МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_4_»_03_____________ 2019 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАШИННОГО НУЛЯ И МАШИННОГО ЭПСИЛОН. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к лабораторной работе №1
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Определение машинного нуля и машинного эпсилон. Оценка погрешности функции многих переменных: методические указания к лабораторной работе №1 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 9 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,03. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 100 экз. Заказ 153.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАШИННОГО НУЛЯ И МАШИННОГО ЭПСИЛОН. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1.Изучение источников и классификация погрешностей, возникающих при решении на ЭВМ научных и инженерных задач.
2.Изучение правил приближенных вычислений и оценка погрешности.
3.Оценка с использованием ЭВМ абсолютной и относительной погрешности функций многих переменных.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Получаемое на ЭВМ решение y почти всегда, за редким исключением, содержит погрешность, т.е. является приближенным.

1. Основные источники и классификация погрешностей математического моделирования

а) математическая модель является приближенным описанием реальной научной, инженерной или иной практической задачи;
б) исходные данные содержат погрешности, т.к. они получены в результате измерений или других расчетов;
в) математические методы в большинстве случаев являются приближенными;
г) из-за ограниченности разрядности вычислительной машины и используемых способов представления чисел в ЭВМ при вводе и выводе, а также при выполнении арифметических операций производятся округления, т.е. для представления числа используется меньше разрядов, чем в самом числе. Обычно используются два способа округления: по усечению и дополнению.

Величина погрешности $\delta_н$, соответствующая первым двум причинам называется неустранимой погрешностью. Погрешность $\delta_м$ источником которой является вычислительный метод называется погрешностью метода. Погрешность $\delta_в$, возникающая при вводе и выводе чисел, а так же при выполнении арифметических операций на ЭВМ, называется вычислительной погрешностью.
Максимальная относительная погрешность округления, возникающая в ЭВМ при вводе и выводе вещественных чисел, а также при выполнении

арифметических операций с этими числами называется машинным эпсилон ε_{M}.

Минимальное по модулю число, представимое в ЭВМ называется машинным нулем. Любое меньшее по модулю число в ЭВМ будет представлено как нуль.

Машинное эпсилон определяется количеством разрядов в ячейке памяти, которое отводится для хранения мантиссы числа, а машинный нуль определяется количеством разрядов, которое отводится для хранения порядка.

2. Абсолютная и относительная погрешность. Количество верных знаков в числе

Пусть а-точное значение некоторой величины, которое может быть и неизвестно, a^*-известное приближенное значение этой величины. Положительная величина $\Delta(a) = |a - a^*|$ называется абсолютной погрешностью величины *а*. Отношение абсолютной погрешности величины *а* к ее абсолютному значению называется относительной погрешностью.

$$\delta(a) = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a)}{|a|} \qquad (2.1)$$

Максимальное значение *Δ(a)* называется предельной абсолютной погрешностью и обозначается $\bar{\Delta}(a)$. Соответственно предельная относительная погрешность равна:

$$\bar{\delta}(a) = \frac{\bar{\Delta}(a)}{|a|}. \qquad (2.2)$$

Обычно слово “предельное” опускают и под абсолютной и относительной подразумевают абсолютную и относительную предельные погрешности.

На практике, в таблицах часто вместо погрешности указывается количество верных знаков. Количество верных знаков в числе отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры абсолютной погрешности.

3. Погрешности арифметических операций:

а) при сложении и вычитании двух величин их абсолютные предельные погрешности складываются:

$$\bar{\Delta}(a) = (a \pm b) = \bar{\Delta}(a) \pm \bar{\Delta}(b). \qquad (2.3)$$

б) при умножении и делении двух величин на друга их относительные предельные погрешности складываются:

$$\bar{\delta}(a * b) = \bar{\delta}(a) + \bar{\delta}(b), \qquad (2.4)$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a}{b}\right) = \bar{\delta}(a) + \bar{\delta}(b). \qquad (2.5)$$

в) при возведении в степень приближенной величины ее относительная предельная погрешность умножается на показатель степени:

$$\bar{\delta}(a^n) = n\bar{\delta}(a). \tag{2.6}$$

4. Погрешность функций

Пусть *a*-приближенное значение аргумента *x* функции *y=f(x)*, а Δa-абсолютная погрешность аргумента, т.е. $\Delta a = |x - a|$. При *Δa<<1* для оценки абсолютной погрешности и относительной погрешностей функции используются следующие определение/

Абсолютной погрешностью функции *Δy* называется произведение модуля производной функции на абсолютную погрешность аргумента, а относительной погрешностью функции *δy* называется отношение абсолютной погрешности функции к ее абсолютному значении, т.е.

$$\Delta y \approx |dy| = |f'_x(a)| \cdot \Delta a, \qquad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|f'_x(a)|}{|f(a)|} \cdot \Delta a. \tag{2.7}$$

Аналогичные соотношения можно записать для функции нескольких переменных, например, если *U=f(x,y,z),* то при:

$$\Delta a = |x - a|, \;\; \Delta b = |y - b|, \;\; \Delta c = |z - c|;$$

имеет:

$$\begin{gathered} \Delta U = |f'_x(a,b,c)| \cdot \Delta a + |f'_y(a,b,c)| \cdot \Delta b + |f'_z(a,b,c)| \cdot \Delta c, \\ \delta U = \frac{\Delta U}{|U|} = \frac{\Delta U}{|f(a,b,c)|}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где f'_x, f'_y, f'_z − частные производные, по соответствующим аргументам.

5. Определение машинного нуля и машинного эпсилон.

Для определения машинного нуля необходимо в цикле провести вычисления отношения $y=1/x_i$, $x_i=10^{-i}$, $i=1,2,\dots$. Как только величина x_i станет меньше машинного нуля, произойдет деление на нуль. Предыдущее значение x_i и будет машинным нулем.

При выполнении операции сложении двух чисел *1+ε* начиная с некоторого ε<<1 из-за округления будет получено результирующее число 1. Поскольку точное значение суммы должно быть равно *1+ε,* а получаемое значение равно *1*, то для абсолютной погрешности суммы имеем: *Δ(1+ε)=1+ε-1=ε.* Так как по определению машинное эпсилон ε_μ есть относительная погрешность округления, то получаем

$$\varepsilon_\mu = \delta(1+\varepsilon) = \frac{\Delta(1+\varepsilon)}{|1+\varepsilon|} = \frac{\varepsilon}{|1+\varepsilon|} \approx \varepsilon.$$

Таким образом, если определить такое наибольшее значение ε при котором $1+\varepsilon=1$, то это значение будем равно ε_μ..
С этой целью в цикле достаточно организовать вычисление последовательности: $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n/2$, $n=0,1,...,$ начиная с $\varepsilon_0=1$ и проверку выполнения условия $1+\varepsilon_{n+1}=1$. Так как при некотором значении n из-за погрешности округления условие $1+\varepsilon_{n+1}=1$ будет выполнено, то имеем $\varepsilon_\mu=\varepsilon_{n+1}$.

ЗАДАНИЕ

1. Разработать текст программы для вычисления машинного нуля и машинного эпсилон.
2. Провести теоретический вывод формулы для оценки абсолютной и относительной погрешности функции $U(x,y,z)$:

$$U(x,y,z) = f(x,y) / \varphi(x,z).$$

Вид функций $f(x,y)$, $\varphi(x,z)$ указан в таблице индивидуальных заданий.
3. Разработать текст программы для вычисления абсолютной и относительной погрешности функции $U(x,y,z)$.
4. На ЭВМ набрать и отладить программу.
5. Провести расчет абсолютной и относительной погрешности функции $U(x,y,z)$, для указанных в таблице значений аргументов, считая, что эти исходные данные имеют относительную погрешность $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Результаты занести в таблицу.
6. Для выполнения пункта 5 можно использовать пакеты СИ++, DELFY, ТУРБО ПАСКАЛЬ, MATHCAD и др..

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. **Задание**. Определить абсолютную ΔU и относительную δU погрешности функции

$$U = f(x,y) / \varphi(x,z),$$

где

$$f(x,y) = x^3 + y^2, \qquad \varphi(z) = e^z;$$

при следующих значениях аргументов: $x=2.01$, $y=4.05$, $z=0.1$ и их относительной погрешности $\varepsilon=10^{-3}$.

2. **Вывод формул для расчета погрешностей.** Имеем:

$$U(x,y,z) = \frac{x^3 + y^2}{e^z}. \qquad (4.1)$$

Используя (2.2) определяем абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta x = \varepsilon \cdot |x|, \qquad \Delta y = \varepsilon \cdot |y|, \qquad \Delta z = \varepsilon \cdot |z|. \tag{4.2}$$

Согласно выражения (2.7), находим промежуточную формулу для расчета абсолютной погрешности *ΔU*:

$$\Delta U(x,y,z) = |U'_x| \cdot \Delta x + |U'_y| \cdot \Delta y + |U'_z| \cdot \Delta z; \tag{4.3}$$

где

$$U'_x = \frac{3x^2}{e^z}; \qquad U'_y = \frac{2y}{e^z}; \qquad U'_z = -\frac{x^3+y^2}{e^z};$$

Отсюда:

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{|3x|^2 \Delta x}{|e^z|} + \frac{|2y|\Delta y}{|e^z|} + \frac{|x^3+y^2|\Delta z}{|e^z|}, \tag{4.4}$$

$$\delta U(x,y,z) = \frac{\Delta U(x,y,z)}{|U(x,y,z)|} \tag{4.5}$$

Формулы (4.1,4.2,4.4,4.5) позволяют вычислить значения *ΔU* и *δU* при заданных значениях *x,y,z* и *ε*.

3. Примеры программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для расчета *δU* и *ΔU*.

$x := 2.01 \qquad y := 4.05 \qquad z := 0.1 \qquad \varepsilon := 0.001$

$\Delta x := |x| \cdot \varepsilon \qquad \Delta y := |y| \cdot \varepsilon \qquad \Delta z := |z| \cdot \varepsilon$

$f(x,y,z) := x^3 + y^2 \qquad \phi(x,y,z) := e^z \qquad u(x,y,z) := \dfrac{f(x,y,z)}{\phi(x,y,z)}$

$$\Delta u(x,y,z) := \left|\frac{d}{dx}u(x,y,z)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{d}{dy}u(x,y,z)\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{d}{dz}u(x,y,z)\right| \cdot \Delta z$$

$$\delta u(x,y,z) := \frac{\Delta u(x,y,z)}{|u(x,y,z)|}$$

$\Delta u(x,y,z) = 0.054 \qquad \delta u(x,y,z) = 2.431 \times 10^{-3}$

```
program lab1;
   {Погрешность функций многих переменных.}
   {U- функция, x,y,z - аргументы}
   {e-относительная погрешность аргументов.}
   {dx,dy,dz-относительные погрешности аргументов.}
   {dU1-абсолютная погрешность функции}
   {dU2-относительная погрешность функции}
var x,y,z,e,dx,dy,dz,U,dU1,dU2 : real;
```

```
begin
   readln (x,y,z,e);
     U:=....;                                   (формула (4.1))
    dx:=abs(x)*e;
    dy:=abs(y)*e;
    dz:=abs(z)*e;
    dU1:=abs(3*x*x)*dx/abs(exp(z))+...;         (формула(4.4))
    dU2:=dU1/abs(U);                            (формула (4.5))
  writeln('Абс погр.',dU1,'Отн погр.,dU2);
end.
```

4.Таблица результатов расчета на ЭВМ.

Наименование величины	Численные значения
Относительная погрешность функций δU	$2,4*10^{-3}$
Абсолютная погрешность функций ΔU	$5,4*10^{-2}$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.

1.Название лабораторной работы.
2.Индивидуальное задание.
3.Теоретическая часть.
4.Тексты программ.
5.Таблица результатов расчета на ЭВМ.

Замечание: Пункты 1-4 отчета, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Что такое математическое моделирование?
2. Основные этапы математического моделирования.
3. Основные источники погрешности математического моделирования.
4. Классификация погрешностей.
5. Что такое округление числа?
6. Определение абсолютной и относительной погрешности приближенного числа.
7. Правила оценки погрешностей арифметических операций над приближенными числами.
8. Как количество верных знаков связано с погрешностью числа?
9. Что такое машинный нуль и машинное " эпсилон"?
10. Абсолютная и относительная погрешности функций.

ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

№	f(x,y)	φ(x,z)	x	y	z
1	2	3	4	5	6
1.	$x+\sqrt{y}$	sin(x+z)	2.01	1.1	0.5
2.	x^2-y	cos(x+z)	-1.3	0.34	0.23
3.	e^x+y	ln(x+z)	1.5	2.4	8.5
4.	x+y	x-z	0.4	0.71	0.55
5.	x/y	z^3+x^2	7.6	4.3	3.5
6.	$6x^3$-siny	e^x-z	1.5	1.8	4.3
7.	cos(x-y)	sin(x+z)	0.43	0.21	4.3
8.	x^4+y	ln(x-z)	3.2	5.5	4.8
9.	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	e^x+z	2.1	2.3	1.2
10.	e^x+z	x/z	0.1	5.2	6.8
11.	$5x^3$	$6y^3$+sinz	0.3	0.5	1.4
12.	sin(x-y)	x+z	5.8	4.2	8.5
13.	ln(x-y)	x	1.5	7.5	9.8
14.	sin(x+z)	$\mathbf{x+\sqrt{z}}$	2.4	0.3	1.9
15.	e^x+7y	$5x+y^2$	0.35	10.4	30.5
16	$\mathbf{tg(x+y)}$	$\mathbf{x^3+z^2}$	0.04	0.3	0.2
17	$\mathbf{cos(x)+sin(y)}$	$\mathbf{ln(x+y+z)}$	3.4	1.2	0.5
18	$\mathbf{x/(x+y)}$	$\mathbf{(x+z)^3}$	6.8	3.2	1.5
19	$\mathbf{ctg(x+y^2)}$	$\mathbf{lg(z+x)}$	1.9	20.1	0.4
20	$\mathbf{e^{x+y}}$	$\mathbf{sin(y-z)}$	0.8	0.04	0.7