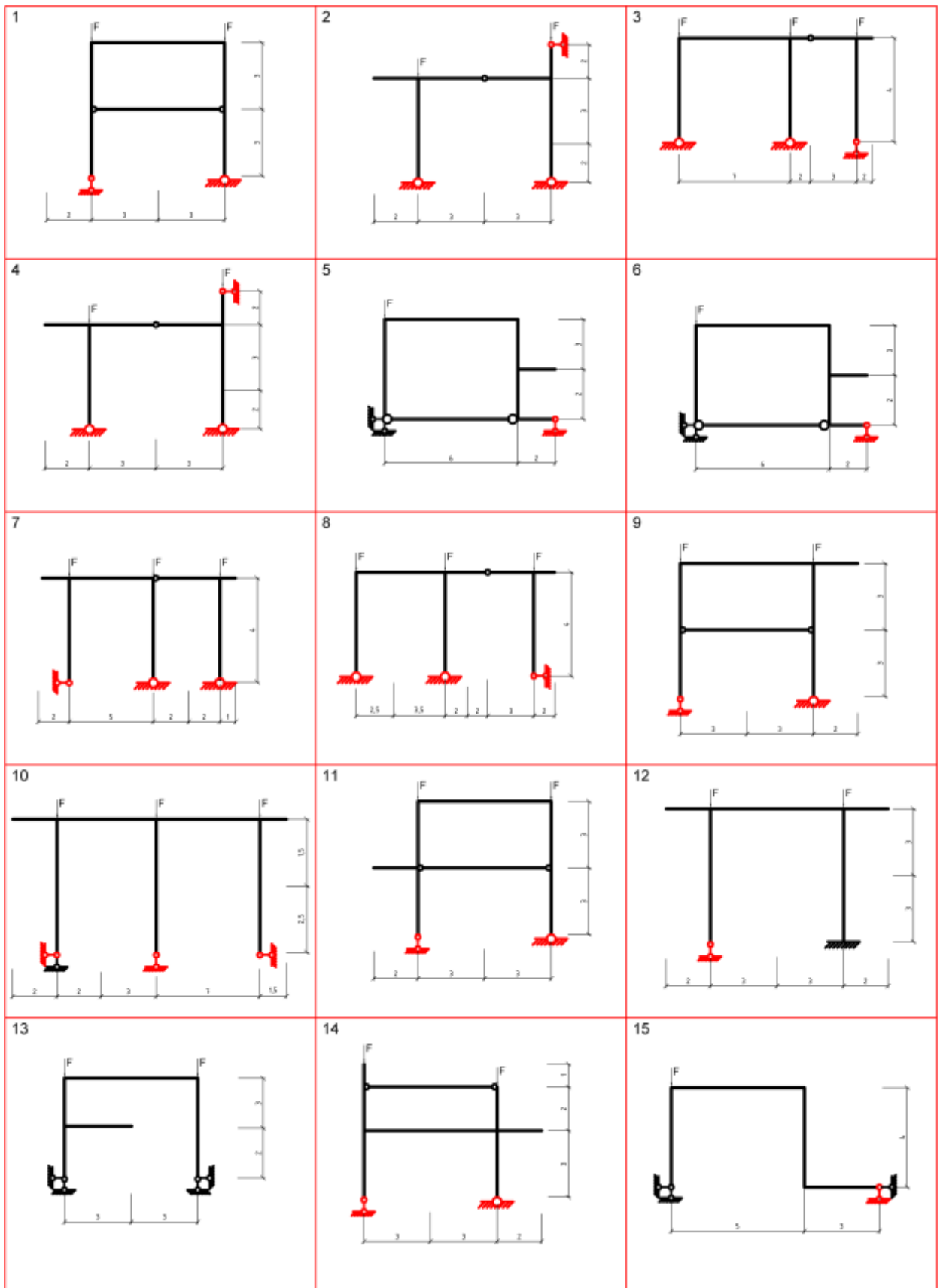
$$M_{\text{дин}} = \bar{M}_1 \cdot I_1 + \bar{M}_2 \cdot I_2 + \bar{M}_3 \cdot I_3 + M_p.$$

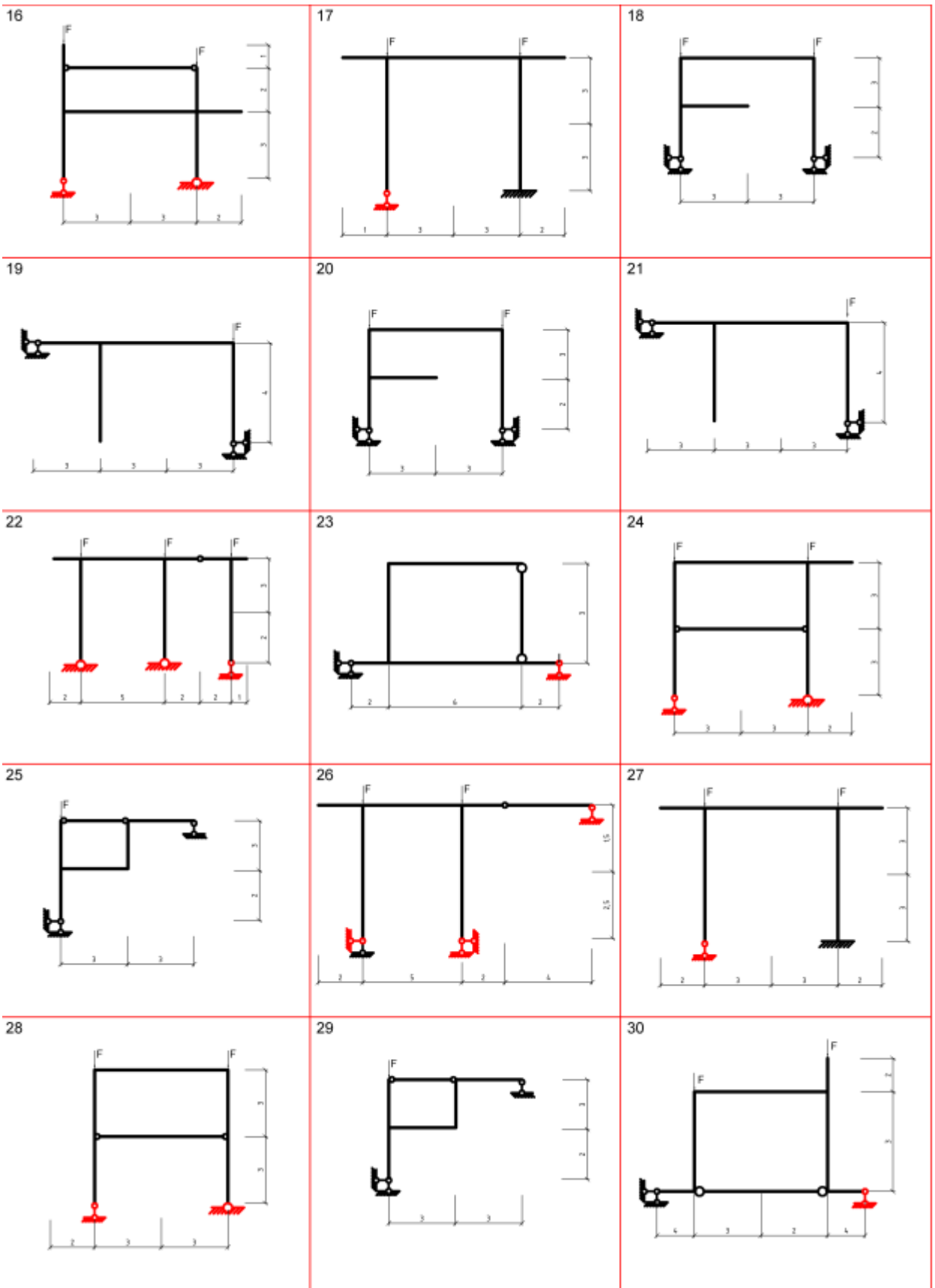
Задания для СРС по разделу «Динамика сооружений»





## Задания для СРС по разделу «Устойчивость сооружений»





### **Литература.**

1. Коробко, В.И. Строительная механика стержневых систем: Учебник [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 2007. - 510 с.

2. Коробко, В.И. Строительная механика: Динамика и устойчивость стержневых систем: Учебник [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 2008. - 400 с.