МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра уникальных зданий и сооружений

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«18» 04 __________ 2024 г.

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Основы научных исследований»
для специальности 08.05.01
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Курск 2024

УДК 511

Составитель: А.Г. Колесников

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Осовских Е.В.*

Основы научных исследований: методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Основы научных исследований» для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» /Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.Г. Колесников. Курск, 2024. - 51 с. 7 прилож.. - Библиогр.: 44 с.

Методические указания содержат требования к проведению экспериментальных исследований и обработке их результатов.

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по дисциплине «Основы научных исследований» студентами специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 18.04.24. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 2,96 . Уч.-изд.л. 2,68 . Тираж 100 экз. Заказ. 683 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Одной из основных задач изучения методов решения научно-технических задач в строительстве является освоение методов получения достоверной измерительной информации и правильного ее использования, а также приобретение практических навыков обработки данных при выполнении различных видов измерений.

Решению указанной задачи и посвящены задачи, изложенные в данных методических указаниях. При выполнении работы студент углубляет теоретические знания и получает практические навыки в области обработки экспериментальных данных при выполнении однократных и многократных измерений, нескольких серий измерений, при функциональных преобразованиях результатов измерений и исследовании физических зависимостей.

1. ОДНОКРАТНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

При однократном измерении физической величины получено показание средства измерения $X = 10$. Определить, чему равно значение измеряемой величины, если экспериментатор обладает следующей априорной информацией: средство измерения имеет диапазон измерений от 0 до 10; класс точности 0,02/0,01; значение аддитивной поправки составляет $\theta_а = 1{,}0$.

РЕШЕНИЕ.

Границы, в которых находится значение измеряемой величины без учета поправки, определяются следующим образом:

$$X_1 = X - \Delta X; \quad X_2 = X + \Delta X, \tag{1.1}$$

где ΔX – предел допускаемой абсолютной погрешности средства измерения. Для того чтобы найти значение ΔX воспользуемся формулой:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\%, \tag{1.2}$$

где X – значение измеряемой величины на входе (выходе) средств измерений или число делений, отсчитанных по шкале. При заданном показании средства измерения $X = 10$.

δ - предел допустимой относительной основной погрешности, который при заданном классе точности 0,02/0,01 определяют по формуле:

$$\delta = \left[c + d\left(\left| \frac{X_К}{X} \right| - 1 \right) \right], \tag{1.3}$$

где $X_К$ – больший по модулю из пределов измерений. При заданном диапазоне измерения: $X_К = 10$.

c, d – положительные числа, определяемые в соответствии с ГОСТ 8.401-80 при заданном классе точности c = 0,02; d = 0,01.

Подставив в формулу (1.3) численные значения получим:

$$\delta = \left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left| \frac{10}{10} \right| - 1 \right) \right] = 0{,}02.$$

Выразив из формулы (1.1) ΔX и подставив численные значения, получим:

$$\Delta X = \frac{\delta}{100\%} \cdot X = \frac{0{,}02\%}{100\%} \cdot 10 = 0{,}002.$$

Границы, в которых лежит измеряемая величина без учета аддитивной поправки, будут:

$$X_1 = 10 - 0{,}002 = 9{,}998; \quad X_2 = 10 + 0{,}002 = 10{,}002.$$

С учетом аддитивной поправки, значение измеряемой величины лежит в пределах:

$$Q_1 + \theta_a \le Q \le Q_2 + \theta_a;$$

$$9{,}998 + 1{,}0 \le Q \le 10{,}002 + 1{,}0;$$

$$10{,}998 \le Q \le 11{,}002.$$

Ответ: $10{,}998 \le Q \le 11{,}002.$

2. МНОГОКРАТНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

При многократном измерении одной и той же физической величины получена серия из 24 результатов измерений Q_i, $i \in [1 \ldots 24]$. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 2.1. Определить результат измерения с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$.

Таблица 2.1 – Исходные данные

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_i	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	494
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Q_i	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	492

РЕШЕНИЕ.

При определении результата многократного измерения необходимо учитывать, что $n = 24$, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$.

1) Определяем точечные оценки результатов измерения:

– значение среднего арифметического $\overline{Q}$ результата измерения:

$$\overline{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{n}. \tag{2.1}$$

Подставив численные значения в формулу (2.1), получим:

$$\overline{Q} = \frac{480 \cdot 2 + 481 \cdot 4 + 482 \cdot 2 + 483 \cdot 5}{24} +$$

$$+ \frac{484 \cdot 5 + 485 \cdot 3 + 486 + 492 + 494}{24} = 483{,}75;$$

– значение среднего квадратического отклонения S_Q результата измерения:

$$S_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \overline{Q})^2}{n-1}}\,. \qquad (2.2)$$

Подставив численные значения в формулу (2.2), получим:

$$S_Q = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(480-483{,}75)^2\cdot 2+(481-483{,}75)^2\cdot 4+(482-483{,}75)^2\cdot 2+\\+(483-483{,}75)^2\cdot 5+(484-483{,}75)^2\cdot 5+(485-483{,}75)^2\cdot 3+\\+(486-483{,}75)^2+(492-483{,}75)^2+(494-483{,}75)^2\end{gathered}}{24-1}} = 3{,}300\,.$$

2) Производим обнаружение и исключение ошибок

В серии полученных результатов измерений могут находиться ошибочные результаты. Проведем проверку сомнительных результатов. В качестве сомнительного результата измерения рассмотрим значение $Q_{12} = 494$, имеющее наибольшее отклонение среднего арифметического.

Вычисляем наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение:

$$\nu = \frac{\max\left|Q_i - \overline{Q}\right|}{S_Q}\,. \qquad (2.3)$$

Подставив численные значения в формулу (2.3), получим:

$$\nu = \frac{|494 - 483{,}75|}{3{,}300} = 3{,}106\,.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}701\,.$$

Так как $\nu > \nu_q$ $(3{,}106 > 2{,}701)$, то данный результат измерения $Q_{12} = 494$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные первый раз исходные данные представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Откорректированные первый раз исходные данные результата многократного измерения ($n = 23$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Qi	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	-
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Qi	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	492

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 23$.

$$\overline{Q} = \frac{480 \cdot 2 + 481 \cdot 4 + 482 \cdot 2 + 483 \cdot 5}{23} +$$

$$+ \frac{484 \cdot 5 + 485 \cdot 3 + 486 + 492}{23} = 483{,}304;$$

$$S_Q = \sqrt{\frac{\begin{array}{c}(480 - 483{,}304)^2 \cdot 2 + (481 - 483{,}304)^2 \cdot 4 + (482 - 483{,}304)^2 \cdot 2 + \\ + (483 - 483{,}304)^2 \cdot 5 + (484 - 483{,}304)^2 \cdot 5 + (485 - 483{,}304)^2 \cdot 3 + \\ + (486 - 483{,}304)^2 + (492 - 483{,}304)^2\end{array}}{23 - 1}} =$$

$$= 2{,}530;$$

$$\nu = \frac{|492 - 483{,}304|}{2{,}530} = 3{,}436.$$

По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}688.$$

Так как $\nu > \nu_q$ ($3{,}436 > 2{,}688$), то результат измерения $Q_{24} = 492$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные второй раз исходные данные представлены в таблице 2.3.

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 22$.

$$\overline{Q} = \frac{480 \cdot 2 + 481 \cdot 4 + 482 \cdot 2 + 483 \cdot 5 + 484 \cdot 5 + 485 \cdot 3 + 486}{22} = 482{,}909;$$

Таблица 2.3 – Откорректированные второй раз исходные данные результата многократного измерения ($n = 22$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_i	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	-
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Q_i	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	-

$$S_Q = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(480-482{,}909)^2\cdot 2+(481-482{,}909)^2\cdot 4+(482-482{,}909)^2\cdot 2+\\+(483-482{,}909)^2\cdot 5+(484-482{,}909)^2\cdot 5+(485-482{,}909)^2\cdot 3+\\+(486-482{,}909)^2\end{gathered}}{22-1}} = 1{,}716;$$

$$\nu = \frac{|486-482{,}909|}{1{,}716} = 1{,}802\,.$$

По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}664\,.$$

Так как $\nu < \nu_q$ $(1{,}802 < 2{,}664)$, то результат измерения $Q_{16} = 486$ является одним из результатов измерения. Все ошибки измерения исключены.

3) Проверка гипотезы о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Так как n лежит в интервале $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$, то для проверки применяем составной критерий.

Применяя критерий 1, вычислим статистический коэффициент:

$$d = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|Q_i - \overline{Q}\right|}{\sqrt{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(Q_i-\overline{Q})^2}}\,. \qquad (2.4)$$

Подставив численные значения в формулу (2.4), получим:

$$d = \frac{30,545}{\sqrt{22 \cdot 61,818}} = 0,828.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P_1 = 0,98$, тогда уровень значимости $q_1 = 1 - P_1 = 0,02$. По таблицам (приложение Г) [1] определяем квантили распределения для $n = 22$ и $q_1 = 0,02$. В таблице отсутствуют данные для $n = 22$, поэтому значение квантилей распределения для данного числа измерений найдем интерполяцией:

$d_{1\text{-}0,5q1} = 0,7022$ и $d_{0,5q1} = 0,8933$.

Так как $d_{1\text{-}0,5q1} < d < d_{0,5q1}$ $(0,7022 < 0,8619 < 0,8933)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применяя критерий 2 (проверяем граничные условия), задаемся доверительной вероятностью $P_2 = 0,98$ и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2 = 0,02$ с учетом $n = 22$ определим по таблицам (приложение Г) [1] значения m и P^*:

$m = 2$ и $P^* = 0,97$.

Для вероятности $P^* = 0,97$ из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (приложение Б) [1] определяем значение:

$t = 2,17$.

Рассчитываем доверительный интервал:

$$E = t \cdot S_Q. \qquad (2.5)$$

Подставив численные значения в формулу (2.5), получим:

$$E = 2,17 \cdot 1,716 = 3,723.$$

Так как ни одна разность $\left|Q_i - \overline{Q}\right|$ не превосходит E $(m_э < m)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными и закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \ge (P_1 + P_2 - 1)$. В данном случае с вероятностью $P_0 \geq 0{,}96$.

4) Определение стандартного отклонения среднего арифметического.

Так как закон распределения вероятности результатов измерения признан нормальным, то стандартное отклонение определяем по формуле:

$$S = \frac{S_Q}{\sqrt{n}}. \qquad (2.6)$$

Подставив численные значения в формулу (2.6), получим:

$$S = 1{,}716/\sqrt{22} = 0{,}366.$$

5) Определение доверительного интервала.

Так как закон распределения вероятности результата измерений признан нормальным, то доверительный интервал для заданной доверительной вероятности $P = 0{,}95$ определяется из распределения Стьюдента:

$$E = t \cdot S, \qquad (2.7)$$

где t выбирается из таблиц (приложение Д) [1]; при этом $m = n - 1$,а $\alpha = P$. Для рассматриваемого случая $m = 21$ и $\alpha = 0{,}95$. В таблице отсутствуют данные для рассматриваемого случая, поэтому значение коэффициента Стьюдента для заданного числа измерений($m = 21$)найдем интерполяцией:

$$t = 2{,}080,$$

тогда подставляя численные значения в формулу (2.7), получим:

$$E = 2{,}080 \cdot 0{,}366 = 0{,}761.$$

Таким образом, окончательный результат многократного измерения можно представить следующим образом:

$$\overline{Q} - E \leq Q \leq \overline{Q} + E;$$

$$482{,}9 - 0{,}8 \leq Q \leq 482{,}9 + 0{,}8.$$

Ответ: $482{,}1 \leq Q \leq 483{,}7$, $P = 0{,}95$, $n = 22$.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕСКОЛЬКИХ СЕРИЙ ИЗМЕРЕНИЙ

При многократных измерениях одной и той же величины получены две серии по 12 (n_j) результатов измерений в каждой. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблицах 3.1 и 3.2. Вычислить результат многократных измерений с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$.

Таблица 3.1 – Результаты измерений первой серии

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_{Ii}	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	494

Таблица 3.2 – Результаты измерений второй серии

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_{IIi}	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	492

РЕШЕНИЕ.

При определении результатов многократных измерений необходимо учитывать, что $n = 12$ для каждой серии измерений, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$.

Обработку экспериментальных данных каждой из серий будем производить как для многократного измерения.

Обработка экспериментальных данных первой серии.

1) Определяем точечные оценки результатов измерения:

– значение среднего арифметического $\overline{Q}$ результата измерения определяем по формуле (2.1). Подставив численные значения в формулу (2.1), получим:

$$\overline{Q}_I = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 482 \cdot 2 + 483 \cdot 3 + 484 \cdot 2 + 486 + 494}{12} = 483{,}583;$$

– значение среднего квадратического отклонения S_Q результата;

измерения определяем по формуле (2.2). Подставив численные значения в формулу (2.2), получим:

$$S_{Q_I} = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(480-483{,}583)^2+(481-483{,}583)^2\cdot 2+(482-483{,}583)^2\cdot 2+\\+(483-484{,}417)^2\cdot 3+(484-483{,}583)^2\cdot 2+(486-483{,}583)^2+\\+(494-483{,}583)^2\end{gathered}}{12-1}} = 3{,}655.$$

2) Производим обнаружение и исключение ошибок.

В серии полученных результатов измерений могут находиться ошибочные результаты. Проведем проверку сомнительных результатов. В качестве сомнительного результата измерения рассмотрим значение $Q_{I_{12}} = 494$, имеющее наибольшее отклонение среднего арифметического.

Вычисляем наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение по формуле (2.3). Подставив численные значения в формулу (2.3), получим:

$$\nu = \frac{|494-483{,}583|}{3{,}655} = 2{,}850.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}387.$$

Так как $\nu > \nu_q$ $(2{,}850 > 2{,}387)$, то результат измерения $Q_{I_{12}} = 494$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные исходные данные для первой серии измерений представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Откорректированные исходные данные результатов измерения первой серии ($n = 11$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_{Ii}	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	–

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 11$.

$$\overline{Q}_I = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 482 \cdot 2 + 483 \cdot 3 + 484 \cdot 2 + 486}{11} = 482{,}636;$$

$$S_{Q_I} = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(480 - 482{,}636)^2 + (481 - 482{,}636)^2 \cdot 2 + (482 - 482{,}636)^2 \cdot 2 + \\ + (483 - 482{,}636)^2 \cdot 3 + (484 - 482{,}636)^2 \cdot 2 + (486 - 482{,}636)^2\end{gathered}}{11 - 1}} = 1{,}690;$$

$$\nu = \frac{|486 - 482{,}636|}{1{,}690} = 1{,}991.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$\nu_q = 2{,}383$.

Так как $\nu < \nu_q$ ($1{,}991 < 2{,}383$), то результат измерения $Q_{I_5} = 481$ является одним из результатов измерения первой серии. Все ошибки измерения исключены.

3) Проверка гипотезы о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Так как n лежит в интервале $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$, то для проверки применяем составной критерий.

Применяя критерий 1, вычислим статистический коэффициент по формуле (2.4). Подставив численные значения в формулу (2.4), получим:

$$d = \frac{14{,}364}{\sqrt{11 \cdot 28{,}545}} = 0{,}8106.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P_1 = 0{,}98$, тогда уровень значимости $q_1 = 1 - P_1 = 0{,}02$. По таблицам (приложение Г) [1] определяем квантили распределения для $n = 11$ и $q_1 = 0{,}02$:

$d_{1\text{-}0,5q1} = 0{,}6795$ и $d_{0,5q1} = 0{,}9288$.

Так как $d_{1\text{-}0,5q1} < d < d_{0,5q1}$ $(0{,}6795 < 0{,}8106 < 0{,}9288)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применяя критерий 2 (проверяем граничные условия), задаемся доверительной вероятностью $P_2 = 0{,}98$ и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2 = 0{,}02$ с учетом $n = 11$ определим по таблицам (приложение Г) [1] значения m и P^*:

$m = 1$ и $P^* = 0{,}98$.

Для вероятности $P^* = 0{,}98$ из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (приложение Б) [1] определяем теоретическое значение:

$t = 2{,}326$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.5). Подставив численные значения в формулу (2.5), получим:

$E = 2{,}326 \cdot 1{,}690 = 3{,}937$.

Так как ни одна разность $|Q_i - \overline{Q}|$ не превосходит E $(m_у < m)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными и закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$. В данном случае с вероятностью $P_0 \geq 0{,}96$.

Обработка экспериментальных данных второй серии.

1) Определяем точечные оценки результатов измерения:

– значение среднего арифметического $\overline{Q}$ результата измерения определяем по формуле (2.1). Подставив численные значения в формулу (2.1), получим:

$$\overline{Q}_{II} = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 483 \cdot 2 + 484 \cdot 3 + 485 \cdot 3 + 492}{12} = 483{,}917;$$

– значение среднего квадратического отклонения S_Q результата измерения определяем по формуле (2.2). Подставив численные значения в формулу (2.2), получим:

$$S_{Q_{II}} = \sqrt{\frac{\begin{gathered}(480-483{,}917)^2 + (481-483{,}917)^2 \cdot 2 + (483-483{,}917)^2 \cdot 2 + \\ + (484-483{,}917)^2 \cdot 3 + (485-483{,}917)^2 \cdot 3 + (492-483{,}917)^2\end{gathered}}{12-1}} = 3{,}059.$$

2) Производим обнаружение и исключение ошибок.

В серии полученных результатов измерений могут находиться ошибочные результаты. Проведем проверку сомнительных результатов. В качестве сомнительного результата измерения рассмотрим значение $Q_{II_{12}} = 492$, имеющее наибольшее отклонение среднего арифметического.

Вычисляем наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение по формуле (2.3). Подставив численные значения в формулу (2.3), получим:

$$\nu = \frac{|492-483{,}917|}{3{,}059} = 2{,}643.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}387.$$

Так как $\nu > \nu_q$ $(2{,}643 > 2{,}387)$, то результат измерения $Q_{II_{12}} = 492$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные исходные данные для второй серии измерений представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Откорректированные исходные данные результатов измерения второй серии ($n = 11$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q_{IIi}	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	-

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 11$.

$$\overline{Q}_{II} = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 483 \cdot 2 + 484 \cdot 3 + 485 \cdot 3}{11} = 483{,}182;$$

$$S_{Q_{II}} = \sqrt{\frac{\begin{array}{l}(480 - 483{,}182)^2 + (481 - 483{,}182)^2 \cdot 2 + (483 - 483{,}182)^2 \cdot 2 + \\ + (484 - 483{,}182)^2 \cdot 3 + (485 - 483{,}182)^2 \cdot 3\end{array}}{11 - 1}} = 1{,}779;$$

$$\nu = \frac{|480 - 483{,}091|}{1{,}779} = 1{,}737.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$\nu_q = 2{,}383$.

Так как $\nu < \nu_q$ $(1{,}737 < 2{,}383)$, то результаты измерения $Q_{II_3} = 480$ является одним из результатов измерения второй серии. Все ошибки измерения исключены.

3) Проверка гипотезы о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Так как n лежит в интервале $10\ldots15 < n < 40\ldots50$, то для проверки применяем составной критерий.

Применяя критерий 1, вычислим статистический коэффициент по формуле (2.4). Подставив численные значения в формулу (2.4), получим:

$$d = \frac{15{,}818}{\sqrt{11 \cdot 31{,}636}} = 0{,}8479.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P_1 = 0{,}98$, тогда уровень значимости $q_1 = 1 - P_1 = 0{,}02$. По таблицам (приложение Г) [1] определяем квантили распределения для $n = 11$ и $q_1 = 0{,}02$:

$d_{1\text{-}0{,}5q1} = 0{,}6795$ и $d_{0{,}5q1} = 0{,}9288$.

Так как $d_{1\text{-}0{,}5q1} < d < d_{0{,}5q1}$ $(0{,}6795 < 0{,}8479 < 0{,}9288)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применяя критерий 2 (проверяем граничные условия), задаемся доверительной вероятностью $P_2 = 0{,}98$ и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2 = 0{,}02$ с учетом $n = 11$ определим по таблицам (приложение Г) [1] значения m и P^*:

$m = 1$ и $P^* = 0{,}98$.

Для вероятности $P^* = 0{,}98$ из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (приложение Б) [1] определяем теоретическое значение:

$t = 2{,}326$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.5). Подставив численные значения в формулу (2.5), получим:

$E = 2{,}326 \cdot 1{,}779 = 4{,}144$.

Так как ни одна разность $\left|Q_i - \overline{Q}\right|$ не превосходит $E\,(m_э < m)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными и закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$. В данном случае с вероятностью $P_0 \geq 0{,}96$.

4) Проверка значимости различия средних арифметических серий.

Вычисляем моменты закона распределения разности:

$$G = \overline{Q}_I - \overline{Q}_{II}; \tag{3.1}$$

$$S_G = \sqrt{\frac{S^2_{Q_I}}{n_1} + \frac{S^2_{Q_{II}}}{n_2}}. \tag{3.2}$$

Подставив численные значения в формулы (3.1) и (3.2), получим:

$$G = 482{,}636 - 483{,}182 = -0{,}545;$$

$$S_G = \sqrt{\frac{(1{,}690)^2}{11} + \frac{(1{,}779)^2}{11}} = 0{,}740.$$

Задавшись доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, определяем из таблицы интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (Приложение Б) [1] соответствующее значение:

$$t = 1{,}96.$$

Так как закон распределения вероятности результата измерений признан нормальным, то доверительный интервал для заданной доверительной вероятности $P = 0{,}95$ определяется из распределения Стьюдента:

$$E_G = t \cdot S_G. \tag{3.3}$$

Подставив численные значения в формулу (3.3), получим:

$$E_G = 1{,}96 \cdot 0{,}740 = 1{,}450.$$

Так как $|G| \le E_G$ $(0{,}545 \le 1{,}450)$, то различие между средними арифметическими в сериях с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ можно признать незначимым.

5) Проверка равнорассеянности результатов измерений в сериях.

Для проверки равнорассеянности результатов измерений в сериях определим значение отношения квадратов оценок дисперсий:

$$\psi = \frac{S^2_{Q_{II}}}{S^2_{Q_I}} \ge 1. \tag{3.4}$$

Подставив численные значения в формулу (3.4), получим:

$$\psi = \frac{1{,}779^2}{1{,}690^2} = 1{,}108 > 1.$$

Задавшись доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, определим из соответствующих таблиц (Приложение Е) [1] значение аргумента интегральной функции распределения вероятности Фишера ψ_0. При $n_1 = n_2 = 11$ и доверительной вероятности $P = 0{,}95$ величина аргумента интегральной функции распределения вероятности Фишера ψ_0 имеет значение:

$$\psi_0 = 2{,}82\,.$$

Так как $\psi < \psi_0$ $(1{,}108 < 2{,}82)$, то серии результатов измерений с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ будем считать равнорассеянными.

6) Совместная обработка результатов измерения обеих серий.

Так как серии однородны (равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических), то все результаты измерения следует объединить в единый массив и выполнить обработку. Определим оценку результата измерения $\overline{Q}$ и среднего квадратического отклонения S:

$$\overline{Q} = \frac{n_1 \cdot \overline{Q}_I + n_2 \cdot \overline{Q}_{II}}{n_1 + n_2}\,; \tag{3.5}$$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\cdot S^2_{Q_I} + (n_2 - 1)\cdot S^2_{Q_{II}} + n_1 \cdot \left(\overline{Q}_I - \overline{Q}\right)^2 + n_2 \cdot \left(\overline{Q}_{II} - \overline{Q}\right)^2}{(n_1 + n_2)\cdot(n_1 + n_2 - 1)}}\,, \tag{3.6}$$

где n_1 и n_2 – числа оставшихся результатов измерений, соответственно, в 1-й и 2-й сериях после исключения ошибок.

Подставив численные значения в формулы (3.5) и (3.6), получим:

$$\overline{Q} = \frac{11 \cdot 482{,}636 + 11 \cdot 483{,}182}{11 + 11} = 482{,}909\,;$$

$$S = \sqrt{\frac{\left(\begin{array}{c}(11-1)\cdot 1{,}690^2 + (11-1)\cdot 1{,}779^2 + \\ + 11\cdot(482{,}636 - 482{,}909)^2 + 11\cdot(483{,}182 - 482{,}909)^2\end{array}\right)}{(11+11)\cdot(11+11-1)}} = 0{,}366\,.$$

Задавшись доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, определим из таблиц распределения Стьюдента значение t для числа степеней свободы m:

$$m = \frac{2^2}{(n_1 - 1)^{-1} + (n_2 - 1)^{-1}}\,. \tag{3.7}$$

Подставив численные значения в формулу (3.7), получим:

$$m = \frac{2^2}{(11-1)^{-1} + (11-1)^{-1}} = 20\,.$$

При $m = 20$ и доверительной вероятности $P = 0{,}95$ коэффициент Стьюдента (приложение Д) [1] равен:

$$t = 2{,}086.$$

Определим доверительный интервал по формуле (2.7). Подставив численные значения в формулу (2.7), получим:

$$E = 2{,}086 \cdot 0{,}366 = 0{,}763.$$

Таким образом, окончательный результат измерения обеих серий можно представить следующим образом:

$$\overline{Q} - E \le Q \le \overline{Q} + E;$$

$$482{,}9 - 0{,}8 \le Q \le 482{,}9 + 0{,}8.$$

Ответ: $482{,}1 \le Q \le 483{,}7$, $P = 0{,}95$, $n = 22$.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ (КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ)

При многократных измерениях независимых величин X и Y получено по 12 (n) результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 4.1. Определить результат вычисления $Z = f(X, Y)$, (вид функции Z и характер величин X, Y, Z представлены в табл. 4.2).

Таблица 4.1 – Результаты измерений

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_i	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483	494
Y_i	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	492

Таблица 4.2 – Исходные данные

$Z = f(X, Y)$	Характер и единицы измерения величин		
	X	Y	Z
$Z = X/(Y + 10)$	ЭДС, мВ	сопротивление, Ом	сила тока, А

РЕШЕНИЕ.

Обработка экспериментальных данных при функциональном преобразовании результатов измерений осуществляется с учетом того, что $n = 12$, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$.

При определении Z необходимо предварительно выразить значения величин X и Y в единицах системы СИ (табл. 4.3).

Таблица 4.3 – Результаты измерений, выраженные в системе СИ

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_i	0,483	0,482	0,482	0,486	0,483	0,484	0,484	0,481	0,480	0,481	0,483	0,494
Y_i	481	482	481	480	483	485	485	484	485	484	492	484

Обработка результатов измерений величины X.

Обработку экспериментальных данных будем производить как для многократного измерения.

1) Определяем точечные оценки результатов измерения:

– значение среднего арифметического $\overline{X}$ результата измерения определяем по формуле (2.1). Подставив численные значения в формулу (2.1), получим:

$$\overline{X} = \frac{0{,}480 + 0{,}481 \cdot 2 + 0{,}482 \cdot 2 + 0{,}483 \cdot 3 + 0{,}484 \cdot 2 + 0{,}486 + 0{,}494}{12} =$$

$$= 0{,}483583;$$

– значение среднего квадратического отклонения S_X результата измерения определяем по формуле (2.2). Подставив численные значения в формулу (2.2), получим:

$$S_X = \sqrt{\frac{\begin{array}{l}(0{,}480 - 0{,}483583)^2 + (0{,}481 - 0{,}483583)^2 \cdot 2 + \\ + (0{,}482 - 0{,}483583)^2 \cdot 2 + (0{,}483 - 0{,}484417)^2 \cdot 3 + \\ + (0{,}484 - 0{,}483583)^2 \cdot 2 + (0{,}486 - 0{,}483583)^2 + \\ + (0{,}494 - 0{,}483583)^2\end{array}}{12 - 1}} = 3{,}655 \cdot 10^{-3}.$$

2) Производим обнаружение и исключение ошибок.

В серии полученных результатов измерений могут находиться ошибочные результаты. Проведем проверку сомнительных результатов. В качестве сомнительного результата измерения рассмотрим значение $X_{12} = 0{,}494$, имеющее наибольшее отклонение среднего арифметического.

Вычисляем наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение по формуле (2.3). Подставив численные значения в формулу (2.3), получим:

$$\nu = \frac{|0{,}494 - 0{,}483583|}{3{,}655 \cdot 10^{-3}} = 2{,}850.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$\nu_q = 2{,}387$.

Так как $\nu > \nu_q$ $(2{,}850 > 2{,}387)$, то результат измерения $X_{12} = 0{,}494$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные исходные данные представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Откорректированные исходные данные результата многократного измерения $(n = 11)$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xi	0,483	0,482	0,482	0,486	0,483	0,484	0,484	0,481	0,480	0,481	0,483	–

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 11$.

$$\overline{X} = \frac{0{,}480 + 0{,}481 \cdot 2 + 0{,}482 \cdot 2 + 0{,}483 \cdot 3 + 0{,}484 \cdot 2 + 0{,}486}{11} = 0{,}482636;$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\begin{array}{c}(0{,}480 - 0{,}482636)^2 + (0{,}481 - 0{,}482636)^2 \cdot 2 + \\ + (0{,}482 - 0{,}482636)^2 \cdot 2 + (0{,}483 - 0{,}482636)^2 \cdot 3 + \\ + (0{,}484 - 0{,}482636)^2 \cdot 2 + (0{,}486 - 0{,}482636)^2\end{array}}{11 - 1}} = 1{,}690 \cdot 10^{-3};$$

$$\nu = \frac{|0{,}486 - 0{,}482636|}{1{,}690 \cdot 10^{-3}} = 1{,}991.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$\nu_q = 2{,}383$.

Так как $\nu < \nu_q$ $(1{,}991 < 2{,}383)$, то результат измерения $X_5 = 0{,}486$ является одним из результатов измерения. Все ошибки измерения исключены.

3) Проверка гипотезы о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Так как n лежит в интервале $10\ldots15 < n < 40\ldots50$, то для проверки применяем составной критерий.

Применяя критерий 1, вычислим статистический коэффициент по формуле (2.4). Подставив численные значения в формулу (2.4), получим:

$$d = \frac{14{,}364 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{11 \cdot 28{,}545 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}8106.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P_1 = 0{,}98$, тогда уровень значимости $q_1 = 1 - P_1 = 0{,}02$. По таблицам (приложение Г) [1] определяем квантили распределения для $n = 11$ и $q_1 = 0{,}02$:

$$d_{1\text{-}0{,}5q1} = 0{,}6795 \text{ и } d_{0{,}5q1} = 0{,}9288.$$

Так как $d_{1\text{-}0{,}5q1} < d < d_{0{,}5q1}$ $(0{,}6795 < 0{,}8106 < 0{,}9288)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применяя критерий 2 (проверяем граничные условия), задаемся доверительной вероятностью $P_2 = 0{,}98$ и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2 = 0{,}02$ с учетом $n = 11$ определим по таблицам (приложение Г) [1] значения m и P^*:

$m = 1$ и $P^* = 0{,}98$.

Для вероятности $P^* = 0{,}98$ из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (приложение Б) [1] определяем теоретическое значение:

$t = 2{,}326$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.5). Подставив численные значения в формулу (2.5), получим:

$E = 2{,}326 \cdot 1{,}690 \cdot 10^{-3} = 3{,}937 \cdot 10^{-3}$.

Так как ни одна разность $|X_i - \overline{X}|$ не превосходит E ($m_ý < m$), то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными и закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$. В данном случае с вероятностью $P_0 \geq 0{,}96$.

Обработка результатов измерений величины Y.

1) Определяем точечные оценки результатов измерения:

– значение среднего арифметического $\overline{Y}$ результата измерения определяем по формуле (2.1). Подставив численные значения в формулу (2.1), получим:

$$\overline{Y} = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 483 \cdot 2 + 484 \cdot 3 + 485 \cdot 3 + 492}{12} = 483{,}917;$$

– значение среднего квадратического отклонения S_Y результата измерения определяем по формуле (2.2). Подставив численные значения в формулу (2.2), получим:

$$S_Y = \sqrt{\frac{\begin{array}{c}(480 - 483{,}917)^2 + (481 - 483{,}917)^2 \cdot 2 + (483 - 483{,}917)^2 \cdot 2 + \\ + (484 - 483{,}917)^2 \cdot 3 + (485 - 483{,}917)^2 \cdot 3 + (492 - 483{,}917)^2\end{array}}{12 - 1}} = 3{,}059.$$

2) Производим обнаружение и исключение ошибок.

В серии полученных результатов измерений могут находиться ошибочные результаты. Проведем проверку сомнительных результатов. В качестве сомнительного результата измерения рассмотрим значение $Y_{12} = 492$, имеющее наибольшее отклонение среднего арифметического.

Вычисляем наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение по формуле (2.3). Подставив численные значения в формулу (2.3), получим:

$$\nu = \frac{|492 - 483{,}917|}{3{,}059} = 2{,}643.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}387.$$

Так как $\nu > \nu_q$ $(2{,}643 > 2{,}387)$, то результат измерения $Y_{12} = 492$ является ошибочным и должен быть отброшен. Исключаем его из наших результатов измерений. Откорректированные исходные данные серии измерений представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Откорректированные исходные данные результата многократного измерения ($n = 11$)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_i	484	481	480	481	484	485	485	484	483	483	485	-

Повторяем вычисления по формулам (2.1)-(2.3) для сокращенной серии результатов измерений: $n = 11$.

$$\overline{Y} = \frac{480 + 481 \cdot 2 + 483 \cdot 2 + 484 \cdot 3 + 485 \cdot 3}{11} = 483{,}182;$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\begin{array}{l}(480 - 483{,}182)^2 + (481 - 483{,}182)^2 \cdot 2 + (483 - 483{,}182)^2 \cdot 2 + \\ + (484 - 483{,}182)^2 \cdot 3 + (485 - 483{,}182)^2 \cdot 3\end{array}}{11 - 1}} = 1{,}779;$$

$$\nu = \frac{|480 - 483{,}091|}{1{,}779} = 1{,}737.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}95$, тогда: $q = 1 - P = 0{,}05$. По таблице (приложение В) [1] находим соответствующее теоретическое значение:

$$\nu_q = 2{,}383.$$

Так как $\nu < \nu_q$ ($1{,}737 < 2{,}383$), то результаты измерения $Y_3 = 480$ является одним из результатов измерения. Все ошибки измерения исключены.

3) Проверка гипотезы о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Так как n лежит в интервале $10 \ldots 15 < n < 40 \ldots 50$, то для проверки применяем составной критерий.

Применяя критерий 1, вычислим статистический коэффициент по формуле (2.4). Подставив численные значения в формулу (2.4), получим:

$$d = \frac{15{,}818}{\sqrt{11 \cdot 31{,}636}} = 0{,}8479.$$

Задаемся доверительной вероятностью $P_1 = 0{,}98$, тогда уровень значимости $q_1 = 1 - P_1 = 0{,}02$. По таблицам (приложение Г) [1] определяем квантили распределения для $n = 11$ и $q_1 = 0{,}02$:

$$d_{1\text{-}0,5q1} = 0{,}6795 \text{ и } d_{0,5q1} = 0{,}9288.$$

Так как $d_{1\text{-}0,5q1} < d < d_{0,5q1}$ $(0{,}6795 < 0{,}8479 < 0{,}9288)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применяя критерий 2 (проверяем граничные условия), задаемся доверительной вероятностью $P_2 = 0{,}98$ и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2 = 0{,}02$ с учетом $n = 11$ определим по таблицам (приложение Г) [1] значения m и P^*:

$$m = 1 \text{ и } P^* = 0{,}98.$$

Для вероятности $P^* = 0{,}98$ из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (приложение Б) [1] определяем теоретическое значение:

$$t = 2{,}326.$$

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.5). Подставив численные значения в формулу (2.5), получим:

$$E = 2{,}326 \cdot 1{,}779 = 4{,}144.$$

Так как ни одна разность $|Y_i - \overline{Y}|$ не превосходит E $(m_э < m)$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными и закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$. В данном случае с вероятностью $P_0 \geq 0{,}96$.

4) Определение оценки среднего значения функции.

$$\overline{Z} = f(\overline{X}, \overline{Y}); \quad Z = X/(Y + 10). \tag{4.1}$$

Подставив численные значения в формулу (4.1), получим:

$$\overline{Z} = 0{,}482636/(483{,}182 + 10) = 0{,}000979\text{А}.$$

5) Определение поправки.

Поправку определяем по формуле:

$$\theta = -0{,}5 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot S_X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \cdot S_Y^2 \right); \tag{4.2}$$

Определяем частные производные, входящие в формулу (4.2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0; \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = \frac{2X}{(Y+10)^3}. \tag{4.4}$$

Подставив численные значения в формулы (4.3) и (4.4), получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = \frac{2 \cdot 0{,}482636}{(483{,}182+10)^3} = 8{,}046 \cdot 10^{-9}.$$

Подставив найденные значения в формулу (4.2), получим:

$$\theta = -0{,}5 \cdot \left(0 + 8{,}046 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}779^2\right) = -0{,}13 \cdot 10^{-7}.$$

Найденная поправка значительно меньше, чем расчетное значение функции, поэтому ей можно пренебречь.

б) Определение оценки стандартного отклонения функции.

Оценка стандартного отклонения функции находится по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_x} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot S_X\right)^2 + \frac{1}{n_y} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \cdot S_Y\right)^2}, \tag{4.5}$$

где n_x и n_y – числа оставшихся результатов измерений, соответственно, X и Y после исключения ошибок.

Определяем частные производные, входящие в формулу (4.5):

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{Y+10}; \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -\frac{X}{(Y+10)^2}. \tag{4.7}$$

Подставив численные значения в формулы (4.6) и (4.7), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{483{,}182+10} = 2{,}028 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -\frac{0{,}482636}{(483{,}182+10)^2} = -1{,}984 \cdot 10^{-6}.$$

Подставив найденные значения в формулу (4.5), получим:

$$S = \sqrt{\frac{1}{11} \cdot \left(2{,}028 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}690 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \frac{1}{11} \cdot \left(-1{,}984 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}779\right)^2} = 1{,}483 \cdot 10^{-6}.$$

7) Определение доверительного интервала для функции.

Доверительный интервал для функции находим по формуле (2.5). Так как законы распределения вероятности результатов измерения величин X и Y признаны нормальными, то значение t можно определить для принятой доверительной вероятности $P = 0{,}95$ из таблиц для распределения Стьюдента. При этом число степеней свободы m определятся из выражения:

$$m = \frac{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \cdot \frac{S_X^2}{n_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \cdot \frac{S_Y^2}{n_y}\right)^2}{\frac{1}{n_x - 1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^4 \cdot \left(\frac{S_X^2}{n_x}\right)^2 + \frac{1}{n_y - 1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^4 \cdot \left(\frac{S_Y^2}{n_y}\right)^2}. \qquad (4.8)$$

Подставив численные значения в формулу (4.8), получим:

$$m = \frac{\left(\left(2{,}028 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \frac{\left(1{,}690 \cdot 10^{-3}\right)^2}{11} + \left(-1{,}984 \cdot 10^{-6}\right)^2 \cdot \frac{1{,}779^2}{11}\right)^2}{\frac{1}{11-1} \cdot \left(2{,}028 \cdot 10^{-3}\right)^4 \cdot \left(\frac{\left(1{,}690 \cdot 10^{-3}\right)^2}{11}\right)^2 + \frac{1}{11-1} \cdot \left(-1{,}984 \cdot 10^{-6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1{,}779^2}{11}\right)^2} =$$

$$= 10{,}000.$$

Для принятой доверительной вероятности $P = 0{,}95$ и найденного числа степеней свободы $m = 10{,}000$ определяем теоретическое значение (приложение Д) [1]:

$$t = 2{,}228.$$

Тогда подставляя найденные значения в формулу (2.5), получим значение доверительного интервала:

$$E = 2{,}228 \cdot 1{,}483 \cdot 10^{-6} = 3{,}304 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$$

Таким образом, окончательный результат функциональных преобразований результата измерения можно представить следующим образом:

$$(0{,}000979 - 0{,}000003)\text{А} \le Z \le (0{,}000979 + 0{,}000003)\text{А}.$$

Ответ: $0{,}000976\text{А} \le Z \le 0{,}000982\text{А}$, $P = 0{,}95$, $n_x = n_y = 11$.

5. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЗАВИСИМОСТИ

При многократных совместных измерениях величин X и Y получено по 20 (n) пар результатов измерений. Эти измерения после внесения поправок представлены в таблице 5.1. Определить уравнение регрессии – Y по X: $Y = f(X)$;

Таблица 5.1 – Исходные данные

X_i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y_i	205	215	226	237	245	258	265	275	286	293
X_i	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
Y_i	87	188	286	386	485	575	667	770	868	966

РЕШЕНИЕ.

Определение уравнения регрессии $Y = f(X)$.

1) Построение экспериментальных точек в выбранной системе координат.

В осях координат X и Y строим n экспериментальных точек с координатами X_i и Y_i, $i \in [1 \ldots 20]$ (рис. 5.1). По характеру расположения точек выдвигаем гипотезу о виде уравнения регрессии Y на X.

Для уравнения регрессии будем использовать полином степени m:

$$Y = A + B \cdot X + C \cdot X^2 + \ldots + K \cdot X^m. \tag{5.1}$$

В первом приближении в качестве уравнения регрессии целесообразно использовать полином первой степени, тогда уравнение (5.1) примет вид:

$$Y = A + B \cdot X. \tag{5.2}$$

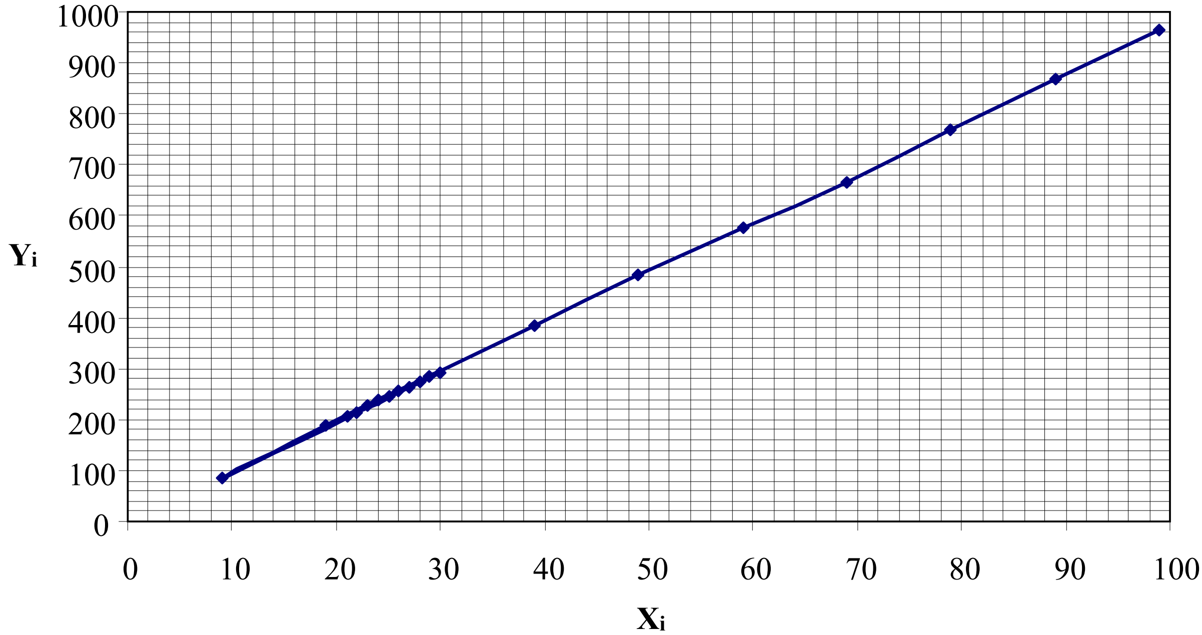

Рисунок 5.1 – График зависимости $Y = f(X)$

2) Определяем параметры уравнения регрессии по методу наименьших квадратов.

Для этого необходимо:

– составить систему уравнений по числу рассчитываемых параметров:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} = 0; \ \frac{\partial\Delta}{\partial B} = 0; \ \frac{\partial\Delta}{\partial C} = 0 \ \dots \ \frac{\partial\Delta}{\partial K} = 0, \qquad (5.3)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - A - B \cdot X - C \cdot X^2 - \dots - K \cdot X^m\right)^2$;

– для линейного уравнения регрессии система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} B \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + A \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i \\ B \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + n \cdot A = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}; \qquad (5.4)$$

– решая систему уравнений (5.4) определяем неизвестные параметры. Для принятого в первом приближении полинома первой степени вида (5.2), решение линейного уравнения регрессии имеет вид:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}; \qquad (5.5)$$

$$B = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}; \qquad (5.6)$$

Найдем значения величин, входящих в формулы (5.5) и (5.6):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 795; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 7783; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i = 429825;$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 43995; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 = 632025.$$

Подставляя численные значения в уравнения (5.5) и (5.6), получим:

$$A = \frac{43995 \cdot 7783 - 795 \cdot 429825}{20 \cdot 43995 - 632025} = 2{,}833;$$

$$B = \frac{20 \cdot 429825 - 795 \cdot 7783}{20 \cdot 43995 - 632025} = 9{,}719.$$

Таким образом, уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 2{,}833 + 9{,}719 \cdot X. \qquad (5.7)$$

3) Проверка правильности выбора вида уравнения регрессии.

Для проверки правильности выбора вида уравнения регрессии будем использовать непараметрический критерий серий и инверсий:

– рассчитываем отклонения экспериментальных значений Y_i от соответствующих значений Y_{pi}, рассчитанных для того же аргумента X_i по полученному уравнению регрессии (табл. 5.2);

– строим в осях координат X и ΔY полученные значения ΔY_i для соответствующих X_i (рис. 5.2);

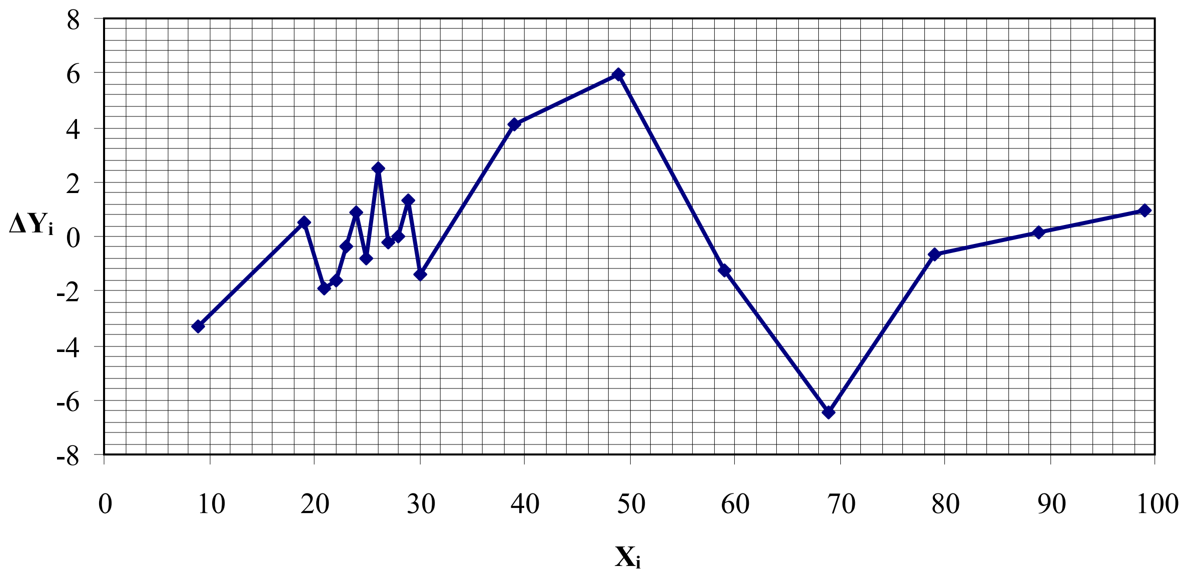

Рисунок 5.2 – Зависимость ΔY_i от X_i

– записываем последовательность значений ΔY_i по мере возрастания X_i, $i \in [1 \ldots n]$ (табл. 5.3);

– рассчитываем число серий N в полученной последовательности ΔY_i (под серией понимается последовательность отклонений одного знака, перед и после которой следует отклонение противоположного знака или нет вообще никаких отклонений) (табл. 5.3):

$$N = 12;$$

Таблица 5.2 – Отклонения экспериментальных значений Y_i от соответствующих значений Y_{pi}, рассчитанных для того же аргумента X_i по уравнению регрессии (5.7)

X_i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y_i	205	215	226	237	245	258	265	275	286	293
Y_{pi}	206,932	216,651	226,37	236,089	245,808	255,527	265,246	274,965	284,684	294,403
ΔY_i	-1,932	-1,651	-0,37	0,911	-0,808	2,473	-0,246	0,035	1,316	-1,403
X_i	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
Y_i	87	188	286	386	485	575	667	770	868	966
Y_{pi}	90,304	187,494	284,684	381,874	479,064	576,254	673,444	770,634	867,824	965,014
ΔY_i	-3,304	0,506	1,316	4,126	5,936	-1,254	-6,444	-0,634	0,176	0,986
Примечания: 1. Значения Y_{pi} определялись по формуле (5.7). 2. Значения: $\Delta Y_i = Y_i - Y_{pi}$.										

Таблица 5.3 – Последовательность значений ΔY_i по мере возрастания X_i, $i \in [1 \ldots n]$

Xi	9	19	21	22	23	24	25	26	27	28
Yi	87	188	205	215	226	237	245	258	265	275
ΔYi	-3,304	0,506	-1,932	-1,651	-0,37	0,911	-0,808	2,473	-0,246	0,035
Xi	29	30	39	49	59	69	79	89	99	
Yi	286	293	386	485	575	667	770	868	966	
ΔYi	1,316	-1,403	4,126	5,936	-1,254	-6,444	-0,634	0,176	0,986	

– задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}99$, $q = 1 - P = 0{,}01$ (для $n = 20$) и по таблице (приложение Ж) [1] определяем допустимые границы:

$$N_{1-0,5q} = 5, \; N_{0,5q} = 16;$$

– рассчитываем число инверсий A в полученной последовательности ΔY_i (под инверсией понимается событие, заключающееся в том, что $\Delta Y_i > \Delta Y_{ik}$ при $k > i$):

$$A = \sum_{j=1}^{n-1} A_j, \tag{5.8}$$

где A_j – это число инверсий j-го члена последовательности, т.е. число членов последовательности, которые, будучи расположенными в последовательности после j-го члена, имеют меньшее, чем ΔY_j значение;

$$A = 1+11+1+1+5+8+3+9+4+4+6+1+5+5+1+0+0+0+0 = 65;$$

– задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}99$, $q = 1 - P = 0{,}01$ (для $n = 20$) и по таблице (приложение И) [1] определяем допустимые границы:

$$A_{1-0,5q} = 59, \; A_{0,5q} = 130.$$

Так как $N_{1-0,5q} < N \le N_{0,5q}$ $(5 < 12 < 16)$ и $A_{1-0,5q} < A \le A_{0,5q}$ $(59 < 85 < 130)$, то с вероятностью $P = 0{,}99$ можно считать, что отклонения экспериментальных значений ΔY_i, от соответствующих значений Y_{pi} найденного уравнения регрессии являются случайными, не содержат аддитивного, мультипликативного или колебательного трендов, т.е. рассчитанное уравнение регрессии достоверно описывает экспериментально исследуемую зависимость между величинами X и Y. Эта зависимость описывается уравнением (5.7).

Определение уравнения регрессии $X = f(Y)$.

1) Построение экспериментальных точек в выбранной системе координат.

В осях координат Y и X строим n экспериментальных точек с координатами Y_i и X_i, $i \in [1 \ldots 20]$ (рис. 5.3). По характеру расположения точек выдвигаем гипотезу о виде уравнения регрессии X на Y.

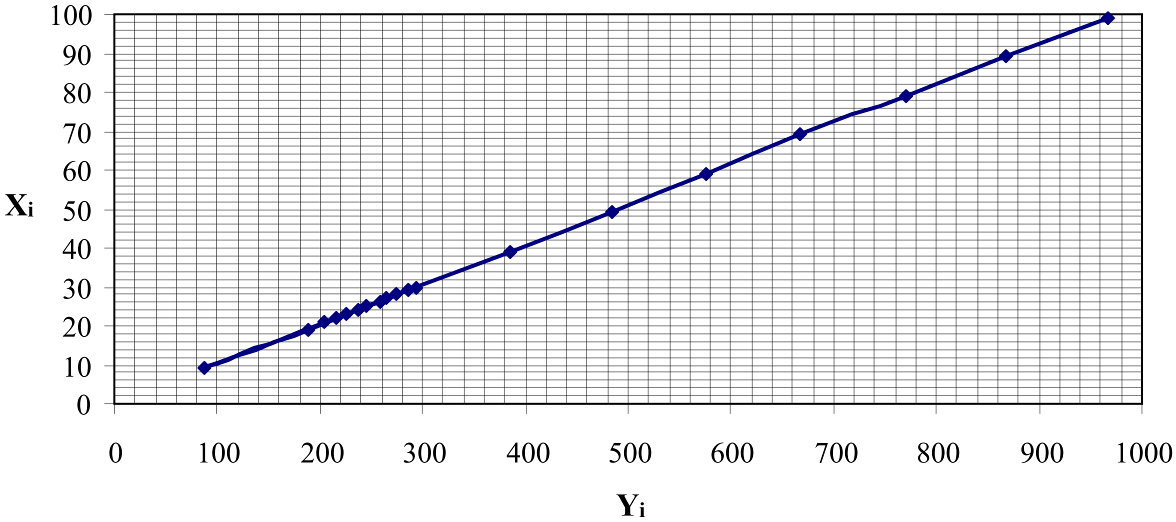

Рисунок 5.3 – График зависимости $X = f(Y)$

Для уравнения регрессии будем использовать полином степени m:

$$X = A + B \cdot Y + C \cdot Y^2 + \ldots + K \cdot Y^m. \tag{5.8}$$

В первом приближении в качестве уравнения регрессии целесообразно использовать полином первой степени, тогда уравнение (5.8) примет вид:

$$X = A + B \cdot Y. \tag{5.9}$$

2) Определяем параметры уравнения регрессии по методу наименьших квадратов.

Для этого необходимо:

– составить систему уравнений вида (5.3) по числу рассчитываемых параметров, где $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - A - B \cdot Y - C \cdot Y^2 - \ldots - K \cdot Y^m\right)^2$;

– для линейного уравнения регрессии система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} B \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + A \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i \\ B \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i + n \cdot A = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{cases}; \qquad (5.10)$$

– решая систему уравнений (5.10) определяем неизвестные параметры. Для принятого в первом приближении полинома первой степени вида (5.9), решение линейного уравнения регрессии имеет вид:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}; \qquad (5.11)$$

$$B = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}; \qquad (5.12)$$

Найдем значения величин, входящих в формулы (5.11) и (5.12):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 795; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 7783; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i = 429825;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 4199503; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 = 60575089.$$

Подставляя численные значения в уравнения (5.11) и (5.12), получим:

$$A = \frac{4199503 \cdot 795 - 7783 \cdot 429825}{20 \cdot 4199503 - 60575089} = -0{,}287;$$

$$B = \frac{20 \cdot 429825 - 795 \cdot 7783}{20 \cdot 4199503 - 60575089} = 0{,}103.$$

Таким образом, уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$X = -0{,}287 + 0{,}103 \cdot Y. \qquad (5.13)$$

3) Проверка правильности выбора вида уравнения регрес-

сии.

Для проверки правильности выбора вида уравнения регрессии будем использовать непараметрический критерий серий и инверсий:

– рассчитываем отклонения экспериментальных значений X_i от соответствующих значений X_{pi}, рассчитанных для того же аргумента Y_i по полученному уравнению регрессии (табл. 5.4);

– строим в осях координат Y и ΔX полученные значения ΔX_i для соответствующих Y_i (рис. 5.4);

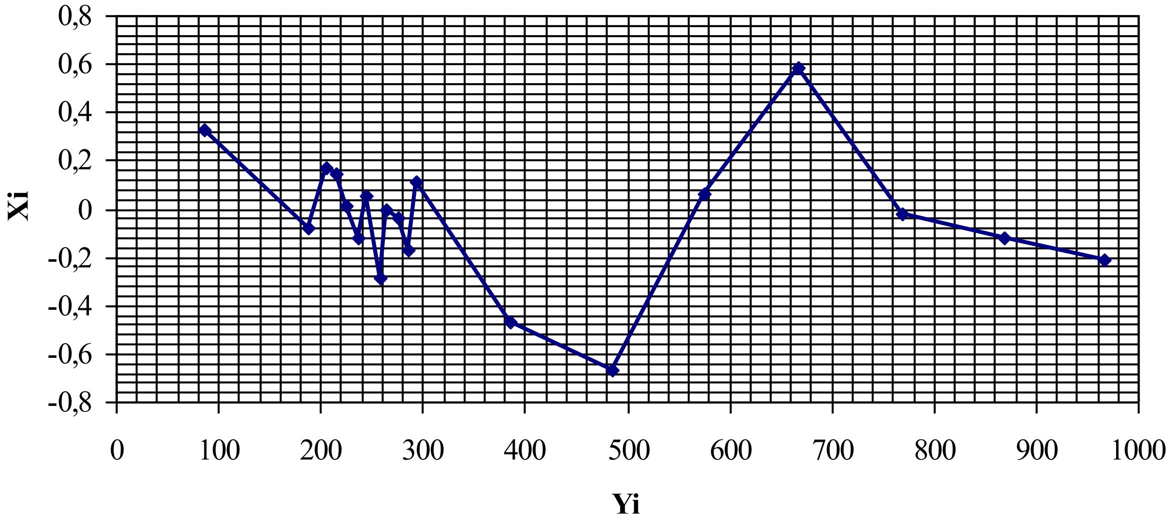

Рисунок 5.4 – Зависимость ΔX_i от Y_i

– записываем последовательность значений ΔX_i по мере возрастания Y_i, $i \in [1 \ldots n]$ (табл. 5.5);

– рассчитываем число серий N в полученной последовательности ΔX_i (под серией понимается последовательность отклонений одного знака, перед и после которой следует отклонение противоположного знака или нет вообще никаких отклонений) (табл. 5.5):

$$N = 10;$$

Таблица 5.4 – Отклонения экспериментальных значений X_i от соответствующих значений X_{pi}, рассчитанных для того же аргумента Y_i по уравнению регрессии (5.13)

Yi	205	215	226	237	245	258	265	275	286	293
Xi	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Xpi	20,828	21,858	22,991	24,124	24,948	26,287	27,008	28,038	29,171	29,892
ΔXi	0,172	0,142	0,009	-0,124	0,052	-0,287	-0,008	-0,038	-0,171	0,108
Yi	87	188	286	386	485	575	667	770	868	966
Xi	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
Xpi	8,674	19,077	29,171	39,471	49,668	58,938	68,414	79,023	89,117	99,211
ΔXi	0,326	-0,077	-0,171	-0,471	-0,668	0,062	0,586	-0,023	-0,117	-0,211

Примечания: 1. Значения X_{pi} определялись по формуле (5.13). 2. Значения ΔX_i определялись по формуле: $\Delta X_i = X_i - X_{pi}$.

Таблица 5.5 – Последовательность значений ΔX_i по мере возрастания Y_i, $i \in [1 \ldots n]$

Yi	87	188	205	215	226	237	245	258	265	275
Xi	9	19	21	22	23	24	25	26	27	28
ΔXi	0,326	-0,077	0,172	0,142	0,009	-0,124	0,052	-0,287	-0,008	-0,038
Yi	286	293	386	485	575	667	770	868	966	
Xi	29	30	39	49	59	69	79	89	99	
ΔXi	-0,171	0,108	-0,471	-0,668	0,062	0,586	-0,023	-0,117	-0,211	

– задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}99$, $q = 1 - P = 0{,}01$ (для $n = 20$) и по таблице (приложение Ж) [1] определяем допустимые границы:

$N_{1-0,5q} = 5$, $N_{0,5q} = 16$;

– рассчитываем число инверсий A в полученной последовательности ΔX_i (под инверсией понимается событие, заключающееся в том, что $\Delta X_i > \Delta X_{ik}$ при $k > i$) по формуле (5.8), где A_j – это число инверсий j-го члена последовательности, т.е. число членов последовательности, которые, будучи расположенными в последовательности после j-го члена, имеют меньшее, чем ΔX_j значение;

$$A = 17 + 7 + 15 + 14 + 10 + 5 + 9 + 2 + 7 + 5 + 3 + 6 + 1 + 0 + 3 + 3 + 2 + 1 + 0 = 110;$$

– задаемся доверительной вероятностью $P = 0{,}99$, $q = 1 - P = 0{,}01$ (для $n = 20$) и по таблице (приложение И) [1] определяем допустимые границы:

$$A_{1-0,5q} = 59,\ A_{0,5q} = 130.$$

Так как $N_{1-0,5q} < N \le N_{0,5q}$ $(5 < 10 < 16)$ и $A_{1-0,5q} < A \le A_{0,5q}$ $(59 < 110 < 130)$, то с вероятностью $P = 0{,}99$ можно считать, что отклонения экспериментальных значений ΔX_i, от соответствующих значений X_{pi} найденного уравнения регрессии являются случайными, не содержат аддитивного, мультипликативного или колебательного трендов, т.е. рассчитанное уравнение регрессии достоверно описывает экспериментально исследуемую зависимость между величинами Y и X. Эта зависимость описывается уравнением (5.13).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Подмастерьев, К.В., Пахолкин, Е.В., Мишин, В.В. Методические указания по выполнению расчетно-графических и курсовых работ по метрологическим дисциплинам на тему «Обработка результатов измерений» / Орел, ОрелГТУ, 2006. – 30 с.

2. Балдин, К. В. Высшая математика : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; под общ. ред. К. В. Балдин. - 2-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2021. - 360 с.

3. Метрология и технические измерения : учебное электронное издание / Г. В. Мозгова, А. П. Савенков, А. Г. Дивин [и др.]. ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Тамбовский государственный технический университет. - Тамбов : Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2018. - 89 с.

4. Бендат, Дж., Пирсол, А. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

5. Яковенко, Л. И. Статистика: сборник задач и упражнений : учебное пособие / Л. И. Яковенко ; Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 196 с.

Приложение А

Интегральная функция нормированного нормального распределения Ф(t)

Таблица А.1 – Распределение $2\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

2Ф(t)	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**
0,6827	1	0,7699	1,2	0,8385	1,4	0,8904	1,6	0,9281	1,8
0,6875	1,01	0,7737	1,21	0,8415	1,41	0,8926	1,61	0,9297	1,81
0,6923	1,02	0,7775	1,22	0,8444	1,42	0,8948	1,62	0,9312	1,82
0,697	1,03	0,7813	1,23	0,8473	1,43	0,8969	1,63	0,9328	1,83
0,7017	1,04	0,785	1,24	0,8501	1,44	0,899	1,64	0,9342	1,84
0,7063	1,05	0,7887	1,25	0,8529	1,45	0,9011	1,65	0,9357	1,85
0,7109	1,06	0,7923	1,26	0,8557	1,46	0,9031	1,66	0,9371	1,86
0,7154	1,07	0,7959	1,27	0,8584	1,47	0,9051	1,67	0,9385	1,87
0,7199	1,08	0,7995	1,28	0,8611	1,48	0,907	1,68	0,9399	1,88
0,7243	1,09	0,8029	1,29	0,8638	1,49	0,909	1,69	0,9412	1,89
0,7287	1,1	0,8064	1,3	0,8664	1,5	0,9109	1,7	0,9426	1,9
0,733	1,11	0,8098	1,31	0,869	1,51	0,9127	1,71	0,9439	1,91
0,7373	1,12	0,8132	1,32	0,8715	1,52	0,9146	1,72	0,9451	1,92
0,7415	1,13	0,8165	1,33	0,874	1,53	0,9164	1,73	0,9464	1,93
0,7457	1,14	0,8198	1,34	0,8764	1,54	0,9181	1,74	0,9476	1,94
0,7499	1,15	0,823	1,35	0,8789	1,55	0,9199	1,75	0,9488	1,95
0,754	1,16	0,8262	1,36	0,8812	1,56	0,9216	1,76	0,95	1,96
0,758	1,17	0,8293	1,37	0,8836	1,57	0,9233	1,77	0,9512	1,97
0,762	1,18	0,8324	1,38	0,8859	1,58	0,9249	1,78	0,9523	1,98
0,766	1,19	0,8355	1,39	0,8882	1,59	0,9265	1,79	0,9534	1,99
2Ф(t)	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**	**2Ф(t)**	**t**
0,9545	2	0,9722	2,2	0,9836	2,4	0,9907	2,6	0,9949	2,8
0,9556	2,01	0,9729	2,21	0,984	2,41	0,9909	2,61	0,995	2,81
0,9566	2,02	0,9736	2,22	0,9845	2,42	0,9912	2,62	0,9952	2,82
0,9576	2,03	0,9743	2,23	0,9849	2,43	0,9915	2,63	0,9953	2,83
0,9586	2,04	0,9749	2,24	0,9853	2,44	0,9917	2,64	0,9955	2,84
0,9596	2,05	0,9756	2,25	0,9857	2,45	0,992	2,65	0,9956	2,85
0,9606	2,06	0,9762	2,26	0,9861	2,46	0,9922	2,66	0,9958	2,86
0,9615	2,07	0,9768	2,27	0,9865	2,47	0,9924	2,67	0,9959	2,87
0,9625	2,08	0,9774	2,28	0,9869	2,48	0,9926	2,68	0,996	2,88
0,9634	2,09	0,978	2,29	0,9872	2,49	0,9929	2,69	0,9961	2,89
0,9643	2,1	0,9786	2,3	0,9876	2,5	0,9931	2,7	0,9963	2,9
0,9651	2,11	0,9791	2,31	0,9879	2,51	0,9933	2,71	0,9964	2,91
0,966	2,12	0,9797	2,32	0,9883	2,52	0,9935	2,72	0,9965	2,92
0,9668	2,13	0,9802	2,33	0,9886	2,53	0,9937	2,73	0,9966	2,93
0,9676	2,14	0,9807	2,34	0,9889	2,54	0,9939	2,74	0,9967	2,94
0,9684	2,15	0,9812	2,35	0,9892	2,55	0,994	2,75	0,9968	2,95
0,9692	2,16	0,9817	2,36	0,9895	2,56	0,9942	2,76	0,9969	2,96
0,97	2,17	0,9822	2,37	0,9898	2,57	0,9944	2,77	0,997	2,97
0,9707	2,18	0,9827	2,38	0,9901	2,58	0,9946	2,78	0,9971	2,98
0,9715	2,19	0,9832	2,39	0,9904	2,59	0,9947	2,79	0,9972	2,99

Приложение Б

Таблица Б.1 – Значения ν_q при различных n, q

n	q		n	q	
	0,10	0,05		0,10	0,05
3	1,406	1,412	15	2,326	2,493
4	1,645	1,689	16	2,354	2,523
5	1,731	1,869	17	2,380	2,551
6	1,894	1,996	18	2,404	2,557
7	1,974	2,093	19	2,426	2,600
8	2,041	2,172	20	2,447	2,623
9	2,097	2,237	21	2,467	2,644
10	2,146	2,294	22	2,486	2,664
11	2,190	2,383	23	2,564	2,688
12	2,229	2,387	24	2,520	2,701
13	2,264	2,426	25	2,537	2,717
14	2,297	2,461			

Приложение В

Составной критерий

Таблица В.1 – Статистика d

n	q/2		(1-q)/2	
	0,01	0,05	0,05	0,01
11	0,9359	0,9073	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8961	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблица В.2 – Значения m и P*

n	m	P*		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,99
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

Приложение Г

Распределение Стьюдента

Таблица Г.1 – Коэффициент Стьюдента

n-1	P=0,95	P=0,99	n-1	P=0,95	P=0,99
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,169	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

Приложение Д

Распределение Фишера

Таблица Д.1 – Значения Ψ_0 для различных значений n_1, n_2 и доверительной вероятности P

n_2	P	n_1				
		8	9	10	11	12
8	0,75	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	0,75	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16

Приложение Е

(справочное)
Критерий серий

Таблица Е.1 – Процентные точки распределения серий (вероятность $P[r_n > r_{n;\alpha}] = \alpha$, $n = N_1 = N_2 = N$)

n=N/2	α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
5	2	2	3	8	9	9
6	2	3	3	10	10	11
7	3	3	4	11	12	12
8	4	4	5	12	13	13
9	4	5	6	13	14	15
10	5	6	6	15	15	16
11	6	7	7	16	16	17
12	7	7	8	17	18	18
13	7	8	9	18	19	20
14	8	9	10	19	20	21
15	9	10	11	20	21	22
16	10	11	11	22	22	23
18	11	12	13	24	25	26
20	13	14	15	26	27	28
25	17	18	19	32	33	34
30	21	22	24	37	39	40
35	25	27	28	43	44	46
40	30	31	33	48	50	51
45	34	36	37	54	55	57
50	38	40	42	59	61	63
55	43	45	46	65	66	68
60	47	49	51	70	72	74
65	52	54	56	75	77	79
70	56	58	60	81	83	85
75	61	63	65	86	88	90
80	65	68	70	91	93	96
85	70	72	74	97	99	101
90	74	77	79	102	104	107
95	79	82	84	107	109	112
100	84	86	88	113	115	117

Приложение Ж

Критерий инверсий

Таблица Ж.1 – Процентные точки распределения числа инверсий (вероятность $P[A_N > A_{N;\alpha}] = \alpha$, где N – общее число значений)

N	α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
10	9	11	13	31	33	35
12	16	18	21	44	47	49
14	24	27	30	60	63	66
16	34	38	41	78	81	85
18	45	50	54	98	102	107
20	59	64	69	120	125	130
30	152	162	171	263	272	282
40	290	305	319	460	474	489
50	473	495	514	710	729	751
60	702	731	756	1013	1038	1067
70	977	1014	1045	1369	1400	1437
80	1299	1344	1382	1777	1815	1860
90	1668	1721	1766	2238	2283	2336
100	2083	2145	2198	2751	2804	2866