МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
________О.Г.Локтионова
«13» 06 2023 г.

КИНЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельных работ по разделам дисциплин "Теоретическая механика", «Механика", "Прикладная механика"

Курск 2023 г

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Кинематика: методические указания для самостоятельных работ по разделам дисциплин "Теоретическая механика", «Механика", "Прикладная механика"/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун. Курск, 2023. 77 с., ил. 29, табл. 4. Библиогр.: с. 76.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Кинематика» курсов «Теоретическая механика», «Механика", "Прикладная механика". По основным темам раздела предложены варианты расчетных заданий для самостоятельного решения. Задания соответствуют «Примерным программам дисциплин Теоретическая механика", «Механика", "Прикладная механика" для машиностроительных и строительных специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1\16
Усл.печ.л. 4,5 .Уч.изд.л. 4.Тираж 50 экз.Заказ.534. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Кинематика» курсов «Теоретическая механика» «Механика", "Прикладная механика".

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

Требования к решению и оформлению расчетно-графических работ

1. Не следует приступать к выполнению расчетно-графических работ, не изучив соответствующего раздела курса. Если студент слабо усвоил основные положения теории и не до конца разобрался в приведенных примерах, то при выполнении работ могут возникнуть большие затруднения. Несамостоятельно выполненное задание не даёт возможность преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену или зачету.

2. Не рекомендуется приносить преподавателю сразу несколько выполненных заданий. Это не даёт рецензенту возможность своевременно указать студенту на допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

3. Расчетно-графическая работа выполняется на листах формата А4. Титульный лист заполняется в соответствии с Приложением 1. Задания, полученные студентом, должны быть выполнены подробно, аккуратно. Зачеркивания и исправления текста недопустимы. Формулировки заданий должны быть приведены полностью. Сокращения не допускаются. При необходимости приводится список литературы.

Размеры полей страниц работы: - левое поле - 30 мм; - правое поле - 15 мм; - верхнее и нижнее поле - 20 мм.

Если текст работы набран на компьютере, то при оформлении следует придерживаться требований, приведенных выше, а так же: шрифт Times New Roman размера 14 pt с межстрочным интервалом 1,5 и абзацным отступом 1,25 см.

4. Если расчетно-графическая работа выполняется без титульного листа, то при оформлении, работа должна заполняется в соответствии с Приложнием 2 и содержать: ФИО студента, номер группы и/или название факультета, номер варианта, название работы.

5. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет

величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказ учебника: студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж.

6. Необходимо указать размерность всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

7. В возвращенной расчетно-графической работе студент должен исправить все отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. В случае требования преподавателя-рецензента следует в кратчайший срок передать ему выполненные на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

К-1. Определение траектории точки, ее скорости и ускорения по заданным уравнениям движения

Краткие теоретические положения

Кинематика точки – раздел кинематики, в котором исследуется механическое движение материальных точек.

Одной из важных характеристик движения точки является **траектория ее движения**, т.е. геометрическое место последовательных (с течением времени) положений точки в пространстве.

Другими кинематическим характеристиками движения точки являются **скорость** и **ускорение**.

Скоростью точки называется векторная величина, характеризующая быстроту движения точки по траектории.

Скорость точки направлена по касательной к траектории.

Единица измерения скорости в системе СИ – метр в секунду $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Единица измерения ускорения в системе СИ – метр на секунду в квадрате (м/с^2).

Если при движении точки по траектории модуль скорости возрастает с течением времени ($\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} > 0$), то такое движение называется **ускоренным**, а при $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const} > 0$ - **равноускоренным**. Если модуль скорости при движении точки уменьшается ($\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} < 0$), то движение называется **замедленным**, а при $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const} < 0$ -

равнозамедленным. При υ = const $(\frac{d\upsilon}{dt}=0)$ движение называется **равномерным.**

Существует 3 способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1. Векторный способ.

При векторном способе движение точки задается законом изменения радиус-вектора во времени $\bar{r}=\bar{r}(t)$ (рис.1.1).

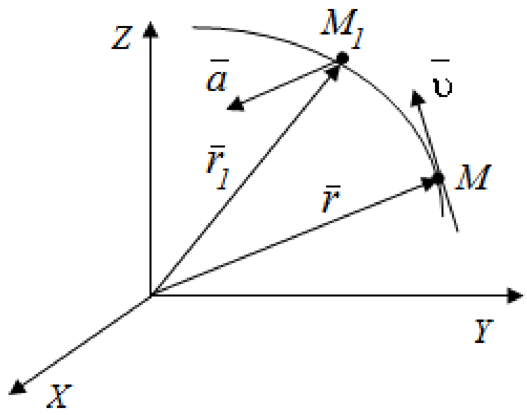


Рис.1.1. Векторный способ задания движения точки

Траекторией точки в этом случае является годограф ее радиус-вектора.

Скорость точки:

$$\bar{\upsilon}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}}\,. \tag{1}$$

Ускорение точки:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\ddot{\bar{r}} \tag{2}$$

2. Координатный способ.

При координатном способе движение точки задается координатами, как функциями времени

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t). \tag{3}$$

Эти уравнения определяют закон движения точки (рис.1.2).

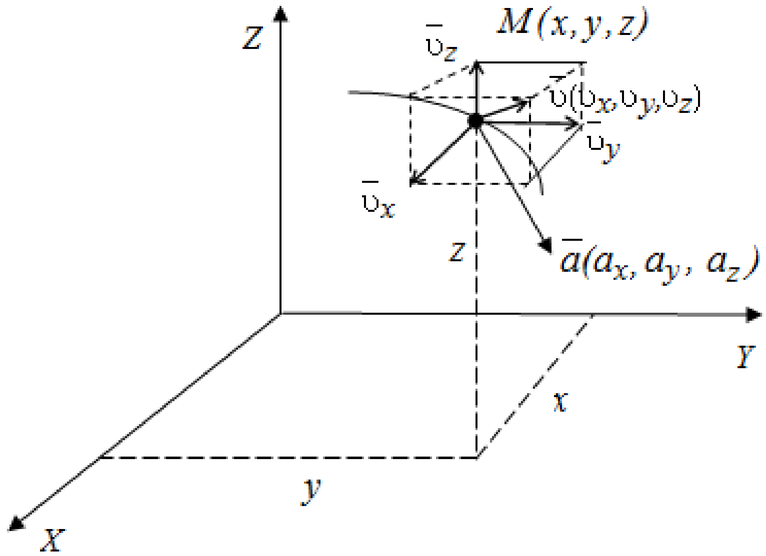


Рис. 1.2. Координатный способ задания движения точки

При координатном способе находим проекции скорости на координатные оси

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (4)$$

Скорость точки

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \qquad (5)$$

а направляющие косинусы - $\cos\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}; \quad \cos\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}; \quad \cos\gamma = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}.$

Аналогично находим проекции ускорения на оси координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \qquad (6)$$

Ускорение точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (7)$$

а направляющие косинусы - $\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}.$

3. Естественный способ.

При естественном способе известно начало отсчета на траектории, направление движения (рис.1.3) и закон движения точки вдоль траектории в виде:

$$S = f(t). \tag{8}$$

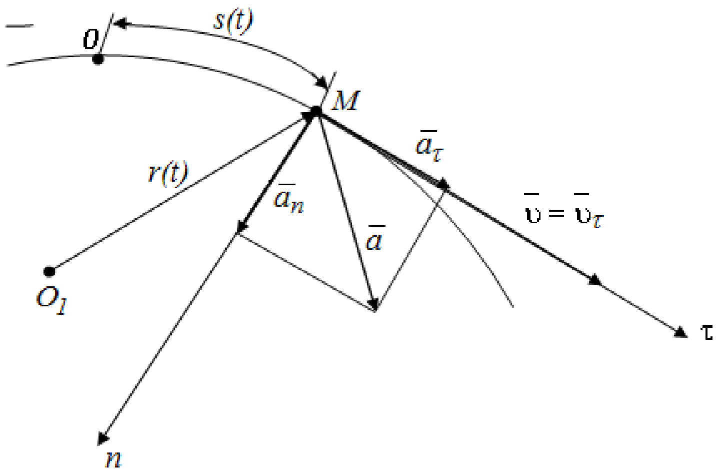


Рис.1.3. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения точки

Для нахождения скорости при естественном способе задания движения следует вычислить производную от закона изменения дуговой координаты:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \tag{9}$$

Выражение (8) с учетом (9) дает возможность получить закон изменения пройденного точкой пути от времени:

$$s = \int_0^t \upsilon\, dt = \int_0^t \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y}\, dt. \tag{10}$$

Линейное ускорение точки, как и линейную скорость, можно представить в виде суммы составляющих проекций на оси декартовой системы координат:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y, \tag{11}$$

а проекции ускорения равны первым производным от соответствующих проекций скоростей по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}. \tag{12}$$

Полное ускорение точки вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}. \tag{14}$$

Выражения проекций линейного ускорения на декартовы оси координат несут информацию только об изменении осевых составляющих скорости.

Характер изменения вектора скорости определяют проекции вектора ускорения на естественные оси кривой, по которой движется точка: касательную

и главную нормаль.

Касательное ускорение точки $\overline{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по величине и находится дифференцированием скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{15}$$

Вектор $\overline{a}_\tau$ направляется *по касательной к траектории*. Он сонаправлен с вектором скорости при ускоренном движении точки и противоположен ему в случае замедленного движения. Если точка движется с постоянной скоростью, то касательное ускорение отсутствует.

Нормальное ускорение $\overline{a}_n$ характеризует изменение скорости по направлению. Для его расчета применяется формула

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}. \tag{16}$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Вектор нормального ускорения $\overline{a}_n$ всегда направляется *к центру кривизны траектории*, то есть по главной нормали. При движении точки по прямой $a_n = 0$.

Вектор полного ускорения точки равен геометрической сумме касательного и нормального ускорений

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n. \tag{17}$$

На рисунке 1.4 показаны направления векторов скорости и ускорений точки в случае ее ускоренного движения.

Поскольку касательное и нормальное ускорения взаимно перпендикулярны, то полное ускорение точки рассчитывается по формуле:

$$a = \sqrt{a^2{}_\tau + a^2{}_n}. \tag{18}$$

Следовательно, полное ускорение точки равно нулю только в случае одновременного отсутствия касательной и нормальной составляющих, то есть при движении точки по прямой с постоянной скоростью.

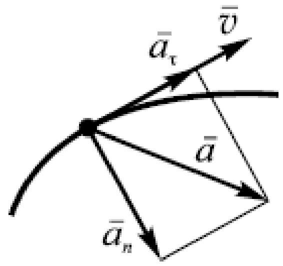


Рис.1.4

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает кинематика?
2. Основные кинематические характеристики движения?
3. Какие способы задания движения точки существуют, и в чем заключается особенность каждого из этих способов?
4. Как определяется скорость точки для различных способов задания движения?
5. Как определяется ускорение точки при естественном, векторным и координатном способах задания движения?
6. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?
7. Когда касательное ускорение при криволинейном движении равно нулю?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

По заданным уравнениям движения точки в координатной форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах) (табл. 1.1) составить уравнение траектории, построить ее. Найти законы изменения ее скорости, полного, касательного и нормального ускорений, а также изобразить на рисунке вектора скорости и ускорения и их проекции на оси координат.

Таблица 1.1

Вариант	Уравнения движения	Время	Вариант	Уравнения движения	Время
1	$x = 7t^2 - 3$ $y = 5t$	2	**8**	$x = 3t^2 - 2$ $y = -2t$	1
2	$x = 4 - 2t$ $y = t^2 - 2$	1	**9**	$x = 2t + 4$ $y = t^2 - 2$	2
3	$x = -2t$ $y = t^2 - 2$	2	**10**	$x = 7\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2$ $x = 7\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4$	1
4	$x = 2t + 2$ $y = 2t^3$	1	**11**	$x = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y = 5\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$	1
5	$x = 4 - 2t$ $y = 4 + 2t^2$	1/2	**12**	$x = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ $y = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
6	$x = 5t$ $y = -3t^2 + 2$	1/3	**13**	$x = 3 - \sin 3t$ $y = 2\sin 3t - 4$	π/9
7	$x = 3 - t^3$ $y = 2t^3 + 4$	1	**14**	$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2$ $y = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 4$	1

продолжение табл.1.1

Вариант	Уравнения движения	Время	Вариант	Уравнения движения	Время
15	$x=t^4-3$ $y=2t^2+4$	1	**24**	$x=4+t^3$ $y=2+2t^3$	1
16	$x=7t$ $y=7t^2+6$	1	**25**	$x=2\cos\pi t-1$ $y=2\sin\pi t+2$	1/4
17	$x=12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y=-4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2	**26**	$x=3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$ $y=4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
18	$x=4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y=4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	**27**	$x=5\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+3$ $y=3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	1
19	$x=3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)+2$ $y=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)-1$	1	**28**	$x=6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$ $y=3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+2$	2
20	$x=3-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y=2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2	**29**	$x=10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y=4-8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
21	$x=3-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ $y=4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	**30**	$x=-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ $y=6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)-1$	1/2
22	$x=2t^2+4$ $y=4t$	1/2	**31**	$x=4t^2+1$ $y=-3t$	1/2
23	$x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)-1$ $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)+1$	1	**32**	$x=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ $y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-1$	1

Пример выполнения заданий по теме «Определение траектории точки, ее скорости и ускорения по заданным уравнениям движения»

Законы изменения координат точки, м:

$$x = 1 - 2\cos^2\frac{\pi t}{3}; \quad y = 2\sin\frac{\pi t}{3} + 1.$$

Определить: траекторию точки; положение, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории, соответствующие моменту времени t_1=1 с.

I. Аналитическое решение задачи

1 *Определяем уравнение траектории точки аналитически.* Для этого исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку в заданных выражениях время является аргументом функций синус и косинус, то воспользуемся известным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad .$$

В нашем случае

$$\sin\frac{\pi t}{3} = \frac{y-1}{2}; \qquad \cos^2\frac{\pi t}{3} = \frac{1-x}{2}.$$

$$\sin^2\frac{\pi t}{3} + \cos^2\frac{\pi t}{3} = 1 \quad .$$

Следовательно $\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{1-x}{2} = 1; \qquad \frac{(y-1)^2}{2} - x - 1 = 0.$

Отсюда находим: $x = \frac{(y-1)^2}{2} - 1$ - уравнением траектории является парабола.

Так как $-1 \le \sin\frac{\pi t}{3} \le 1$, то движение точки происходит не по всей параболе, а по её участку -1≤y≤3.

Для построении траектории составим таблицу значений координат x и y:

x	-1	0	1	2	3
y	1	-0,5	-1	-0,5	3

В масштабе строим траекторию движения точки.

2 *Определяем координаты движущейся точки М, соответствующие моменту времени* t_1. Подставляя значение t_1 в заданные уравнения движения, находим:

$$x_1 = 1 - 2\cos^2\frac{\pi}{3} = 0{,}5 м; \quad y_1 = 2\sin\frac{\pi}{3} + 1 = 2{,}73\ м.$$

Изображаем на траектории точку M_1 с полученными координатами (рис.1.5).

Замечание: здесь и далее при расчетах численных значений величин аргумент тригонометрических функций следует подставлять в радианах.

3 *Определяем линейную скорость точки.* Для этого вначале находим законы изменения осевых проекций скорости:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}\left(-\sin\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi t}{3};$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}.$$

Тогда скорость точки

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y}\sqrt{\frac{4\pi^2}{9}\sin^2\frac{2\pi t}{3} + \frac{4\pi^2}{9}\cos^2\frac{\pi t}{3}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{2\pi t}{3} + \cos^2\frac{\pi t}{3}}\ .$$

В момент времени t_1=1 с, получаем:

$$\upsilon_{x_1} = \frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = 1{,}814 \quad м/с;$$

$$\upsilon_{y_1} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = 1{,}047 \quad м/с.$$

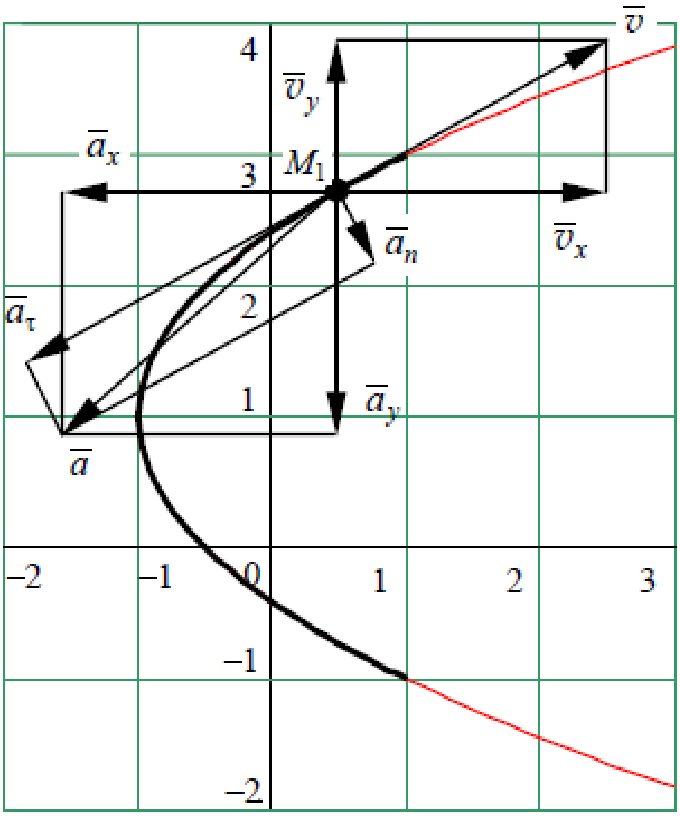


Рис.1.5. График функции $x=f(y)$

В соответствии с результатами расчетов на рисунке изображаем вектор скорости. Для этого в выбранном масштабе, например, в 1 см – 1 см/с, из точки M_1 откладываем составляющие вектора скорости υ_x и υ_y. Затем путем сложения составляющих получаем вектор скорости $\overline{\upsilon}$. При правильных расчетах и построениях этот вектор должен лежать на касательной к траектории движения, что и получилось на рисунке 5.

4 *Строим график функции* $\upsilon = f(t)$. Он изображен на рисунке 1.6. На участке от начала движения до момента времени t = 0,63 с скорость точки увеличивается, следовательно, в этот промежуток времени движение точки ускоренное, а на интервале от t = 0,63 с до t = 1,57 с скорость уменьшается, значит на нем движение точки замедленное. Далее происходит чередование этих видов движения.

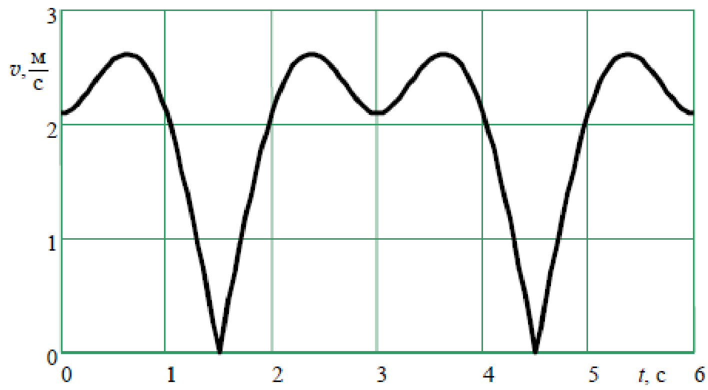


Рис.1.6. График функции υ = *f(t)*

5. *Определяем линейное ускорение точки.* Для этого находим осевые составляющие ускорения:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi t}{3}\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{2\pi t}{3};$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{2\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi t}{3}\right)\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

В момент времени t_1=1 с, получаем

$$a_{x_1} = \frac{4\pi^2}{9}\cos\frac{2\pi}{3} = -2{,}19 \quad м/с^2;$$

$$a_{y_1} == -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3} = -1{,}90 \quad м/с^2.$$

Линейное ускорение точки найдем по формуле $a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}$:

$$a = \sqrt{(-2{,}19)^2 + (-1{,}90)^2} = 2{,}9 \quad м/с^2.$$

Векторы $\bar{a}, \bar{a}_x, \bar{a}_y$ изображаем на рисунке 5, выбрав новый масштаба, напр. 1см – 2 м/с^2.

6. *Вычисляем проекции линейного ускорения точки на естественные оси координат.* Зависимость касательного ускорения от времени имеет вид:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2\pi}{3}\frac{2\sin\frac{2\pi t}{3}\cos\frac{2\pi t}{3}\frac{2\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\frac{\pi}{3}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2\pi t}{3} + \cos^2\frac{\pi t}{3}}} = \frac{\pi^2}{9}\frac{2\sin\frac{4\pi t}{3} - \sin\frac{2\pi t}{3}}{\sqrt{\sin^2\frac{2\pi t}{3} + \cos^2\frac{\pi t}{3}}},$$

или по формуле: $a_\tau = \left|\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}/\upsilon\right|$; $\quad a_\tau = \left|\dfrac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}\right|$.

Касательное ускорение от времени и t_1=1 с:

$$a_\tau = \frac{\pi^2}{9}\frac{2\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}} = -2{,}849 \quad м/с^2.$$

Знак «минус», получившийся при расчете, показывает, что в рассматриваемый момент времени движение точки является замедленным.

Поскольку $a = \sqrt{a^2{}_\tau + a^2{}_n}$, то

$$a_{n_1} = \sqrt{a^2{}_1 - a^2{}_{\tau_1}} = \sqrt{(2{,}9)^2 - (-2{,}849)^2} = 0{,}541 \quad м/с^2,$$

или по формуле: $a_n = |\vec{\upsilon} \times \vec{a} / \upsilon|$; $a_n = \left|\dfrac{\upsilon_x a_y - \upsilon_y a_x}{\upsilon}\right|$.

Изображаем на рисунке векторы касательного и нормального ускорений $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n$ в том же масштабе, в котором ранее изображались векторы ускорений (в 1 см – 2 м/с2). Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движения. Поскольку в нашей задаче касательное ускорение получилось отрицательным, то оно направлено в сторону, противоположную направлению вектора скорости. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно касательному к центру кривизны траектории. Векторная сумма касательного и нормального ускорений оказалась равна вектору полного ускорения, полученного через осевые проекции. Этот факт подтверждает правильность расчетов.

7 *Определим радиус кривизны траектории в точке* M_1 .

Для этого используем формулу $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$. Из неё получаем:

$$\rho = \frac{a_n}{\upsilon^2} = \frac{2{,}09^2}{0{,}541} = 8{,}07\,м.$$

Из описания решения следует, что построение графика с нанесением векторов скоростей и ускорений позволяет проверить правильность аналитических расчетов. При этом должны выполняться следующие условия:

– точка с координатами x_1, y_1 должна попасть на изображенную траекторию;

– вектор скорости υ_1, построенный как диагональ прямоугольника со сторонами υ_{x_1} и υ_{y_1}, должен быть направлен вдоль касательной к траектории в точке с координатами x_1, y_1;

– векторы ускорений, полученные как диагонали прямоугольников со сторонами a_{x_1}, a_{y_1} и $\bar{a}_{\tau_1}, \bar{a}_{n_1}$, должны совпасть.

II. Численное решение задачи с помощью компьютерной программной среды MATHCAD

Для этого откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Вводим исходные уравнения движения *x(t)*, *y(t)*, и t_1, используя оператор присваивания ":=", который применятся для задания значений переменным.

Подготовка вычислительных блоков облегчается благодаря выводу шаблона при задании того или иного оператора. Для этого служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций.

Вычисления выполняются посимвольным набором левой части вычисляемого выражения и установкой после него оператора вывода – знака «=» (равно).

Дифференцирование функций *x(t)* и *y(t)* происходит с помощью оператора $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$ и $\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$ на панели "Математический анализ". Для символьного вывода полученного ответа ввести оператор "$\rightarrow$", для численного вывода - оператор«=».

Аналогично, с помощью символьных редакторов, определяем модули $a_т$ и a_τ ускорений и радиус кривизны траектории ρ.

Листинг вычислений приведен на рисунке 1.7.

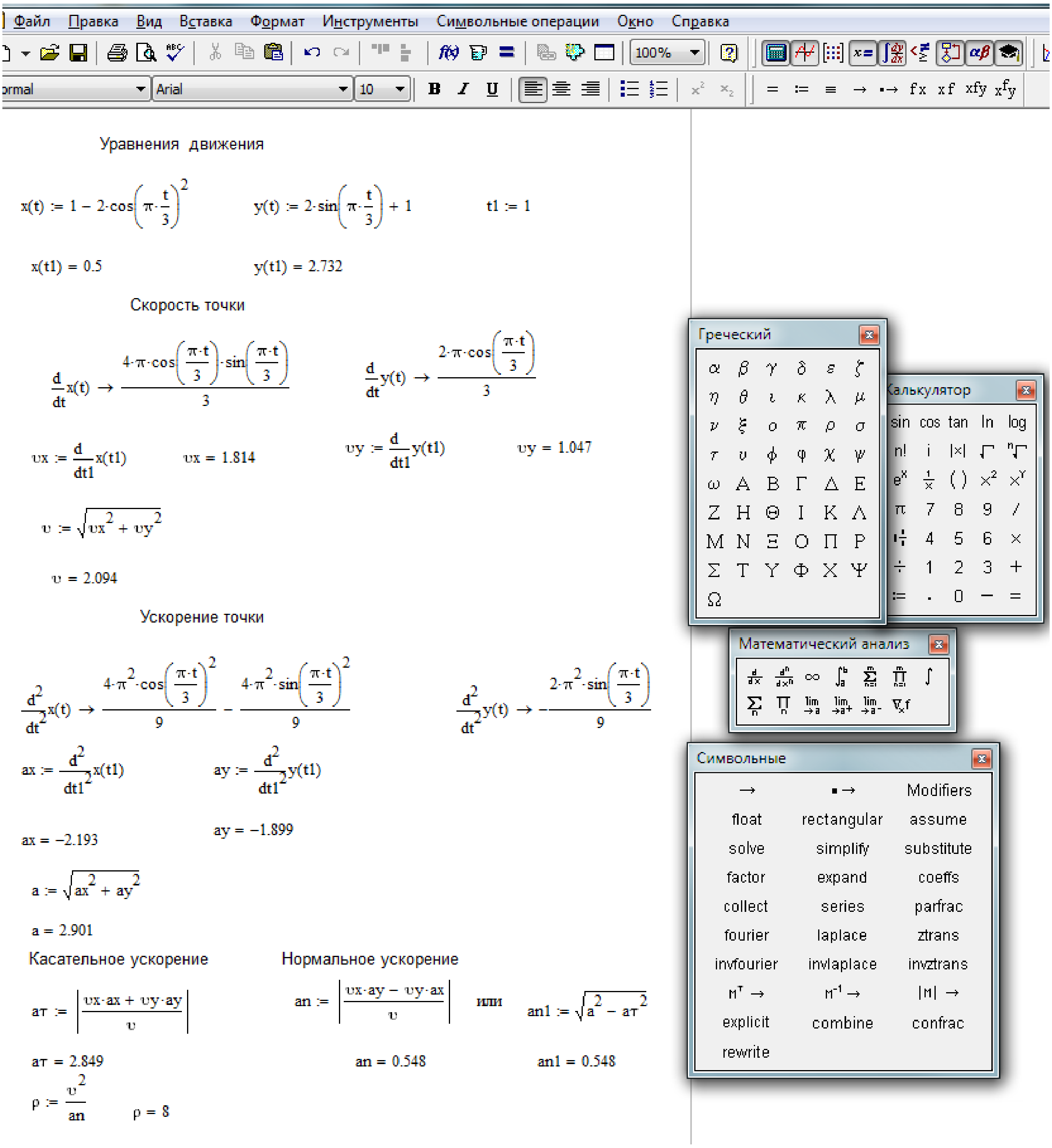


Рис.1.7. Листинг вычислений

Для построения графиков функций $x=f(y)$ и $\upsilon= f(t_2)$ введём параметр t_2 как дискретный расчетный интервал времени, с шагом 0,1 и на панели инструментов "График" щелкаем на кнопке с изображением графика – на экране появится шаблон графика. Введём в место ввода по оси X и Y - $x(t_2)$ и $y(t_2)$ - имя независимого аргумента. Отведём от графика указатель мыши и щелкаем левой кнопкой – график траектории движения будет построен. Далее, аналогично, построим график $\upsilon = f(t_2)$.

Если Вы хотите просмотреть матрицу значений $x(t_2)$ и $y(t_2)$, то сразу ниже графика $x=f(y)$ выводим их значения с помощью оператора вывода – знака «=» (равно). Справа в таблице имеется полоса прокрутки, с помощью которой можно просмотреть значения t_2 в интервале от 0 до 6.

Листинг с построенными графиками приведен на рисунке 1.8.

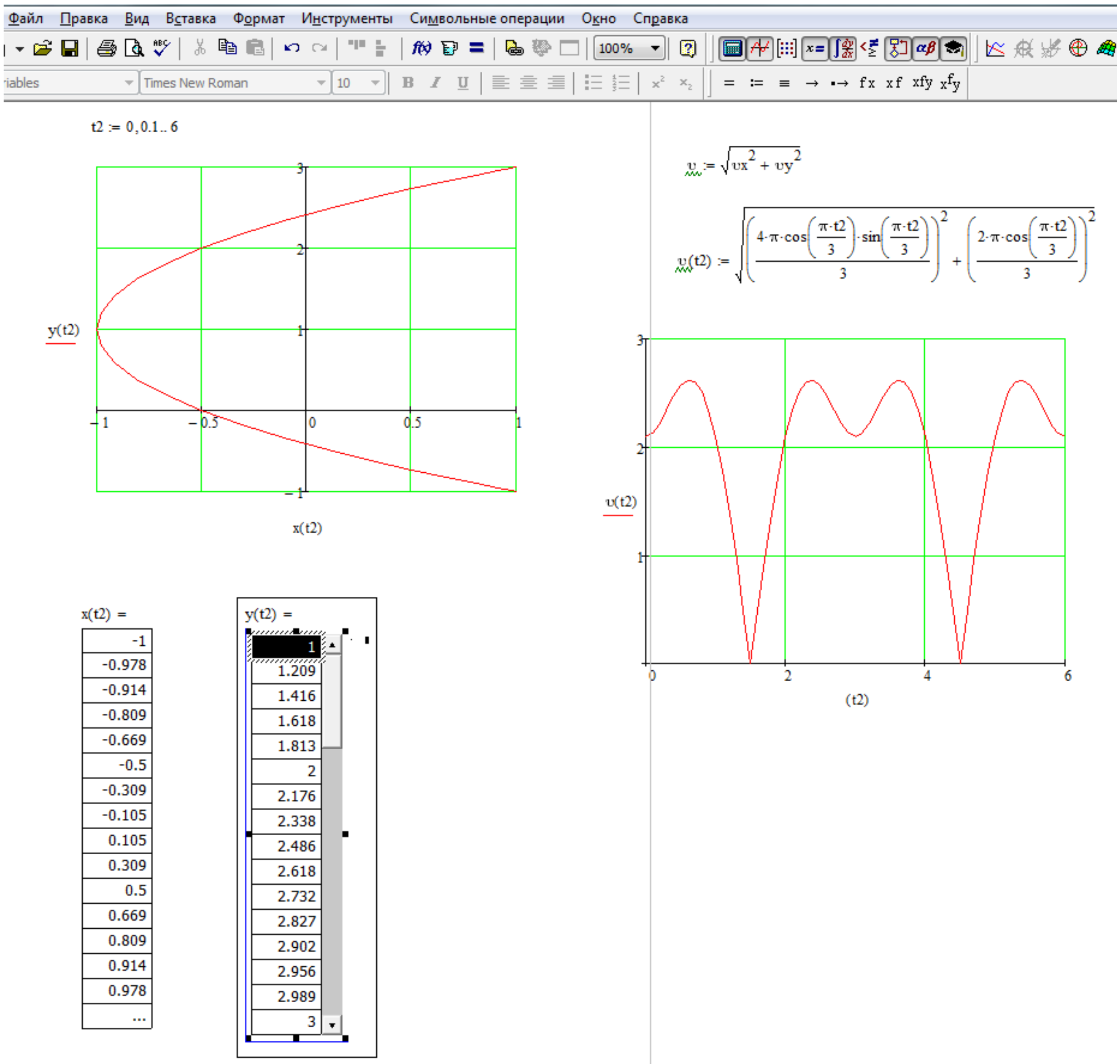


Рис. 1.8. Создание декартовых графиков

Выведем на печать графики функций $x=f(y)$ и $\upsilon = f(t)$. На графике функций $x=f(y)$ отметить точку $M_1(x,y)$ и в соответствии с результатами расчетов, выбранным масштабом, изобразить вектора скоростей и ускорений.

2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

К-2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Преобразование простейших движений

Краткие теоретические положения

К простейшим видам движения твердого тела относятся поступательное и вращательное движение.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной самой себе при его перемещении.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Действительно, если какая-то точка тела M совершает движение по траектории MM_1 (рис. 2.1), то другая точка N совершает точно так же движение по траектории NN_1, поскольку отрезок MN смещаясь, остаётся параллельный своему начальному положению. Все точки кривой MM_1 совпадут с соответствующими точками кривой NN_1 при смещении их вдоль линии, параллельной MN.

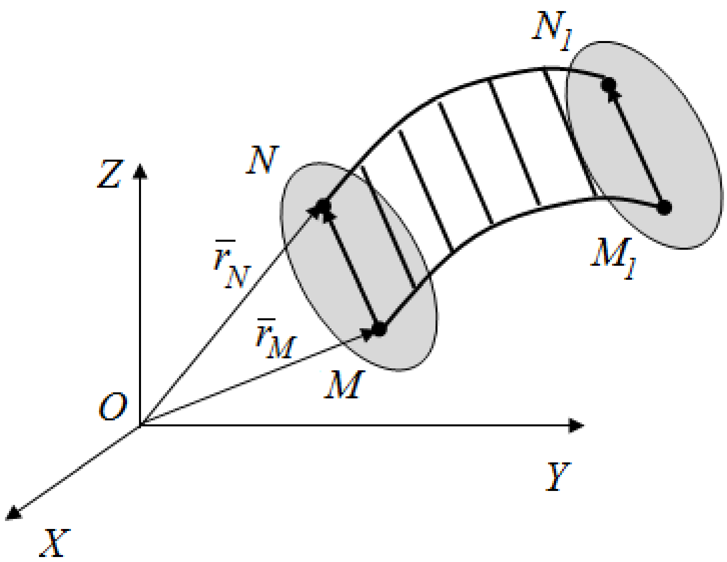


Рис. 2.1. Поступательное движение твердого тела

Можно записать очевидное соотношение между радиусами-векторами точек:

$$\bar{r}_N = \bar{r}_M + \overline{MN}. \tag{1}$$

Тогда

$$\bar{\upsilon}_N = \frac{d\bar{r}_N}{dt} = \frac{d\bar{r}_M}{dt} + \frac{d\overline{MN}}{dt} = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{\upsilon}_M, \tag{2}$$

так как производная по времени от вектора MN, который остаётся при движении постоянным не только по модулю, но и по направлению, равна нулю.

Вторично дифференцируя полученное равенство, заключаем, что:

$$\bar{a}_N = \frac{d\bar{\upsilon}_N}{dt} = \frac{d\bar{\upsilon}_M}{dt} = \bar{a}_M. \tag{3}$$

Таким образом, если задать закон движения одной точки поступательно движущегося тела, то тем самым будет дана исчерпывающая информация о кинетике всего тела.

Необходимо заметить, что лишь при поступательном движении тела можно говорить о линейных скорости и ускорении тела. Во всех иных видах движения тела выражение «скорость тела» или «ускорение тела» теряет смысл, так как каждая точка тела будет иметь отличные от других точек скорость и ускорение.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется <u>осью вращения</u> *AB* (рис.2.2). Положение тела при этом однозначно определяется значением угла поворота тела φ между некоторой неподвижной плоскостью *I*, проходящей через ось вращения, и плоскостью *II*, жестко связанной с телом и тоже проходящей через ось вращения.

Положение вращающегося тела в пространстве в любой момент времени определяется законом вращения:

$$\varphi = f(t).$$

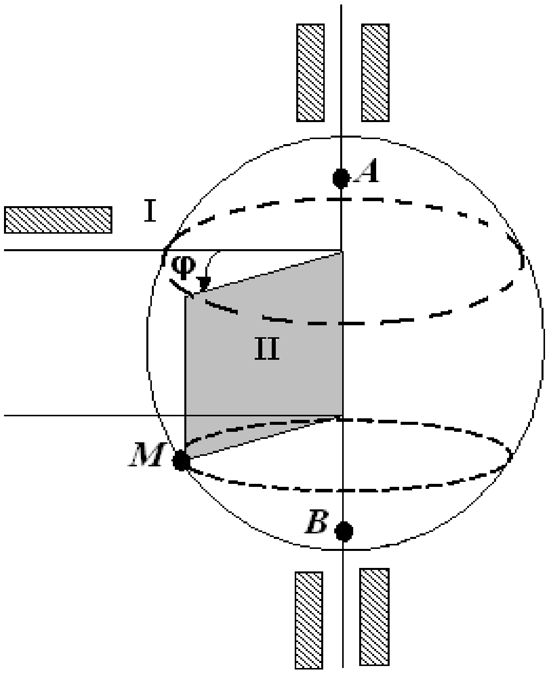


Рис. 2.2. Вращательное движение твердого тела

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость и угловое ускорение.

Угловой скоростью называется кинематическая мера вращательного движения, выражаемая вектором, равным по модулю абсолютному значению производной угла поворота тела по времени, и направленным вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против часовой стрелки.

Модуль угловой скорости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \tag{4}$$

а его размерность может обозначаться по-разному:

$$[\omega] = \text{рад/с} = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}.$$

В технической литературе часто используется величина угловой скорости n, измеряемая в оборотах в минуту. Между величинами ω и n при этом легко установить следующую связь:

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30, \qquad (5)$$

поскольку один оборот составляет 2π радиан, а минута состоит из 60 секунд.

Угловым ускорением называется мера изменения угловой скорости тела, равная производной от угловой скорости по времени

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Модуль углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}, \qquad (6)$$

а его размерность может обозначаться, например, как

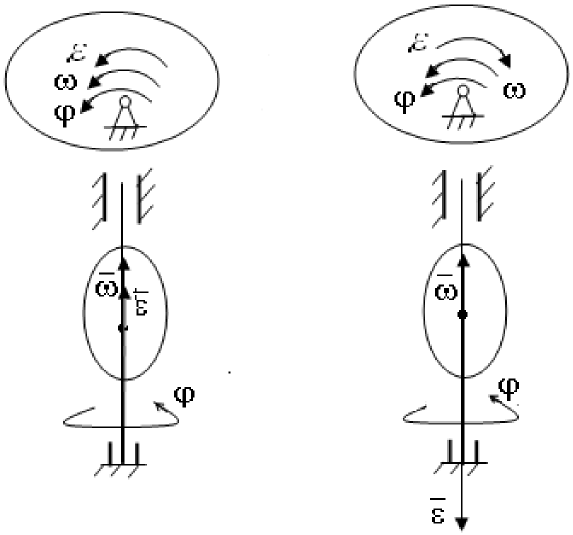
$$[\varepsilon] = \text{рад/с}^2 = 1/\text{с}^2 = \text{с}^{-2}.$$

Модуль угловой скорости показывает, как быстро вращается тело, а модуль углового ускорения – как быстро изменяется модуль угловой скорости.

Угловая скорость и угловое ускорение – величины векторные, направленные вдоль оси вращения (рис. 3), причем вектор $\bar{\omega}$ направлен в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки.

В случае ускоренного движения $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают по направлению (рис. 2.3, *а*), в случае замедленного – направлены в противоположные стороны (рис. 2.3, *б*).

При $\varepsilon = 0$, угловая скорость будет постоянна ($\omega = \omega_0 = \text{const}$). Это есть случай равномерного вращения, когда за равные промежутки времени тело поворачивается на один и тот же угол.



а) *б)*

Рис. 2.3. Направление угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении твердого тела: *а* – ускоренное движение; *б* – замедленное движение

Закон равномерного вращения:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 . \tag{7}$$

В случае постоянного углового ускорения ($\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$) говорят о равнопеременном вращении:

$$\omega = \varepsilon_0 \cdot t + \omega_0, \quad \varphi = \varepsilon_0 \cdot t^2 / 2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0. \tag{8}$$

Скорость и ускорение точек при вращательном движении

При вращательном движении точки тела движутся по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а радиусы равны расстояниям от точек до оси вращения.

Скорость точек тела определяется по следующей формуле:

$$\upsilon_A = \omega \cdot h, \tag{9}$$

где υ_A – скорость точки; ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

На рис. 2.4 представлена картина распределения скоростей точек, из которой видно, что скорость точки зависит от ее расстояния до оси вращения.

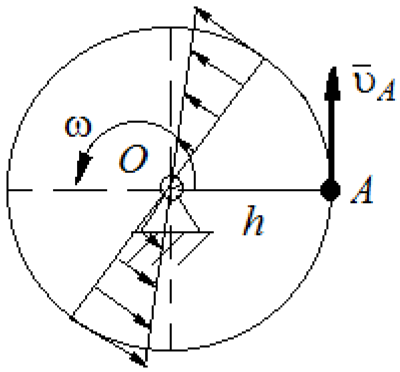


Рис. 2.4. Картина распределения скоростей точек тела, совершающего вращательное движение

Ускорение точки тела, совершающего вращательное движение, раскладывается на касательное и нормальное ускорения (рис. 2.5).

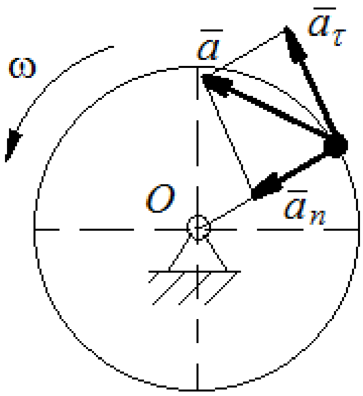


Рис. 2.5. Направление ускорений точки тела

Модуль касательного ускорения:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},$$

но $\upsilon = \omega \cdot h$, тогда получим:

$$a_\tau = h\,\frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon, \tag{10}$$

где ε – угловое ускорение.

Модуль нормального ускорения:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho},$$

но $\rho = h$, $\upsilon = \omega \cdot h$,
получим:

$$a_n = \omega^2 \cdot h. \tag{11}$$

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{12}$$

Преобразование простейших движений твердого тела

Под преобразованием простейших движений обычно понимают:

а) преобразование вращательного движения в поступательное (и обратное преобразование);

б) преобразование вращения вокруг одной неподвижной оси во вращении вокруг другой неподвижной оси;

в) преобразование одного поступательного движения в другое поступательное движение.

При решении задач о движении механизмов, преобразующих простейшие движения, следует пользоваться совместно формулами кинематики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется вращательным?
2. Чем определяется положение твердого тела при вращательном движении??
3. По каким формулам определяются модули угловой скорости и углового ускорения тела, совершающего вращательное движение?

4. В каких единицах измеряются угловая скорость и угловое ускорение?

5. Что такое частота вращения?

6. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении вокруг оси?

7. Какое вращение называется равномерным? Запишите выражение для угла поворота и угловой скорости при равномерном вращении.

8. Какое вращение называется равнопеременным? Запишите выражение для угла поворота и угловой скорости при равнопеременном вращении?

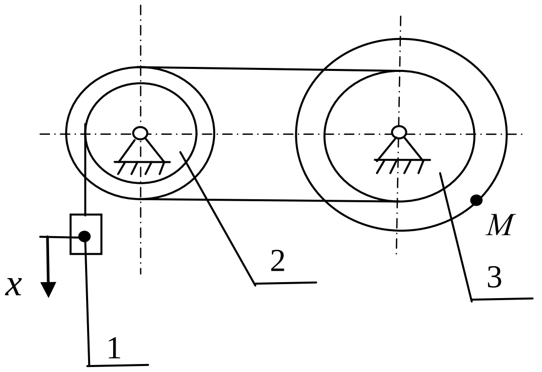
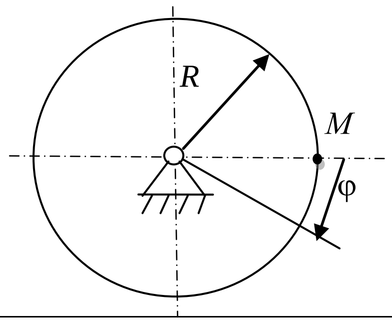
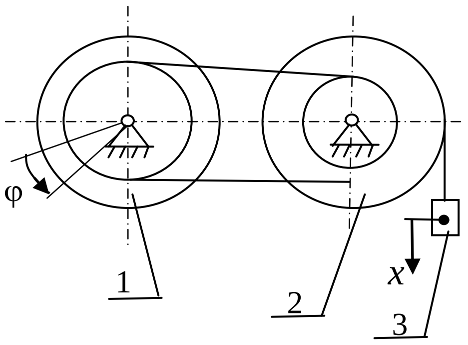
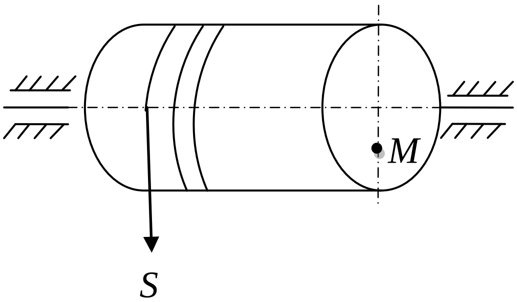
9. Как находятся модули скоростей и ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

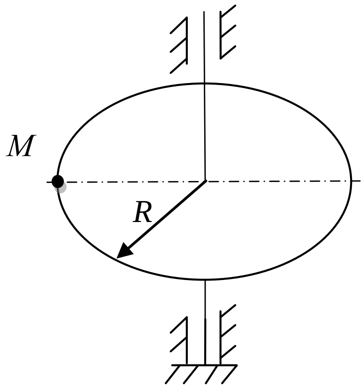
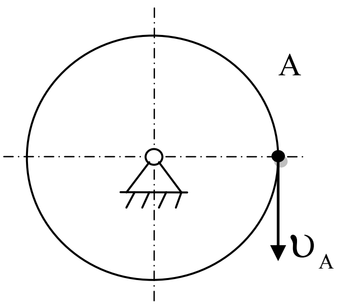
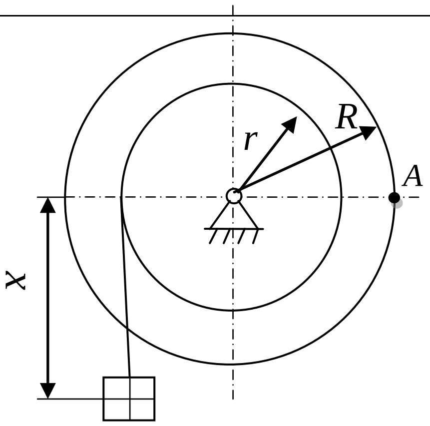
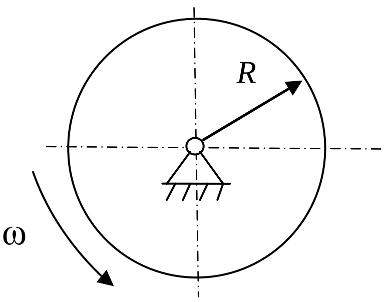
10. Как определить модули составляющих ускорения точки при вращательном движении?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

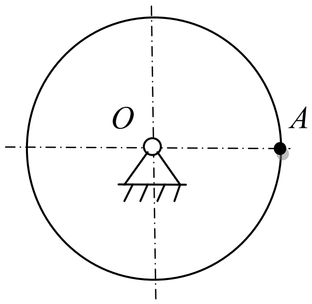
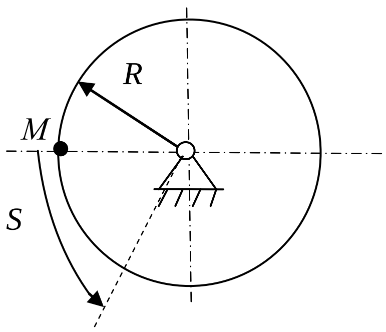
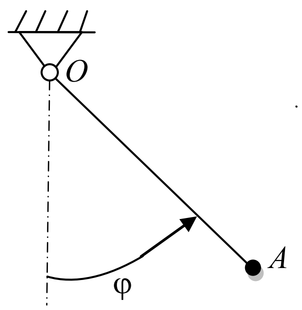
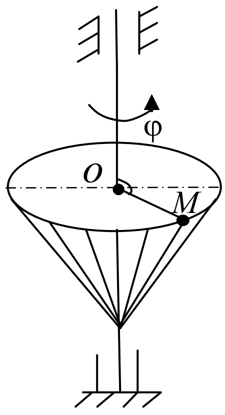
Решить задачи в соответствии с вариантами таблицы 2.1

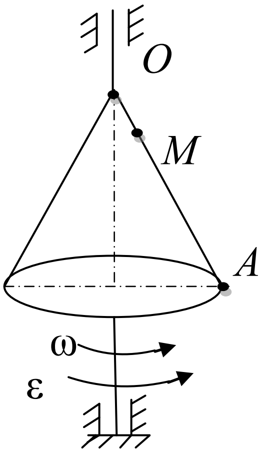
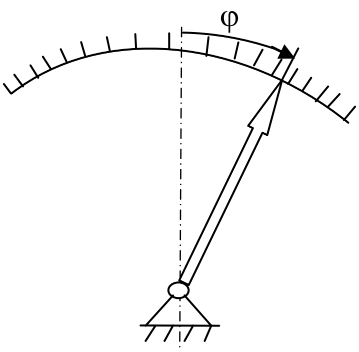
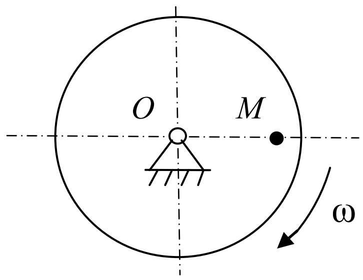
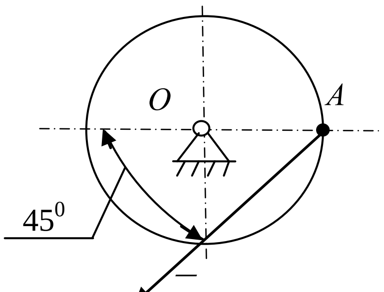
Таблица 2.1

1		Груз, движущийся по закону $x=2t^2+1$ (см), приводит в движение механизм. Определить для точки M в момент времени $t_1=1$с) скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорение. Показать на рисунке соответствующее векторы ($R_2=20$ (см), $r_2=10$ (см), $R_3=40$ (см), $r_3=20$ (см)).
2		Диск, радиуса 40 см, вращается по закону $\varphi=0{,}2\pi t^2$ (рад). Определить его угловую скорость, а также вращательное и центростремительное ускорения точки M после того, как диск совершит 1 оборот.
3		Блок 1 вращается $\varphi=3t^2+4$ (рад) и приводит в движение механизм. Определить для груза 3 в момент времени $t_1=2$ (с) скорость и ускорение ($R_1=40$ (см), $r_1=25$ (см), $R_2=30$ (см), $r_2=20$ (см)). Показать на рисунке соответствующие векторы.
4		Конец нити, сматывающейся с катушки радиусом $R=0{,}8$ *(м)*, движется вертикально по закону $S=0{,}4\pi t^2$ *(м)*. Определить для точки M, лежащей на середине радиуса катушки, скорость, вращательное и центростремительное ускорения в момент времени $t=0{,}25$ *(с)*.

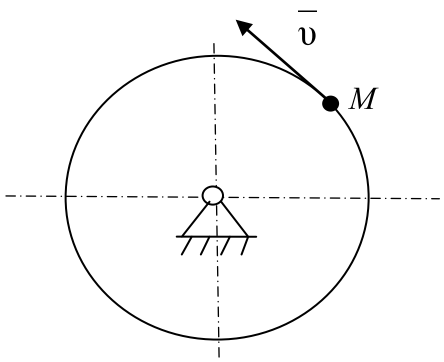
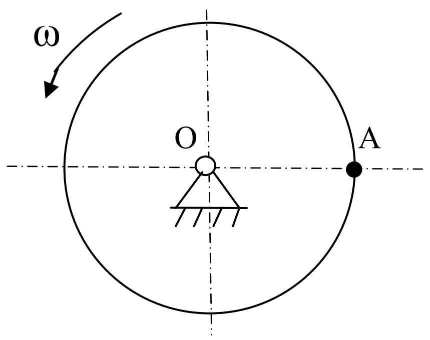
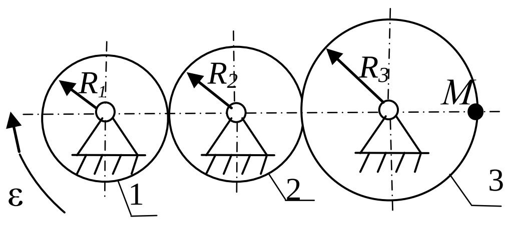
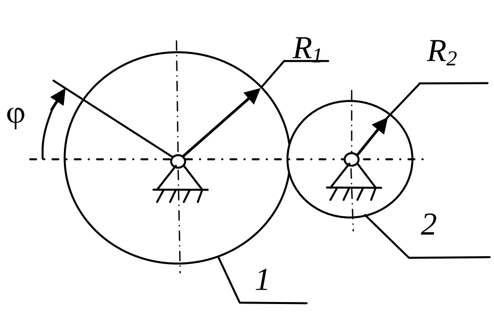
5		Диск радиусом *R=0,5 (м)* вращается равнозамедленно. Известно, что точка *М*, лежащая на ободе диска, прошла до остановки путь *S=6,4 (м)*, имея в начальный момент времени скорость $\upsilon_0=0{,}8$ *(м/с)*. Определить угловую скорость, угловое ускорение, а также модули составляющих ускорения точки в начальный момент времени.
6		Точка *А*, лежащая на ободе вращающегося диска радиусом *R=90 (см)*, имеет в начальный момент времени скорость $\upsilon_0=120$ *(см/с)*, через время *t=10 (мин)* ее скорость стала равной $\upsilon=150$ *(см/с)*. Определить для этого момента времени вращательное и центростремительное ускорение точки, если движение равноускоренное.
7		Груз, прикрепленный к концу нити, намотанной на катушку радиусом *r=4 (см)*, начинает опускаться по закону $x=8t^2$*(см)*. Определить скорость и ускорение точки *А*, отстоящей от оси катушки на расстоянии *R=4,5 (см)*, в момент времени *t=0,5 (с)*.
8		Колесо радиусом *R*=80 (см) начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя. После того, как оно совершило *N*=750 оборотов, скорость точки на его ободе оказалась равной 200 (м/с). Определить время, за которое достигнута указанная скорость.

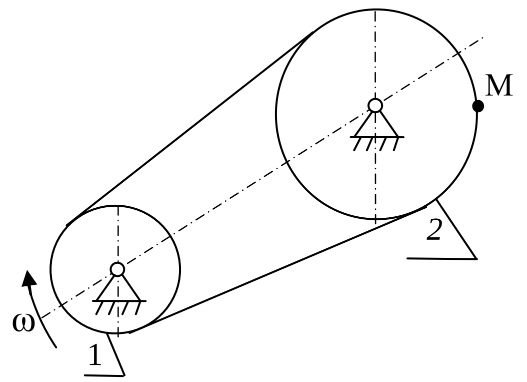
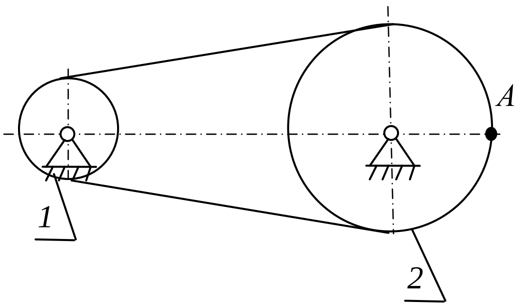
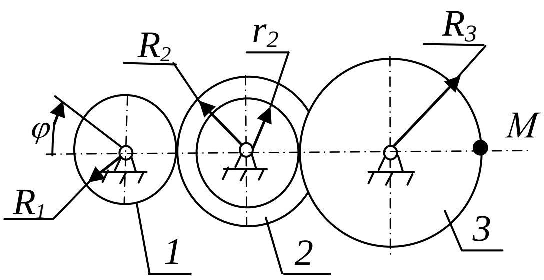
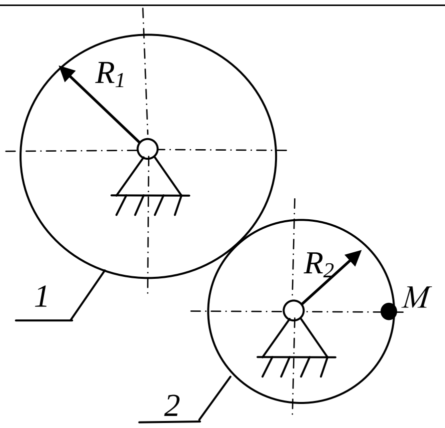
продолжение таблицы 2.1

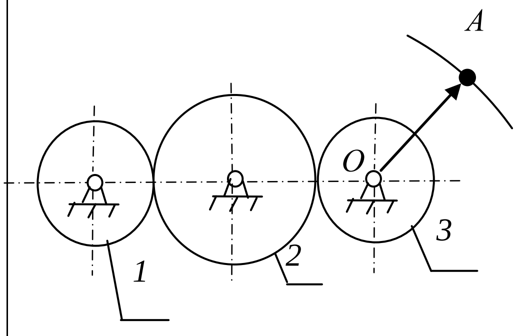
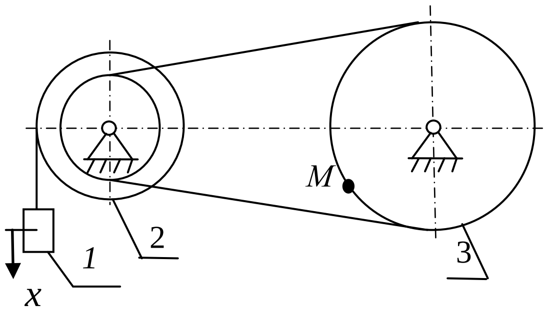
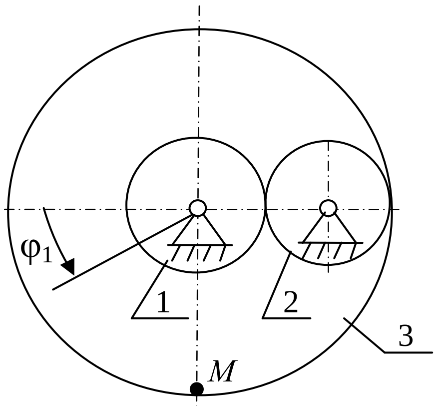
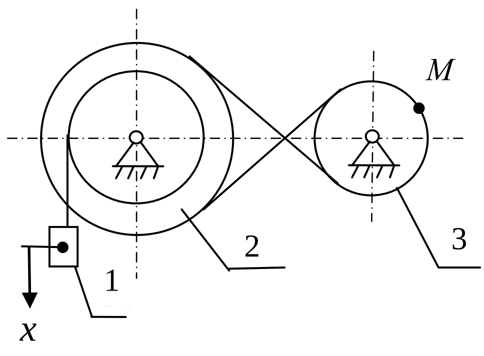
9		Диск радиусом *R=2,5 (см)* вращается равноускоренно. Известно, что через $t_1=2$ *(с)* после начала движения скорость точки *A* на его ободе оказалась равной *10 (см/с)*, а при $t_2=4$ *(с)* − вдвое большей. Определить вращательное и центростремительное ускорение точки в указанные моменты времени.
10		Точка *M* обода маховика радиусом *R*=1,5 (м) движется по закону $S=\pi(t^3-3t)/3$, (м). Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика, модули составляющих ускорения точки *M* в момент, когда ее скорость $\upsilon=9\pi$ (м/с), а также число оборотов, которое совершит маховик к этому моменту времени.
11		Стержень длиной *l=1,92* м колеблется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi=\pi/12[\sin(\frac{3}{4}\pi)t]$ (рад). Определить скорость и ускорение точки *A* стержня в момент времени, когда угловая скорость достигнет наибольшей величины
12		Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=2\pi(4t^2-t)$, (рад). Определить в момент времени *t=8* (с) его угловую скорость и угловое ускорение, скорость и ускорение точки *M*, отстоящей от оси на расстояние *OM=5* (см). Найти также число оборотов, которое совершило тело за это время.

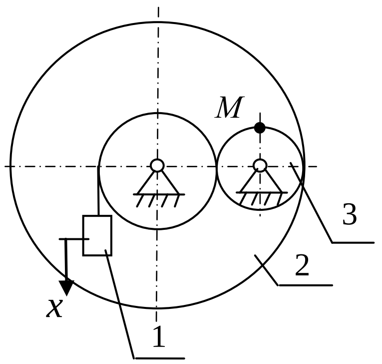
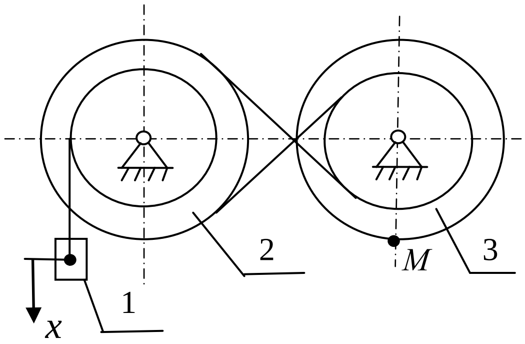
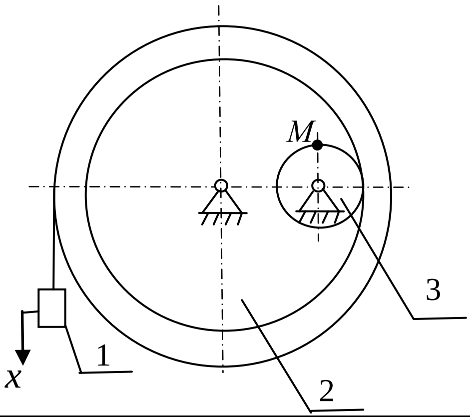
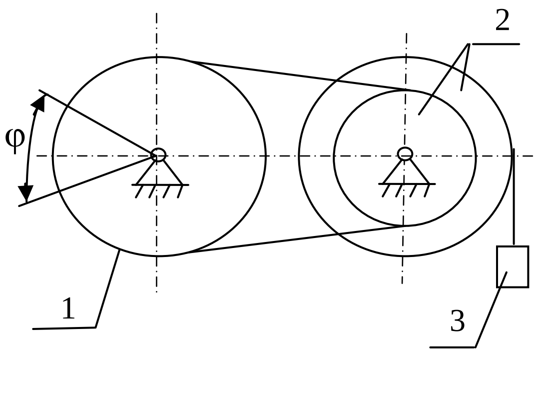
13		Конус с углом при вершине 30^0 радиусом основания $R=48(см)$ вращается вокруг вертикальной оси, имея в данный момент времени угловую скорость $\omega_0=8$ $(рад/с)$ и угловое ускорение $\varepsilon_0=12$ $(рад/с^2)$. Определить для точки M скорость, вращательное и центростремительное ускорение, зная, что $OM=OA/3$.
14		Стрелка манометра длиной l=6 (см) совершает колебания вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \frac{\pi}{30} sin\, 0{,}2\pi\, sin \frac{\pi}{5} t$ (рад). Определить моменты времени, в которые угловая скорость и угловое ускорение обращается в нуль, а также скорость и ускорение точки, находящейся на конце стрелки, в момент времени $t=0{,}1$ (с).
15		Диск начинает равноускоренно вращаться из состояния покоя и за время t=10 (с) совершает N=20 оборотов. Определить ускорение точки M диска, отстоящей от оси на расстояние OM=0,2 (м), в момент времени t_1=5 (с).
16		Диск начинает вращаться равноускоренно с угловым ускорением ε=16 (рад/с) из состояния покоя. Определить, в какой момент времени ускорение точки A будет составлять с радиусом угол 45^0.

продолжение таблицы 2.1

17		Диск радиусом *R*=0,15 (м) в момент времени, когда скорость точки *M* на его ободе υ=0,48 (м/с), начинает вращаться равнозамедленно. До полной остановки диска точка *M* прошла путь *S*=0,4 (м). Определить в указанный момент времени ее ускорение, а также угловую скорость и угловое ускорение диска.
18		Диск радиусом *R*=1 (м), вращаясь с постоянным ускорение, за время t=π/4 (с) повернулся на угол 90^0, при этом скорость точки *A* оказалась равной 4(м/с) (в начальный момент времени диск был неподвижен). Определить угол между скоростью и ускорением точка *A* в указанный момент времени, а также угловое ускорение точки.
19		Зубчатое колесо 1 вращается равнопеременно с угловым ускорением ε_1=4 (рад/с²). Определить скорость точки *M* в момент времени *t*=2 (с), если радиусы зубчатых колес R_1=0,4(м), R_3=0,5 (м). Движение начинается из состояния покоя.
20		Колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1=20t$ (рад). Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время *t*=3,14 (с), если радиусы колес R_1=0,8 (м) и R_2=0,5 (м).

21		Шкив *1* при вращении совершает 120 (об/мин). Радиус второго шкива в 1,5 раза больше, чем первого. Определить скорость и полное ускорение точки *M*, указать их направления, зная, что R_1=0,2 (м).
22		Шкив 1 начинает вращаться равноускоренно по закону $\varphi_1=8+t-2t^2$. При t=3 (с) найти скорость и ускорение точки *A* на втором шкиве, если R_1=10 (см), R_2=40 (см).
23		Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1=4t^2$, (рад). Определить скорость точки *M* в момент времени $t=2$ (с), если радиусы зубчатых колес $R_1=0,4$ (м), $R_2=0,8$ (м); $r_2=0,4$(м), $R_3=1$(м).
24		Колесо *1* зубчатой передачи вращается по закону $\varphi_1=2t$ (рад) и приводит в движение колесо *2*. Найти ускорение точки *M* обода второго колеса, если R_1=0,1 (м), R_2=0,05 (м).

25		Система зубчатых колес приводит в движение закрепленную на колесе *3* стрелку прибора *OA* длиной 0,20 (м). Закон движения первого колеса в радианах $\varphi_1 = \frac{\pi}{8} cos \frac{15}{4} t$, радиусы R_1=5 (см), R_2=12 (см), R_3=10 (см). Найти для точки *A* скорость и ускорение в момент времени t=π (с).
26		Груз, движущийся по закону $x=2t^2+1$ (см) приводит в движение механизм. Определить для точки *M* в момент времени t_1=1 (с) скорость, вращательное центростремительное и полное ускорение. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_2= 20 (см), r_2= 10 (см), R_3=40 (см).
27		Шестерня радиусом R_1=4 (см) редуктора вращается по закону $\varphi_1=3t^2$ (рад). Определить угловые скорости всех шестерен, а также скорость и ускорение точки *M* при t=4 (с) (R_2=4 (см)).
28		Груз, движущийся по закону $x=2+3t^2$ (см), приводит в движение механизм. Определить для точки *M* в момент времени t_1=1 (с) скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорения. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_2=40 (см), r_2=20 (см), R_3=20 (см)).

29		Груз движущийся по закону x=1+2t^2 (см) приводит в движение механизм. Определить для точки M в момент времени t_1=1 (с) скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорения. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_2=30 (см), r_2=15 (см), R_3=10 (см)).
30		Груз, движущийся по закону x=2t², (см), приводит в движение механизм. Определить для точки M в момент времени t_1=1,5 (с) скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорения. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_2=20 (см), r_2=10 (с), R_3=40 (см), r_3=30 (см))
31		Груз, движущийся по закону $x=2t^2$, (см), приводит в движение механизм. Определить для точки M в момент времени t_1=2 (с) скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорения. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_2=40 (см), r_2=20 (см), R_3=10 (см)).
32		Блок 1 вращается по закону φ=t^2+2 (рад) и приводит в движение механизм. Определить для груза 3 в момент времени t_1=1 (с) скорость и ускорение. Показать на рисунке соответствующие векторы (R_1=30 (см), r_2=10 (см), R_2=25 (см)).

Примеры выполнения заданий по теме «Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Преобразование простейших движений».

Задача 1.

Движение груза 1 (рис. 2.6) задается уравнением $S=2t^2$.

Определить скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 3, в момент времени $t_1 = 2$ с, если $R_2 = 10$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 20$ см.

Решение

Так как груз 1 совершает поступательное движение, то его скорость

$$\upsilon_1 = \frac{ds}{dt} = 4t\,.$$

Угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \upsilon_1/R_2 = 4t/R_2.$$

Найдем скорость точки касания двух колес:

$$\upsilon_к = \omega_2 \cdot r_2,$$

с другой стороны,

$$\upsilon_к = \omega_3 \cdot R_3,$$

отсюда получим

$$\omega_2 \cdot r_2 = \omega_3 \cdot R_3.$$

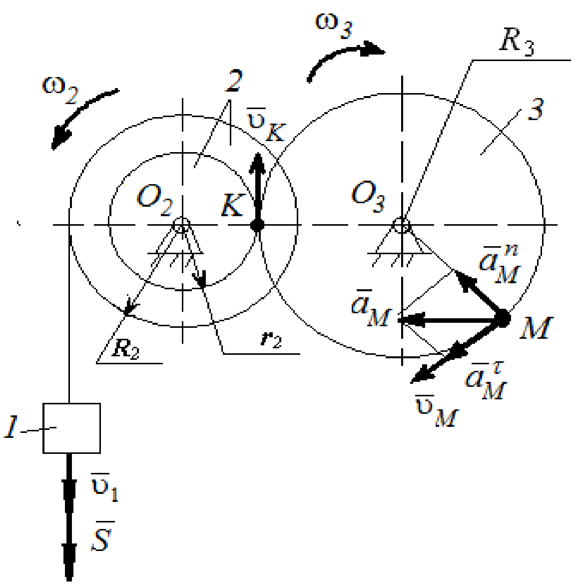


Рис. 2.6. Схема механизма

Угловая скорость колеса 3:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = \frac{4tr_2}{R_2 R_3}.$$

Угловое ускорение колеса 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{4r_2}{R_2 R_3}.$$

Скорость точки *M:*

$$\upsilon_M = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{4tr_2}{R_2}.$$

Модуль касательного ускорения:

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = \frac{4r_2}{R_2}.$$

Модуль нормального ускорения:

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3.$$

Величина полного ускорения точки *M*:

$$a_M = \sqrt{a_M^{n\,2} + a_M^{\tau\,2}} = R_3\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Подставляя данные, получим:

$\upsilon_M = 4$ (см/с); $a_M^\tau = 2$ (см/с^2); $a_M^n = 0{,}8$ (см/с^2); a_M=2,2 (м/с^2).

Задача 2.

Определение скорости и ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Маховик, вращаясь со скоростью n_0 = 3000 об/мин$^{-1}$, после отключения электродвигателя начал вращаться равнозамедленно и остановился через t_k = 90 с.

Определить скорость и ускорение точки M поверхности маховика, находящейся на расстоянии r = 0,5 м, через t_1 = 60 секунд после отключения (рис. 2.7).

Решение

В момент останова при $t = t_k$ согласно (7) имеем:

$$\omega(t_k) = \varepsilon_0 \cdot t_k + \omega_0 = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon_0 = -\frac{\omega_0}{t_k} = \frac{-\pi\omega_0}{30t_k} = \frac{-\pi \cdot 3000}{30 \cdot 90} = -3{,}49 \quad (\text{рад/с}^2).$$

В момент времени t_1 по формуле (7) находим:

$$\omega_1(t_1) = \omega_0 + \varepsilon_0 t_1 = \pi \cdot 3000 / 30 - 3{,}49 / \text{с}^2 \cdot 60 = 104.6 \ (\text{рад/с}).$$

Далее по формулам вычисляем скорость и ускорение точки M:

$$\upsilon = \omega_1 r = 104{,}6 \cdot 0{,}5 \text{ м} = 52{,}3 \ (\text{м/с}),$$

$$a_\tau = r \cdot \varepsilon_0 = -3{,}49 \cdot 0{,}5 = -1{,}74 \ (\text{м/с}^2),$$

$$a_n = \omega_1^2 \cdot r = (104{,}6)^2 \cdot 0{,}5 \text{ м} = 5470 \ (\text{м/с}),$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 5470 \ (\text{м/с}^2).$$

Расположение векторов $\bar{\upsilon}$, $\bar{a}_\tau$, $\bar{a}_n$, и $\bar{a}$ качественно показано на рисунке 7.

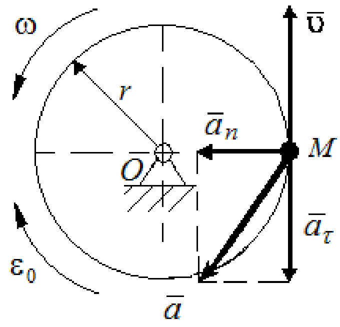


Рис. 2.7 Схема маховика

Так как имеет место замедленное вращение, векторы $\overline{\upsilon}$ и $\overline{a}_\tau$ направлены в противоположные стороны.

Задача 3.

Определение угловой скорости и углового ускорения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = \frac{\pi}{4} t^3$. Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика, когда он сделает 27 оборотов.

Решение.

По формулам (4) и (6) находим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4}\pi t^2 \quad \text{(рад/с)},$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{2}\pi t \quad \text{(рад/с}^2\text{)}.$$

Поскольку один оборот составляет 2π радиан, то маховик повернется на угол:

$$\varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 27 = 54\pi \text{ (рад)}.$$

Определим момент времени t, в течении которого маховик сделал 27 оборотов:

$$\frac{\pi}{4}t^3 = 54\pi ,$$

откуда $t = \sqrt[3]{54} \cdot 4 = 6\ (c)$.

Величины угловой скорости и углового ускорения в этот момент будут равны:

$$\omega = \frac{3}{4}\pi t^2 \cdot 6^2 = 27\pi = 84{,}4 \text{ (рад/с)};$$

$$\varepsilon = \frac{3}{4}\pi t^2 \cdot 6 = 9\pi = 28{,}3 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

К-3. Кинематический анализ плоского механизма

Движение твердого тела называется **плоским** (или плоскопараллельным), если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости (П) (рис.2.8).

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью OXY, параллельной плоскости П.

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой NN', перпендикулярной сечению S, т.е. плоскости П движутся тождественно.

Отсюда следует, что для изучения движения всего тела достаточно изучить движение сечения S в плоскости XOY.

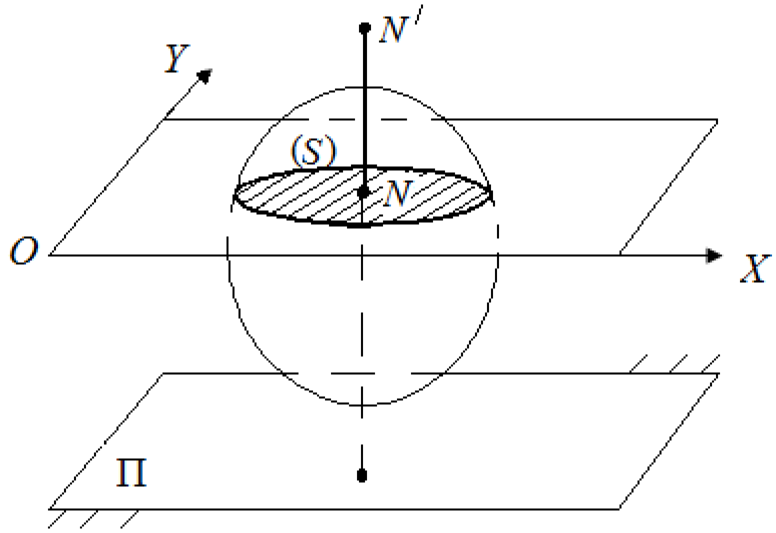


Рис.2.8. Определение плоского движения

Положение сечения S в плоскости XOY будет определяться положением отрезка AB (рис.2.9). Точка A называется *полюсом*.

Тогда уравнение движения плоской фигуры можно записать в следующем виде:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \qquad (1)$$

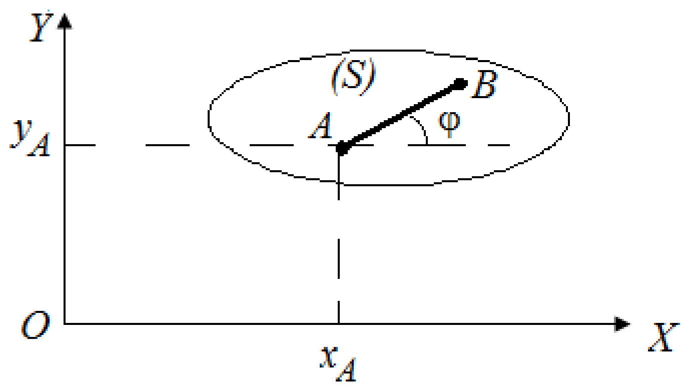


Рис.2.9. Сечение твердого тела

Определение скоростей точек при плоском движении

Для определения скорости точки тела рассмотрим движение плоской фигуры *(S)* относительно неподвижных осей координат (рис.2.10).

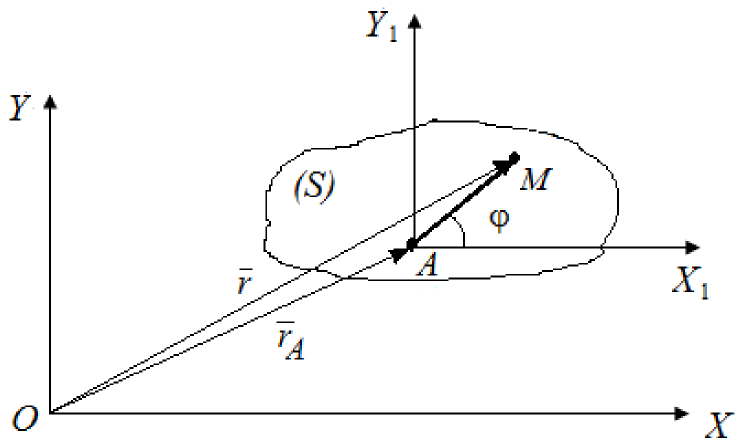


Рис.2.10. Скорость точки

Радиус-вектор

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \overline{AM}. \tag{2}$$

Скорость точки M:

$$\bar{\upsilon}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AM}}{dt}, \tag{3}$$

где $\dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\upsilon}_A$ - скорость полюса A;

$\dfrac{d\overline{AM}}{dt} = \bar{\upsilon}_{MA}$ - скорость точки M при ее вращении вокруг точки A.

Тогда

$$\bar{\upsilon}_M = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{MA}. \tag{4}$$

При этом

$\upsilon_{MA} = \omega \cdot MA$, $\bar{\upsilon}_{MA} \perp AM$,

где ω - угловая скорость тела; AM - расстояние от точки до полюса.

Следовательно, **<u>скорость любой точки тела</u>** геометрически складывается из скорости полюса и скорости точки в ее вращении вокруг полюса.

В некоторых задачах для определения скоростей удобно воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела: проекции скоростей двух точек тела при плоском движении на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Действительно (рис. 2.11), в соответствии с (4) $\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}$, то:

$$\upsilon_{B_x} = \upsilon_{A_x} + \upsilon_{BA_x} = \upsilon_A \cdot \cos\alpha + 0 = \upsilon_B \cdot \cos\beta \tag{5}$$

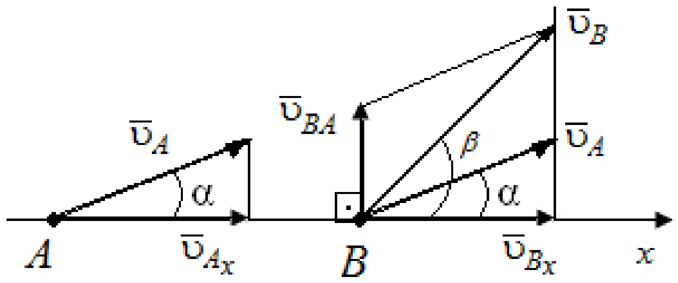


Рис. 2.11. Теорема о проекции скоростей двух точек тела

Наиболее просто находить скорость при помощи мгновенного центра скоростей (МЦС).

<u>МЦС</u> называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю $\bar{\upsilon}_p=0$. Пример его нахождения показан на рис.2.12: МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей в точках A и B. Тогда, если за полюс выбрать МЦС, то скорости точек будут равны:

$$\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_p + \bar{\upsilon}_{pA} = \bar{\upsilon}_{pA};$$

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_p + \bar{\upsilon}_{pB} = \bar{\upsilon}_{pB},$$

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}. \qquad (6)$$

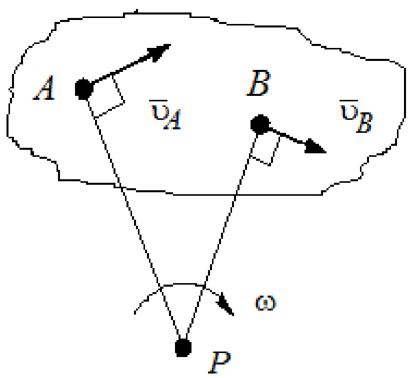
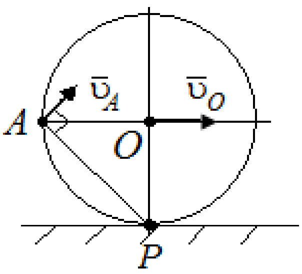


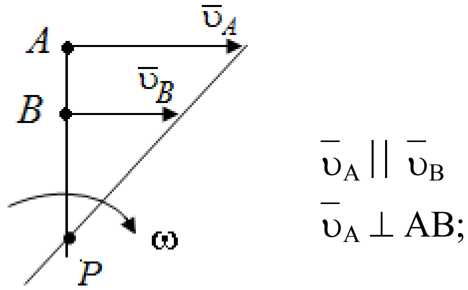
Рис.2.12. Пример нахождения МЦС

Для определения МЦС достаточно знать только направление скоростей двух точек тела.

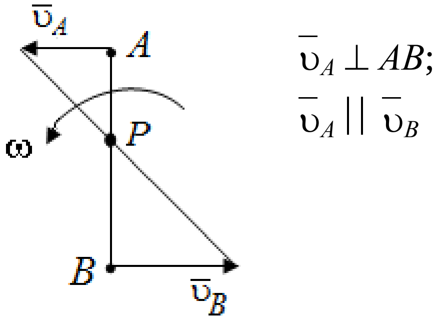
Рассмотрим различные случаи определения положения МЦС (рис.2.13).



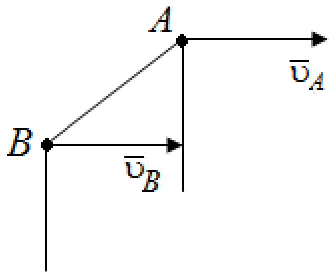
а)



б)



в)



г)

Рис.2.13. Частные случаи нахождения МЦС: а - качение без скольжения; б - $\bar{\upsilon}_A \parallel \bar{\upsilon}_B$ и направлены в одну сторону; в - $\bar{\upsilon}_A \parallel \bar{\upsilon}_B$ и направлены в противоположные стороны; г - $\bar{\upsilon}_A \parallel \bar{\upsilon}_B$, $\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_B$, МЦС находится в бесконечности

Определение ускорения точек при плоском движении

В соответствии с рис.2.10:

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \overline{AM}$$

$$\bar{\upsilon}_M = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{MA}$$

Тогда ускорение точки М

$$\bar{a}_M = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\overline{AM}}{dt^2}; \qquad (7)$$

где

$$\frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} = \bar{a}_A; \quad \frac{d^2\overline{AM}}{dt^2} = \bar{a}_{MA}.$$

Следовательно, можно записать

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}; \quad \bar{a}_{MA} = \bar{a}^{\tau}_{MA} + \bar{a}^{n}_{MA};$$
$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot MA; \quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot MA \tag{8}$$

Ускорение любой точки *M* тела - это геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения точки M во вращательном движении вокруг полюса.

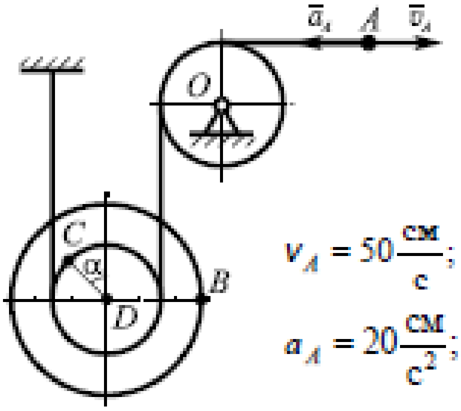
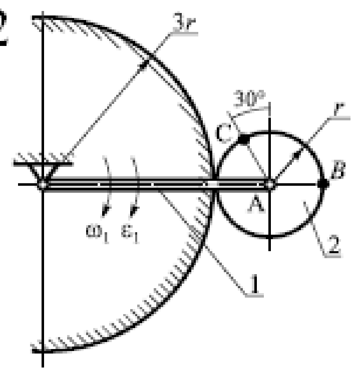
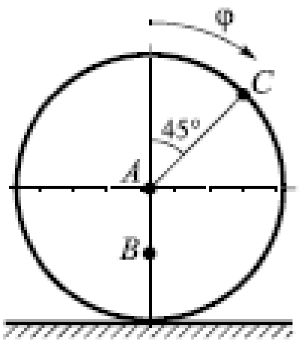
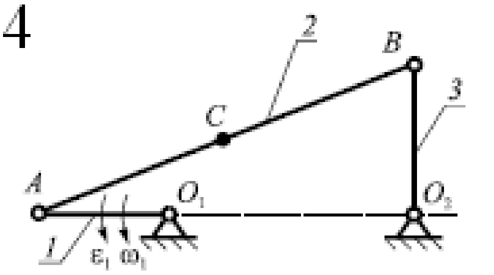
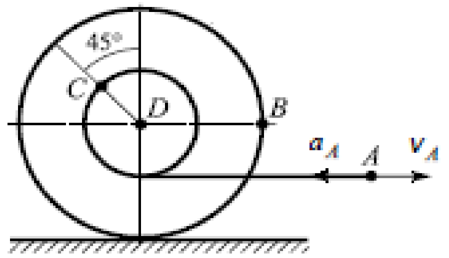
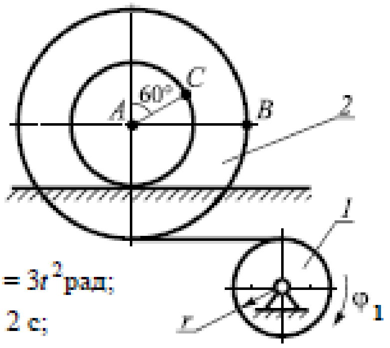
Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоским? Какими уравнениями оно описывается?
2. Как находится скорость любой точки плоской фигуры?
3. Что такое мгновенный центр скоростей (МЦС)?
4. Частные случаи нахождения МЦС.
5. Как находится ускорение любой точки плоской фигуры?

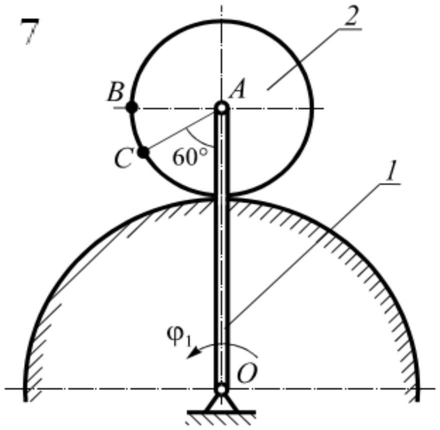
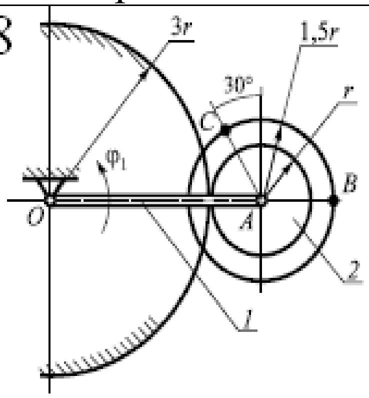
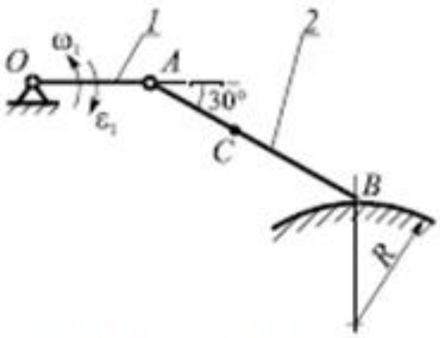
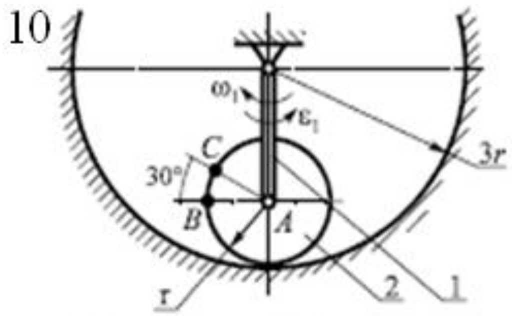
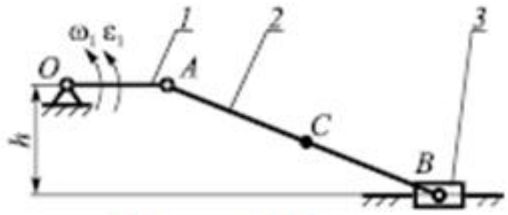
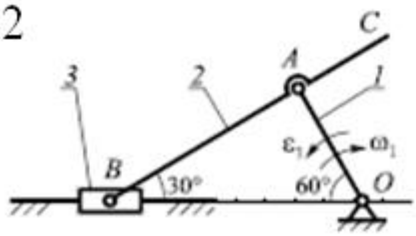
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для изображенного на рисунках в таблице 2.2 положений плоского механизма определить линейные скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

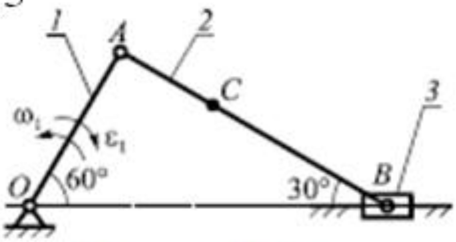
Таблица 2.2

1  $v_A = 50\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 20\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $\alpha = 45°$; $CD = 20$ см; $BD = 30$ см	**2**  $\omega_1 = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $r = 5$ см
3  $\varphi = \pi t^3$ рад; $t = 1$ с; $AB = 12$ см; $AC = 25$ см	**4**  $\omega_1 = 3\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 7\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $O_1A = 15$ см; $O_2B = 20$ см; $O_2A = 40$ см; $AC = BC$
5  $v_A = 20\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 30\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $BD = 35$ см; $CD = 15$ см	**6**  $\varphi_1 = 3t^2$ рад; $t = 2$ с; $r = 20$ см; $AB = 40$ см; $AC = 25$ см

продолжение таблицы 2.2

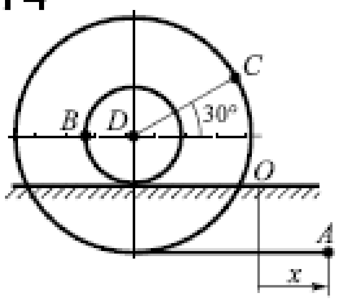
7  $\varphi_1 = 8t - 2t^2$ рад; $t = 1$ с; $OA = 50$ см; $AB = 15$ см	8  $\varphi_1 = 0{,}5t^4$ рад; $t = 1$ с; $r = 20$ см
9  $\omega_1 = 3\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 6\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 15$ см; $AB = 25$ см; $BC = 15$ см; $R = 20$ см	10  $\omega_1 = 2\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 3\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $r = 15$ см
11  $\omega_1 = 2\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 5\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 10$ см; $AB = 30$ см; $AC = 15$ см; $h = 12$ см	12  $\omega_1 = 1\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см; $BC = 45$ см

13



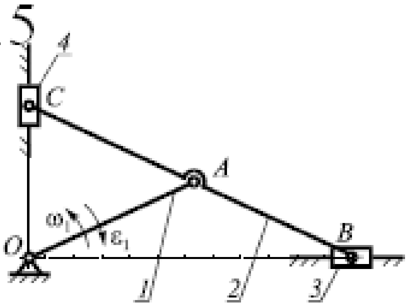
$\omega_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 20$ см;
$AC = 12$ см

14



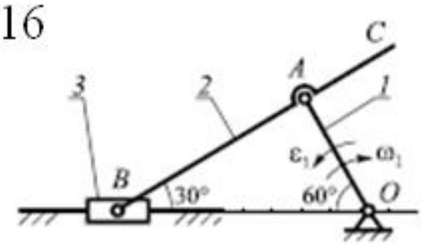
$x_A = 15t^2$ см;
$t = 2$ с;
$BD = 10$ см;
$CD = 25$ см

15



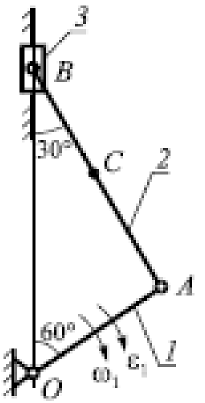
$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OC = 20$ см;
$OA = AB = AC = 25$ см

16



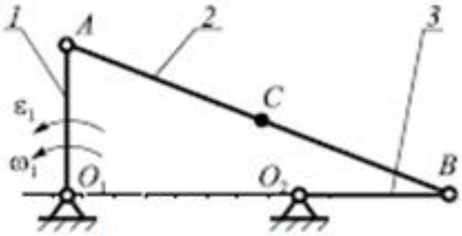
$\omega_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см;
$BC = 45$ см

17



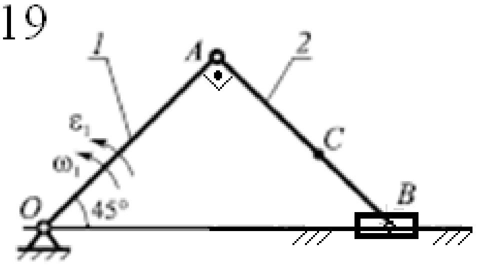
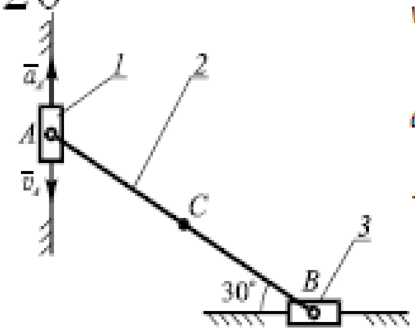
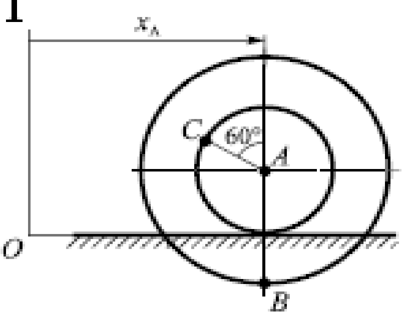
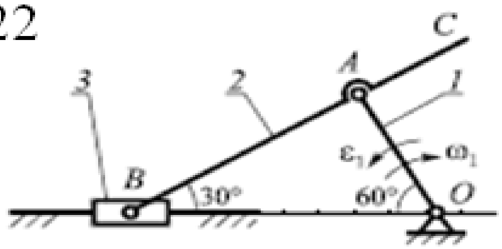
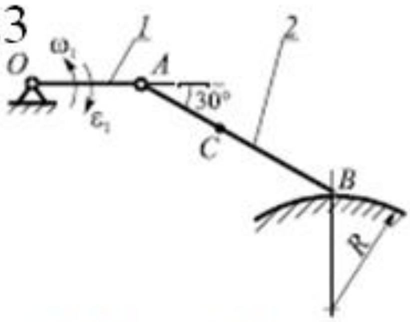
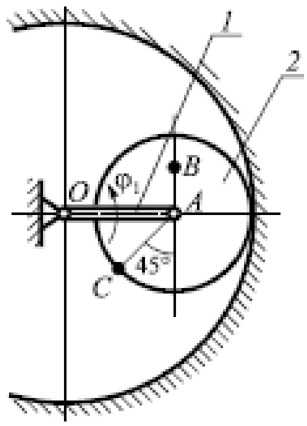
$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 20$ см;
$BC = 15$ см

18

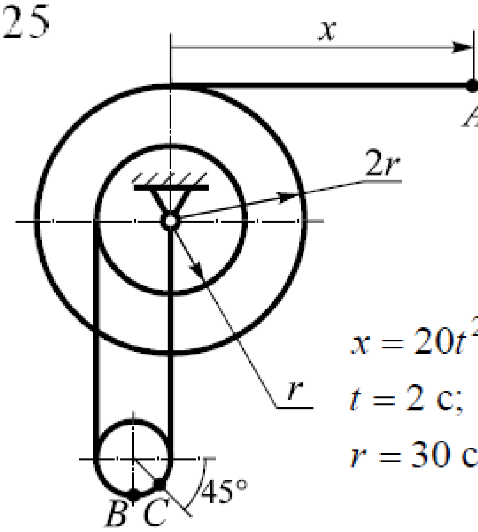
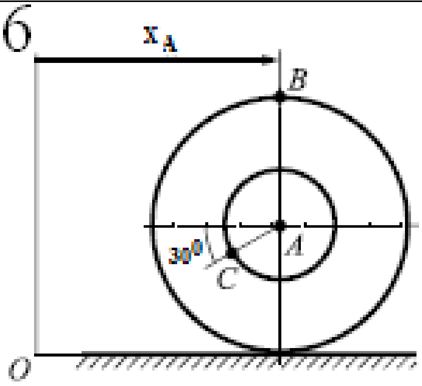
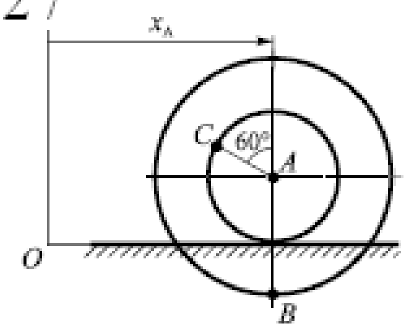
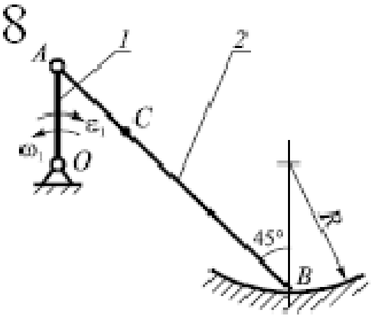
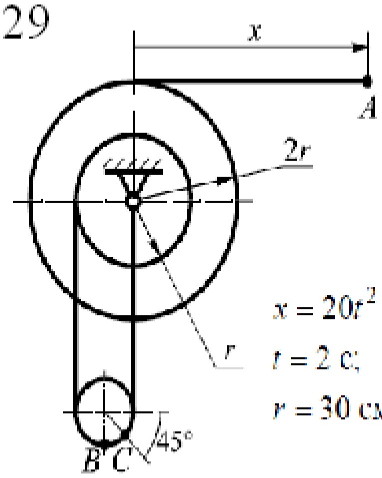
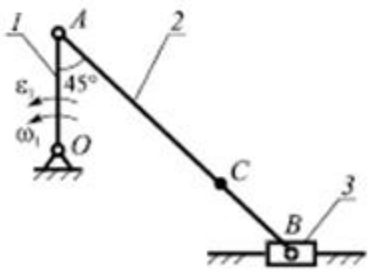


$\omega_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 50$ см;
$O_1A = O_2B = 20$ см; $BC = 25$ см

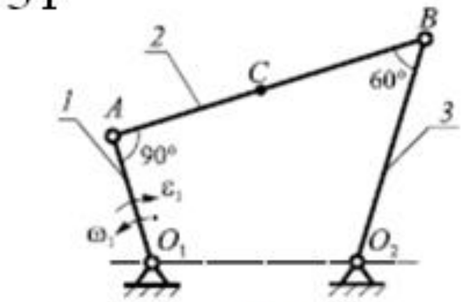
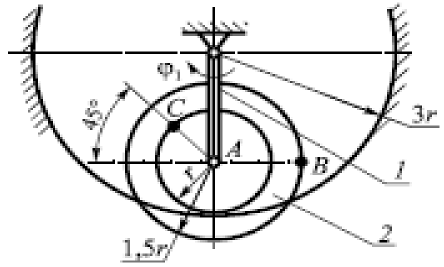
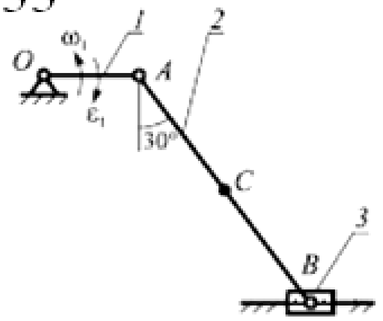
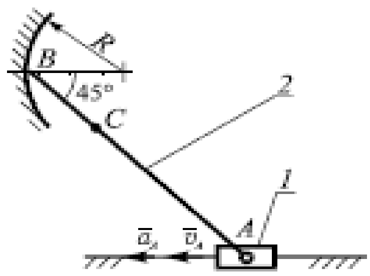
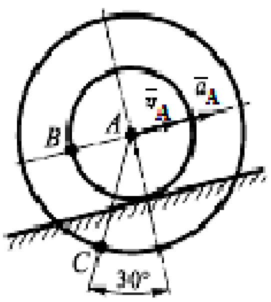
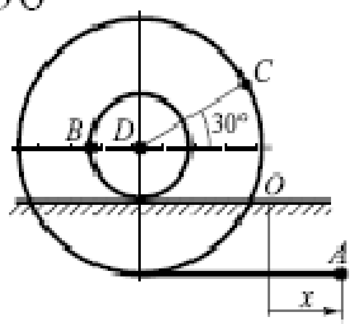
продолжение таблицы 2.2

19  $\omega_1 = 3\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 20$ см; $BC = 8$ см;	20  $v_A = 40\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 20\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см; $AC = BC$
21  $x_A = 50t - 10t^2$ см; $t = 1$ с; $AB = 25$ см; $AC = 15$ см	22  $\omega_1 = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см; $BC = 45$ см
23  $\omega_1 = 3\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 6\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 15$ см; $AB = 25$ см; $BC = 15$ см; $R = 20$ см	24  $\varphi_1 = 3t^2$ рад; $t = 2$ с; $OA = 20$ см; $AB = 10$ см; $AC = 15$ см

продолжение таблицы 2.2

25  $x = 20t^2$ см; $t = 2$ с; $r = 30$ см	26  $x_A = 30t - 20t^2$ см; $t = 3$ с; $AB = 50$ см; $AC = 20$ см
27  $x_A = 50t - 10t^2$ см; $t = 1$ с; $AB = 25$ см; $AC = 15$ см	28  $\omega_1 = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 5\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 35$ см; $OA = AC = 10$ см; $R = 20$ см
29  $x = 20t^2$ см; $t = 2$ с; $r = 30$ см	30  $\omega_1 = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 12$ см; $AB = 30$ см; $BC = 10$ см

продолжение таблицы 2.2

31  $\omega_1 = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $O_1A = 30$ см; $O_2B = 50$ см; $AB = 70$ см; $AC = BC$	32  $\varphi_1 = \frac{2t^3}{3}$ рад; $t = 2$ с; $r = 12$ см
33  $\omega_1 = 4\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 6\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 10$ см; $AB = 30$ см; $BC = 15$ см	34  $v_A = 40\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 25\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см; $AC = 20$ см; $R = 10$ см
35  $v_A = 70\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 120\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $AB = 25$ см; $AC = 45$ см	36  $x_A = 15t^2$ см; $t = 2$ с; $BD = 10$ см; $CD = 25$ см

Пример выполнения заданий по теме «Кинематический анализ плоского механизма»

Пример 1.

Ось колеса O радиуса R движется со скоростью υ_O. Определить скорости точек колеса A и B (рис.2.14).

Решение.

Мгновенный центр скоростей P колеса находится в точке касания его с горизонтальной поверхностью. Поэтому угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_O}{OP} = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{\grave{A}Ð} = \frac{\upsilon_B}{BP}.$$

Скорость верхней точки колеса A:

$$\upsilon_A = \omega \cdot 2R = 2\upsilon_O,$$

скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega \cdot BP = \omega\ R\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\upsilon_O.$$

где расстояние BP определено из прямоугольного ΔABP по теореме Пифагора: $BP = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

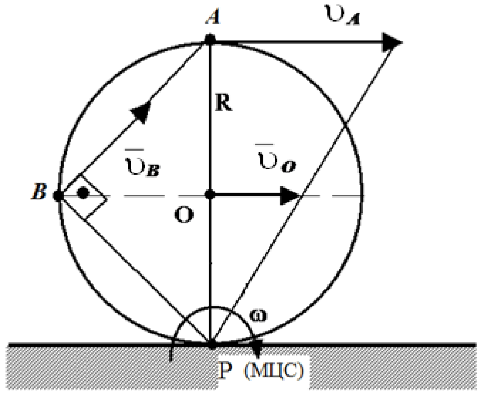


Рис.2.14. Расчетная схема

Заметим, что в каждый момент плоское движение колеса можно рассматривать как только вращение вокруг точки касания либо как сумму вращательного движения вокруг полюса (МЦС) и поступательного вместе с полюсом. Скорость точки *B* можно найти также, используя теорему о проекциях скоростей:

$$\upsilon_B \cdot \cos 45^0 = \upsilon_O, \quad \upsilon_B = \frac{\upsilon_O}{\cos 45^0} = \upsilon_O \sqrt{2}.$$

Пример 2.

Определить угловую скорость и угловое ускорение звена *AB*, линейные скорости и линейные ускорения точек *B* и *C*, если ω_1=3 рад/с; ε_1=4 рад/с^2; *OB*=40 см; *BC*=12 см; *R*=20 см (рис.2.15).

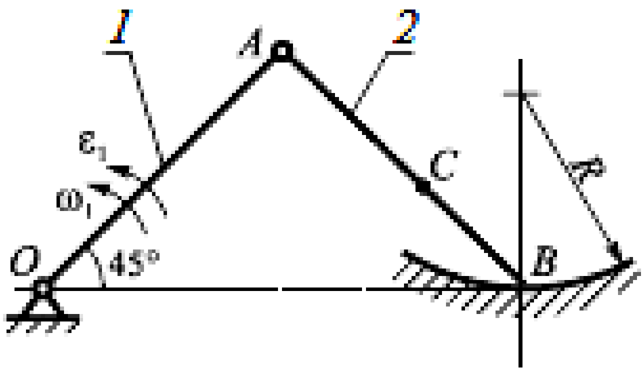


Рис.2.15. Исходная схема

Решение.

1. Выполняем необходимые построения для изображения векторов скоростей (рис. 2.16).

Шатун *AB* совершает плоское движение, причем скорость точки *A* шатуна равна:

$$\upsilon_A = \omega_1 \cdot OA = 3 \cdot 28{,}28 = 84{,}84 \text{ см/с},$$

где расстояние OA найдём из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора $OA^2+AB^2=OB^2$. Так как $OA=AB$, то $OA=\sqrt{\dfrac{40^2}{2}}=\sqrt{800}=28{,}28$ см.

Так как точка A принадлежит также кривошипу OA, вращающемуся вокруг неподвижной оси O, то вектор скорости $\bar{\upsilon}_A \perp OA$ и направлен в сторону угловой скорости ω_1.

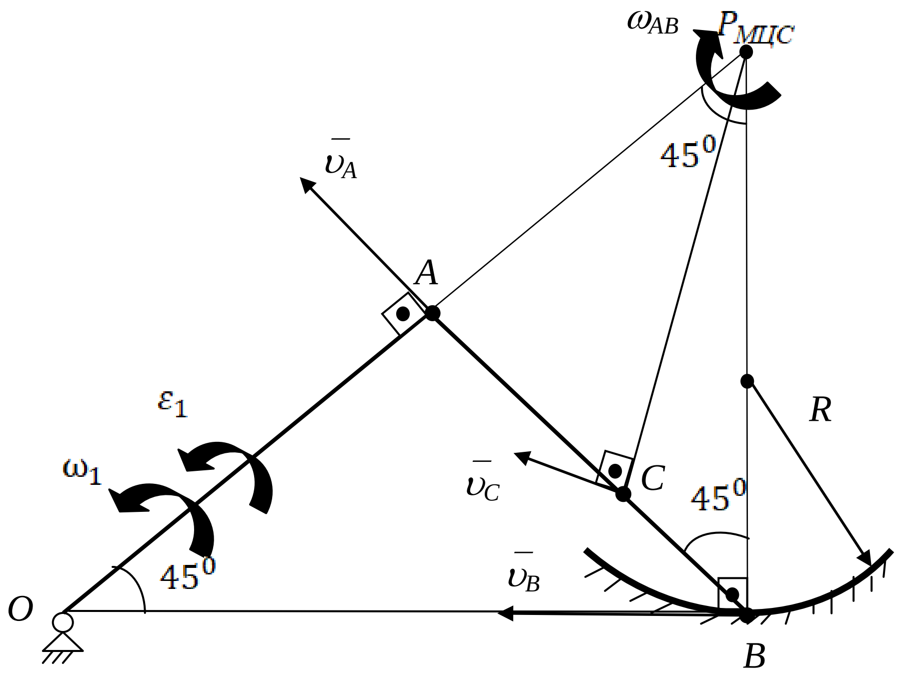


Рис.2.16. Расчетная схема определения скоростей точек и угловой скорости звена AB

Скорость точки B шатуна неизвестна, но вектор ее скорости $\bar{\upsilon}_B$ направлен по касательной к криволинейной траектории, радиуса R: $\bar{\upsilon}_B \perp R$.

На пересечении перпендикуляров к скоростям $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ находим мгновенный центр скоростей P шатуна AB. В данный момент мысленно можно рассматривать треугольник PAB как плоскую фигуру, вращающуюся вокруг P с угловой скоростью ω_{AB}:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot OA}{AP} = \omega_1 = 3, \quad \text{рад/с}.$$

Нетрудно показать, что $\Delta OAB \sim \Delta PAB$, поэтому $OA=AP$; $PB=OB$.

Линейная скорость точки B:

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot PB = 3 \cdot 40 = 120 \text{ см/с}.$$

Чтобы определить направление вектора скорости точки C, проводим отрезок, соединяющий эту точку с МЦС. Соответствующий вектор скоростей направляется перпендикулярно этому отрезку в сторону поворота тела по угуготношению к точке P.

Линейная скорость точки C:

$$\upsilon_C = \omega_{AB} \cdot PC = 3 \cdot 32{,}64 = 97{,}9 \text{ см/с}$$

где длина PC определена по теореме косинусов из ΔPCB:

$$PC^2 = BC^2 + BP^2 - 2BC \cdot BP \cdot \cos 45^0 = 1065{,}18 \text{ см}.$$

$$PC = \sqrt{1065.18} = 32.64 \text{ см}.$$

2. Определяем угловое ускорение шатуна AB и линейные ускорения точек B и C (рис.2.17).

При расчете ускорений в качестве полюса следует взять точку A, для которой известна траектория. Из схемы механизма видно, что точка A движется по окружности, радиуса OA.

Ускорение точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \qquad (9)$$

Значения составляющих ускорения $\bar{a}_A^n$, $\bar{a}_A^\tau$, $\bar{a}_{BA}^n$, $\bar{a}_{BA}^\tau$ находим по формулам:

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 254.52 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA = 113.12 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 254.52\frac{см}{с^2}.$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \tag{10}$$

Вектор $\bar{a}_A^\tau$ направляется перпендикулярно отрезку OA в сторону углового ускорения кривошипа OA, вектор $\bar{a}_A^n$ – от точки A к точке O, вектор $\bar{a}_{BA}^n$ – от точки B к точке A, как показано на рисунке 2.17.

Вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону углового ускорения ε_{AB}. Так как направление углового ускорения ε_{AB} неизвестно, выбираем самостоятельно направление вектора $\bar{a}_{BA}^\tau$, так, что $\bar{a}_{BA}^\tau \perp \bar{a}_{BA}^n$.

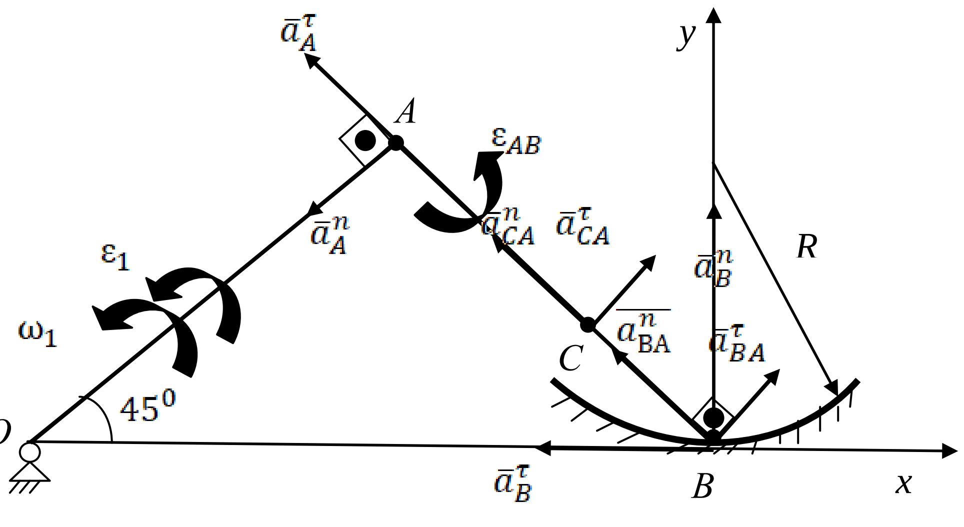


Рис.2.17. Расчетная схема определения ускорений точек и углового ускорения звена AB

Так как точка B движется по криволинейной траектории, радиуса R, то полное ускорение точки B определим по формуле:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau . \tag{11}$$

Значения составляющих ускорения $\bar{a}_B^n$ и $\bar{a}_B^\tau$ находим по формулам:

$$a_B^n = \frac{\upsilon_B{}^2}{R_{AB}} = 720\ \frac{см}{c^2}.$$

Вектор $\bar{a}_B^n$ направлен к центру криволинейной траектории, радиуса R, а вектор $\bar{a}_B^\tau$– перпендикулярен вектору $\bar{a}_B^n$.

Поскольку движение кривошипа OA ускоренное (направления ω_1 и ε_1 совпадают), то вращение шатуна AB также ускоренное. Для нахождения углового ускорения ε_{AB} спроецируем векторное равенство (9) с учетом (11) на оси декартовой системы координат, получаем:

$$Ox:\ -a_B^\tau = (-a_A^n - a_A^\tau - a_{BA}^n + a_{BA}^\tau) \cdot \cos 45 \quad (12)$$

$$Oy:\ a_B^n = (-a_A^n + a_A^\tau + a_{BA}^n + a_{BA}^\tau) \cdot \sin 45 \quad (13)$$

Из уравнения (13) определяем $a_{BA}^\tau = 141.4\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Из уравнения (10) определяем ε_{AB}:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^\tau|}{AB} = 5\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Из уравнения (12) определяем a_B^τ:

$$a_B^\tau = 340\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом:

$$a_B = \sqrt{(a_{BO}^n)^2 + (a_{BO}^\tau)^2} = 384.7\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Расчет ускорения точки C выполняем по аналогичному с точкой B алгоритму. В качестве полюса используем, по-прежнему, точку A. Тогда:

$$\overline{a_C} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau} + \overline{a_{CA}^n} + \overline{a_{CA}^\tau}. \quad (14)$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 146.5\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 81.4\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

где AC=AB–CB=28,28-12=16,28 см.

Векторы $\bar{a}_{CA}^{n}$ и $\bar{a}_{CA}^{\tau}$ направляем по тому же правилу, как и векторы $\bar{a}_{BA}^{n}$ и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$.

Проецируем выражение (14) на оси координат, получаем:

Ox: $a_{Cx} = (-a_A^n - a_A^\tau - a_{CA}^n + a_{CA}^\tau) \cdot \cos 45 = -306\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Oy: $a_{Cy} = (-a_A^n + a_A^\tau + a_{CA}^n + a_{CA}^\tau) \cdot \sin 45 = 67.2\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Таким образом:

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = 312\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

К-4. Сложное движение точки

Краткие теоретические положения

В ряде случаев целесообразно изучать движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам координат.

Рассмотрим неподвижную систему координат $OX_1Y_1Z_1$ и систему $OXYZ$, которая движется относительно неподвижной (рис.3.1).

Движение точки M по отношению к неподвижной системе координат называется **абсолютным** движением или сложным.

Движение точки М по отношению к подвижной системе координат называется **относительным** движением. Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называется **переносным**.

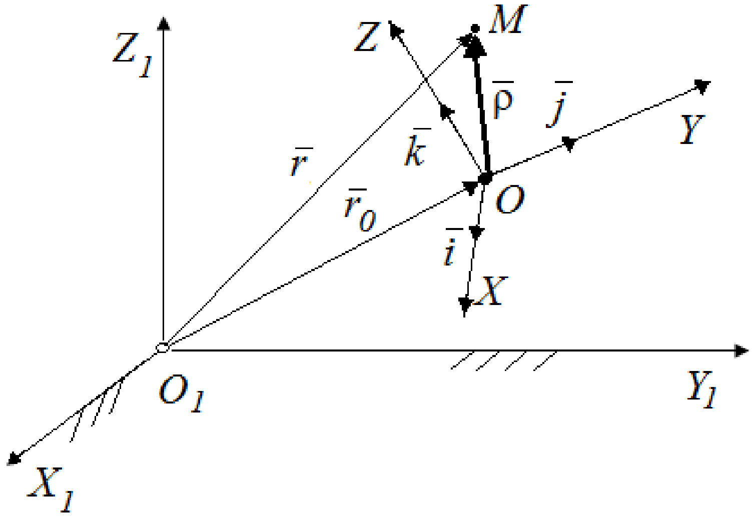


Рис.3.1. Сложное движение точки

В соответствии с рис. 3.1 имеем

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}. \tag{1}$$

Абсолютная скорость точки M

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}, \tag{2}$$

где $\bar{\rho}$ - подвижный вектор в системе $OXYZ$.

По формуле Бура:

$$\frac{d\,\overline{\rho}}{d\,t}=\frac{\tilde{d}\,\overline{\rho}}{d\,t}+\overline{\omega}\times\overline{\rho}=\overline{\upsilon}_r+\overline{\omega}\times\overline{\rho} \qquad (3)$$

где $\overline{\upsilon}_r=\frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt}$ - локальная производная, определяющая скорость изменения вектора $\overline{\rho}$ в подвижной системе координат; ω-переносная условная скорость.

Получим

$$\overline{\upsilon}=\frac{d\overline{r}_0}{dt}+\overline{\upsilon}_r+\overline{\omega}\times\overline{\rho}\text{, или}$$

$$\overline{\upsilon}=\overline{\upsilon}_0+\overline{\upsilon}_r+\overline{\omega}\times\overline{\rho}\,, \qquad (4)$$

υ_0 – скорость точки *O* подвижной системы координат.

Переносная скорость:

$$\overline{\upsilon}_e=\overline{\upsilon}_0+\overline{\omega}\times\overline{\rho}\,, \qquad (5)$$

Тогда абсолютная скорость:

$$\overline{\upsilon}=\overline{\upsilon}_r+\overline{\upsilon}_e \qquad (6)$$

Абсолютное ускорение точки *M*:

$$\overline{a}=\frac{d\overline{\upsilon}}{dt}=\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}+\frac{d\overline{\upsilon}_e}{dt}=\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\overline{\upsilon}_0+\overline{\omega}\times\overline{\rho}\right). \qquad (7)$$

Воспользовавшись формулой Бура запишем:

$$a=\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}+\overline{\rho}\times\frac{d\overline{\omega}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r+\frac{d\overline{\upsilon}_0}{dt}+\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times\frac{d\overline{\rho}}{dt}=\overline{a}_r+\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r+\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times \qquad (8)$$

$$\times\left(\frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{\rho}\right)=\overline{a}_r+\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{\rho}\right)=\overline{a}_r+\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{\rho}\right)+2\left(\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r\right);$$

где $\overline{a}_r$ – относительное ускорение;

$\overline{a}_e=\overline{a}_0+\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{\rho}\right)$ - переносное ускорение;

$\overline{a}_c=2\left(\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r\right)$ - ускорение Кориолиса.

Таким образом

$$\overline{a}=\overline{a}_e+\overline{a}_r+\overline{a}_c\,. \qquad (9)$$

Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

По модулю ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$\mathrm{a_c}=2\omega\upsilon_{\mathrm{r}}\sin\left(\overline{\omega}\,\hat{}\,\overline{\upsilon}_{\mathrm{r}}\right). \qquad (10)$$

Направление ускорения Кориолиса (рис.3.2) можно определить по **правилу Жуковского**. Для этого, вектор относительной скорости $\bar{\upsilon}_r$ проецируется в плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения $\bar{\omega}_e$ и затем поворачивается на 90^0 в сторону вращения.

Кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

а) переносное движение поступательное (ω_e=0);

б) отсутствует относительное движение (υ_r = 0);

в) скорости $\bar{\upsilon}_r$ и $\bar{\omega}_e$ параллельны.

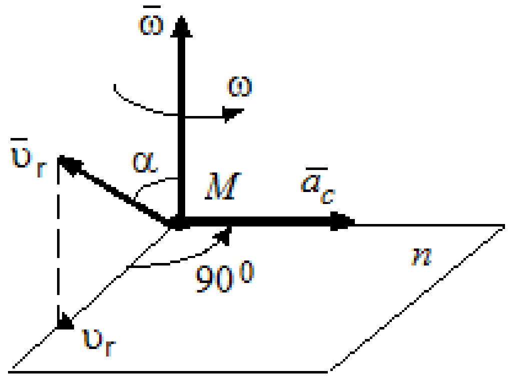


Рис.3.2. Направление ускорения Кориолиса

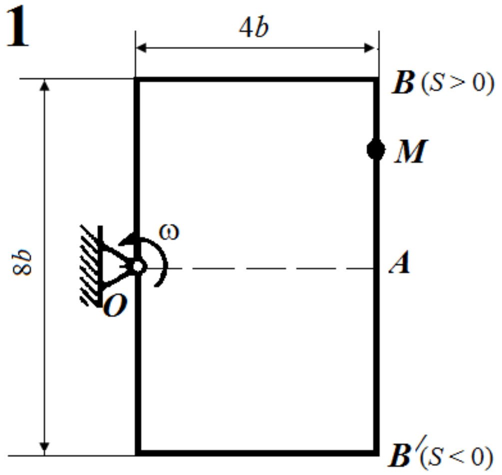
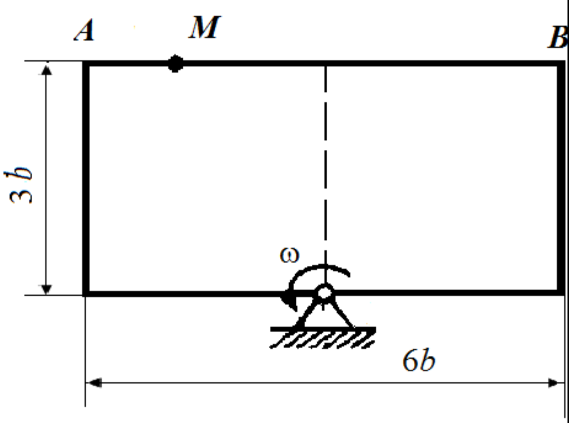
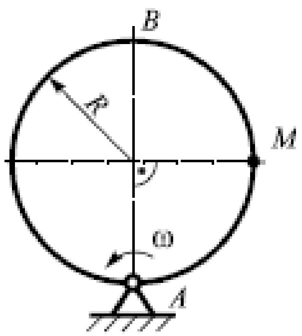
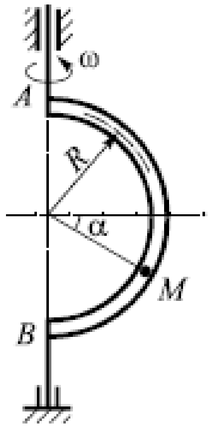
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое относительное, переносное и абсолютное движение точки?
2. Как определяется абсолютная скорость точки в сложном движении?
3. Как определяется абсолютное ускорение точки в сложном движении?
4. Что такое ускорение Кориолиса?
5. Как найти величину и направление ускорения Кориолиса?
6. При каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тело вращается относительно неподвижной оси с постоянной или переменной угловой скоростью ω по закону, приведенному на рисунках в таблице 3.1 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Относительно этого тела из положения *A* в положение *B* движется точка *M*, закон её относительного движения *S*=*f*(*t*) или закон изменения относительной скорости $V_{отн}=f(t)$ которой также известен. Для изображенного на рисунке положения точки, соответствующего заданному моменту времени *t*, определить ее абсолютные скорость и ускорение.

Таблица 3.1

1  $\omega = 4$ c^{-1} $S = 60(t^3 - 2t^2)$, см $t = 1$ с ; $b = 20$ см	**2**  $\omega = 3$ c^{-1} $S = 80(2t^2 - t^3) - 48$, см $t = 1$ с; $b = 8$ см
3 $\omega = 8\cos\frac{\pi t}{4}$ c^{-1}; $V_{отн} = 5\pi t^2\ \frac{см}{с}$; $R = 5$ см; $t = 1$ с;  	**4** $\omega = 5t - 5t^2$ c^{-1}; $V_{отн} = 8\pi t^3\ \frac{см}{с}$; $t = 2$ с; $R = 4$ см; $\alpha = 45°$ 

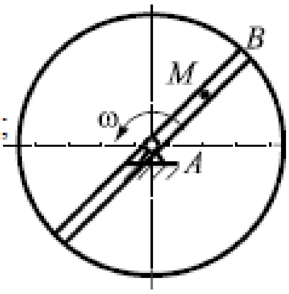
5

$\omega = 5t - 4t^2$ с$^{-1}$;

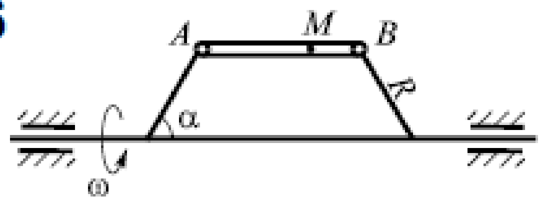
$v_{\text{отн}} = 40\sin\frac{\pi t}{6}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$t = 1$ с;

$AM = 3$ см



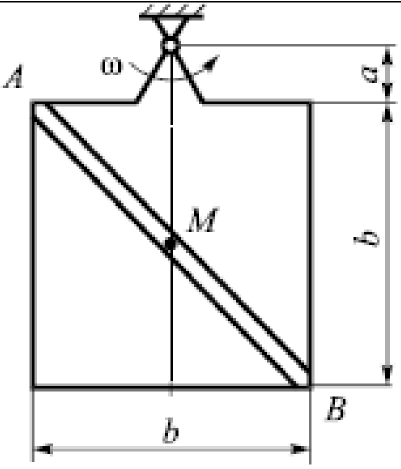
6



$\omega = 10t - 6t^2$ с$^{-1}$; $v_{\text{отн}} = 35\sin\frac{\pi t}{4}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$t = 1$ с; $R = 6$ см; $\alpha = 60°$

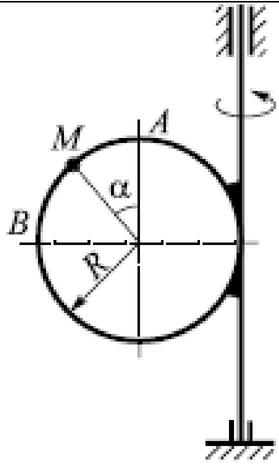
7



$\omega = 2t^2 - 3t$ с$^{-1}$; $v_{\text{отн}} = 5\sin\frac{\pi t}{2}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$t = 1$ с; $a = 2$ см; $b = 10$ см;

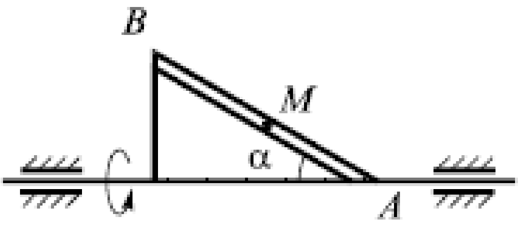
8



$\omega = 1{,}5t^2$ с$^{-1}$; $v_{\text{отн}} = 6\pi t^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$t = 1$ с; $R = 5$ см; $\alpha = 30°$

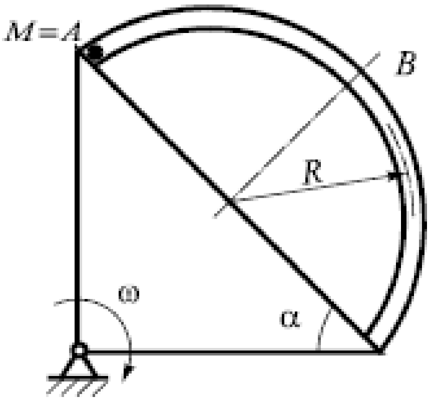
9



$\omega = 6t + t^2$ с$^{-1}$; $v_{\text{отн}} = 50\sin\frac{\pi t}{4}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$

$t = 1$ с; $AM = 4$ см; $\alpha = 30°$

10



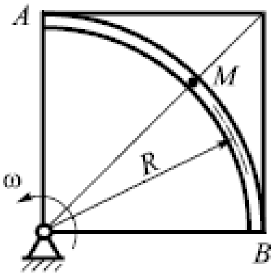
$\omega = 5t^2$ с$^{-1}$; $v_{\text{отн}} = 25\sin\frac{\pi t}{3}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$t = 1$ с; $R = 5$ см; $\alpha = 30°$

продолжение таблицы 3.1

<table>
<tr>
<td>

13

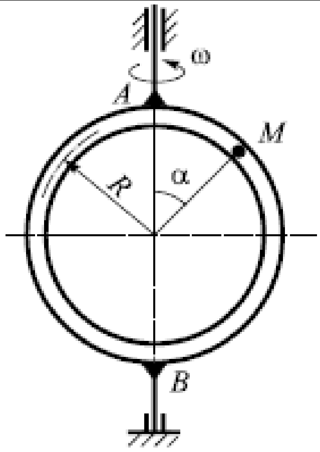


$\omega = 3t^2 - 2t\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 15t^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ R = 6\ \text{см}$

</td>
<td>

14

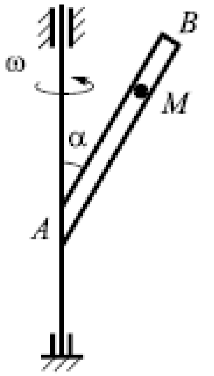


$\omega = 2\sin\frac{\pi t}{3}\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 4\pi t^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ R = 4\ \text{см};\ \alpha = 45^\circ$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

15

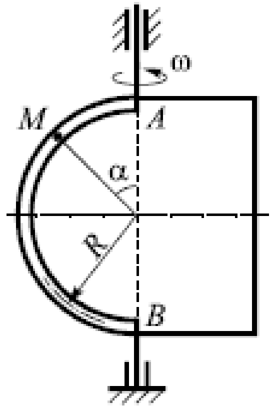


$\omega = 4\cos\frac{\pi t}{3}\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 3t^2 - t\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ AM = 6\ \text{см};\ \alpha = 30^\circ$

</td>
<td>

16

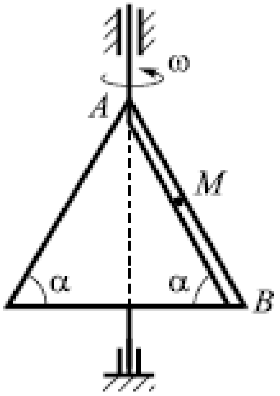


$\omega = 6t - 2t^2\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 5\pi t^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ R = 5\ \text{см};\ \alpha = 45^\circ$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

17

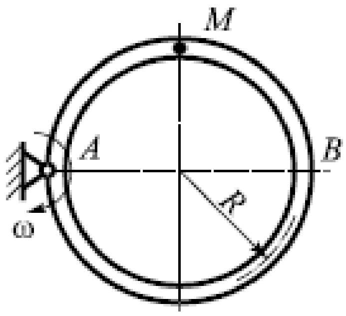


$\omega = 5t - t^2\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 4t^2 + 2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ AM = 4\ \text{см};\ \alpha = 60^\circ$

</td>
<td>

18



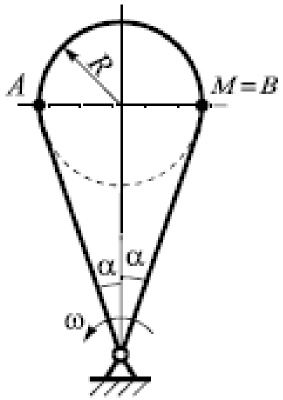
$\omega = 7t^2 - 3\ \text{с}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 40t^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\ R = 6\ \text{см}$

</td>
</tr>
</table>

продолжение таблицы 3.1

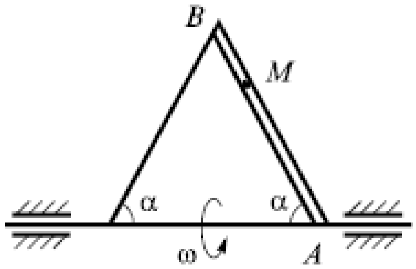
19



$\omega = 6t^2 - 4t\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 30t^2 + 10\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$R = 6\ \text{см};\quad t = 1\ \text{с};\quad \alpha = 30°$

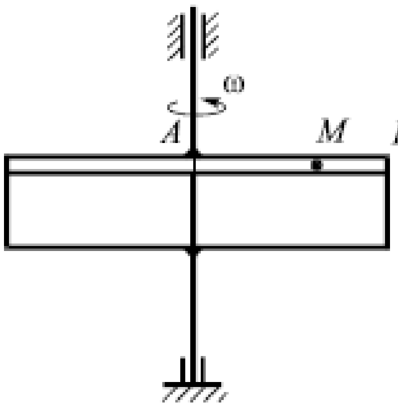
20



$\omega = t^3 - 5t\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 20\sin\dfrac{\pi t}{6}\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с}\quad AM = 4\ \text{см};\quad \alpha = 60°$

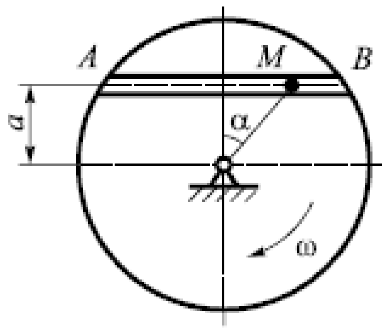
21



$\omega = 5t^2\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 12\sin\dfrac{\pi t}{6}\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\quad AM = 4\ \text{см}$

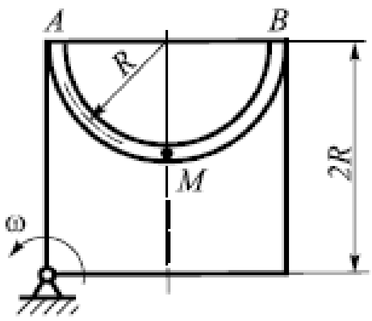
22



$\omega = 3\sin\dfrac{\pi t}{3}\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 4t^2 + 6t\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\quad a = 5\ \text{см};\quad \alpha = 30°$

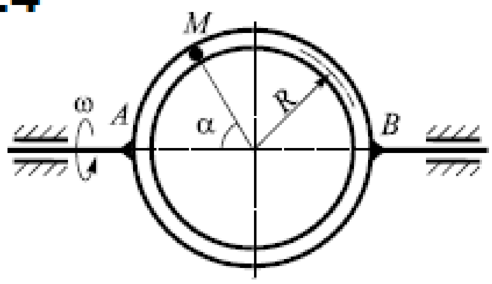
23



$\omega = 4t - t^3\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 25t^2 + 15\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\quad R = 8\ \text{см}$

24

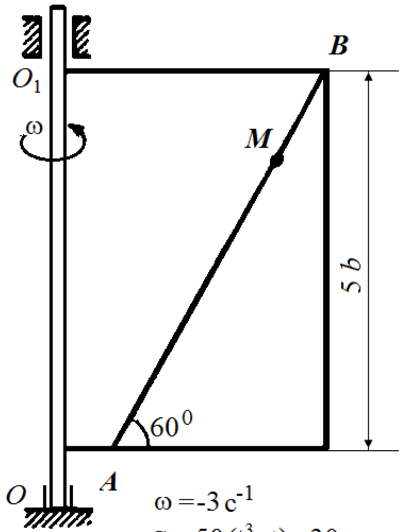


$\omega = 2t^3 + 3\ \text{c}^{-1};\quad V_{\text{отн}} = 20t^2\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}};$

$t = 1\ \text{с};\quad R = 5\ \text{см};\quad \alpha = 60°$

продолжение таблицы 3.1

25

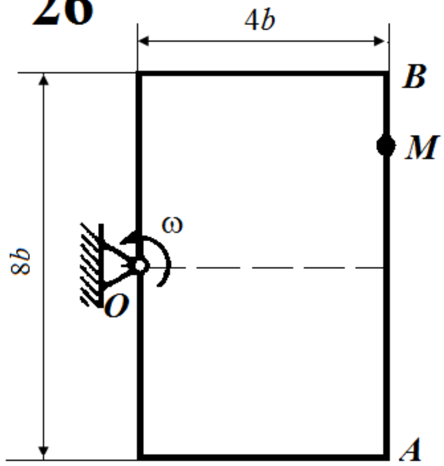


$\omega = -3\ \text{c}^{-1}$

$S = 50(t^3 - t) - 30$, см

$t = 1$ c ; $b = 20$ см

26

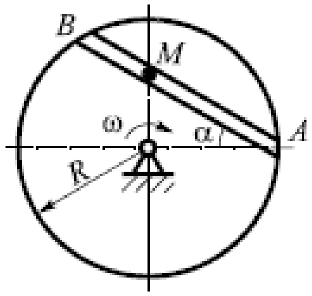


$\omega = -2\ \text{c}^{-1}$

$S = 60(t^4 - t^2) + 56$, см

$t = 1$ c; $b = 16$ см

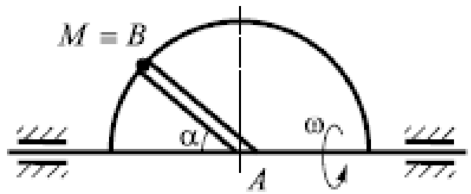
27



$\omega = 2t^3 - t^2\ \text{c}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 30\sin\frac{\pi t}{6}\ \frac{\text{см}}{\text{c}};$

$t = 1$ c; $R = 5$ см; $\alpha = 30°$

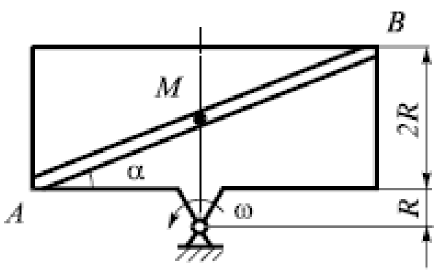
28



$\omega = 2t - 4t^2\ \text{c}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 36\sin\frac{\pi t}{3}\ \frac{\text{см}}{\text{c}};$

$t = 1$ c; $R = 6$ см; $\alpha = 60°$

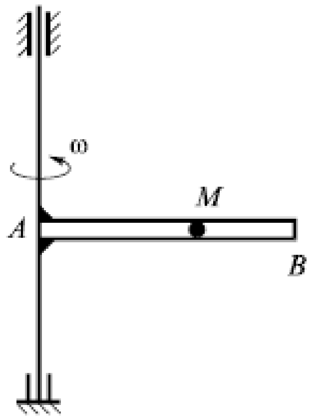
29



$\omega = 2\pi t^2 - 4\ \text{c}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 5t^2 + 7\ \frac{\text{см}}{\text{c}};$

$t = 1$ c; $R = 4$ см

30

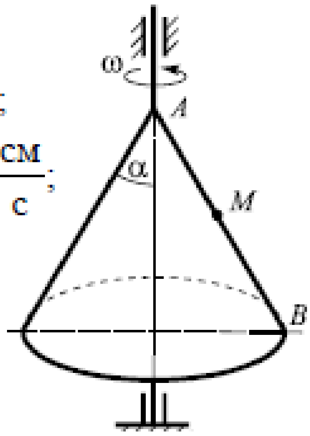


$\omega = 4\pi t^2\ \text{c}^{-1};\ v_{\text{отн}} = 60t^2 + 15\ \frac{\text{см}}{\text{c}};$

$t = 0{,}5$ c; $AM = 7$ см

продолжение таблицы 3.1

31



$\omega = 3t^2 - 2t$ c^{-1};

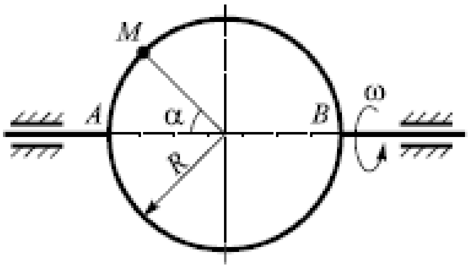
$V_{\text{отн}} = 20\cos\dfrac{\pi t}{3}\,\dfrac{\text{см}}{\text{c}}$;

$t = 1$ c;

$AM = 5$ см

$\alpha = 30°$;

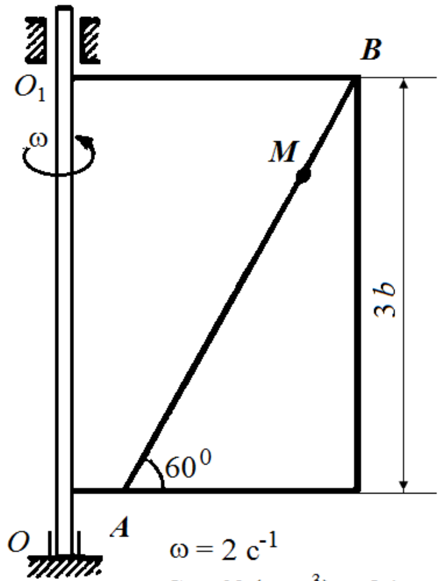
32



$\omega = 5t + 3t^2$ c^{-1}; $V_{\text{отн}} = 5\pi t^2\,\dfrac{\text{см}}{\text{c}}$;

$t = 1$ c; $R = 5$ см; $\alpha = 45°$

33

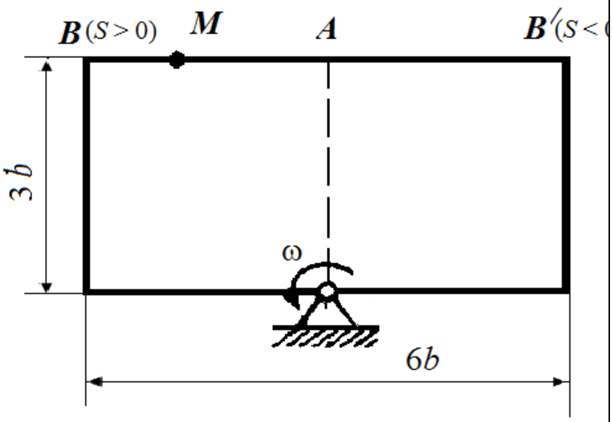


$\omega = 2$ c^{-1}

$S = 60(t - t^3) + 24$, см

$t = 1$ c ; $b = 20$ см

34



$\omega = 2$ c^{-1}

$S = 15(t^2 - 3t)$, см

$t = 1$ c ; $b = 12$ см

Пример выполнения заданий по теме «Сложное движение точки»

Пример 1.

Определить скорость и ускорение штока 1 кулачкового механизма, который поднимается в результате равномерного движения полукруглого сегмента 2 по горизонтальной направляющей (рисунок 3.3). Считать заданными радиус сегмента $OM = r$, скорость его υ_0 и угол α, образуемый с горизонталью отрезком OM; ролик M полагать геометрической точкой.

Решение.

Прямолинейное движение ролика M в вертикальном направлении для решения задачи целесообразно представить как сложное, где относительным движением будет движение точки M по круговой поверхности сегмента, а переносным – прямолинейное поступательное движение сегмента в горизонтальном направлении. Из треугольника векторного уравнения:

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r$$

следует: $\upsilon_A = \upsilon_e \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \upsilon_0 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $\upsilon_r = \upsilon_e / \sin \alpha = \upsilon_0 / \sin \alpha$.

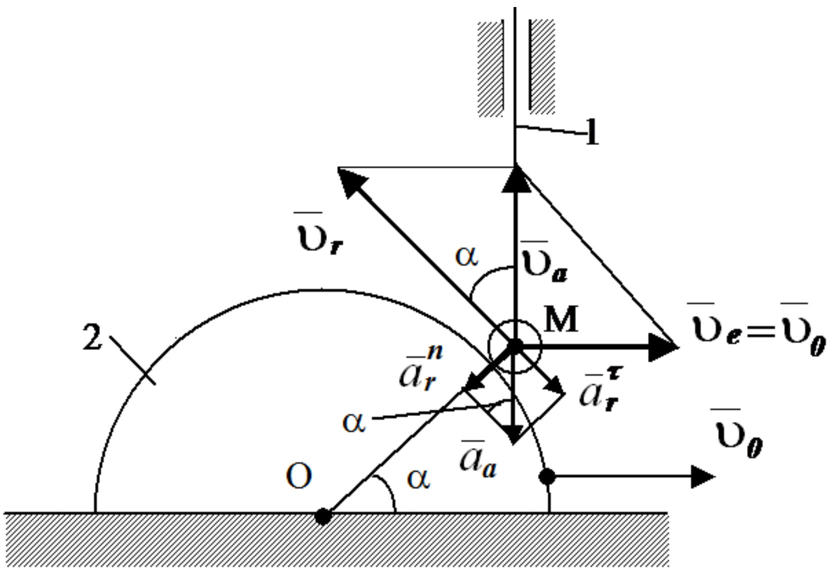


Рис. 3.3. Расчетная схема

В условиях данной задачи переносное ускорение (поскольку υ_0 = const) и кориолисово (поскольку подвижная система координат движется поступательно) равны нулю. Следовательно, вектор ускорения точки M $\bar{a}_a = \bar{a}_r$. В свою очередь, вектор относительного ускорения $\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\mathrm{n}} + \bar{a}_r^{\tau}$, так как в относительном движении точка M движется по окружности сегмента. Поскольку нормальное относительное ускорение $\bar{a}_r^{\mathrm{n}}$ направлено от точки M к центру сегмента O, то, как это видно на рисунке 4, вектор абсолютного ускорения направлен обязательно вниз. Следовательно шток 1 движется вверх с замедлением. Нормальное относительное ускорение, равно квадрату окружной скорости, деленному на радиус:

$$a_r^{\mathrm{n}} = \upsilon_r^2 / r = \upsilon_0^2 / (r \cdot \sin^2 \alpha).$$

Из треугольника геометрической суммы ускорений следует:

$$a_{\mathrm{a}} = a_r^{\mathrm{n}} / \sin \alpha = \upsilon_0^2 / (\mathrm{r} \cdot \sin^3\alpha),$$
$$a_r^{\tau} = a_r^{n} \cdot \mathrm{ctg}\, \alpha = \upsilon_0^2 \cdot \cos \alpha / (\mathrm{r} \cdot \sin^3\alpha).$$

Пример 2.

Треугольная пластина D (рис. 3.4) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=\varphi(t)=4t^2-3t$, рад. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости).

По пластине вдоль прямой AB, движется точка M. Закон ее относительного движения, выражается уравнением $S = S(t) = KM = 20(3t - t^3)$, ($S$ — в сантиметрах, t — в секундах), На рисунке точка M показана в положении, при котором $S = KM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки K).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t_1 = 2 с, OK=30 см.

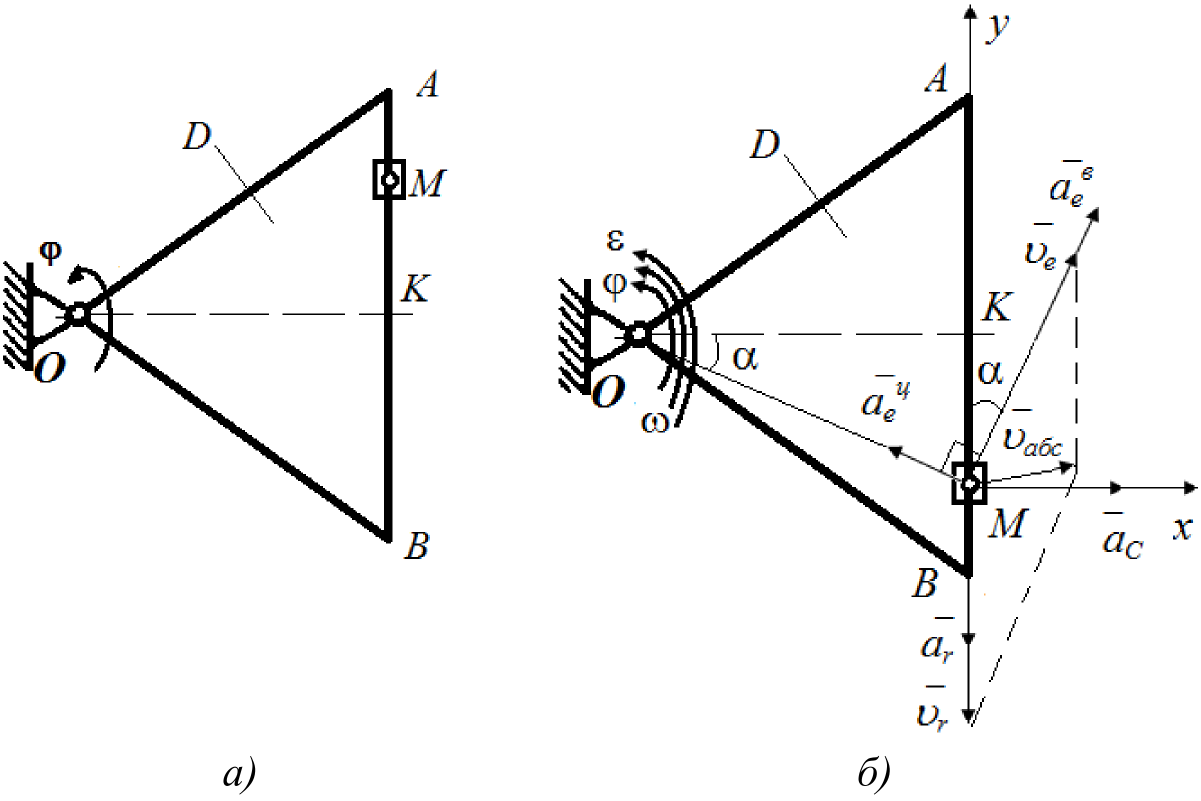


Рис.3.4. *а* - исходная схема; *б* – расчетная схема

Решение:

1. Определим положение точки *M* на теле *D*.

Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис.5) совпадает с плоскостью треугольника *D*. Положение т.*M* на теле *D* определяется расстоянием *S*=*KM*.

При $t = 2$с, $S = 20(3\cdot 2 - 2^3) = -40$ см.

Так как $S < 0$, то точка *M* находится по другую сторону от точки *K*.

2. Определим абсолютную скорость точки *M*.

Абсолютную скорость т.*M* найдем, как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e.$$

Относительная скорость:

$\upsilon_r = ds_r/dt = 60 - 60t^2$, при t_1=2 с $\upsilon_r = -240$ см/с, $|\bar{\upsilon}_r| = 240$ см/с.

Отрицательный знак у υ_r показывает, что вектор $\bar{\upsilon}_r$ направлен в сторону возрастания S_r.

Переносная скорость:

$\upsilon_e = \omega \cdot OM$;

$\omega = d\varphi/dt = 8t - 3$, при t_1=2 с $\omega = 13$ рад/с.

Положительный знак у ω показывает, что вращение происходит в сторону направления отсчета φ.

Из прямоугольного ΔOKM :

$OM = \sqrt{OK^2 + KM^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ см.

$\angle KOM = \alpha$, тогда

$\sin\alpha = \dfrac{KM}{OM} = \dfrac{40}{50} = 0{,}8$; $\cos\alpha = \dfrac{OK}{OM} = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$,

$\alpha = 53{,}1^0$.

Определим переносную скорость:

$\upsilon_e = 13 \cdot 50 = 650$ см/с.

Вектор $\bar{\upsilon}_e \perp OM$ и направлен в сторону ω.

Абсолютную скорость точки M найдем методом проекций, спроецируем $\bar{\upsilon}_r$ и $\bar{\upsilon}_e$ на оси x и y:

$\upsilon_x = \upsilon_e \cdot \sin\alpha = 650 \cdot 0{,}8 = 520$

$\upsilon_y = -\upsilon_r + \upsilon_e \cdot \cos\alpha = -240 + 650 \cdot 0{,}6 = 150$

$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = 541{,}2$ см/с.

3. Определим абсолютное ускорение точки M.

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_e^в + \bar{a}_e^ц + \bar{a}_c .$$

Относительно нормальное ускорение:

$\bar{a}_r^n = \upsilon_r^2 / \rho = 0$, так как траектория относительного движения - прямая ($\rho = \infty$).

Относительное касательное ускорение:

$\bar{a}_r^\tau = \bar{a}_r = d^2s/dt^2 = -120t$, при t_1=2 с $\bar{a}_r^\tau = \bar{a}_r = -240$ см/с^2, $|\bar{a}_r| = 240$ см/с^2.

Отрицательный знак у a_r показывает, что вектор $\bar{a}_r$ направлен в сторону возрастания s_r. Знаки $\bar{\upsilon}_r$ и $\bar{a}_r$ - одинаковые, следовательно движение точки *M* ускоренное.

Переносное вращательное ускорение:

$$a_e^в = \varepsilon \cdot OM,$$

где $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2 = 8$ рад/с^2. Знаки у ε и ω одинаковы, следовательно, вращение треугольника *D* – ускоренное.

$a_e^в = 8 \cdot 50 = 450$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_e^в$ направлен в ту же сторону, что и $\bar{\upsilon}_e$.

Переносное центростремительное ускорение:

$a_e^ц = \omega^2 \cdot OM = 13^2 \cdot 50 = 8450$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_e^ц$ направлен к центру вращения.

Кориолисово ускорение:

$\bar{a}_c = 2\upsilon_r\omega \ \sin(\upsilon_r\omega) = 2 \cdot 240 \cdot 13 \cdot \sin 90^0 = 6240$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_c$ направлен, согласно правилу Жуковского: вектор относительной скорости $\bar{\upsilon}_r$ проецируется на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения $\bar{\omega}$ ($\bar{\upsilon}_r$ уже лежит в этой плоскости) и затем поворачиваем на угол 90^0 в сторону вращения (рис.5).

Модуль абсолютного ускорения т. *M* находим методом проекций:

$a_x = -a_e^ц \cdot \cos\alpha + a_e^в \cdot \sin\alpha + a_c = -8450 \cdot 0{,}6 + 450 \cdot 0{,}8 + 6240 = 1530$

$a_y = a_e^ц \cdot \sin\alpha + a_e^в \cdot \cos\alpha - a_r = 8450 \cdot 0{,}8 + 450 \cdot 0{,}6 - 240 = 6790$

$a_{абс} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6960$ см/с^2.

Ответ: $\upsilon_{абс} = 541{,}2$ см/с; $a_{абс} = 6960$ см/с^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.

2. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие / под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - Изд. 51-е, стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 448 с. - ISBN 978-5-9511-00 19-1. - Текст : непосредственный.

3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. -Текст : электронный

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / под общ. ред. А. А. Яблонского. - 18-е изд., стер. - Москва : Кнорус, 2011. - 392 с. - Текст : непосредственный.

5. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. Ч. 1. - 208 с. - Текст : электронный.

6. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. .Ч. 2. - 140 с. – Текст : электронный.

7. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.

Приложение 1
(Пример оформления
титульного листа РГР)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра механики, мехатроники и робототехники

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «Теоретическая механика»

Выполнил: студент гр. ____________ ________________

(ФИО)

Проверил: ____________ __________________

(должность/ степень) (ФИО)

Курск 20_____г.

Приложение 2
(Пример оформления листа РГР)

ФИО________, гр.________, вариант №_________

<u>*Название работы*</u>

Дано:

____

Найти:

Рис. Исходная схема

Рис. Расчетная схема

Решение:

Пояснения к задаче см. в примерах методических указаний.

Ответ: