

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Чернецкая Ирина Евгеньевна
Должность: Заведующий кафедрой
Дата подписания: 06.09.2025 08:29:25
Уникальный программный ключ:
bdf214c64d8a381b0782ea566b0dce05e3f5ea2d

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Юго-Западный государственный университет

УТВЕРЖДАЮ:

Заведующий кафедрой
вычислительной техники

 И.Е. Чернецкая
« 09 » 08 2025 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся
по дисциплине

Математическое моделирование нелинейных систем
(наименование дисциплины)

09.04.01 Информатика и вычислительная техника
(код и наименование ОПОП ВО)

Курск -2025

1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

1.1 Вопросы для устного опроса

Тема: Основные понятия математического моделирования

- 1. Что такое математическое моделирование?
- 2. Этапы математического моделирования.
- 3. Построение математической модели.
- 4. Этапы построения математической модели.
- 5. Понятие объекта, схемы замещения.
- 6. Адекватность математической модели.
- 7. Пример построения математической модели.
- 8. Реализация математической модели.
- 9. Содержание этапов реализации.
- 10. Пример реализации математической модели.

Тема: Нелинейные математические модели: динамическая система как основная математическая модель естествознания

- 1. Автономные и неавтономные динамические модели с непрерывным временем.
- 2. Редукция к локальной форме автономных и неавтономных моделей.
- 3. Равновесные решения.
- 4. Состояния равновесия. Алгоритмы поиска состояний равновесия.
- 5. Периодические решения. Алгоритмы поиска периодических решений.
- 6. Нерегулярные решения (квазипериодические и хаотические).
- 7. Дискретные нелинейные модели. Понятие отображение Пуанкаре.
- 8. Построение отображения Пуанкаре методом Хенона.
- 9. Построение стробоскопического отображения Пуанкаре неавтономных систем.
- 10. Автономные и неавтономные отображения.
- 11. Неавтономные математические модели с дискретным временем.

Раздел (тема) дисциплины: Методы реализации математических моделей

- 1. Численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.
- 2. Понятие аппроксимации и простейшие схемы численного решения:
- 3. Явный и неявный методы Эйлера.
- 4. Метод трапеций.
- 5. Методы Рунге-Кутты и разностные методы.
- 6. Понятие устойчивости численных схем.
- 7. Устойчивость явного метода Эйлера.
- 8. Устойчивость неявного метода Эйлера.
- 9. Устойчивость метода трапеций.
- 10. Методы численного решения жестких систем.

Раздел (тема) дисциплины: Введение в нелинейную динамику математических моделей

- 1. Расчет состояний равновесия автономных динамических математических моделей.
- 2. Алгоритмы численного поиска периодических решений автономных и неавтономных моделей.
- 3. Устойчивость и бифуркации состояний равновесия автономных векторных полей.
- 4. Устойчивость и бифуркации периодических решений динамических моделей с непрерывным временем.
- 5. Гладкие и негладкие дискретные модели.
- 6. Устойчивость и бифуркации неподвижных точек и периодических движений дискретных систем.
- 7. Нелокальные бифуркации инвариантных множеств .
- 8. Бифуркация Неймарка-Саккера.
- 9. Число вращения.
- 10. Двумерный тор и замкнутая инвариантная кривая.
- 11. Резонанс на замкнутой инвариантной кривой.
- 12. «Border-collision» в негладких дискретных моделях.

Шкала оценивания: балльная

Критерии оценки

Оценка «**7 баллов**» выставляется обучающемуся, если он демонстрирует глубокое знание содержания вопроса, дает точные определения основных понятий, аргументированно и логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ актуальными примерами (типовыми и нестандартными), в том числе самостоятельно найденными, не нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка «**5 баллов**» выставляется обучающемуся, если он владеет содержанием вопроса, но допускает некоторые недочеты при ответе, допускает незначительные неточности при определении основных понятий, недостаточно аргументированно и (или) логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ типовыми примерами.

Оценка «**3 балла**» выставляется обучающемуся, если он освоил основные положения контролируемой темы, но недостаточно четко дает определение основных понятий и дефиниций, затрудняется при ответах на дополнительные вопросы, приводит недостаточное количество примеров для иллюстрирования своего ответа, нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка «**0 баллов**» выставляется обучающемуся, если он не владеет содержанием вопроса или допускает грубые ошибки, затрудняется дать основные определения, не может привести или приводит неправильные примеры, не отвечает на уточняющие и (или) дополнительные вопросы преподавателя или допускает при ответе на них грубые ошибки.

2 КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 Вопросы к зачету

- 1. Что такое математическое моделирование?
- 2. Этапы математического моделирования.
- 3. Построение математической модели. Этапы построения математической модели. Понятие объекта, схемы замещения. Адекватность математической модели.
- 4. Пример построения математической модели.
- 5. Реализация математической модели. Содержание этапов реализации.
- 6. Автономные и неавтономные динамические модели с непрерывным временем.
- 7. Редукция к локальной форме автономных и неавтономных моделей.
- 8. Равновесные решения: состояния равновесия и периодические решения. Нерегулярные решения (квазипериодические и хаотические).
- 9. Дискретные нелинейные модели. Понятие отображение Пуанкаре.

- 10. Построение отображения Пуанкаре методом Хенона.
- 11. Построение стробоскопического отображения Пуанкаре неавтономных систем.
- 12. Автономные и неавтономные отображения.
- 13. Неавтономные математические модели с дискретным временем.
- 14. Численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.
- 15. Понятие аппроксимации и простейшие схемы численного решения:
 - Явный и неявный методы Эйлера.
 - Метод трапеций.
 - Методы Рунге-Кутты и разностные методы.
- 16. Устойчивость численных схем.
 - Устойчивость явного и неявного методов Эйлера.
 - Устойчивость метода трапеций.
- 17. Расчет состояний равновесия автономных динамических математических моделей.
- 18. Алгоритмы численного поиска периодических решений автономных и неавтономных моделей.
- 19. Устойчивость и бифуркации состояний равновесия автономных векторных полей.
- 20. Устойчивость и бифуркации периодических решений динамических моделей с непрерывным временем.
- 21. Гладкие и негладкие дискретные модели.
- 22. Устойчивость и бифуркации неподвижных точек и периодических движений дискретных систем.
- 23. Седло-узловая бифуркация .
- 24. Виллообразная бифуркация .
- 25. Бифуркация удвоения периода.
- 24. Бифуркация Неймарка-Саккера.
- 25. Введение в теорию нелокальных бифуркаций.
- 26. Понятие о border-collision бифуркациях в кусочно-гладких дискретных моделях.
- 27. Локальные border-collision бифуркации.
- 28. Методы анализа border-collision бифуркаций.

По вопросам 1-28 формируются вопросы в тестовой форме.

2.2 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

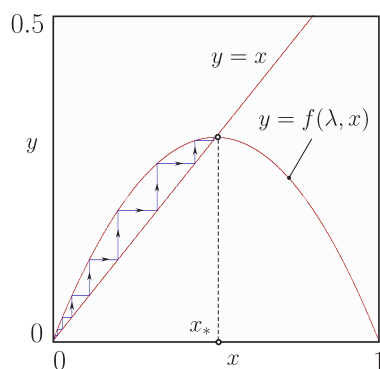
1. Найдите неподвижную точку x_* линейного отображения

$$x \mapsto ax + b.$$

2. Определите устойчивость неподвижной точки линейного отображения

$$x_{k+1} = -0.8x_k + 1.$$

3. Оцените знак и величину производной $f'(x_*)$ по характеру динамики в окрестности x_* :



4. Определите гиперболичность неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 3.0 \cdot x_k(1 - x_k) \equiv F(x_k).$$

5. Определите характер переходного процесса в линейном отображении

$$x_{k+1} = 0.5x_k.$$

6. Точка $x_* \in \mathbb{R}$ отображения $x \mapsto F(x)$ является неподвижной. Запишите уравнение для неподвижной точки.

7. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = -0.6$ и $a_{\mathcal{R}} = 0.75$?

8. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x - 1 + \gamma_0) - \gamma_0 + e^{\lambda(1-x)}, \quad \varphi(z, x) = x + q \cdot \left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки. Предложите алгоритм для численного расчета неподвижной точки.

9. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

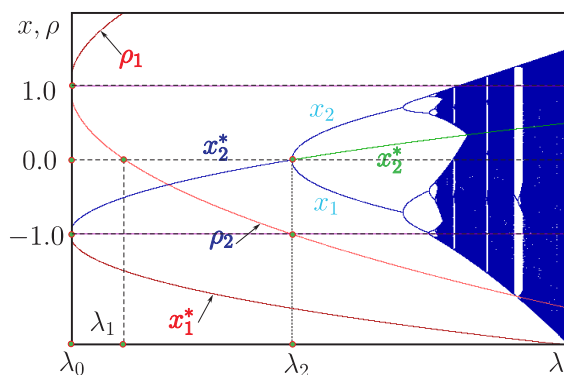
10. Найдите неподвижную точку x_* линейного отображения

$$x \mapsto ax - b.$$

11. Определите устойчивость неподвижной точки линейного отображения

$$x_{k+1} = -1.2x_k + 0.2.$$

12. Какая бифуркация реализуется в точке $\lambda = \lambda_2$?



Бифуркационная диаграмма: $x_{1,2}^*$ – неподвижные точки; $\rho_{1,2}$ – мультипликаторы неподвижных точек $x_{1,2}^*$

13. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 1 - 0.25x_k^2 \equiv F(x_k).$$

14. Определите характер переходного процесса в линейном отображении

$$x_{k+1} = -0.5x_k - 2.5.$$

15. Точка $x_* \in \mathbb{R}$ отображения $x \mapsto F(x)$ является m -периодической. Запишите уравнение для нахождения m -периодической точки. Как рассчитывается мультипликатор m -периодической точки?

16. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 1.2$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.25$?

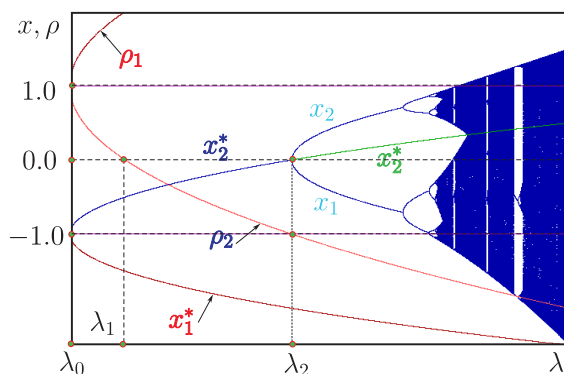
17. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda}(x - 1) + e^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = x + \frac{q}{\alpha}z - q = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки. Как найти неподвижную точку?

18. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

19. Какая бифуркация реализуется в точке $\lambda = \lambda_0$?



Бифуркационная диаграмма: $x_{1,2}^*$ – неподвижные точки; $\rho_{1,2}$ – мультипликаторы неподвижных точек $x_{1,2}^*$

20. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 1 - 0.75x_k^2 \equiv F(x_k).$$

21. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.4$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.5$?

22. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda}(x - 1 + \gamma) - \gamma + e^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = x + q \cdot \left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

23. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

24. Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = \frac{ax_k}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

25. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = \frac{4 - x_k^2}{4} \equiv F(x_k).$$

26. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 1,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

27. Какова скорость завершения переходного процесса в зависимости от величины мультипликатора $F'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки x_* отображения $x \mapsto F(x)$?

28. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1 - x^2) \equiv F(a, x)$?

29. Определите гиперболичность и устойчивость неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = -1/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

30. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.2$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.2$?

31. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x - 1) + e^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x - 1)e^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

32. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

33. Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2 + x_k}.$$

34. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

35. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k + 2,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

36. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = 1 - ax_k^2 + by_k$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Запишите условие бифуркации Неймарка-Сакера.

37. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto \frac{1 + 2x^2}{2x} - 1 \equiv F(x).$$

38. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.275$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.384$?

39. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x - 1) + e^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x - 1)e^{\lambda z} = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликаторов неподвижной точки.

40. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

41. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1 + x^2) \equiv F(a, x)$?

42. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2 + x_k} \equiv F(x_k).$$

43. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.6x + 1, & x \leq 0; \\ -0.8x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

44. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k + 1?$$

45. Оцените число итераций k (дискретное время), за которое изображающая точка попадет в окрестность неподвижной точки x_* линейного отображения $x_{k+1} = 0.5x_k$ длиной $\Delta = 10^{-p}$, $\Delta > 0$, если $x_0 = 1.0$? Здесь $p > 1$ – целое число.

46. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto \frac{1}{2x} - 1 + x \equiv F(x).$$

47. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.25$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.05$?

48. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x-1) + 2e^{\lambda(1-x)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x-1)e^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

49. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 2.8x_k(1-x_k) \equiv f(x_k)$. Определите знак мультипликатором $f'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки.

50. Какая бифуркация реализуется в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1-x) \equiv F(a, x)$?

51. Найдите вторую итерацию $F(x) = f(f(x))$ функции $f(x)$, если

$$f(x) = 1 - ax^2.$$

53. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.8x - 2, & x \leq 0; \\ -1.2x - 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

54. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k - 1?$$

55. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 \equiv F(a, x_k).$$

56. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto 0.7 - x^2 \equiv F(x).$$

57. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.5$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.5$?

58. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda}(x - 1) + 2e^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - x - \frac{q}{\alpha}(z - 0.5) = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

59. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = a - bx_k - y_k^2$$

найдите неподвижные точки, след и определитель матрицы Якоби как функции параметров a и b .

60. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 3.5$ в отображении $x \mapsto ax(1 - x) \equiv F(a, x)$?

61. Найдите линию бифуркации седло-узел для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

в форме явной зависимости от параметров a и b .

62. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.4x + 2, & x \leq 0; \\ -1.1x + 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

63. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k + 6?$$

64. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы для отображения

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 \equiv F(a, x_k).$$

65. **Задача.**

66. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto 2x - x^3 \equiv F(x).$$

67. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.5$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.25$?

68. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda}(x - 1) + 2e^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - x - \frac{q}{\alpha}(z - 0.5) = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

69. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = 1 - ax_k^2 + by_k$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b .

70. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 3.5$ в отображении $x \mapsto ax(1 - x) \equiv F(a, x)$?

71. Найдите линию бифуркации удвоения периода для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

в форме явной зависимости от параметрв a и b .

72. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.4x - 1, & x \leq 0; \\ -1.1x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

73. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 6?$$

74. Какова скорость завершения переходного процесса в зависимости от величины мультипликатора $F'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки x_* отображения $x \mapsto F(x)$?

75. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 2.0$ в отображении $x \mapsto ax - x^3 \equiv F(a, x)$?

76. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

77. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.3$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.1$?

78. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda}(x-1) + e^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x-1)e^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

79. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

80. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

81. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 2,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

82. Найдите неподвижные точки отображения

$$x \mapsto \frac{x+1}{2+x}.$$

83. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = a - bx_k - y_k^2$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Запишите условие бифуркации удвоения периода.

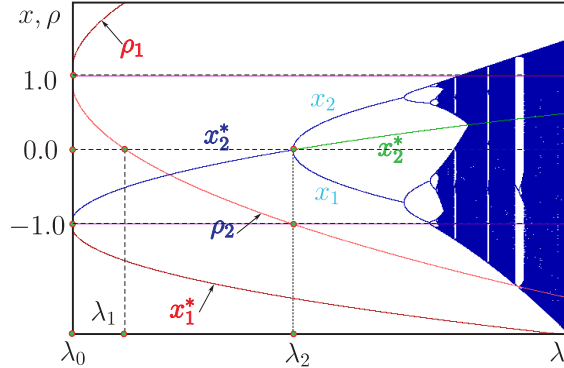
83. Найдите неподвижную точку x_* линейного отображения

$$x \mapsto ax - 2.$$

84. Определите устойчивость неподвижной точки линейного отображения

$$x_{k+1} = -0.98x_k + 1.2.$$

85. Какие бифуркации реализуются в точках λ_0 и λ_2 ?



Бифуркационная диаграмма: $x_{1,2}^*$ – неподвижные точки; $\rho_{1,2}$ – мультипликаторы неподвижных точек $x_{1,2}^*$

86. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 0.75 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

87. Определите характер переходного процесса в линейном отображении

$$x_{k+1} = 0.5x_k - 2.5.$$

88. Точка $x_* \in \mathbb{R}$ отображения $x \mapsto F(x)$ является неподвижной. Запишите уравнение неподвижной точки и предложите алгоритм его численного решения.

89. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.6$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.25$?

90. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x - 1 + \gamma) - \gamma + e^{\lambda(1-x)}, \quad \varphi(z, x) = x + \frac{q \cdot z}{\alpha} - q = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки. Получите уравнение периодов для неподвижной точки.

91. Дано отображение $x \mapsto 1 - 3x^2/4$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

92. Какая бифуркация реализуется в точке $a = -1$ в отображении $x \mapsto ax - x^3 \equiv F(a, x)$?

93. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto -x - x^3 \equiv F(x_k).$$

94. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leq 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geq 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.3$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.95$?

95. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^\lambda(x-1) + 2e^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x-1)e^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}(z - 1/2) = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

96. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

97. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

98. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k - 2,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

99. Найдите неподвижные точки отображения

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{2+x}.$$

100. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = a - bx_k - y_k^2$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Запишите условие седло-узловой бифуркации.

Шкала оценивания результатов тестирования: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения- 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи. Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится

в оценку по дихотомической шкале следующим образом:

Соответствие 100 балльной и дихотомической шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

2.3 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Компетентностно-ориентированная задача №1.

Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = a - 0.24 - x_k^2 \equiv F(a, x_k)$$

Используя этот результат, найдите точку бифуркации удвоения периода. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)?

Компетентностно-ориентированная задача №2.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^\gamma & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \frac{a \cdot x}{1 + \theta \cdot (x - 1)} & , \quad x \geq 1, \end{cases}$$

$$\theta = \gamma^{1-b}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения.

Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

Компетентностно-ориентированная задача №3.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{1-1/b} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \frac{a \cdot x}{1 + \mu \cdot (x - 1)} & , \quad x \geq 1, \end{cases}$$

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^{1-b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

Компетентностно-ориентированная задача №4.

Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3 \equiv f(a, x_k).$$

Используя этот результат, найдите порог бифуркации удвоения периода (flip) для симметричной неподвижной точки, которая возникает через виллообразную бифуркацию.

Определите устойчивость симметричной неподвижной точки в точке бифуркации удвоения периода. Здесь «порог бифуркации», «точка бифуркации» – бифуркационное значение параметра.

Компетентностно-ориентированная задача №5.

Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = \frac{ax_k}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

Используя этот результат, найдите точку виллообразной бифуркации. Изобразите качественно итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)?

Компетентностно-ориентированная задача №6.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(a, x) = a \cdot x^c & , \quad x < 1; \\ F_{\mathcal{R}}(a, x) = \frac{a \cdot x}{1 + \beta(x - 1)} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь a – варьируемый параметр, c и β – фиксированные параметры.

Компетентностно-ориентированная задача №7.

Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = a - 0.2 - x_k^2 \equiv F(a, x_k)$$

Используя этот результат, найдите точку бифуркации удвоения периода. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)?

Компетентностно-ориентированная задача №8.

Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = ax_k + x_k^3 \equiv f(a, x_k).$$

Используя этот результат, найдите точку субкритической виллообразной бифуркации. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Изобразите качественно итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №9.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^\gamma & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \frac{a \cdot x}{1 + \theta \cdot (x - 1)} & , \quad x \geq 1, \\ \theta = \gamma^{1-b} \end{cases}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения.

Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, γ – фиксированный параметр.

Компетентностно-ориентированная задача №10.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{1-1/b} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \frac{a \cdot x}{1 + \mu \cdot (x - 1)} & , \quad x \geq 1, \end{cases}$$

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^{1-b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

Компетентностно-ориентированная задача №11.

Дано отображение $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F : (x, y) \mapsto (y, \quad a - bx - y^2).$$

Найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Найдите границу седло-узловой бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №12.

Дано отображение плоскости \mathbb{R}^2 в себя

$$F : (x, y) \mapsto (1 + ax - by^2, \quad x).$$

Найдите границу бифуркации Неймарка-Сакера в форме явной зависимости от параметров a и b .

Компетентностно-ориентированная задача №13.

Для отображения $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F : (x, y) \mapsto (ax + y, \quad bx + y^3)$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Найдите границу бифуркации удвоения периода.

Компетентностно-ориентированная задача №14.

Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(a, x) = a \cdot x^c & , \quad x < 1; \\ F_{\mathcal{R}}(a, x) = \frac{a \cdot x}{1 + \beta x - \beta} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь a – варьируемый параметр, c и β – фиксированные параметры.

Компетентностно-ориентированная задача №15.

Для отображения $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F : (x, y) \mapsto (ax + y, \quad bx + y^3)$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Найдите границу бифуркации Неймарк-Сакера.

Компетентностно-ориентированная задача №16.

Дано отображение $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F : (x, y) \mapsto (y, \quad a - bx - y^2).$$

Найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b . Найдите границу бифуркации удвоения периода.

Компетентностно-ориентированная задача №17.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

with

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda \cdot (x - 1) + 1, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda \cdot (x - 1) + e^{\lambda(1-z(x))}, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^\lambda x, & \text{if } x > q, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры:

$\lambda = -0.2; q = 0.8; P = 0.4; \alpha > 0.$

Найдите неподвижную точку.

Компетентностно-ориентированная задача №18.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda \cdot (x - 1) + 1, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda \cdot (x - 1) + 2e^{\lambda(1-z(x))} - 1, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q + \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^\lambda \cdot (x + 1) - 1, & \text{if } x > q + \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры:

$$\lambda = -0.2; q = 0.8; P = 0.4; \alpha > 0.$$

Получите формулу для расчета мультипликатора неподвижной точки.

Компетентностно-ориентированная задача №19.

Дано отображение $F : I \mapsto R, I \subseteq \mathbb{R}$:

$$F : x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda}(x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(1-z(x))}, & q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda}(x + \mu) - \mu, & x > q. \end{cases}$$

where $z(x)$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры: $0 < \mu < 1 - q, q = 0.356; P = 0.5q; \lambda = -0.6; \alpha > 0$. Получите уравнение для расчета неподвижной точки.

Компетентностно-ориентированная задача №20.

Дано отображение $F : I \mapsto R, I \subseteq \mathbb{R}$:

$$F : x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda}(x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(1-z(x))}, & q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda}(x + \mu) - \mu, & x > q. \end{cases}$$

where $z(x)$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры: $0 < \mu < 1 - q, q = 0.356; P = 0.5q; \lambda = -0.6; \alpha > 0$. Получите выражение для расчета мультипликатора неподвижной точки.

Компетентностно-ориентированная задача №21.

Дано негладкое отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) - \mu + 2e^{\lambda(1-z(x))} - 1, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q + \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x + 1 + \mu) - 1 - \mu, & \text{if } x > q + \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры: $0 < \mu < 1 - q$, $q = 0.356$; $P = 0.5q$; $\lambda = -0.6$; $\alpha > 0$. Получите уравнение для расчета 1-цикла методом уравнений периодов.

Компетентностно-ориентированная задача №22.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

with

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1) + 1, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1) + e^{\lambda(1-z(x))} + 1 - e^{\lambda z(x)}, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda} x, & \text{if } x > q, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{2P}(q - x), \quad 0 \leq z \leq 1/2.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$; $q = 0.8$; $P = 0.4$; $\alpha > 0$. Составьте алгоритм для расчета 1-цикла.

Компетентностно-ориентированная задача №23.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

with

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1) + 1, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1) + e^{\lambda(1-z(x))} + 1 - e^{\lambda z(x)}, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda} x, & \text{if } x > q, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{2P}(q - x), \quad 0 \leq z \leq 1/2.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$; $q = 0.8$; $P = 0.4$; $\alpha > 0$. Составьте алгоритм для анализа устойчивости 1-цикла.

Компетентностно-ориентированная задача №24.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

with

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) + 1 - \mu + e^{\lambda(1-z(x))} - e^{\lambda z(x)}, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda}(x + \mu) - \mu, & \text{if } x > q, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{2P}(q - x), \quad 0 \leq z \leq 1/2.$$

Параметры: $0 < \mu < 1 - q$, $q = 0.356$; $P = 0.5q$; $\lambda = -0.6$; $\alpha > 0$.

Составьте алгоритм для анализа устойчивости неподвижной точки.

Компетентностно-ориентированная задача №25.

Дано отображение

$$F : x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & \text{if } x < q - \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x - 1 + \mu) - \mu + 2e^{\lambda(1-z(x))} - 1, & \text{if } q - \frac{P}{\alpha} \leq x \leq q + \frac{P}{\alpha}; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda} \cdot (x + 1 + \mu) - 1 - \mu, & \text{if } x > q + \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{\alpha}{P}(q - x).$$

Параметры: $0 < \mu < 1 - q$, $q = 0.356$; $P = 0.5q$; $\lambda = -0.6$; $\alpha > 0$. Получите выражение для расчета мультипликатора 1-цикла.

Шкала оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения - 60 (установлено положением П 02.016). Максимальное количество баллов за решение компетентностно-ориентированной задачи - 6 баллов. Балл, полученный обучающимся за решение компетентностно-ориентированной задачи, суммируется с баллом, выставленным ему по результатам тестирования. Общий балл промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку

по дихотомической шкале:

Соответствие 100 балльной и дихотомической шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи (нижеследующие критерии оценки являются примерными и могут корректироваться): 6-5 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени. 4-3 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа). 2-1 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время. 0 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и словесные рассуждения, и (или) задача не решена.