

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 19.09.2024 09:55:52  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра уникальных зданий и сооружений

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

«18» 09



### Нелинейные задачи строительной механики

Методические указания по выполнению практических работ по  
дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики»  
для студентов специальности 08.05.01

Курск 2024

УДК 624.04

Составитель: А.Г. Колесников

Рецензент

Кандидат технических наук *Е.В. Осовских*

**Нелинейные задачи строительной механики:** методические рекомендации по выполнению практических работ / Юго-Зап. гос. ун-т; А.Г. Колесников. - Курск, 2024. - 31 с. - Библиогр.: С. 31.

В методических указаниях изложены особенности расчета строительных конструкций с учетом геометрической, физической и конструктивной нелинейности работы.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики» для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *18.08.24*. Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд.л. 1,63. Тираж 100 экз. Заказ. *680* Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Задача 1. Прямой пошаговый метод расчета упругопластических систем.....	10
Задача 2. Кинематический метод расчета по предельному состоянию.....	13
Задача 3. Статический метод расчета по предельному состоянию.....	16
Задача 4. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок. Кинематический метод расчета.....	18
Задача 5. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок. Кинематический метод расчета.....	21
Задача 6. Расчет статически неопределимых рам по предельному состоянию статическим методом.....	23
Задача 7. Расчет статически неопределимых рам по предельному состоянию кинематическим методом.....	26
Задача 8. Учет геометрической нелинейности в расчетах конструкций.....	27
Задача 9. Конструктивная нелинейность. расчет систем с односторонними связями.....	30
Библиографический список.....	31

## ВВЕДЕНИЕ

Основная задача строительной механики – создание методов расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, обеспечивающих их достаточную надежность, долговечность и экономичность. В зависимости от принятой расчетной модели конструкции и содержания самого метода основная задача может быть сформулирована по-разному.

Основные свойства конструкции, определяющие ее состояние, можно свести в три группы:

- 1) физические – жесткость и прочность элементов и узлов конструкции;
- 2) геометрические – размеры конструкции, ее отдельных элементов;
- 3) конструктивные – структура конструкции и граничные условия.

В связи с этим в теории расчета конструкций различают следующие виды нелинейности: физическую, геометрическую и конструктивную.

Физическая нелинейность обусловлена нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями  $\sigma = f(\epsilon)$ , заменяющей линейно-упругий закон Гука (см. рис.1, а).

Проявляется физическая нелинейность в следующих случаях:

- при возникновении пластических деформаций (рис. 1, б);
- при криволинейной диаграмме « $\sigma - \epsilon$ » (рис. 1, в);
- при изменении свойств материала в зависимости от режима нагружения.

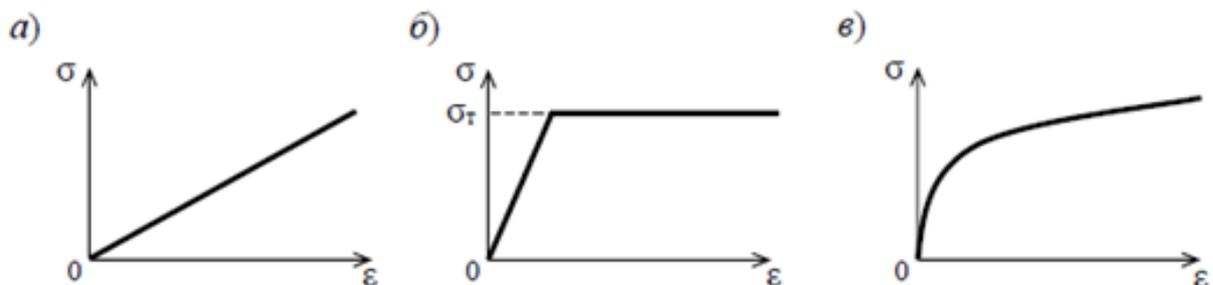


Рис. 1. Диаграммы деформирования материала: а – линейно-упругого; б – идеально упругопластического; в – нелинейно-упругого

Геометрическая нелинейность обусловлена отказом от принципа малости перемещений и необходимостью учитывать влияние изменения формы и размеров конструкции на его напряженно-деформированное состояние. В этом случае расчет конструкции производится по деформированной расчетной схеме, т. е. с учетом перемещений, вызванных действием нагрузки.

Геометрическая нелинейность может проявляться в следующих случаях:

- при изменении положения точек конструкции из-за сравнительно больших перемещений (рис. 2, а);
- продольном и продольно-поперечном изгибе (рис. 2, б);
- изменении положения и направления нагрузки;
- накоплении деформаций в процессе возведения и загрузки сооружения (так называемая генетическая нелинейность).

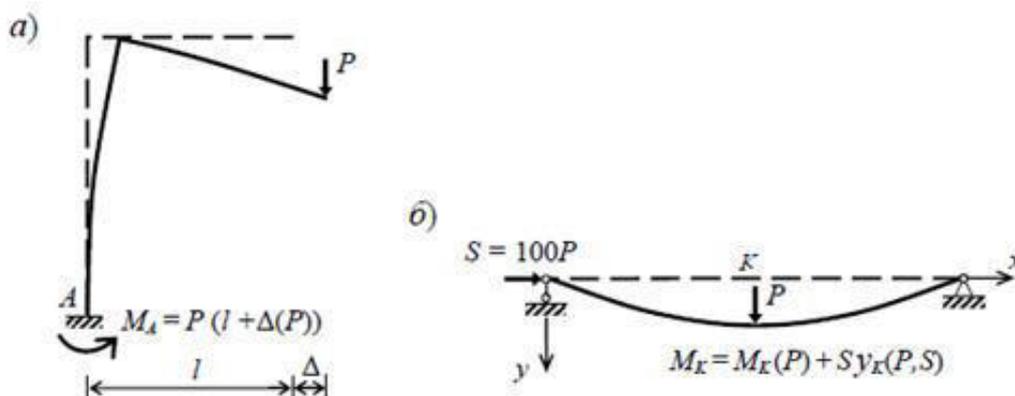


Рис. 2. Геометрически нелинейные системы: а – рама с большими перемещениями; б – продольно-поперечный изгиб балки

Конструктивная нелинейность обусловлена тем, что в процессе деформирования может изменяться расчетная схема конструкции (выключаются или включаются связи, изменяются условия закрепления, выходят из работы или, наоборот, добавляются элементы конструкции и т. д.).

Данная нелинейность обычно возникает вследствие конструктивных особенностей системы и может проявляться в следующих случаях:

- при наличии в конструкции элементов, работающих только на растяжение или только на сжатие, например, в вантовых системах (рис. 3, а);

- при ее разрушении, когда связи и элементы исключаются из работы (рис. 1.3, б);

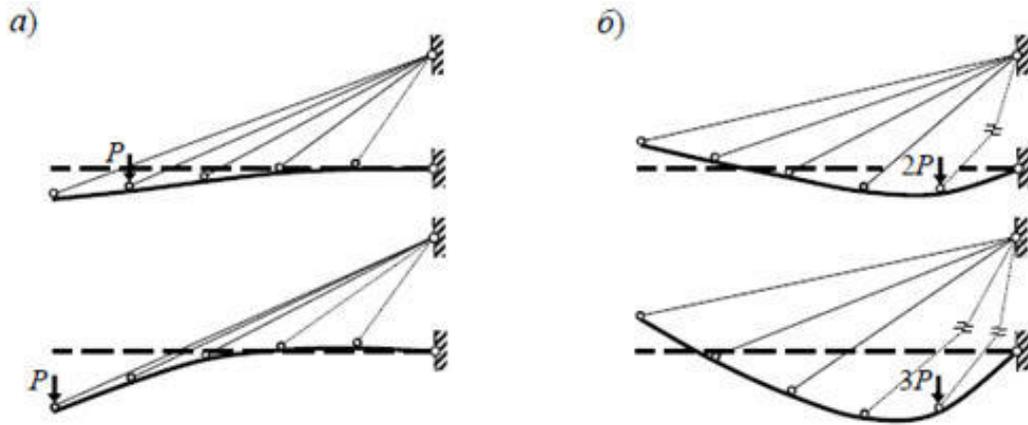


Рис. 3. Вантовая система: а – выключение из работы ненатянутых элементов; б – исключение из конструкции разрушенных элементов

- когда опорные связи допускают отрыв и проскальзывание опирающейся на них конструкции – такого рода связи называются односторонними (рис. 4, а);

- при контактном взаимодействии частей сооружения между собой (в деформационных швах, в трещинах и т. п.) либо с основанием (рис. 4, б);

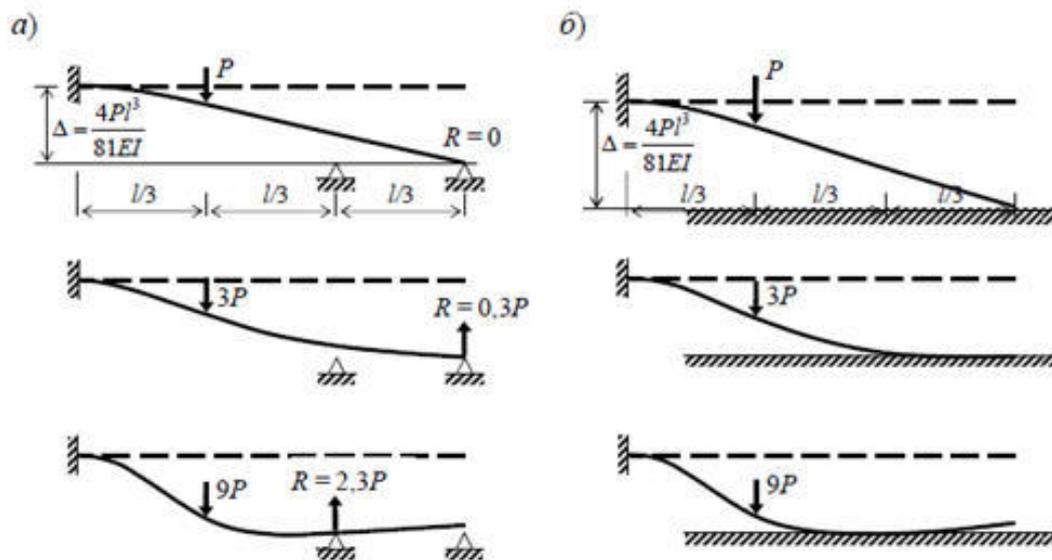


Рис. 4. Балка с односторонними связями: а – дискретные односторонние связи; б – контактное взаимодействие с основанием

- при изменении режимов нагружения и эксплуатации конструкции.

В процессе нагружения конструкции изменение расчетной схемы может быть скачкообразным (см. рис. 4, а) или непрерывным (см. рис. 4, б).

Существенное усложнение теории расчета нелинейных систем обусловлено следующими факторами:

1. Энергия деформации нелинейной системы не является квадратичной формой (поэтому нельзя применять принцип суперпозиций).

2. С достижением определенного уровня напряженного состояния проявляются пластические свойства материала (разные законы нагрузки и разгрузки).

3. Становится существенной нетождественность работы материала при растяжении и сжатии.

В связи с перечисленным, классические теоремы строительной механики – Кастильяно, Бетти, Максвелла, которые выведены для линейно деформируемых систем, здесь неприменимы (табл.1).

Таблица 1.1  
Сопоставление основных теорем строительной механики

Теорема	Для линейных систем	Для нелинейных систем
Кастильяно	$\partial V / \partial P_i = \Delta_i$	$\partial V / \partial P_i = P_i (\partial \Delta_i / \partial P_i)$
Бетти	$\sum P \Delta_{pk} = \sum K \Delta_{kp}$	$\sum P \Delta_{pk}'' + \sum P (\beta_1 \Delta_{pp}' - \beta_4 \Delta_{pp}'') =$ $= \sum K \Delta_{kp}'' + \sum K (\beta_3 \Delta_{kk}' - \beta_2 \Delta_{kk}'')$
Максвелла	$\delta_{pk} = \delta_{kp}$	$\delta_{pk}'' + (\beta_1 \delta_{pp}' - \beta_4 \delta_{pp}'') =$ $= \delta_{kp}'' + (\beta_3 \delta_{kk}' - \beta_2 \delta_{kk}'')$

В зависимости от того, что задано и что определяется, возможны четыре основных постановки нелинейных задач.

1. Прямая задача – заданы конструкция, ее материал и нагрузка, требуется определить напряжения и перемещения. Это классическая постановка задачи по расчету напряженно-деформированного состояния конструкции.

2. Обратная задача – заданы конструкция из данного материала и ее напряженно-деформированное состояние, требуется определить нагрузку, вызвавшую эти напряжения и деформации.

3. Задача синтеза конструкции – заданы напряженно-деформированное состояние, материал конструкции и нагрузка, требуется найти оптимальную форму и размеры конструкции.

В сопротивлении материалов этой постановке соответствует задача о подборе сечений.

4. Задача подбора материала – заданы начальное и деформированное состояние конструкции, действующая нагрузка, требуется подобрать наилучшим образом, подходящий материал для элементов конструкции.

Расчет конструкций в упругом состоянии позволяет лишь определять напряженно-деформированное состояние сооружения от различных видов заданных внешних воздействий. Однако упругий расчет не дает сведений о несущей способности конструкций, т. е. о тех наибольших нагрузках, при которых конструкция разрушается.

Для инженерной практики такие сведения имеют большое значение, поскольку запроектированное сооружение должно удовлетворять нормативным значениям запаса прочности.

Разрушение же большинства конструкций связано с появлением пластических деформаций, следовательно, при их расчете необходимо учесть не только упругие, но и пластические свойства материала. Отсюда и возникает понятие упругопластического расчета.

Следует отметить, что исчерпание несущей способности конструкций может происходить и в упругом их состоянии. Это связано обычно с потерей устойчивости сооружения. Например, металлические фермы чаще всего разрушаются от потери устойчивости гибких стержней. Однако исчерпание несущей способности таких конструкций, как железобетонные рамы, балки и им подобные, происходит с возникновением и нарастанием именно пластических деформаций.

Пластические свойства материала могут быть описаны с помощью экспериментальных данных, полученных при испытании стандартных образцов. Часто истинные диаграммы деформирования имеют довольно сложный вид и трудно поддаются аналитическому

описанию, поэтому для построения методов расчета, учитывающих пластические свойства материала, прибегают к некоторым упрощениям. Для этого пользуются идеализированными (условными) диаграммами, которые наиболее ярко показывают пластические свойства материала.

Диаграмма идеально упругопластического материала, называемая также диаграммой Прандтля, основана на предположении, что предел пропорциональности совпадает с пределом текучести, а площадка текучести имеет неограниченную протяженность.

Начальный участок диаграммы соответствует упругой стадии работы с модулем упругости  $E$  и с верхней границей – пределом текучести  $\sigma_T$ . Диаграммой Прандтля приближенно заменяют действительные диаграммы работы таких материалов, как строительная сталь (рис. 5, а), бетон (рис. 5, б) и др. (на рисунках пунктиром показаны действительные диаграммы деформирования).

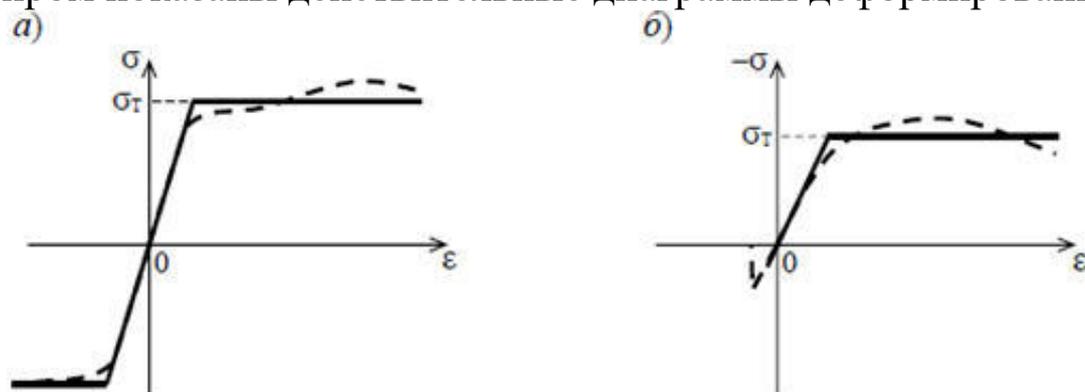


Рис. 5. Диаграмма идеально упругопластического материала:  
а – для строительной стали; б – для бетона

Однако при такой замене следует помнить о степени неточности, которую эта диаграмма вносит в расчет. Поэтому при разработке практических методов расчета систем, предполагающих идеально упругопластическую работу материала, часто вводят дальнейшие упрощения, дающие тот же порядок погрешности, что и введение диаграммы Прандтля. Такой расчет принято называть расчетом по предельному состоянию или расчетом по предельному равновесию (а кроме того, расчетом по несущей способности, расчетом по предельным или разрушающим нагрузкам).

Статически неопределимые системы из идеально упругопластического материала в начальный период нагружения работают, как упругие. После появления текучести в одном, наиболее напряженном, элементе степень статической неопределимости системы уменьшается на единицу. При дальнейшем пропорциональном увеличении нагрузки усилие в элементе, достигшем состояния текучести, остается равным своему предельному значению, а усилия в других элементах продолжают увеличиваться. При достижении состояния текучести во втором и последующих элементах степень статической неопределимости каждый раз уменьшается на единицу, пока система не станет статически определимой, а затем, при достижении предельного состояния еще в одном элементе, наконец, не обратится в механизм.

Таким образом, в  $n$  раз статически неопределимой системе до того, как она превратится в механизм, состояние текучести может быть достигнуто в  $n + 1$  элементе (или сечении). Это будет означать исчерпание ее несущей способности. В таком состоянии, называемом состоянием предельного равновесия, нагрузка еще находится в равновесии с внутренними силами, но дальнейшее увеличение нагрузки уже невозможно. Кроме того, в состоянии предельного равновесия перемещения системы становятся неопределенными по величине.

Нагрузку, отвечающую моменту исчерпания несущей способности конструкции, называют предельной. Другими словами, предельной нагрузкой называется такая нагрузка, которую конструкция может выдержать без разрушения ее основных элементов, т. е. предельная нагрузка является мерой несущей способности конструкции. Таким образом, целью расчета по предельному состоянию является определение механизма разрушения конструкции, возникающего при достижении нагрузкой предельных значений.

### **Задача 1. Прямой пошаговый метод расчета упругопластических систем**

Общая картина поведения статически неопределимой упругопластической системы в течение всего процесса нагружения может быть получена серией расчетов упругих систем,

получающихся из заданной системы путем последовательного исключения элементов, перешедших в состояние текучести.

Рассмотрим систему, состоящую из четырех одинаковых по длине  $l$  и сечению  $A$  стержней из идеально упругопластического материала, на которых подвешена абсолютно жесткая и прочная балка. Вся конструкция нагружена силой  $F$ , находящейся под вторым стержнем (рис. 6). Стержневая система является дважды статически неопределимой, следовательно, исчерпание ее несущей способности произойдет по достижении состояния текучести в трех элементах-стержнях.

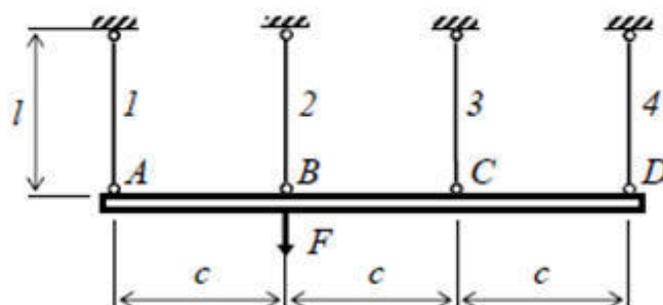


Рис. 6. Стержневая система, работающая на растяжение-сжатие

Представим процесс нагружения состоящим из несколько шагов (стадий). На первой стадии система работает как полностью упругая (рис. 7, а) и расчет ее дает следующие усилия в стержнях:

$$N_1 = 0,4\Delta F_1; N_2 = 0,3\Delta F_1; N_3 = 0,2\Delta F_1; N_4 = 0,1\Delta F_1. \quad (1)$$

Приравняв усилие в первом элементе  $N_1$  (как наибольшее) предельному значению  $N_T = \sigma_T A$ , определим нагрузку  $\Delta F_1 = N_T/0,4 = 2,5N_T$ , при которой в данном элементе достигается состояние текучести ( $N_1 = 0,4\Delta F_1 = N_T$ ), в остальных же стержнях усилия будут (рис. 7, б):

$$N_2 = 0,3\Delta F_1 = 0,75N_T; N_3 = 0,2\Delta F_1 = 0,5N_T; N_4 = 0,1\Delta F_1 = 0,25N_T.$$

Далее, на второй стадии, нагрузка может быть увеличена на величину шага  $\Delta F_2$ , причем усилие в первом стержне будет оставаться равным  $N_T$ . Таким образом, на шаг нагрузки  $\Delta F_2$  здесь будет работать система с тремя стержнями, т. е. один раз статически неопределимая (рис. 7, в).

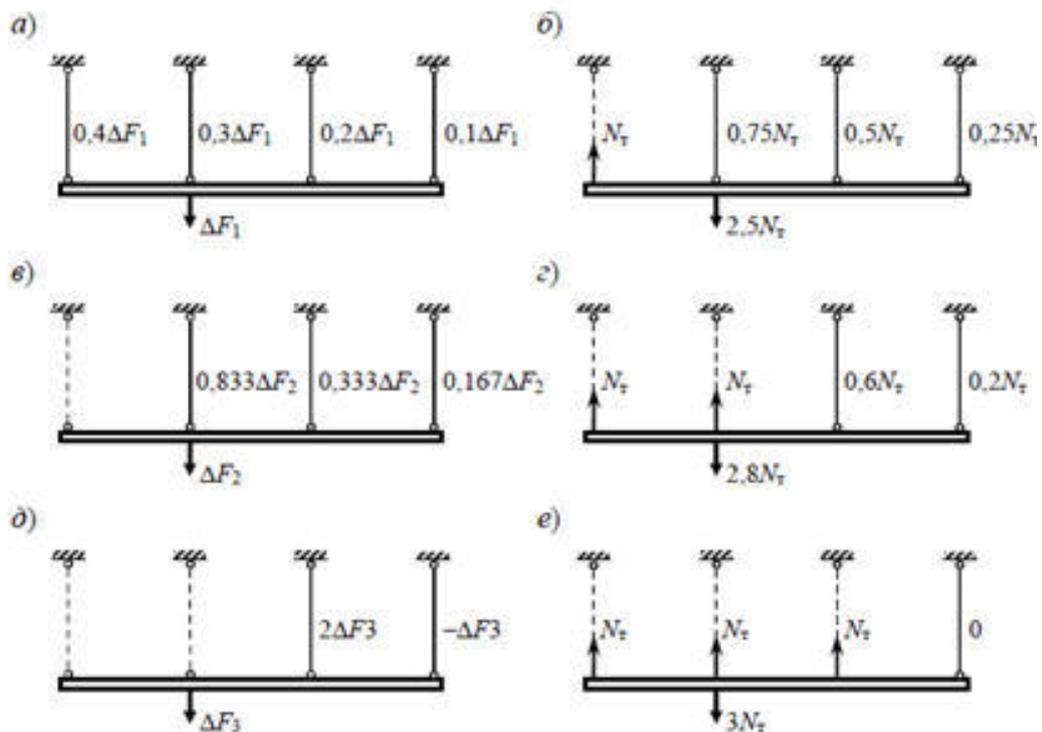


Рис. 7. Стадии работы упругопластической стержневой системы: а, б – первая стадия; в, г – вторая стадия; д, е – третья стадия

Расчет такой системы дает:

$$N_2 = 0,833\Delta F_2; N_3 = 0,333\Delta F_2; N_4 = -0,167\Delta F_2.$$

Состояние текучести во втором элементе наступит при достижении величины  $N_T$ :  $N_2 = 0,833\Delta F_2 + 0,75N_T = N_T$ , отсюда  $\Delta F_2 = (N_T - 0,75N_T) / 0,833 = 0,3N_T$ . В третьем и четвертом стержнях при этом усилия станут следующими (рис. 7, г):

$$N_3 = 0,5N_T + 0,333\Delta F_2 = 0,6N_T; N_4 = 0,25N_T - 0,167\Delta F_2 = 0,2N_T.$$

В третьей стадии стержневая система будет работать уже как статически определяемая (рис. 7, д). Приращение нагрузки  $\Delta F_3$  вызывает усилия  $N_3 = 2,0\Delta F_3$ ;  $N_4 = -1,0\Delta F_3$ .

Предельное равновесие всей системы наступает тогда, когда значение  $N_T$  достигается в третьем элементе:  $N_3 = 2\Delta F_3 + 0,6N_T = N_T$ , отсюда  $\Delta F_3 = (N_T - 0,6N_T) / 2 = 0,2N_T$ . В этом состоянии усилия в первых трех стержнях равны предельному значению  $N_T$  (рис. 7, е), а в четвертом стержне:

$$N_4 = 0,2N_T - 1,0\Delta F_3 = 0.$$

Величина предельной нагрузки, т. е. несущая способность системы,

$$F_{\text{пр}} = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 = 2,5N_T + 0,3N_T + 0,2N_T = 3N_T.$$

Определим также перемещение  $f_B$  (под силой  $F$ ) в конце каждой стадии работы упругопластической системы. При достижении состояния текучести в первом стержне и при  $N_2 = 0,75N_T$  (рис. 8, а) перемещение

$$f_B = N_2 \times l / EA = 0,75 N_T \times l / EA. \quad (2)$$

При появлении текучести во втором стержне, т. е. при  $N_2 = N_T$  (рис. 7, б):

$$f_B = N_2 \times l / EA = N_T \times l / EA. \quad (3)$$

Наконец, при появлении текучести в третьем стержне (в этом случае  $N_3 = N_T, N_4 = 0$  – рис. 7, в) перемещение будет

$$f_B = 2f_C = 2N_3 \times l / EA = 2N_T \times l / EA. \quad (4)$$

Зависимость перемещения  $f_B$  от нагружения силой  $F$  показана на рис. 7, г. Она представляет собой ломаную линию, которая после достижения системой предельного равновесия становится горизонтальной.

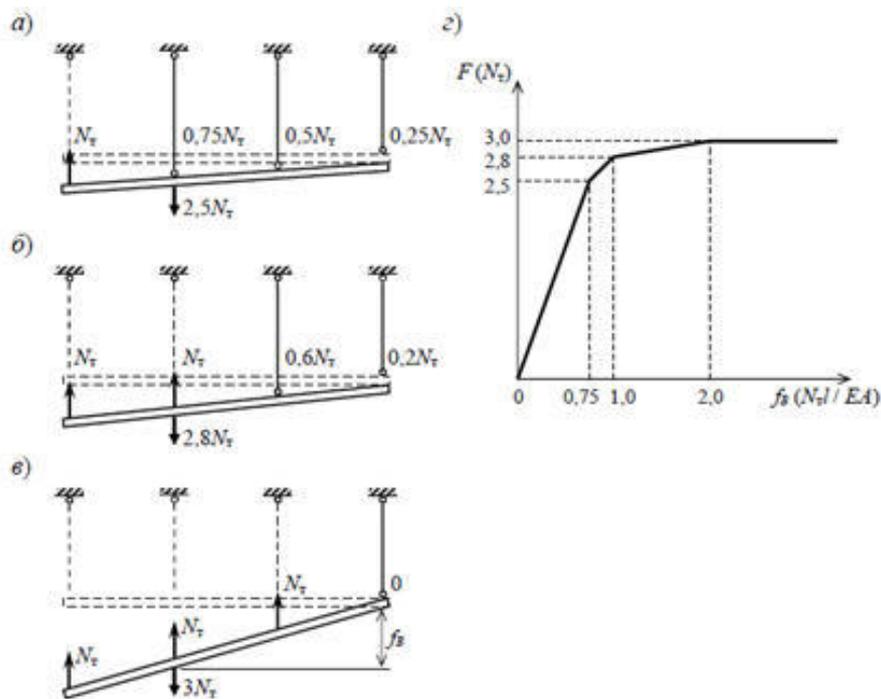


Рис. 7. Перемещения в упругопластической стержневой системе: а – в конце первой стадии; б – в конце второй стадии; в – в конце третьей стадии; г – график зависимости  $f_B$  от  $F$

## Задача 2. Кинематический метод расчета по предельному состоянию

Если нет необходимости отслеживать поведение конструкции

в процессе нагружения, то нахождение предельной нагрузки для представляет собой более простую задачу. Упрощение расчета обусловлено тем, что в отдельных элементах конструкции внутренние усилия еще до окончательного разрушения принимают постоянные предельные значения, не зависящие от ее последующей работы.

Применительно к задачам о несущей способности конструкций разработаны кинематический и статический методы расчета по предельному состоянию.

В основе кинематического метода лежит следующая теорема предельного равновесия: предельная нагрузка на конструкцию не может быть больше той, которая определена из рассмотрения кинематически допустимого распределения перемещений (кинематического механизма). Кинематическая теорема определяет предельную нагрузку как наименьшую из всех нагрузок, обращающих прежде жесткую и геометрически неизменяемую конструкцию в механизм, т. е. дает верхнюю оценку истинной предельной нагрузки ( $F_{пр} \leq F_{кин}$ ).

При расчете по кинематическому методу предполагается, что в состоянии текучести переходит столько элементов системы, сколько необходимо для превращения последней в механизм, или кинематическую цепь. Это превращение может происходить поразному, поэтому необходимо выявить все кинематически возможные схемы разрушения системы. Каждому варианту разрушения будет отвечать определенное значение предельной нагрузки, уравнивающей внутренние силы в элементах конструкции, в том числе перешедших в состояние текучести. Нагрузка при этом считается заданной по направлению и выражена через один параметр, определению подлежит лишь числовое значение этого параметра.

Из всех полученных для каждого варианта разрушения значений предельной нагрузки истинным будет наименьшее значение.

Рассмотрим возможные схемы разрушения для системы, показанной на рис. 6. Будем считать, что элементы системы одинаково работают на растяжение и на сжатие, упругие

деформации стержней незначительны, и ими можно пренебречь по сравнению с деформациями текучести.

Для первой возможной схемы разрушения (рис. 8, а) предельное значение нагрузки может быть получено из следующего уравнения равновесия:

$$\Sigma M_A = 0: F_{\text{пр}} \times c - N_T (c + 2c + 3c) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 6N_T.$$

Для второй схемы разрушения (рис. 8, б) используем уравнение:

$$\Sigma M_B = 0: F_{\text{пр}} \times 0 - N_T (c + c + 2c) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = \infty.$$

Для третьей схемы разрушения (рис. 8, в) получаем:

$$\Sigma M_C = 0: F_{\text{пр}} \times c - N_T (2c + c + c) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 4N_T.$$

Для четвертой схемы разрушения (рис. 8, г):

$$\Sigma M_D = 0: F_{\text{пр}} \times 2c - N_T (3c + 2c + c) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 3N_T.$$

Минимальное значение  $F_{\text{пр}} = 3N_T$  получается, когда в состоянии текучести находятся первый, второй и третий стержни. Этот результат совпадает с полученным прямым методом.

Вместо составления уравнений равновесия для определения разрушающих нагрузок можно воспользоваться также условием равенства нулю работы всех сил на соответствующих перемещениях системы. Причем работа предельных усилий  $N_T$  в стержнях считается отрицательной, так как направления  $N_T$  противоположны перемещениям системы.

Для первой схемы разрушения (см. рис. 8, а):

$$F_{\text{пр}} \times \Delta - N_T (\Delta + 2\Delta + 3\Delta) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 6N_T.$$

Для второй схемы разрушения (см. рис. 8, б)

$$F_{\text{пр}} \times 0 - N_T (\Delta + \Delta + 2\Delta) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = \infty.$$

Для третьей схемы разрушения (см. рис. 8, в)

$$F_{\text{пр}} \times \Delta - N_T (2\Delta + \Delta + \Delta) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 4N_T.$$

Для четвертой схемы разрушения (см. рис. 8, г)

$$F_{\text{пр}} \times 2\Delta - N_T (3\Delta + 2\Delta + \Delta) = 0, \text{ отсюда } F_{\text{пр}} = 3N_T.$$

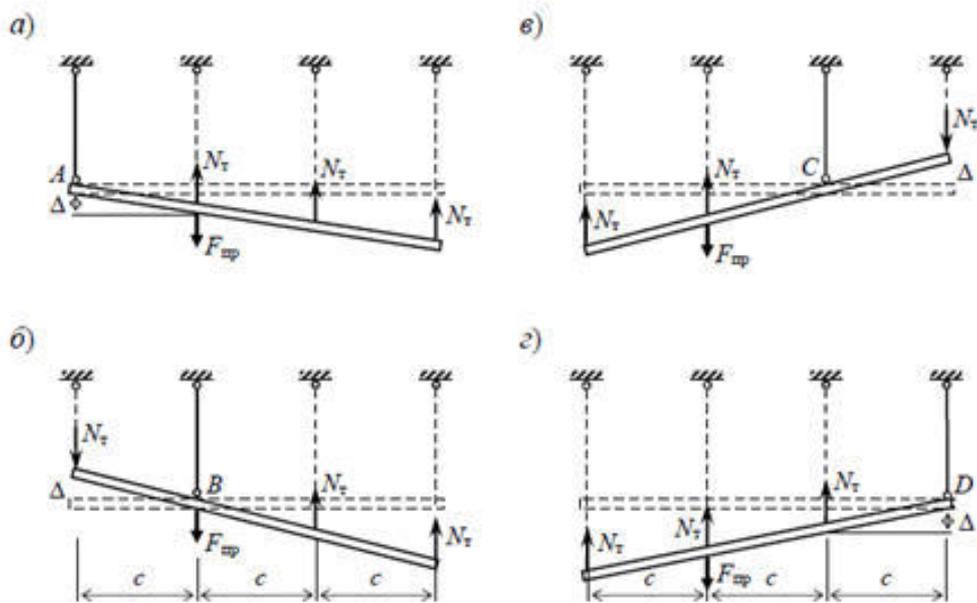


Рис. 8. Кинематически возможные схемы разрушения стержневой системы: а – первая схема; б – вторая схема; в – третья схема; г – четвертая схема.

### Задача 3. Статический метод расчета по предельному состоянию

Другой способ нахождения предельной нагрузки носит название статического метода. В его основе лежит следующее утверждение: предельная нагрузка не может быть ниже той, которую может уравновесить статически допустимое распределение внутренних сил (статическая теорема). Таким образом, предельная нагрузка определяется как наибольшая из всех внешних нагрузок, при которых рассматриваемая система находится в равновесии ( $F_{пр} \geq F_{стат}$ ).

При расчете по статическому методу исходят из различных возможных распределений внутренних сил в системе, где в необходимом числе элементов усилия равны предельным значениям, а в остальных элементах должны быть меньше предельных значений. Для каждого такого распределения из условий равновесия определяется величина нагрузки, наибольшая из этих величин принимается равной предельной нагрузке.

Рассчитаем статическим методом систему, изображенную на рис. 6. Поскольку система дважды статически неопределима, будем задаваться такими распределениями усилий, где три элемента находятся в состоянии текучести, а усилие в четвертом должно быть

меньше предельного. Усилие в этом элементе определим из условия  $\Sigma M_B = 0$ .

Здесь возможны следующие варианты распределения усилий (рис. 9):

1.  $N_1 = N_2 = N_3 = N_T$ ,  $|N_4| < N_T$ ;  $\Sigma M_B = 0 \rightarrow N_4 = 0$ .
2.  $N_1 = N_2 = N_4 = N_T$ ,  $|N_3| < N_T$ ;  $\Sigma M_B = 0 \rightarrow N_3 = -N_T$ .
3.  $N_1 = N_3 = N_4 = N_T$ ,  $|N_2| < N_T$ ;  $\Sigma M_B = 0 \rightarrow N_2 = \infty > N_T$ .
4.  $N_2 = N_3 = N_4 = N_T$ ,  $|N_1| < N_T$ ;  $\Sigma M_B = 0 \rightarrow N_1 = 3N_T > N_T$ .

Таким образом, варианты 3 и 4 отпадают, так как усилия в них получаются большими  $N_T$ . Остаются варианты 1 и 2 (последний возможен при  $|N_3| \leq N_T$ ), предельную нагрузку для них определяем из условия равновесия  $\Sigma Y = 0$ :

1.  $F_{пр} = N_T + N_T + N_T + 0 = 3N_T$ .
2.  $F_{пр} = N_T + N_T - N_T + N_T = 2N_T$ .

Истинным состоянием предельного равновесия будет то, при котором нагрузка достигает максимального значения. Этому отвечает распределение предельных усилий по первому варианту  $F_{пр} = 3N_T$ . Этот результат совпадает с тем, что дают кинематический и прямой методы.

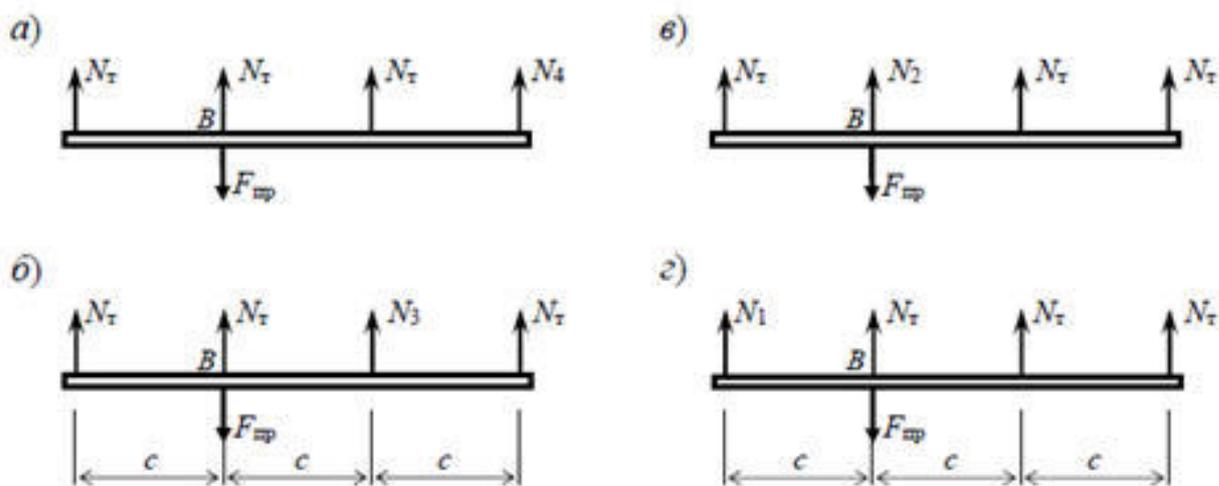


Рис. 9. Статически возможные распределения усилий: а – первый вариант; б – второй вариант; в – третий вариант; г – четвертый вариант

#### **Задача 4. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок. Кинематический метод расчета**

Кинематический и статический методы могут быть применены к расчету неразрезных балок по стадии предельного равновесия.

В основе кинематического метода – рассмотрение возможных схем разрушения балки при возникновении необходимого количества шарниров текучести. В отличие от идеального шарнира, соединяющего отдельные элементы конструкции, пластический шарнир имеет некоторые особенности.

Во-первых, в нем действует особая, «флажковая», эпюра напряжений, от которой возникает изгибающий момент, равный предельному моменту  $M_T = \sigma_T W_{пл}$ .

Во-вторых, он является односторонним, так как раскрывается при нагрузке в сторону эпюры моментов (и закрывается при разгрузке), при этом последовательно расположенные шарниры обязательно должны раскрываться в разные стороны.

Статический метод, основанный на отыскании наиболее выгодного распределения внутренних сил в балке, получил меньшее распространение. Заметим, однако, что наиболее полное представление о величине предельной нагрузки дает двухсторонняя оценка при одновременном применении статического и кинематического методов.

Особенность методов предельного равновесия применительно к изгибаемым конструкциям состоит в том, что для отыскания предельной нагрузки недостаточно располагать сведениями о размерах, физических свойствах материала конструкции и типах нагрузок. Необходимо еще заранее знать вид механизма разрушения: конструкция (или ее часть) должна стать геометрически либо мгновенно изменяемой – если используется кинематический метод, или знать характер распределения внутренних усилий – если применяется статический метод.

Предполагаемый механизм разрушения, образованный пластическими шарнирами и жесткими дисками, может быть назначен на основании экспериментов; также широко используются различные аналогии и привлекается инженерная интуиция.

Пластические шарниры появляются в первую очередь в сечениях, где действуют наибольшие значения изгибающих

моментов, а затем в сечениях, где изгибающие моменты меньше по величине.

Обычно для того чтобы  $n$  раз статически неопределимая система превратилась в механизм, необходимо ввести  $(n + 1)$  пластических шарниров. Такой механизм разрушения называется полным пластическим механизмом. Механизм, содержащий более  $(n+1)$  пластических шарниров, называется избыточным пластическим механизмом. Если же число шарниров текучести меньше чем  $(n+1)$ , то имеет место частный (локальный) пластический механизм. В последнем случае разрушение затрагивает не всю конструкцию, а только часть ее.

Рассмотрим балку (рис. 10, а), для которой предельным состоянием будет являться такое, когда в пределах одного, самого «нагруженного», пролета возникают три пластических шарнира, раскрывающихся последовательно в разные стороны: два из них возникают на опорах, третий – под сосредоточенной силой. Таким образом, имеем случай частного пластического механизма.

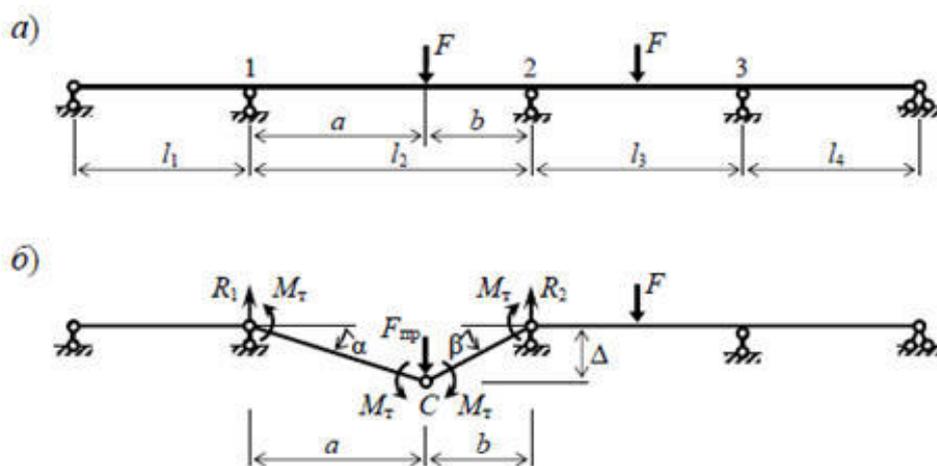


Рис. 10. Расчет неразрезной балки кинематическим методом:  
а – расчетная схема балки; б – механизм разрушения

Определим несущую способность неразрезной балки кинематическим методом. Для определения величины предельной нагрузки составим следующие уравнения равновесия для балки в предельном состоянии (рис. 10, б):

$$\sum M_2^{лев} = 0; F_{пр}b - R_1(a + b) = 0; R_1 = \frac{F_{пр}b}{(a+b)}. \quad (5)$$

$$\sum M_c^{\text{лев}} = 0; 2M_T - R_1 a = 0 \text{ или } 2M_T = \frac{F_{\text{пр}} ab}{(a+b)}. \quad (6)$$

Отсюда

$$F_{\text{пр}} = \frac{2M_T(a+b)}{ab}. \quad (7)$$

Очень часто, особенно для сложных систем, вместо составления уравнений равновесия проще определить предельную нагрузку из условия равенства нулю работы всех сил на перемещениях системы. При этом работа внешних сил равна произведению величин сил на их перемещения. Работа предельных моментов в шарнирах текучести равна произведениям их значений на углы поворота в шарнирах (как правило, эта работа отрицательна, так как направления моментов противоположны углам раскрытия шарниров).

В итоге получим (см. рис. 10, б):

$$F_{\text{пр}} \Delta - M_T(2\alpha + 2\beta) = 0; \quad (8)$$

$$F_{\text{пр}} = 2M_T(\alpha + \beta)/\Delta, \text{ где } \alpha = \Delta/a; \beta = \Delta/b. \quad (9)$$

Отсюда

$$F_{\text{пр}} = \frac{2M_T(\frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta}{b})}{\Delta} = 2M_T \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{2M_T(a+b)}{ab}.$$

Сложим эпюру моментов в основной системе от заданной нагрузки с эпюрой от лишнего неизвестного  $M_1$  (рис. 11). Приравняем значения моментов в сечениях, где возможно возникновение пластических шарниров, предельному моменту:

$$M_1 = \frac{q_{\text{пр}} x(l-x)}{2} - \frac{M_1 x}{l} = M_T. \quad (10)$$

Или

$$\frac{q_{\text{пр}} x(l-x)}{2} = \frac{M_T(l+x)}{l}. \quad (11)$$

Отсюда

$$q_{\text{пр}} = \frac{2M_T(l+x)}{lx(l-x)} = 11,565 \frac{M_T}{l^2}.$$

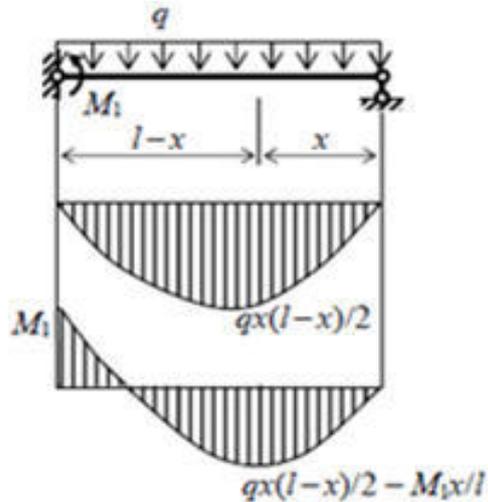


Рис. 11. Расчет статически неопределимой балки статическим методом

### Задача 5. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок. Кинематический метод расчета

Применим к той же балке статический метод определения предельной нагрузки. Примем за основную систему разрезную балку с шарнирами на опорах (рис. 12, а). Эпюры изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки и от лишних неизвестных (опорных моментов) показаны на рис. 12, б; результирующая эпюра моментов – на рис. 12, в.

Наиболее невыгодным будет такое распределение внутренних сил в балке, при котором значения опорных моментов  $M_1$  и  $M_2$  равны значению момента под нагрузкой (см. рис. 12, в):

$$M_1 = M_2 = \frac{Fab}{(a+b)} - \frac{M_1b}{(a+b)} - \frac{M_2a}{(a+b)}. \quad (12)$$

Приравняв эти моменты предельному значению  $M_T$ , получим:

$$M_T = \frac{F_{пр}ab}{(a+b)} - \frac{M_Tb}{(a+b)} - \frac{M_Ta}{(a+b)}. \quad (13)$$

Отсюда

$$F_{пр}ab = M_Ta + M_Tb + M_T(a+b); F_{пр} = \frac{2M_T(a+b)}{ab}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай загрузки статически неопределимой балки распределенной нагрузкой (рис. 13). Заранее не зная, где образуется второй шарнир текучести в пролете, обозначим

расстояние до него от правой опоры через параметр  $x$ . Зададимся вертикальным перемещением данного шарнира –  $\Delta$ , тогда углы раскрытия шарнира  $\alpha = \Delta/(l - x)$ ;  $\beta = \Delta/x$ .

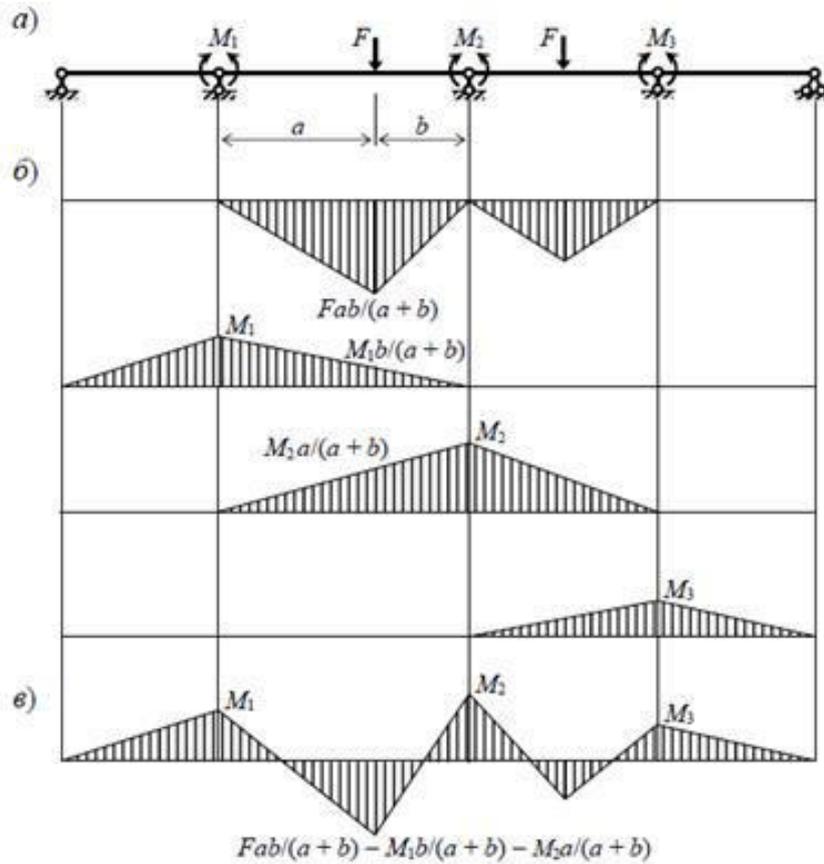


Рис. 12. Расчет неразрезной балки статическим методом:  
 а – основная система; б – эпюры в основной системе; в –  
 результирующая эпюра

Работа равномерно распределенной нагрузки будет выражаться произведением ее интенсивности на площадь треугольника, образованного ломаной осью балки и ее первоначальным положением. Сумма работ внешней нагрузки и предельных моментов на перемещениях системы должна равняться нулю, как во всяком состоянии равновесия. Таким образом, получаем

$$q_{\text{пр}} \frac{l\Delta}{2} - M_{\text{т}} \left( 2 \frac{\Delta}{(l-x)} + \frac{\Delta}{x} \right) = 0, \text{ откуда } q_{\text{пр}} = \frac{2M_{\text{т}}(l+x)}{lx(l-x)}.$$

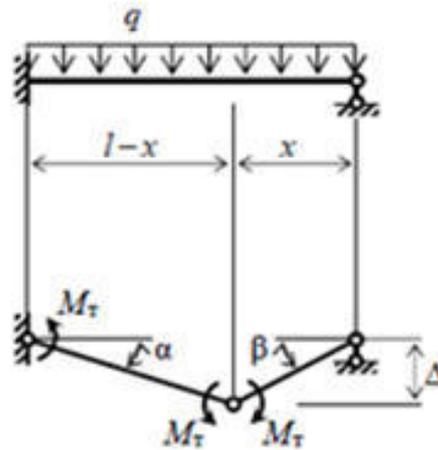


Рис. 13. Расчет статически неопределимой балки кинематическим методом

Найдем такое положение шарнира текучести в пролете, чтобы  $q_{\text{пр}}$  было минимальным. Для этого следует приравнять производную  $dq_{\text{пр}}/dx$  нулю. Получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2lx - l^2 = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (15)$$

Откуда  $x = 0,414 l$ .

Подставив это значение  $x$  в выражение предельной нагрузки, получим:

$$q_{\text{пр}} = \frac{2M_T(l+0.414l)}{l \times 0.414l(l-0.414l)} = 1,656 \frac{M_T}{l^2}.$$

#### Задача 6. Расчет статически неопределимых рам по предельному состоянию статическим методом

Рассмотрим статически неопределимую раму ( $n=3$ ), нагруженную вертикальной и горизонтальной силами (рис.14, а).

Поскольку с первого взгляда неясно, где появятся пластические шарниры, предварительно выполним расчет рамы в упругой стадии. По полученной из упругого расчета эпюре изгибающих моментов (рис.14, б) можно предположить, что пластические шарниры могут возникнуть в первую очередь в сечениях 1, 3, 4 и 5, а затем лишь в сечении 2.

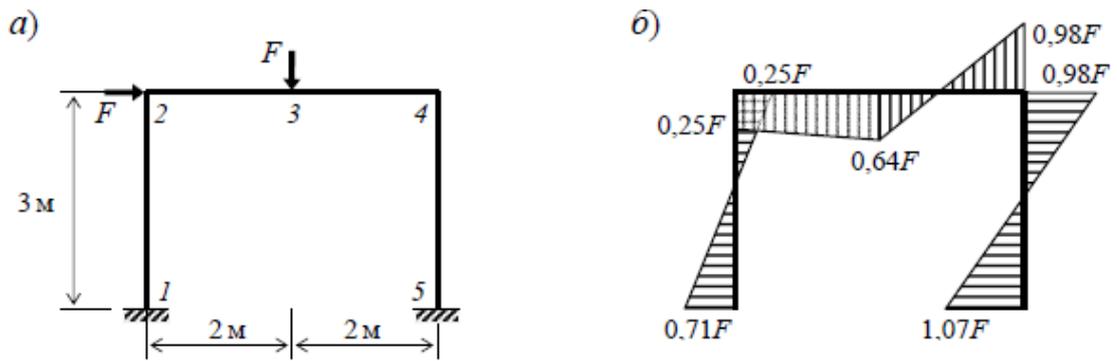


Рис. 14. Статически неопределимая рама: а – сечения в раме; б – результат упругого расчета

Полному пластическому механизму соответствует появление четырех пластических шарниров, частному механизму – до трех шарниров (в нашем случае это будет обрушение ригеля). При этом теоретически необходимо, чтобы последовательно расположенные шарниры раскрывались в разные стороны – внутрь рамы и наружу.

Таким образом, возможных сочетаний для данной рамы будет несколько. Все их надо рассмотреть и при определении предельной нагрузки принять наименьшее ее значение.

Выполним расчет рамы по предельному состоянию статическим методом. Основная система метода сил показана на рис. 15, а.

Эпюры изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки и от лишних неизвестных показаны на рис. 15, б-в; результирующая эпюра моментов – на рис. 15, г.

Вариант № 1. Пластические шарниры расположены только на ригеле – в сечениях 2, 3, 4 (частный механизм разрушения). Имеем следующие условия предельного равновесия:

$$\begin{cases} M_2 = X_2 - X_3 - 0,5F_{\text{пр}} = M_{\tau} \\ M_3 = X_3 = M_{\tau} \\ M_4 = 2,5F_{\text{пр}} - X_2 - X_3 = M_{\tau} \end{cases} : \begin{cases} X_2 - 0,5F_{\text{пр}} = 2M_{\tau} \\ 2,5F_{\text{пр}} - X_2 = 2M_{\tau} \end{cases} : F_{\text{пр}} = 2M_{\tau}. \quad (16)$$

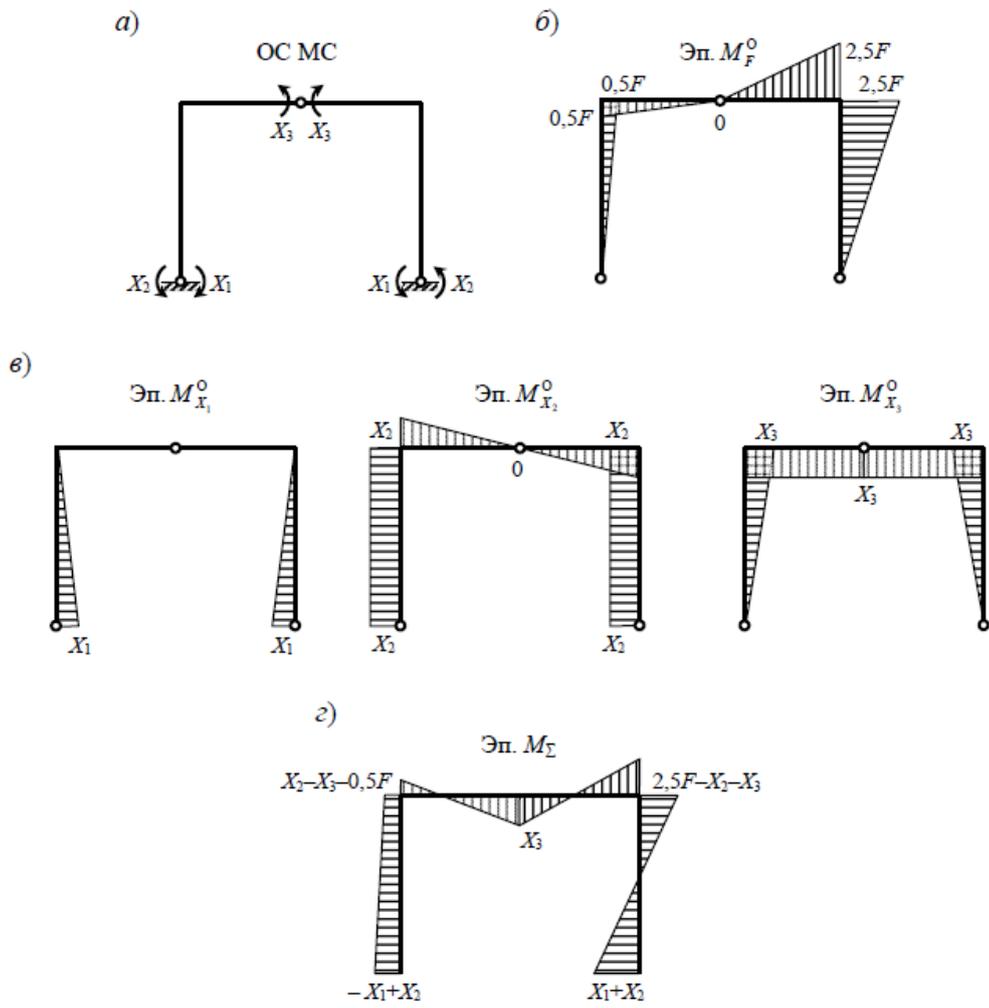


Рис. 15. Расчет рамы статическим методом: а – основная система; б, в – эпюры в основной системе; г – результирующая эпюра моментов

Вариант № 2. Пластические шарниры в сечениях 1, 3, 4, 5. Имеем следующие условия предельного равновесия:

$$\begin{cases} M_1 = -X_1 + X_2 = M_T \\ M_3 = X_3 = M_T \\ M_4 = 2,5F_{\text{пр}} - X_2 - X_3 = M_T \\ M_5 = X_1 + X_2 = M_T \end{cases} : \begin{cases} 2X_2 = 2M_T \\ 2,5F_{\text{пр}} - X_2 = 2M_T \end{cases} : F_{\text{пр}} = 1,2M_T. \quad (17)$$

Вариант № 3. Пластические шарниры в сечениях 1, 2, 4, 5 (в этом случае шарнир в сечении 2 должен раскрываться внутрь рамы). Имеем следующие условия предельного равновесия:

$$\begin{cases} M_1 = -X_1 + X_2 = M_T \\ M_2 = X_2 - X_3 - 0,5F_{np} = -M_T \\ M_4 = 2,5F_{np} - X_2 - X_3 = M_T \\ M_5 = X_1 + X_2 = M_T \end{cases} : \begin{cases} 0,5F_{np} + X_3 = 2M_T \\ 2,5F_{np} - X_3 = 2M_T \end{cases} : F_{np} = 1,33M_T. \quad (18)$$

Наименьшее значение предельной нагрузки получилось по второму варианту:  $F_{np}=1,2M_T$ .

### Задача 7. Расчет статически неопределимых рам по предельному состоянию кинематическим методом

Выполним расчет предельной нагрузки для этой же рамы по кинематическому методу.

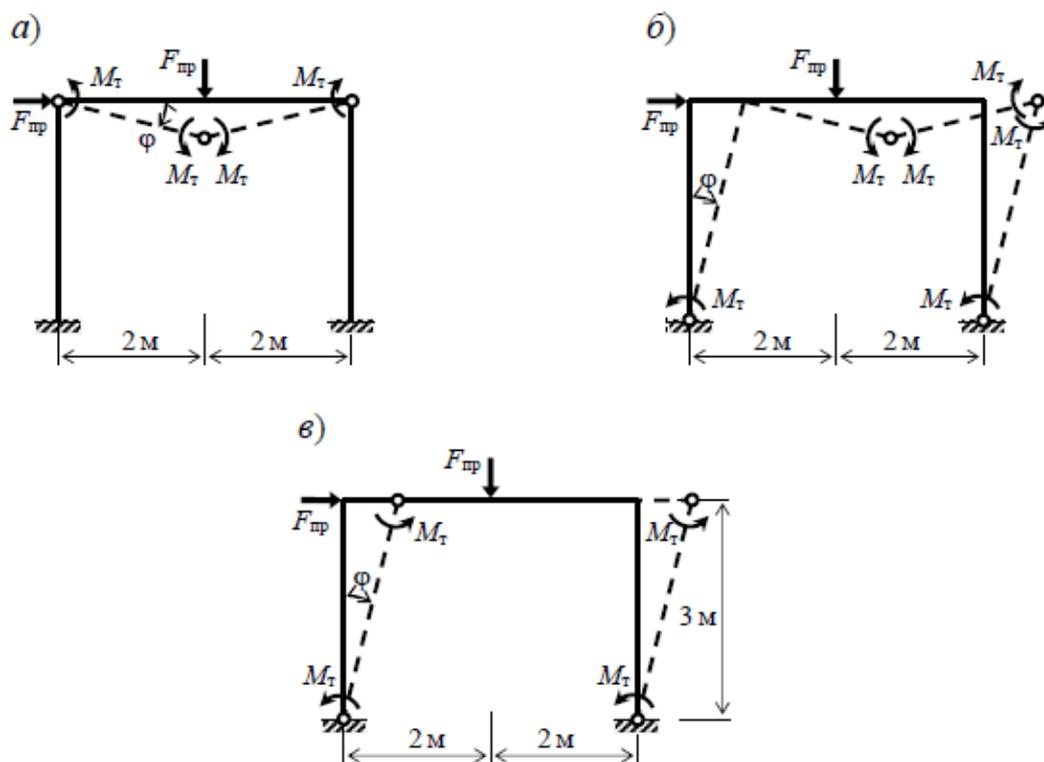


Рис.16. Расчет рамы кинематическим методом: а – первый вариант; б – второй вариант; в – третий вариант

Вариант № 1. Составляем уравнение работ внешних сил и предельных моментов на перемещениях, выраженных через угол  $\varphi$  (рис.16, а):

$$F_{np} \cdot 2\varphi - 4M_T \varphi = 0, \text{ откуда } F_{np} = M_T.$$

Вариант № 2. Составляем уравнение работ (рис.16, б):

$$F_{np} \cdot 3\varphi + F_{np} \cdot 2\varphi - 6M_T \varphi = 0, \text{ откуда } F_{np} = 1,2M_T.$$

Вариант № 3. Составляем уравнение работ (рис.16, в):  
 $F_{пр} \cdot 3\varphi - 6M_T \varphi = 0$ , откуда  $F_{пр} = 1,2M_T$ .

Таким образом, результаты расчета несущей способности рамы статическим и кинематическим способами совпадают.

### Задача 8. Учет геометрической нелинейности в расчетах конструкций

Расчет по деформированному состоянию (называемый также деформационным расчетом или расчетом по деформированной схеме) является более точным, а для ряда сооружений (высотные, большепролетные объекты и т. п.) и более целесообразным.

Расчет по деформированному состоянию предполагает, что уравнения равновесия здесь записываются уже для деформированного состояния системы, однако зависимости между деформациями и перемещениями принимаются линейными (т. е. используются так называемые линеаризованные уравнения). При этом важно отметить, что внутренние силы в данном случае определяются по расчетной схеме сооружения в деформированном состоянии, которое само зависит от величин внутренних сил.

Расчет конструкций по деформированному состоянию проиллюстрируем на примере простой стержневой системы, изображенной на рис. 17, где пунктиром изображено деформированное состояние системы.

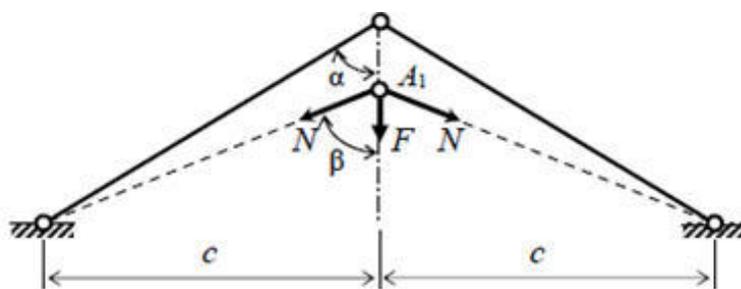


Рис. 17. Пример расчета системы по деформированному состоянию

Продольные силы в стержнях находим из равновесия узла  $A_1$  (по деформированной схеме):

$$N = -F/2\cos\beta \quad (19)$$

Абсолютное укорочение стержней (по закону Гука):

$$\Delta l' = \frac{Nl}{EA} = \frac{-F}{2\cos\beta} \frac{c}{\sin\alpha EA} = \frac{-Fc}{2EA\sin\alpha\cos\beta}. \quad (20)$$

С другой стороны, абсолютная деформация стержней может быть найдена как разность конечной и начальной длин:

$$\Delta l'' = \frac{c}{\sin\beta} - \frac{c}{\sin\alpha} = -c \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\beta} \right). \quad (21)$$

Приравняв деформации стержней  $\Delta l' = \Delta l''$ , получим

$$\frac{F}{2EA\sin\alpha\cos\beta} = \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\beta} \right), \text{ отсюда } \sin\beta = \sin\alpha + \frac{F}{2EA} \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, геометрически нелинейная задача, как и физически нелинейная, сводится к решению нелинейного уравнения (в общем случае – системы нелинейных уравнений). Решение уравнения (21) удобно произвести методом последовательных приближений, представив его в виде итерационной формулы

$$\sin\beta_{k+1} = \sin\alpha + \frac{F}{2EA} \operatorname{tg}\beta_k. \quad (22)$$

Начальным приближением будем считать  $\beta_0 = \alpha$ . После нахождения угла  $\beta$  по формуле (22) определяется значение продольной силы в стержнях.

Для численного решения зададимся следующими данными:  $F = 120$  кН,  $\alpha = 80^\circ$ ; материал стержней – сталь,  $EA = 240\,000$  кН.

Вычислим  $F / 2EA = 0,00025$ , тогда итерационная формула (22) примет вид:

Итерация 1:

$$\beta_0 = 80^\circ; \sin\beta_1 = 0,9848 + 0,00025 \cdot 5,6713 = 0,9862; \beta_1 = 80,476^\circ.$$

Итерация 2:

$$\beta_1 = 80,476^\circ; \sin\beta_2 = 0,9848 + 0,00025 \cdot 5,9604 = 0,9863; \beta_2 = 80,502^\circ.$$

Итерация 3:

$$\beta_2 = 80,502^\circ; \sin\beta_3 = 0,9848 + 0,00025 \cdot 5,9768 = 0,9863; \beta_3 = 80,502^\circ.$$

Определяем значение продольной силы по деформированной схеме:

$$N_{\text{деф}} = -F / 2\cos\beta = -120 / (2 \cdot 0,1650) = -363,6 \text{ кН.}$$

Сравним результат с расчетом по недеформированной схеме:

$$N_{\text{лин}} = -F / 2\cos\alpha = -120 / (2 \cdot 0,1736) = -345,5 \text{ кН.}$$

Как можно увидеть, усилия, найденные с помощью обычного линейного расчета, в данном случае оказались занижены на 5 %.

При уменьшении угла наклона стержней до  $\alpha = 70^\circ$  (в этом случае стержневая система становится жестче) разница между линейным и деформационным расчетом составит только 0,58 %.

Рассмотрим также случай, когда стержни рамы изготовлены из менее жесткого материала (дерева):  $F = 10$  кН,  $EA = 10\,000$  кН.

В результате получим:  $\beta = 81,10^\circ$ ;  $N_{\text{деф}} = -32,32$  кН;  $N_{\text{лин}} = -28,8$  кН.

Результаты линейного расчета получаются заниженными уже на 11 %.

Это еще раз подтверждает зависимость результатов деформационного расчета от перемещений системы, т. е. от ее жесткости. При этом чем система жестче, тем результаты линейного расчета будут более близки к истинным.

Рассмотренный здесь случай точного расчета по деформированному состоянию хотя и дает некоторое представление о его сущности, но не раскрывает тех сложностей, которые могут быть в большинстве случаев. Дело в том, что внутренние силы в деформированном состоянии удастся легко выразить через внешние силы лишь в сравнительно простых случаях. Совсем иначе бывает, когда взаимная зависимость между внутренними силами в системе и ее деформированным состоянием раскрывается сложно. Уже при изгибе балок аналитические зависимости между внутренними силами и деформациями усложняются, еще более сложно (а в общем случае практически невозможно) получить точные выражения нелинейных зависимостей при расчете рам и арок.

Некоторые упрощения расчета по деформированному состоянию можно получить, если применять приближенные методы расчета (итерационные либо шаговые). Но все же деформационный расчет конструкций является достаточно сложным.

### Задача 9. Конструктивная нелинейность. расчет систем с односторонними связями

Между балкой и опорами  $k = 1, 2, 3$  заданы начальные зазоры  $\delta_k = 25, 35, 30$  мм, жесткости всех участков балки одинаковы:  $EI = 10000$  кН·м<sup>2</sup>. Требуется найти рабочую систему балки при заданной нагрузке  $F = 2$  кН.

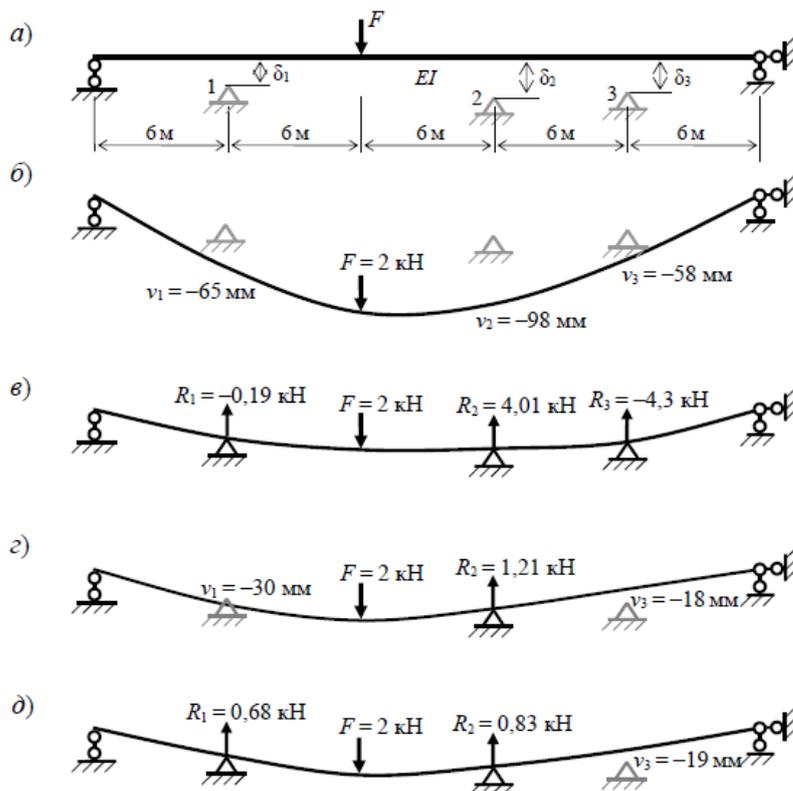


Рис. 18. Балка с односторонними зазорами на опорах

На первой итерации выполняем линейный расчет балки при выключенных односторонних связях (рис. 18, б). Поскольку величины  $v_k + \delta_k$  для всех односторонних связей оказываются меньше нуля, переключаем их все в рабочее состояние (т. е. принимаем как двусторонние).

На второй итерации выполняем расчет балки при заданных величинах прогибов на опорах, соответствующих начальным зазорам (рис. 18, в). При этом реакции в 1-й и 3-й связях получаются отрицательными, следовательно, выключаем данные связи.

На третьей итерации (рис. 18, г) получаем недопустимый прогиб по направлению 1-й связи ( $v_1 + \delta_1 = -30 + 25 < 0$ ), поэтому снова переключаем ее в рабочее состояние (включаем).

На четвертой итерации (рис. 18, д) получаем положительные реакции в 1-й и 2-й включенных связях и допустимый прогиб по направлению 3-й выключенной связи ( $v_3 + \delta_3 = -18 + 30 > 0$ ). Так как все односторонние связи «работают правильно», итерационный процесс завершается.

Аналогично определяется сейсмическая нагрузка, действующая на промежуточные рамы.

Как видно из полученных результатов, усилия в удаленных от центра жесткостей рамах значительно возрастают вследствие поворота здания. Уменьшение дополнительных усилий может быть достигнуто при повышении общей угловой жесткости и уменьшении эксцентриситета.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукашевич А. А. Нелинейные задачи строительной механики: учеб. Пособие / А. А. Лукашевич; спбгасу. – СПб., 2016. – 138 с.
2. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В. В. Петров. – М. : Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
3. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М. : Стройиздат, 1978. – 204 с.
4. Городецкий А. С. Компьютерные модели конструкций / А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров. – Киев : Факт, 2007. – 394 с.
5. Игнатъев В. А. Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета : учеб. пособие / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. – 97 с.