МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра программной инженерии

Утверждаю:
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«_11_»_06__________2024г.

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания для проведения лабораторных занятий и по дисциплине «Моделирование» для студентов направления подготовки 09.04.04 ОПОП ВО Программная инженерия, направленность (профиль) «Предпринимательство, инновации и технологии будущего в программной инженерии»

Курск 2024

УДК 001.891.573

Составитель: Р.А. Томакова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент А. В. Малышев

Основы моделирования систем массового обслуживания: методические указания для проведения лабораторных занятий по дисциплине «Моделирование» для студентов направления подготовки 09.04.04 ОПОП ВО Программная инженерия, направленность (профиль) «Предпринимательство, инновации и технологии будущего в программной инженерии» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Р.А. Томакова. Курск, 2024. -32 с.

Рассмотрены основные понятиями и принципы моделирования систем массового обслуживания, произведена классификация научно-исследовательских работ, выделены особенности одноканальных и многоканальных потоков.

Методические указания составлены в соответствии с ФГОС ВО – магистратура по направлению подготовки 09.04.04 «Программная инженерия» на основании учебного плана ОПОП ВО 09.04.04 «Программная инженерия», направленность (профиль) «Предпринимательство, инновации и технологии будущего в программной инженерии».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.04.04 «Программная инженерия» (профиль) «Предпринимательство, инновации и технологии будущего в программной инженерии» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 11.06.2024. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.- изд. л. 1,6 . Тираж 100 . Заказ 493.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Цель и задачи лабораторного занятия (лабораторной работы):

Цель работы – изучение методов моделирования систем массового обслуживания, применяемых для проведения научных исследований и приобретение практических навыков их использования; исследование с помощью ЭВМ одноканальных системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания заявок.

Задачи работы.

- Познакомиться с основными понятиями методологии моделирования систем массового обслуживания, применяемые в научных исследованиях;
- Изучить классификацию методов моделирования этапы построения моделей;
- Изучить функции и значение моделирования в процессе познания;
- Выделить способы классификации моделей и развертывания теорий;
- Изучить особенности теоретического уровня проведения исследований;
- Обосновать структурные компоненты моделирования систем массового обслуживания;
- Изучить возможные структурные схемы построения систем массового обслуживания;
- Познакомиться с алгоритмами процесса построения и назначения моделей;
- Проанализировать и обосновать преимущества применения моделирования в процессе разработки.

Планируемые результаты обучения (формируемые знания, умения, навыки и компетенции):

Код и наименование индикатора достижения компетенции, закрепленного за дисциплиной:

ОПК-6.1 Использует информационные технологии в практической деятельности;

ОПК-6.2 Приобретает самостоятельным образом знания и умения в рамках существующих областей знаний;

ОПК-6.3 Получает самостоятельным образом знания и умения в рамках новых областей знаний.

Необходимые материально-техническое оборудование и материалы:

1. Класс ПЭВМ - Athlon 64 X2-2.4; Cel 2.4, Cel 2.6, Cel 800.
2. Мультимедиа центр: ноутбук ASUS X50VL PMD T2330/14"/1024Mb/ 160Gb/ сум-ка/проектор inFocus IN24+ .
3. Экран мобильный Draper Diplomat 60x60
4. Доступ в сеть Интернет.

Шкала оценивания и критерии оценивания выполненной практической работы:

Форма контроля	Минимальный балл		Максимальный балл	
	балл	примечание	балл	примечание
1	2	3	4	5
Лабораторное занятие «Основы моделирования систем массового обслуживания»	6	Выполнил, но «не защитил»	12	Выполнил и «защитил»

План проведения лабораторного занятия (лабораторной работы)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1

Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей $\lambda = 1{,}0$ (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания –1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживания являются простейшими.

Методика проведения работы (в Microsoft Excel)

1. Определите в установившемся режиме предельные значения:

а) относительной пропускной способности q;

б) абсолютной пропускной способности А;

в) вероятности отказа Potk;

2. Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

3. Проведите статистическое моделирование задачи, для чего необходимо составить процедуру моделирования случайного процесса поступления и обслуживания заявок, приняв следующие обозначения. Переменные:

post – число поступивших заявок,

otk – число отказов в обслуживании,

obsl – число обслуженных заявок.

Функция k1 = *rn_post()* случайным образом принимает значения от 1 до 60 и служит для моделирования процесса поступления заявок. Отсчет времени ведем в минутах и моделируем как цикл с параметром t. Так как в среднем поступает одна заявка в час, то событие k1 = 1 означает, что заявка поступила в СМО. Время обслуживания определяется переменной *time_obsl*, которая инициализируется как случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием (108 мин = 1,8 часа). Время окончания обслуживания заявки хранится в переменной t_{okon}.

Если t_{okon} = 0, то канал обслуживания свободен, и заявка, поступившая в СМО, будет обслужена (obsl = obsl + 1).

Если $t_{\_okon}$ >0, то поступившая заявка получает отказ, что фиксируется как otk = otk + 1, а величина $t_{\_okon}$ убывает с каждым циклом на одну минуту ($t_{\_okon}$ = $t_{\_okon}$ – 1).

Составьте схему алгоритма решения, задав продолжительность работы СМО в минутах, например, 480 минут (8 часов), и найдите ее параметры.

Повторите опыт, например, 50 раз в цикле для той же самой продолжительности работы СМО в 480 минут.

Найдите статистические оценки характеристик СМО. Убедитесь, что с увеличением числа повторений статистические оценки стремятся к теоретическим значениям характеристик СМО.

Выполните анализ результатов:

1) проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами, сравнив результаты между собой;

2) постройте на одной диаграмме графики зависимости $P_{отк}$ от времени обслуживания для теоретически и экспериментально полученных данных для случая экспоненциально распределенного времени обслуживания.

Задание 2

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока вызовов составляет 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет одну минуту. Варианты индивидуальных заданий представлены в табл. 1. Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица 1

Варианты индивидуальных заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	1,45	1,52	1,67	1,71	1,75	1,79	1,82	1,84	1,91	1,96
μ	2,75	2,85	2,94	2,97	3,03	3,05	3,09	3,12	3,15	3,19
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ	1,98	2,03	2,07	2,11	2,13	2,15	2,17	2,19	2,21	2,23
μ	3,26	3,31	3,36	3,41	3,54	3,61	3,69	3,71	3,73	3,79

1. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

2. Проведите статистическое испытание работы СМО и найдите статистические оценки характеристик СМО.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.

2. Цель работы.

3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.

4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.

5. Анализ полученных результатов.

6. Вывод по работе

7. Представить отчет

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(t) = \lambda \cdot e^{(-\lambda t)},$$

где λ – интенсивность поступления заявок в систему.

Под интенсивностью потока понимают:

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m(t, t+\tau)}{\tau},$$

где m(t, t + t) – среднее число событий в интервале (t, t + t).

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(t) = \mu \cdot e^{(-\mu t)},$$

где μ – интенсивность обслуживания.

Будем считать, что поток заявок и обслуживания простейшие. В этом случае выполняются свойства:

стационарности (среднее число событий, воздействующих на систему, в течение единицы времени, остается постоянным;

ординарности (вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала);

отсутствие последействия (для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени).

Для простейшего потока интенсивность λ = const.

Пусть система работает с отказами. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способности системы. Система имеет два состояния: S_0 – канал свободен и S_1 –канал занят.

Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$– вероятность состояния S_0 , $P_1(t)$– вероятность состояния S_1. Составим систему уравнений Колмогорова:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -\mu \cdot P_0(t) + \lambda \cdot P_1(t).$$

С учетом того, что $P_0(t) + P_1(t) = 1$, решение системы:

$$P_0(t) = \frac{\lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t).$$

Для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы:

$$q = P_0(t)$$

По истечении большого интервала времени (при $t \to \infty$) достигается стационарный режим:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Абсолютная пропускная способность (А) – среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot P_0 \quad \text{или} \quad A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$P_{отк} = 1 - P_0.$$

Эта величина может быть интерпретирована как средняя доля не обслуженных заявок среди поданных.

В общем случае модель системы массового обслуживания (СМО) задается следующей совокупностью множеств:

Q =(W,U,H,Y ,R,A) ,

где W – поток заявок;

U – поток обслуживания (описание интервалов времени между началом и окончанием обслуживания заявки);

H - накопитель заявок;

Y – выходной поток;

R – оператор сопряжения, отражающий взаимосвязь каналов и накопителей;

A – множество операторов поведения заявок.

СМО представляет собой систему, выполняющую обслуживание поступающих в неё требований с помощью приборов. При этом принято считать, что СМО может содержать от одного до бесконечного числа приборов.

В зависимости от возможности ожидания поступающих требований до начала обслуживания СМО подразделяются, согласно схеме, приведенной на рисунке 1.

Рисунок 1- Классификация СМО

1.*системы с потерями* – характеризуются тем, что требования в системе теряются, если в момент поступления нет ни одного свободного прибора;

2.*системы с ожиданием* имеют накопитель бесконечной ёмкости для буферизации поступивших требований, при этом ожидающие требования образуют очередь;

3.*системы с накопителем конечной ёмкости* (ожиданием и ограничениями), характеризуются тем, что длина очереди не может превышать ёмкости накопителя; при этом требование, поступающее в переполненную СМО (отсутствуют свободные места для ожидания), теряется.

Выбор требования из очереди на обслуживание реализуется на основании одной из возможных дисциплин обслуживания, таких как:

FCFS/FIFO (*пришедший первым обслуживается первым*);

LCFS/LIFO (*пришедший последним обслуживается первым*);
random (*случайный выбор*).

В системах с ожиданием накопитель в общем случае может иметь сложную структуру.

Обслуживаемый объект в теории систем массового обслуживания называется требованием или заявкой. В общем случае под *требованием* (*заявкой*) обычно понимают *запрос на удовлетворение некоторой потребности*. Важно отметить, что заявки, с точки зрения системы, абстрактны: это все то, что желает обслужиться, т. е. пройти определенный путь в системе. Каналы являются также абстракцией: это все то, что обслуживает заявки.

Роль требований или заявок реализуют клиенты, посетители, покупатели, документы, товары, суда и так далее. Средства, обслуживающие требования (заявки), называются обслуживающими устройствами или каналами обслуживания. Например, роль каналов обслуживания выполняют кассиры, специалисты, каналы телефонной связи, товароведы, компьютеры, мастера-ремонтники, погрузочно-разгрузочные точки на базах и складах и т.д.

Требования (заявки) поступают в систему массового обслуживания (СМО) случайно, образуя так называемый случайный поток требований (заявок).

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами.

Основной задачей теории массового обслуживания является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания.

Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

Цель клиента (заявки, требования): затратить как можно меньше времени, простаивая в очереди.

Цель обслуживающей системы (обслуживающих устройств, каналов обслуживания): как можно меньше времени находиться в состоянии вынужденных простоев.

Цель анализа СМО: достигнуть разумного компромисса между требованиями и мощностью обслуживаемой системы.

Для этого рассчитываются показатели эффективности СМО через её характеристики.

В качестве показателей эффективности работы СМО используются:

1) *абсолютная пропускная способность системы* (*A*), т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

2) *относительная пропускная способность* (*Q*), т.е. средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой;

3) *вероятность отказа* (*Pот*), т.е. вероятность того, что заявка покинет СМО не обслуженной;

4) *среднее число занятых каналов* (*k*);

5) *среднее число заявок* в СМО (*Lc*);

6) *среднее время пребывания заявки* в системе (*Tc*);

7) *среднее число заявок в очереди* (*Lo*) - длина очереди;

8) *среднее число заявок в системе* (*Lсист*);

9) *среднее время пребывания заявки* в очереди (*To*);

10) *среднее время пребывания заявки* в системе (*Tсист*);

11) *степень загрузки канала* (*Pзан*), т.е. вероятность того, что канал занят;

12) *среднее число заявок*, обслуживаемых в единицу времени;

13) *среднее время ожидания обслуживания*;

14) вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п.

СМО могут быть классифицированы по признаку организации обслуживания на рисунке 2:

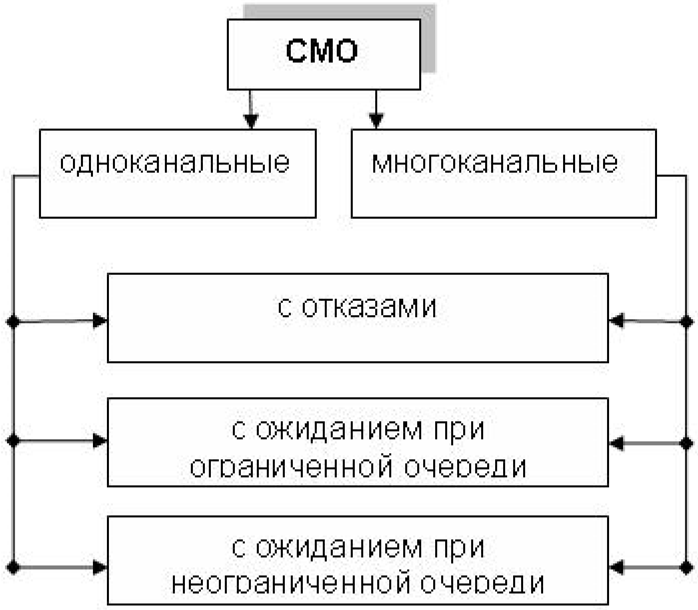

Рисунок 2- Классификация систем массового обслуживания по признаку организации обслуживания

Системы с отказами не имеют очередей. Системы с ожиданием имеют очереди.

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты:

- покидает систему с отказами;
- становится в очередь на обслуживание в системах с ожиданием при неограниченной очереди или на свободное место при ограниченной очереди;
- покидает систему с ожиданием при ограниченной очереди, если в этой очереди нет свободного места.

В качестве меры эффективности экономической СМО рассматривают сумму потерь времени:

- на ожидание в очереди;
- на простои каналов обслуживания.

Показатели эффективности, применяемые для всех видов СМО:

- *относительная пропускная способность* - это средняя доля поступающих заявок, обслуживаемых системой;

- *абсолютная пропускная способность* - это среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени;
- *вероятность отказа* - вероятность того, что заявка покинет систему без обслуживания;
- *среднее число занятых каналов* – применимо для многоканальных СМО.

Показатели эффективности СМО рассчитываются по формулам из специальных справочников (таблиц). Исходными данными для таких расчетов являются результаты моделирования СМО.

Классификация систем массового обслуживания

I. *По числу обслуживающих каналов:*

1. *Одноканальные СМО* - СМО с одним каналом обслуживания.
2. *Многоканальные СМО* - СМО с несколькими каналами обслуживания.

II. ***По времени пребывания требований в очереди*** до начала обслуживания

1. *СМО с отказами* - это СМО, в которой заявка, поступающая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем в процессе обслуживания не участвует (например, телефонная сеть, в которой заявка на телефонный разговор покидает СМО в том случае, когда канал занят.).
2. *СМО с ожиданиями* (*очередью*) - это СМО, в которой заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

В свою очередь СМО с ожиданием (очередью) подразделяются на:

- СМО с *ограниченной очередью*;
- СМО с *неограниченной очередью*;
- СМО с *ограниченным временем ожидания* (поступившее требование, застав все устройства занятыми, становятся в очередь и ожидает обслуживания в течение ограниченного времени. Не

дождавшись обслуживания в установленное время, требование покидает систему);

- СМО *с неограниченным временем ожидания.*

III. По приоритетности обслуживания

1. *СМО со статистическим приоритетом* - СМО, в которой обслуживание производится в порядке поступления заявок.
2. *СМО с относительным приоритетом* – СМО, в которой заявка высокого приоритета ожидает окончания обслуживания заявки с более низким приоритетом (СМО, где более важная заявка получает лишь «лучшее» место в очереди).
3. *СМО с абсолютным приоритетом* — СМО, в которой заявка высокого приоритета при поступлении вытесняет заявку с более низким приоритетом.
4. *СМО со смешанным приоритетом* — СМО, в которой используется абсолютный приоритет, если заявка с низшим приоритетом обслуживалась в течении времени, меньше критического, и используется относительный приоритет в противном случае.

IV. По принципу обслуживания

1. СМО с обслуживанием по принципу «*первый пришел - последний обслужен*» (например, СМО с обслуживанием по принципу "первый пришел - последний обслужен").
2. СМО с обслуживанием по принципу «*первый пришел - последний обслужен»*

V. В зависимости от способа генерации заявок

1. *Открытые СМО* – представляют СМО, в которых циркулирует конечное, обычно постоянное количество требований, возвращающиеся в источник после завершения обслуживания.
2. *Замкнутые СМО* - СМО, генерирует бесконечное число требований. Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего СМО выступают смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

Случайные процессы. Граф состояний. Марковские процессы

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс.

Под случайным (вероятностным или стохастическим) процессом понимается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Будем рассматривать процессы с дискретными состояниями, если его возможные состояния S_1, S_2, …, S_n можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком).

Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания и т.п.).

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если ***процесс*** этой работы представляет собой ***марковский.***

Случайный процесс называется марковским или случайным процессом без последствия, если для любого момента времени t_0 ***вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент*** t_0 ***и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.***

Пример марковского процесса: в качестве системы S может рассматриваться счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент t_0 счетчик показывает S_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ счетчик покажет то или иное число километров (точнее, соответствующее число рублей) S_1, зависит от S_0, но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента t_0.

Многие процессы можно приближенно считать марковскими. Например, процесс игры в шахматы; система S— группа шахматных фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент t_0.

Вероятность того, что в момент $t > t_0$ материальный перевес будет на стороне одного из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не от того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента t_0.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться графом состояний. Граф состояний описывает функционирование системы обслуживания как переходы из одного состояния в другое под действием потока заявок и их обслуживания (рис.3).

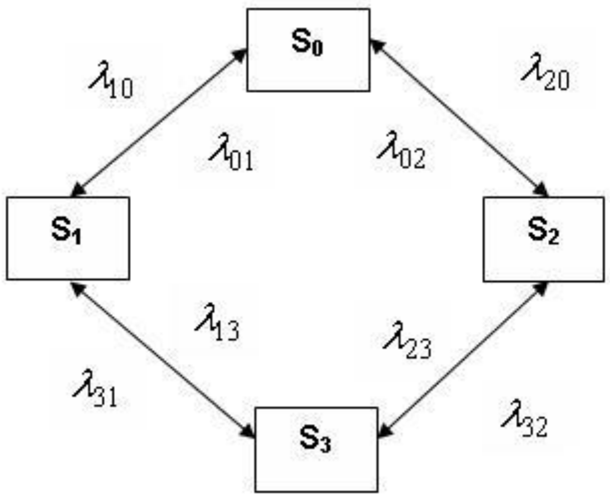

Рисунок 3. Граф состояний случайного процесса

При этом состояния системы изображаются прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние — стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Для построения графа состояний СМО необходимо:

- составить перечень всех возможных состояний СМО;
- отобразить графически перечисленные состояния и возможные и переходы между ними стрелками;
- установить весовые коэффициенты, т.е. приписать числовые значения интенсивностей переходов,

определяемые интенсивностью потока заявок и интенсивностью их обслуживания.

Стрелка, направленная, из состояния S_0 в S_1, означает переход системы в момент отказа первого узла, из S_1в S_0— переход в момент окончания ремонта этого узла.

В графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми, друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S_0в S_3) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из S_3в S_0) можно пренебречь.

Потоки событий

Потоком событий следует рассматривать как последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов компьютера, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется интенсивностью λ — частотой появления событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda$.

Поток событий называется *потоком без последствия*, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1, и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется *ординарным,* если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Поток ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами.

Поток событий называется *простейшим (или стационарным пуассоновским)*, если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое

математическое описание. Регулярный поток не является простейшим, так как обладает последствием: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

При наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям $\lambda_1 (i = 1, 2, \dots, n)$, получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ, равный сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Пусть случайная величина X выражает число событий (точек), попадающих на произвольный промежуток времени τ (рассматривается простейший поток событий).

Тогда, вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий определяется по закону Пуассона и равна:

$$P(X = m) = \frac{(\lambda_\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$

где $\lambda\tau = a$ - математическое ожидание случайной величины X.

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события ($m = 0$), равна:

$$P(X = 0) = e^{-\lambda\tau}$$

Процессы гибели и размножения

В теории массового обслуживания широко распространен специальный класс случайных процессов - так называемые *процессы гибели и размножения*. Это название связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения представлен на рисунке 4. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}. Все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$.

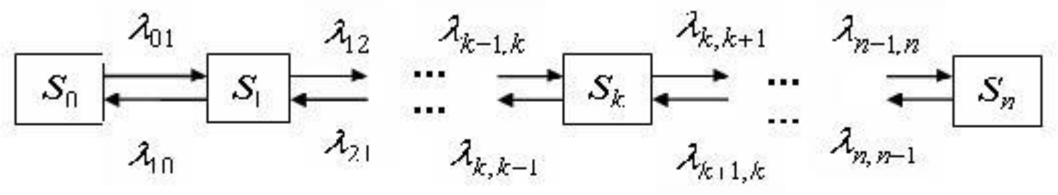

Рисунок 4 - Граф состояний процесса гибели и размножения

Рассмотрено упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$.

В соответствии с правилом составления алгебраических уравнений для предельных состояний получим:

для состояния S_0: $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$,

для состояния S_1: $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$,

которое приводится к виду: $\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2$

Аналогично, записываются уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \dots \\ \lambda_{k-1}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n. \end{cases}$$

К этой системе добавляется нормировочное условие:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Решая данную систему, можно получить:

$$\rho_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1},$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0, \rho_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0, \dots, \rho_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}}p_0.$$

Одноканальная СМО с отказами

Используется одноканальная СМО с отказами и показатели ее эффективности (основные характеристики ее работы, операционные характеристики).

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ. Предполагается, что все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будут простейшими. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с отказами будут рассматриваться:

A - абсолютную пропускную способность СМО;

Q - относительную пропускную способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа.

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 5.

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1$$

Рисунок 5. Одноканальная СМО с откатами

S_0 - канал обслуживания свободен;

S_1 - канал обслуживания занят:

λ - интенсивность потока заявок;

μ - интенсивность потока обслуживания.

В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}$$

т.е. система вырождается в одно уравнение.

Учитывая, что $p_0 + p_1$ находятся предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,; p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0, когда канал свободен, и S_1, когда канал занят, т.е. определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\ ; P_{\text{отк}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = \lambda Q$$

Многоканальная СМО с отказами

Рассматривается классическая задача Эрланга.

Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживании каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

В качестве показателей эффективности многоканальной СМО с отказами будет рассматриваться:

A - абсолютную пропускную способность СМО;

Q - относительную пропускную способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$k_{\text{зан}}$- среднее число занятых каналов.

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 6.

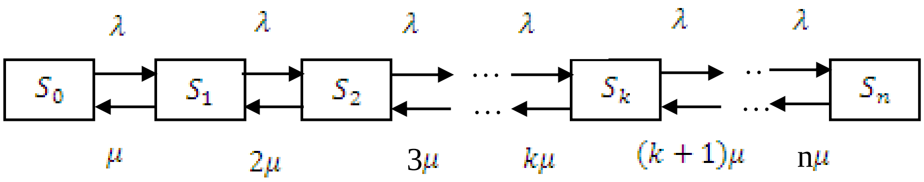

Рисунок 6 - Многоканальная СМО с отказами

S_0 - все каналы свободны, $к = 0$;

S_1 - занят только один канал, $к = 1$;

S_2 - заняты только два канала, $к = 2$;

S_k- заняты k каналов;

S_n - заняты все n каналов

Предельные вероятности задаются формулами Эрланга:

$$\rho_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – интенсивность нагрузки канала,

$$p_0 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ \dots p_n = \frac{p^n}{n!} p_0$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 ,$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \,,$$

$$A = \lambda Q = \lambda (1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0),$$

$$\overline{k_{\text{зан}}} = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \frac{A}{\mu} = \rho (1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0)$$

Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассматривается одноканальная СМО с ожиданием, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ, (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Количество мест в очереди ограничено числом m, т.е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m-заявок, она покидает систему не обслуженной.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будет рассматриваться:

A - абсолютную пропускную способность СМО;

Q - относительную пропускную способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$L_{сист}$ - среднее число находящихся в системе заявок;

$\text{Т}_{\text{сист}}$ - среднее время пребывания заявки в системе;

$\text{L}_{\text{оч}}$ - средняя длина очереди;

$T_{оч}$ - среднее время ожидания в очереди;

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 7.

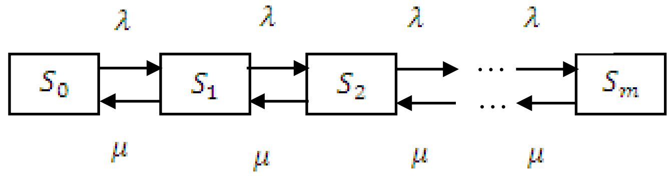

Рисунок 7 - Одноканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 - канал обслуживания свободен;

S_1 - канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 - канал обслуживания занят, в очереди стоит 1 заявка;

S_m канал обслуживания занят, в очереди все m заявок, любая следующая заявка получает отказ.

Вероятности состояний определяются уравнениями:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1}$$

Отсюда получаем, что если $\rho \neq 1$, то

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

Тогда остальные предельные вероятности находятся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \dots, p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$$

Если $\rho = 1$, то

$$p_0 = \frac{1}{m+2}$$

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = p^{m+1} p_0$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}}$$

$$A = \lambda Q$$

$$L_{\text{сист}} = \sum_{n=0}^{m+1} n \cdot p_n$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$$

$$L_{\text{оч}} = \begin{cases} \rho^2 \dfrac{1 - m^2(m - mp + 1)}{(1-\rho)^2} p_0, \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, \text{если } \rho = 1 \end{cases}$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$$

Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Используется n - канальная система массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает обслуживания. Количество мест в очереди ограничено числом m, т.е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m - заявок, она покидает систему не обслуженной.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будет рассматриваться:

A - абсолютная пропускная способность СМО;

Q - относительная пропускная способность;

$P_{\text{отк}}$ - вероятность отказа;

$P_{\text{оч}}$- вероятность образования очереди;

$\overline{k_{\text{зан}}}$ - среднее число занятых каналов;

$L_{\text{сист}}$ - среднее число находящихся в системе заявок;

$T_{\text{сист}}$- среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{\text{оч}}$ - средняя длина очереди;

$T_{\text{оч}}$ - среднее время ожидания в очереди.

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 8.

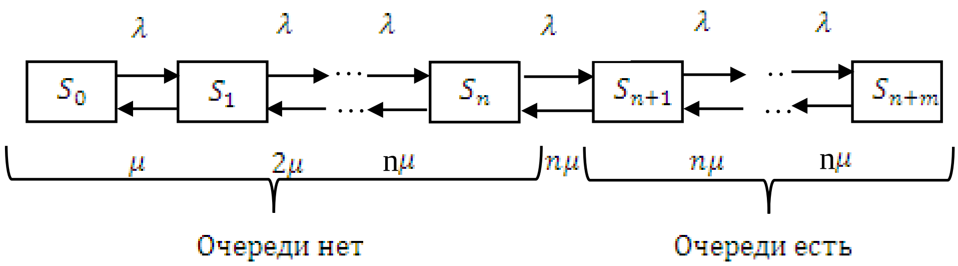

Рисунок 8 - Многоканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - занят только один канал;

S_n - заняты все n каналов;

S_{n+1} - заняты все n каналов и одна заявка в очереди;

S_{n+m} - заняты все n каналов и все m мест в очереди.

Предельные вероятности состояний:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1 - (\frac{\rho}{n})^m}{1 - \rho/n})^{-1}$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{p^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0;\ p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0; \dots;\ p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$$

Вероятность образования очереди:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{i=0}^{m-1} p_{n+i} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1 - (\frac{\rho}{n})^m}{1 - \frac{\rho}{n}} p_0$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}}$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k_{\text{зан}}} = \frac{A}{\mu} = \rho Q$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m + 1 - \frac{m}{n}\rho)}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} p_0$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \overline{k_{\text{зан}}}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$$

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Имеется одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будет рассмотрена:

A - абсолютнаяпропускная способность СМО;

O - относительная пропускная способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$P_{оч}$- вероятность образования очереди;

$L_{сист}$ - среднее число находящихся в системе заявок;

$T_{сист}$- среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{оч}$ - средняя длина очереди;

$T_{оч}$ - среднее время ожидания в очереди.

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 9.

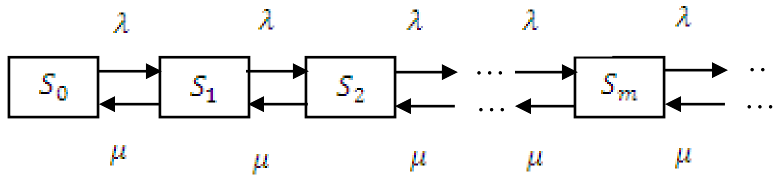

Рисунок 9 - Одноканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 - канал обслуживания свободен;

S_1 - канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 - канал обслуживания занят, в очереди стоит 1 заявка

S_m - канал обслуживания занят, в очереди все m заявок;

Поскольку ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $P_{обс} = 1$, относительная пропускная способность $Q = P_{обс} = 1 \rightarrow P_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = X$.

Предельные вероятности:

$p_m = p^m(1-m), m = 0,1,2,\ldots$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$$

Если λ > μ, то очередь будет постоянно увеличиваться. Наибольший интерес представляет СМО при λ < μ.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Используется «*n*- канальная система массового обслуживания неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.; интенсивность обслуживания μ (т.е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ обслуженных заявок в единицу (времени).

Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда все *n* каналов заняты, становится в очередь и ожидает обслуживания.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будет рассмотрена:

A - абсолютная пропускная способность СМО;

Q - относительная пропускная способность;

$P_{\text{отк}}$ - вероятность отказа;

$P_{\text{оч}}$- вероятность образования очереди;

$\overline{k_{\text{зан}}}$ - среднее число занятых каналов;

$L_{сист}$ - среднее число находящихся в системе заявок;

$T_{сист}$- среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{оч}$ - средняя длина очереди;

$T_{оч}$ - среднее время ожидания в очереди.

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 10.

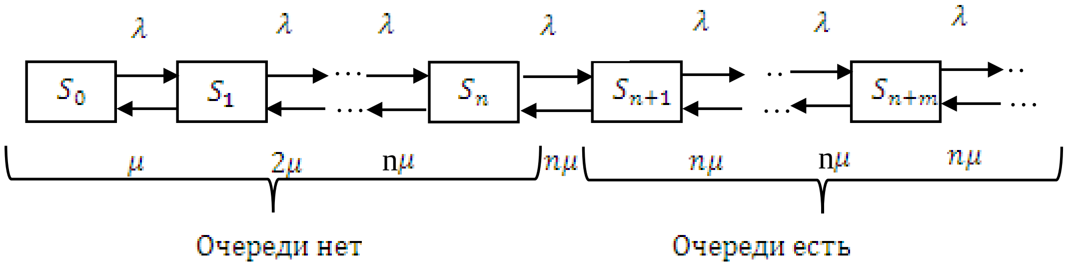

Рисунок 10 - Многоканальная СМО с ограниченной длинной очереди

S_0 - все каналы свободны, *k = 0*;

S_1 - занят один канал, остальные свободны *k = 1*;

S_n - заняты все *n* каналов, очереди нет *k = n*;

S_{n+1} - заняты все *n* каналов, *одна* заявка в очереди, *k = n + 1*;

S_{n+m} - заняты все *n* каналов, *r* заявок в очереди, *k = n + 1*;

Поскольку ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $P_{обс} = 1$, относительная пропускная способность $Q = P_{обс} = 1 \rightarrow P_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.

Предельные вероятности:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1}{1-n}\right)^{-1}$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{p^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0;\ p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0; \dots;\ p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0; \dots$$

Вероятность образования очереди;

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} p_0$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k_{зан}} = \frac{A}{\mu}$$

Средняя длина очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!\,(1-\frac{\rho}{n})^2} \cdot p_0$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}$$

Если $\rho < n$, то процесс обслуживания устойчив. Если $\rho > n \rightarrow$ СМО работает неустойчиво.

Контрольные задания и вопросы

1. По каким признакам классифицируются системы массового обслуживания?
2. Какие показатели используются для описания эффективности функционирования систем массового обслуживания?
3. Постройте графы состояний для многоканальной СМО с отказами,.
4. Какой режим работы СМО характеризуют предельные вероятности состояний и при каких условиях эти вероятности существуют
5. Постройте граф состояний для многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания в очереди
6. Постройте граф состояний для замкнутой СМО.
7. Что является основой построения любой теории?
8. Какие способы построения научных теорий существуют?
9. Перечислите элементы, составляющие основу теоретической модели.
10. Сформулируйте определение научного исследования.
11. Как можно классифицировать научные исследования, в зависимости от применяемых методов?
12. Сформулируйте, какую роль эксперимент имеет в формировании научного знания?

13. Сформулируйте особенности эмпирического исследования.

12. Какая связь существует между научным познанием и научным исследованием?

14. Какое значение имеет теория в процессе научного познания?

15. Как осуществляется классификация научных исследований в зависимости от места проведения?

16. Сформулируйте этапы проведения НИР.

17. Как осуществляется классификация научных исследований по уровням значимости?

18. Какая информация может быть извлечена из эксперимента?

20. Какие способы существуют для построения научных теорий?

21. Дайте краткое описание модели СМО с отказами.

22. Какими показателями характеризуется функционирование СМО с отказами?

23. Как рассчитывается вероятность P0?

24. Как рассчитывается вероятность P1?

25. Что такое относительная пропускная способность?

26. Что такое абсолютная пропускная способность?

27. Чему равна вероятность отказа обслуживания заявки?

28. Приведите примеры СМО с отказами.

Библиографический список

1. Кошуняева Н.В, Патронова Н.Н. Теория массового обслуживания [Текст]: практикум по решению задач/ Н.В. Кошуняева. САФУ имени М.В. Ломоносова. - Архангельск; САФУ, 2013 - 107 с.

2. Устенко, А.С. Основы математического моделирования и алгоритмизации процессов функционирования сложных систем [Текст] / А.С. Устенко. - М.: БИНОМ, 2000.

3. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания [Текст]: учебное пособие для вузов / Г.И. Ивченко, И.Н. Каштанов. - М.: Высшая школа, 1982. – 256с.

4. Фоменков, С.А. Математическое моделирование системных объектов [Текст]: учебное пособие / С.А.Фоменков, В.А.Камаев, Ю.А.Орлова; ВолгГТУ. - Волгоград, 2014. - 340 с.