**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_4_» 05 _____________ 2024 г.

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Дискретная математика»
направлений подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и
09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2024

УДК 519.6

Составитель Е.П. Кочура

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент А.Е. Кузько

**Элементы теории множеств. Основы математической логики:** методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направлений подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура. Курск, 2024. 25 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторных работ, индивидуальные задания, пример выполнения лабораторной работы, вопросы для самопроверки, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов направлений подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 7.05.24. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 293. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

# Содержание

# Краткие теоретические сведения

## *Элементы теории множеств*

Понятие *множества* – одно из первичных в математике, поэтому для него нет строгого определения.

*Множество* – совокупность, набор каких-либо объектов. Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*.

Множества обозначают большими буквами: A, B, …, а их элементы соответствующими маленькими буквами: a, b, … . В математике приняты следующие обозначения:

**Z** – множество целых чисел,

**Q** – множество рациональных чисел,

**R** – множество действительных чисел,

**N** – множество натуральных чисел.

То, что элемент а входит в множество А, записывается так: $a \in A$
(читается: a есть элемент множества A, или: a принадлежит A). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество считается *заданным*, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом данного множества или нет. Если множество состоит из конечного числа элементов (*конечное множество),* то оно может быть задано:

1. *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов несущественен. Например, множество всех цифр: A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
2. *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества. Например, $A=\{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$ означает множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Для задания *бесконечных множеств* используется только второй способ. Например, $\{x \in R \mid 0 < x < 2\}$ есть бесконечное множество действительных чисел, лежащих между 0 и 2.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Множество A есть *подмножество* множества B, если каждый элемент A является элементом B. В этом случае также говорят, что множество A *включено* во множество B или множество B *включает* множество A, обозначается $A \subseteq B$.

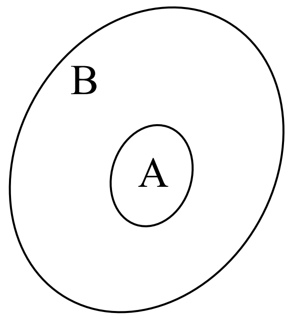



Рис. 1. Диаграмма Эйлера-Венна множества A, являющегося подмножеством множества B

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называют *равными* и обозначают: $A = B$.

Множества и отношения множеств наглядно иллюстрируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 1).

*Диаграмма Эйлера-Венна* – это замкнутая линия, внутри которой расположены элементы данного множества, а снаружи – элементы, не принадлежащие этому множеству.

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называется *универсальным* для данного рассуждения. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а его подмножества - в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника (рис. 2).

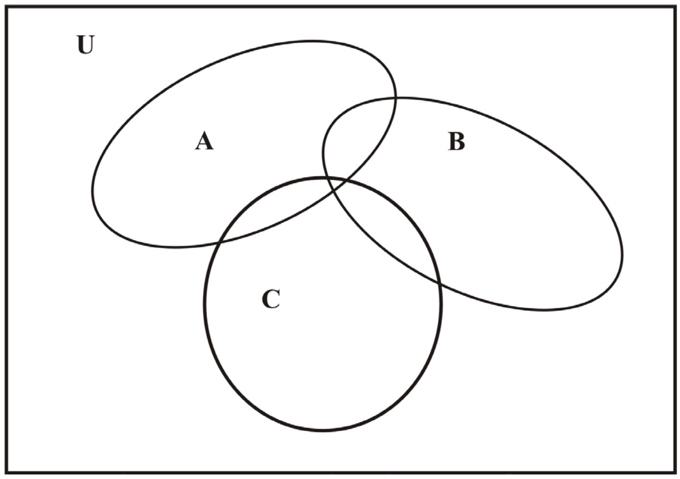


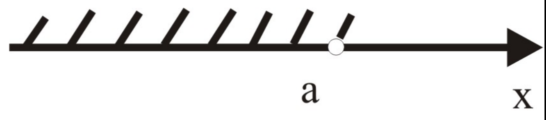

Рис. 2. Диаграмма Эйлера-Венна универсального множества U и его подмножеств A, B, C

Пусть множество A есть некоторое подмножество универсального множества U. Тогда множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов множества U, не принадлежащих множеству A, называется *дополнением* множества A.

При решении задач часто приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называют *числовыми*, они являются подмножествами множества действительных чисел R. Пусть a и b – действительные числа, a<b. Приведем названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и изобразим их на координатной прямой (табл. 1).

Табл. 1. Числовые промежутки

| Название | Неравенство, определяющее множество | Обозначение | Изображение |
|---|---|---|---|
| Отрезок от a до b (замкнутый промежуток) | $a \le x \le b$ | $[a, b]$ |   |
| Интервал от a до b (открытый промежуток) | $a < x < b$ | $(a, b)$ |   |
| Открытый слева промежуток от a до b | $a < x \le b$ | $(a, b]$ |   |
| Открытый справа промежуток от a до b | $a \le x < b$ | $[a, b)$ |   |
| Числовой луч от a до $+\infty$ | $x \ge a$ | $[a, +\infty)$ |   |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Открытый числовой луч от a до +∞ | x > a | (a, +∞) |  |
| Числовой луч от -∞ до a | x ≤ a | (-∞, a] |  |
| Открытый числовой луч от -∞ до a | x < a | (-∞, a) |  |

## Операции над множествами

*Объединением* C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B (рис. 3). Объединение множеств обозначается: $C = A \cup B$. Другими словами, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. В определении объединения множеств подразумевается неисключающее значение союза «или». Объединение часто называют *суммой* множеств. Объединение трех и более множеств определяется аналогично.

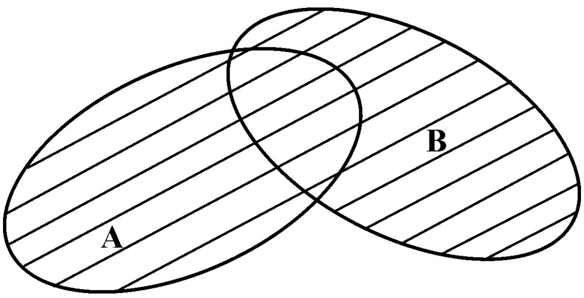



Рис. 3. Объединение двух множеств A и B

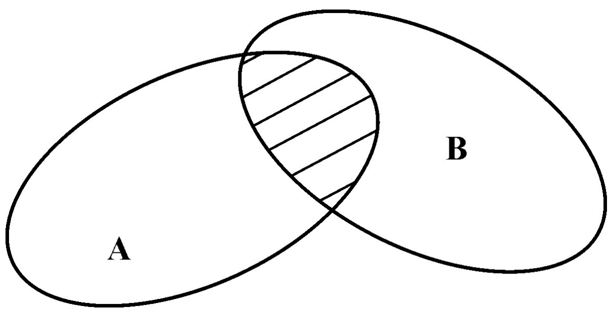



Рис. 4. Пересечение двух множеств A и B

*Пересечением* C двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B одновременно: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 4). Иными словами, пересечение образовано всеми общими элементами данных множеств.

*Разностью* C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A, не входящих в B (рис. 5). $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Таким образом, из множества A достаточно удалить общие элементы множеств A и B, то есть все элементы множества $A \cap B$, чтобы получить разность $A \setminus B$.

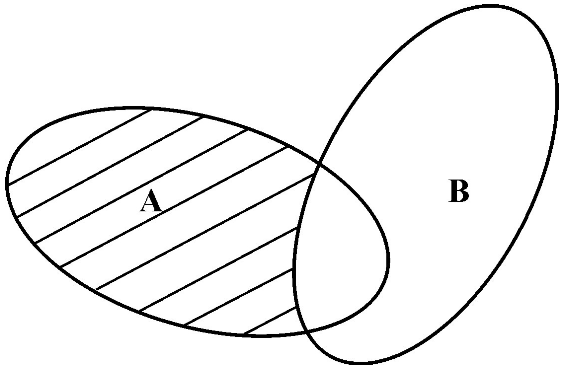



Рис. 5. Разность множеств A\B

**Свойства операций над множествами**

В следующей теореме формулируются *основные свойства объединения и пересечения*:

**Теорема 1.** *Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U справедливы следующие тождества:*

**Ассоциативный закон**

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. 1’. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

**Коммутативный закон**

2. $A \cup B = B \cup A$. 2’. $A \cap B = B \cap A$.

**Дистрибутивный закон**

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 3’. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup \varnothing = A$. 4’. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
5. $A \cup \overline{A} = U$. 5’. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Справедливость каждого из этих тождеств можно проверить, показав, что множество, стоящее по одну сторону тождества, включено во множество, стоящее по другую сторону.

В следующей теореме формулируются дополнительные свойства операций над множествами.

**Теорема 2.** *Для любых подмножеств A и B универсального множества U справедливы следующие утверждения:*

6. Если для всех A имеет место $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$.

6’. Если для всех A имеет место $A \cap B = A$, то $B = U$.

7, 7’. Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.

8, 8’. $\overline{\overline{A}} = A$.

9. $\overline{\varnothing} = U$.

9’. $\overline{U} = \varnothing$.

10. $A \cup A = A$.

10’. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$.

11’. $A \cap U = A$.

**Закон поглощения**

12. $A \cup (A \cap B) = A$.

12’. $A \cap (A \cup B) = A$.

**Закон де Моргана**

13. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

13’. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

# *Основы математической логики*

*Высказыванием* называется любое повествовательное предложение, относительно которого известно, что оно либо истинно, либо ложно. Пример ложного высказывания: A: «сумма чисел 2 и 6 больше числа 8».

Высказывание, которое можно разложить на части, называется *сложным*, а неразложимое далее высказывание – *простым*. Например, высказывание C: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x» состоит из двух простых высказываний: A: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна при всех значениях x» и B: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ дифференцируема при всех значениях x».

Подобно тому, как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, так из заданных высказываний получаются новые с помощью операций *конъюнкции*, *дизъюнкции*, *импликации*, *эквивалентности*, *отрицания*.

## Операции над высказываниями

*Отрицанием* высказывания A называют такое высказывание $\overline{A}$ (или $\neg$ A), что $\overline{A}$ ложно, если A истинно и $\overline{A}$ истинно, если A ложно. Обозначение $\overline{A}$ читается: «Не A» или «Неверно, что A».

Следующая таблица показывает связь между высказываниями A и $\neg$ A:

| A | $\neg$ A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

1 соответствует значению «истина», 0 – значению «ложь». Эти слова в логике называют *значениями истинности*. Таблица называется *таблицей истинности* $\neg$ A.

*Конъюнкцией* двух высказываний A и B называется такое высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих его высказывания.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний.

Таблица истинности $A \wedge B$:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Высказывание C: «Число 2 четное и простое» сложное, оно состоит из двух высказываний: A: «Число 2 четное» и B: «Число 2 простое», связанных союзом «и». Оба этих высказывания истинны. Истинным является и сложное высказывание, которое есть конъюнкция высказываний A и B.

*Дизъюнкцией* двух высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из составляющих его высказываний.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний. Определение дизъюнкции двух высказываний может быть выражено следующей таблицей истинности:

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Примером дизъюнкции двух высказываний является высказывание C: «Если последняя цифра числа равна 0 или 5, это число делится на 5» есть дизъюнкция высказываний A: «Если последняя цифра числа равна 0, то это число делится на 5» и B: «Если последняя цифра числа равна 5, то это число делится на 5».

*Импликацией* двух высказываний A и B называется такое высказывание $A \to B$ (читается «из A следует B» или «если A, то B»), которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B – ложно.

Таблица истинности для импликации имеет следующий вид:

| A | B | $A \to B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Высказывание A называют *условием* (или *посылкой*), а B – *заключением* (*следствием*). Существует немало синонимов для связки «если, …, то…», например:

- Из A следует B;
- A влечет за собой B;
- Как только A, то B;
- A достаточное условие B.

Пример импликации: C: «Если $\Delta ABC$ равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C$». A: «$\Delta ABC$ равносторонний», B: «$\angle A = \angle B = \angle C$».

*Эквивалентностью* двух высказываний А и В называется такое высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В либо истинны, либо оба – ложны.

Читается запись $A \leftrightarrow B$ так: «А тогда и только тогда, когда В». Таблица истинности такова:

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Пример эквивалентности двух высказываний: С: «Для того, чтобы некоторый параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Здесь высказывание А: «Некоторый параллелограмм – ромб» и В: «Диагонали некоторого параллелограмма взаимно перпендикулярны».

В логике, как и в арифметике, операции делятся по старшинству. Это позволяет при записи сложных высказываний избегать большого количества скобок. *Порядок выполнения операций* таков: приоритет имеет отрицание, затем на одном уровне – дизъюнкция и конъюнкция, следующая связка – импликация и, наконец, самая последняя – эквивалентность.

Для сложных высказываний (*составных формул*) применяют также таблицы истинности, где перебирают все возможные значения истинности составляющих высказываний (*элементарных формул*, простых компонент, то есть таких высказываний, которые нельзя представить как результат действия логических операций). Такая таблица содержит $2^n$ строк, где n – количество простых компонент. Таблицу истинности удобно составлять, разбивая сложное высказывание на более простые и добавляя вспомогательные столбцы со значениями истинности этих составляющих.

Приведем таблицу истинности для высказывания $(A \vee B) \wedge (B \rightarrow \neg C)$:

| A | B | C | $A \vee B$ | $\neg C$ | $B \rightarrow \neg C$ | $(A \vee B) \wedge (B \rightarrow \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Высказывание содержит три простые компоненты A, B и C, поэтому в таблице $2^3 = 8$ строк.

## Логическая эквивалентность. Свойства логических операций

Формула A *логически эквивалентна* формуле B, если их таблицы истинности совпадают. Это записывается: $A \Leftrightarrow B$.

Проверим, например, что $A \vee B \Leftrightarrow (A \to B) \to B$. Для этого составим таблицу истинности формулы $(A \to B) \to B$:

| A | B | $A \to B$ | $(A \to B) \to B$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Видно, что построенная таблица совпадает с таблицей истинности дизъюнкции.

Логически эквивалентные высказывания неразличимы с точки зрения формальной логики, поскольку они при каждом наборе значений компонент принимают одинаковые значения истинности. В любом рассуждении высказывание можно заменить на логически эквивалентное.

В следующей теореме отражены алгебраические свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

**Теорема 3.** Следующие пары формул логически эквивалентны:

| | |
|---|---|
| 1. $A\vee(B\vee C) \Leftrightarrow (A\vee B)\vee C$ | 1’. $A\wedge(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\wedge B) \wedge C$ |
| 2. $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$ | 2’. $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$ |
| 3. $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(B\vee C)$ | 3’. $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(B\wedge C)$ |
| 4 и 4’. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ | |
| 5. $A\vee A \Leftrightarrow A$ | 5’. $A\wedge A \Leftrightarrow A$ |
| 6. $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$ | 6’. $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$ |
| 7. $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$ | 7’. $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$ |

# Задания

### Вариант 0

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $A \cap( B \cap ( \overline{A} \cup \overline{B}))$.
3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна.
Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных – 15, красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$.
6. Докажите равносильность: $\urcorner A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \urcorner A \wedge B$.

### Вариант 1

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (1, 4)$, $B = [0, 8]$.
2. Упростите выражение: $\overline{\overline{A} \cap B} \cup B$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
4. Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \vee B) \to (A \wedge B)$.
6. Докажите равносильность: $\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \urcorner B$.

**Вариант 2**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, +\infty)$, $B = [1, 4)$.
2. Упростите выражение: $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup \overline{B}\cup\overline{C}$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.
4. В группе 30 студентов. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4» и «3». Число студентов, имеющих оценки «5» - двенадцать, «4» - четырнадцать, «3» - шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и на «3», трое – лишь на «5» и «4» и четверо лишь на «4» и на «3». Сколько человек имеет одновременно оценки «5», «4» и «3»?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.
6. Докажите равносильность:

$A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

**Вариант 3**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 5]$, $B = (-\infty, 3)$.
2. Упростите выражение: $\overline{(A \cap B)\cap(\overline{A} \cup \overline{B})}$.
3. Докажите равенство: $A \cap(B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
4. Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимаются спортом и любят слушать музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(\rceil A \vee \rceil B) \wedge C \to (A \leftrightarrow B)$.
6. Докажите равносильность: $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

**Вариант 4**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 7)$, $B = (-\infty, 2)$.
2. Упростите выражение:

$(A\cap B\cap C\cap \overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$.

3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

4. Среди 35 туристов одним английским языком владеют 11 человек, английским и французским – 5 человек, 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \wedge (\rceil C \to \rceil B)) \leftrightarrow A$.

6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$.

**Вариант 5**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-3, 7)$, $B = [0, 10)$.

2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B \cup C}$.

3. Докажите равенство: $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

4. Анкетирование, проведенное среди 57 студентов, показало, что в шахматы умеют играть 35 человек, в шашки – 40 человек, причем в обе игры умеют играть 21 человек. Сколько человек не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \to \rceil B) \wedge (\rceil A \vee B)$.

6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$.

**Вариант 6**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 5]$, $B = (-\infty, 10)$.

2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

4. Из 25 студентов группы «отлично» по английскому языку по экзамену получили 10 человек, «отлично» по математике получили 14 человек. 7 студентов получили «отлично» по обоим предметам. Сколько студентов группы не имеют отличной оценки ни по математике, ни по английскому языку?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний:
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

6. Докажите равносильность:
$(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\rceil A \vee \rceil B)) \Leftrightarrow A \vee B$.

**Вариант 7**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [-2, 4)$, $B = (1, 6)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
4. В олимпиаде по математике приняло участие 10 учеников класса, в олимпиаде по биологии – 7 человек, в олимпиаде по физике – 9 человек. Известно, что в олимпиадах по математике и биологии участвовало 4 ученика, в олимпиадах по математике и физике – 5 человек, во всех трех олимпиадах – 2 ученика. Сколько школьников участвовало в олимпиадах по физике и биологии, если всего участников олимпиад было 17 человек?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$.
6. Докажите равносильность: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \rceil A \wedge \rceil B$.

**Вариант 8**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [1, 3]$, $B = [2, 10)$.
2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B} \cup A$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
4. В группе 30 студентов. Известно, что 18 человек имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. 10 студентов не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько студентов имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \vee \rceil P$.
6. Докажите равносильность: $A \vee (\rceil A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$.

**Вариант 9**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 7)$, $B = (-\infty, 5)$.
2. Упростите выражение: $A \cup (\overline{A} \cap B)$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
4. Множество M состоит из m лиц, владеющих хотя бы одним иностранным языком – английским, французским, немецким.

Известно, что английским языком владеют 70 лиц, французским – 65, немецким – 50, английским и французским – 40, английским и немецким – 30, французским и немецким – 20, а всеми тремя языками – 5. Найти m.

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge (\neg Q \rightarrow P) \vee Q$.
6. Докажите равносильность: $\neg A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

**Вариант 10**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 5)$, $B = [2, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B$.
3. Докажите равенство: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
4. В одной семье было много детей. 7 любили капусту, 6 – морковь, 5 – горох, 4 – капусту и морковь, 3 – капусту и горох, 2 – морковь и горох, 1 – все. Сколько детей в семье?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $\overline{P \rightarrow \overline{\overline{Q \wedge P}}} \rightarrow (P \vee R)$.
6. Докажите равносильность: $\neg A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B)$.

**Вариант 11**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-7, -3)$, $B = [-5, 0)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B})$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
4. В отчете об изучении иностранных языков студентами говорилось, что из 100 человек 5 изучают английский, немецкий и французский, 10 – английский и немецкий, 8 – французский и английский, 20 – немецкий и французский, 30 – английский, 23 – немецкий, 50 – французский. Тому, кто составил отчет, было указано на ошибки. Верно ли это?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow P) \vee Q)$.
6. Докажите равносильность: $A \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$.

# Пример выполнения

**Вариант 0**

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.

Решение.

Изобразим числовые множества на оси Ox (рис. 11).


Рис. 11

Исходя из определений операций над множествами и рис. 11, получим:
$A \cup B = [2; +\infty)$,
$A \cap B = (3; 7)$,
$A \setminus B = [2; 3]$,
$B \setminus A = [7; +\infty)$.

2. Упростите выражение: $A \cap (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$.

Решение.

Применяя к исходному выражению ассоциативный закон, получим:

$$(A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cap B. \qquad (1)$$

Применим к выражению $A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ дистрибутивный закон, вместо (1) получим:

$$((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cap B. \qquad (2)$$

Согласно свойству 5’ операций над множествами $A \cap \overline{A} = \varnothing$, тогда (2) перепишется в виде:

$$(\varnothing \cup (A \cap \overline{B})) \cap B. \qquad (3)$$

Согласно свойству 4 объединение пустого множества с любым множеством есть само множество: $\varnothing \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$, тогда вместо (3) получим:

$$(A \cap \overline{B}) \cap B. \qquad (4)$$

Применим к выражению (4) ассоциативный закон и перепишем его в виде:

$$A \cap (\overline{B} \cap B). \qquad (5)$$

$\overline{B} \cap B = \varnothing$ по свойству 5', тогда вместо (5) получим:

$$A \cap \varnothing. \qquad (6)$$

По свойству 4' $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Итак,

$$A \cap (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = \varnothing.$$

3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Решение.

1 способ

Согласно определению множества A и B равны (A = B), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Следовательно, необходимо доказать, что:

1. $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
2. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Для доказательства вышеуказанных включений будем использовать определения операций над множествами.

1. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Пусть $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Следовательно, равенство доказано.

2 способ

Для доказательства исходного равенства изобразим множества слева и справа от знака равенства с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 12, 13):

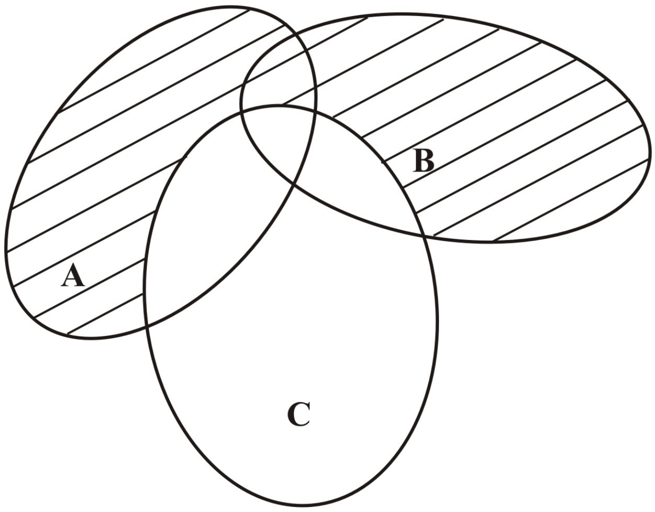



Рис. 12. (A ∪ B) \ C

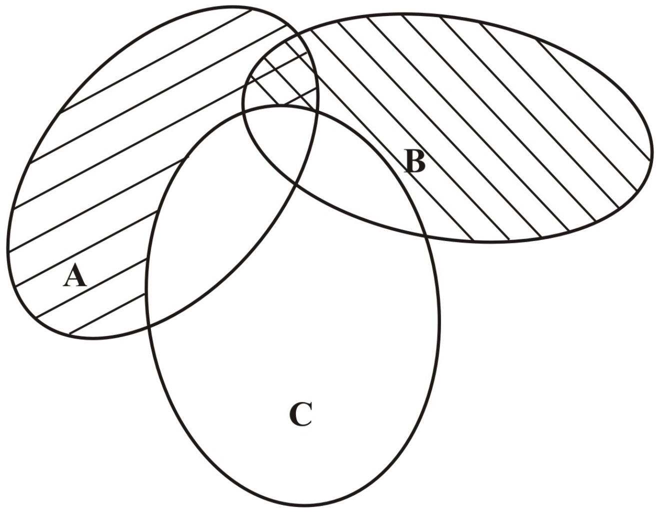



Рис. 13. (A \ C) ∪ (B \ C)

Так как диаграммы Эйлера-Венна множеств слева и справа от знака равенства совпадают, то исходное равенство доказано.

4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна. Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных – 15, красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?

Решение.

Пусть U – множество невест, $A = \{x \mid x$ – красивая невеста$\}$, $B = \{x \mid x$ – воспитанная невеста$\}$, $C = \{x \mid x$ – умная невеста$\}$.

Пусть D – некоторое конечное множество. Обозначим m(D) – число элементов в этом множестве.

Множества A, B и C – конечны. По условию:

$m(A) = 18$,

$m(B) = 21$,

$m(C) = 15$,

$m(A \cap B) = 11$,

$m(B \cap C) = 9$,

$m(A \cap C) = 7$,

$m(A \cup B \cup C) = 30$.

Требуется найти $x = m(A \cap B \cap C)$.

Изобразим указанные выше множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 14).

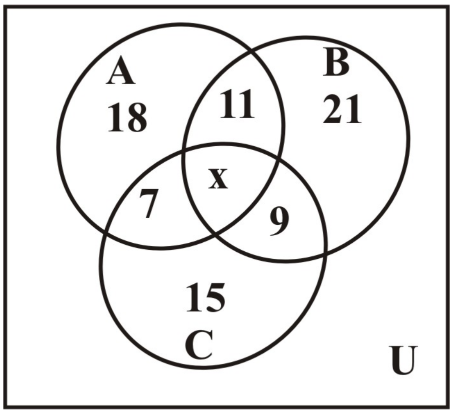



Рис. 14

Для решения задачи будем использовать следующий вывод теории множеств. Пусть A, B и C – некоторые конечные множества. Тогда для них справедливо равенство:

$$m(A\cup B\cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A\cap B) - m(B\cap C) - m(A\cap C) + m(A\cap B\cap C) \qquad (7)$$

Для двух произвольных конечных множеств A и B справедливо равенство:

$$m(A\cup B) = m(A) + m(B) - m(A\cap B) \qquad (8)$$

Выразим из формулы (7) $x = m(A\cap B\cap C)$:
$x = m(A\cup B\cup C) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A\cap B) + m(B\cap C) + m(A\cap C)$.
Подставляя числовые значения в последнее выражение, получим:
$x = 30 - 18 - 21 - 15 + 11 + 9 + 7 = 3$.
Итак, 3 невесты одновременно умны, воспитаны и красивы.

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$.

Решение.

Исходная формула содержит две элементарные формулы P и Q, поэтому в таблице истинности для нее будет $2^2 = 4$ строки.

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $Q \wedge P$ | $P \to (Q \wedge P)$ | $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

6. Докажите равносильность: $\rceil A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \rceil A \wedge B$.

Решение.

Две формулы алгебры высказываний равносильны (логически эквивалентны), если их таблицы истинности совпадают. Поэтому для доказательства равносильности составим таблицы истинности формул слева $F_1 = \rceil A \wedge (A \vee B)$ и справа $F_2 = \rceil A \wedge B$ от знака логической эквивалентности.

Формулы $F_1$ и $F_2$ содержат два простых высказывания A и B, поэтому их таблицы истинности будут содержать $2^2 = 4$ строки.

| A | B | $\rceil A$ | $A \vee B$ | $F_1 = \rceil A \wedge (A \vee B)$ | $F_2 = \rceil A \wedge B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | **0** | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | **0** | **0** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | **0** | **0** |

Поскольку таблицы истинности $F_1$ и $F_2$ совпадают (выделенные столбцы), то равносильность доказана.

# Контрольные вопросы

1. Понятие множества.
2. Числовые множества.
3. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств.
4. Понятие подмножества. Свойства включений.
5. Равенство множеств.
6. Понятие универсального множества, пустого множества, дополнения множества.
7. Графическое изображение множеств: понятие диаграммы Эйлера-Венна.
8. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность.
9. Свойства операций над множествами.
10. Понятие высказывания. Простые и сложные высказывания.
11. Понятие таблицы истинности, значений истинности.
12. Операции над высказываниями: отрицание.
13. Операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция.
14. Операции над высказываниями: импликация.
15. Операции над высказываниями: эквивалентность.
16. Порядок выполнения логических операций.
17. Понятие логически эквивалентных формул.
18. Свойства логических операций.
19. Понятие тавтологии (тождественно истинной формулы), противоречия.
20. Соответствие понятий теории множеств и математической логики.

# Рекомендуемая литература

1. Бекарева, Н. Д. Дискретная математика : учебное пособие / Н. Д. Бекарева ; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. – 80 с. - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573763 (дата обращения: 17.04.2024). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
2. Васильева, А. В. Дискретная математика : учебное пособие / А. В. Васильева, И. В. Шевелева ; Сибирский федеральный университет. – Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2016. – 128 с. - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=497748 (дата обращения: 17.04.2024). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
3. Гутова, С. Г. Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие / С. Г. Гутова, Е. С. Каган ; Кемеровский государственный университет. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 285 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600350 (дата обращения: 17.04.2024). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
4. Черняева, С. Н. Дискретная математика в программировании : практикум : учебное пособие / С. Н. Черняева, Л. А. Коробова, И. С. Толстова ; науч. ред. Д. В. Арапов ; Воронежский государственный университет инженерных технологий. – Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2023. – 61 с. - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=712741 (дата обращения: 17.04.2024). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.