МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«_18_» __04__________ 2024 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
к выполнению практических заданий по дисциплине
«Высшая математика»
для направления подготовки
ОПОП ВО 39.03.01 Социология
шифр и наименование направления подготовки (специальности)
направленность (профиль)
«Социология маркетинга и управление организацией»
наименование направленности (профиля, специализации)

ОПОП ВО с присвоением двух квалификаций одного уровня высшего образования

Курск 2024

УДК 51

Составитель: Т.В. Шевцова

Рецензент
Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики
О.А. Бредихина

Высшая математика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки ОПОП ВО 39.03.01 Социология направленность (профиль) «Социология маркетинга и управление организацией»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова – Курск, 2024. – 43 с.

В методических указаниях имеется список изучаемых разделов, тематическое планирование практических занятий, шкала и критерии оценивания практических заданий для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации, список рекомендуемой литературы, приводятся примеры типовых заданий для проведения промежуточной аттестации и текущего контроля успеваемости. В указаниях также даны примеры выполнения наиболее трудных заданий.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки ОПОП ВО 39.03.01 Социология направленность (профиль) «Социология маркетинга и управление организацией».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 18.04.24 Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,26.Тираж _100_экз. Заказ 268. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Цель дисциплины: Формирование профессиональных знаний по математике, под которыми понимается готовность и способность личности использовать в профессиональной деятельности приобретённую совокупность знаний, умений и навыков математики.

Планируемые результаты освоения основной профессиональной образовательной программы (компетенции, закрепленные за дисциплиной)

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие,

УК-1.4 При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы, в том числе с применением философского понятийного аппарата

УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений

УК-2.5 Оценивает решение поставленных задач в зоне своей ответственности в соответствии с запланированными результатами контроля, при необходимости корректирует способы решения задач

Разделы, изучаемые в курсе «Высшая математика» представлены в табл. 1.

Таблица 1

№	Раздел (тема) дисциплины
1	Линейная алгебра
2	Векторная алгебра
3	Аналитическая геометрия
4	Элементы теории множеств и математической логики
5	Введение в математический анализ
6	Дифференциальное исчисление функции одной переменной
7	Неопределенный интеграл
8	Определённый интеграл
9	Функции нескольких переменных
10	Дифференциальные уравнения
11	Теория графов
12	Элементы теории игр

Темы практических занятий представлены в табл. 2.

Таблица 2

№	Наименование практического занятия
1	2
1	Вычисление определителей. Действия с матрицами
2	Обратная матрица. Матричные уравнения
3	Решение систем линейных уравнений
4	Векторы на плоскости и в пространстве
5	Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов
6	Прямая на плоскости и плоскость в пространстве
7	Кривые и поверхности 2 порядка
8	Элементы теории множеств
9	Алгебра логики
10	Функция одной переменной
11	Предел функции
12	Вычисление производных
13	Исследование функций
14	Первообразная и неопределенный интеграл
15	Методы интегрирования
16	Интегрирование рациональных функций
17	Определенный интеграл и его приложения
18	Несобственный интеграл
19	Функции нескольких переменных
20	Частные производные
21	Дифференциальные уравнения 1 порядка
22	Дифференциальные уравнения высших порядков
23	Основные понятия теории графов
24	Приложения теории графов
25	Основные понятия теории игр. Виды игр
26	Матричные игры
27	Приложения теории игр

Рабочая программа дисциплины «Высшая математика» предусматривает для проведения текущего контроля успеваемости выполнение двенадцати работ, называемых далее Т 1, Т 2, Т 3, Т 4, Т 5, Т 6, Т 7, Т 8, Т9, Т10, Т11, Т12.

Шкала оценивания - 10-ти балльная для каждой работы.

Критерии оценивания:

Каждый вопрос (задание) в тестовой форме оценивается по дихотомической шкале: выполнено – 1 балл, не выполнено – 0 баллов.

Применяется следующая шкала перевода баллов в оценку по 5-балльной шкале:

9, 10 баллов соответствуют оценке «отлично»;

7, 8 баллов – оценке «хорошо»;

5, 6 баллов – оценке «удовлетворительно»;

4 балла и менее – оценке «неудовлетворительно».

Для проверки знаний используются вопросы и задания в различных формах:

- закрытой (с выбором одного или нескольких правильных ответов),
- открытой (необходимо вписать правильный ответ),
- на установление соответствия,
- на установление правильной последовательности.

ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Задание в закрытой форме:

Производная функции $y = x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^3}$ равна

1) $5x^4 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ 2) $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$

3) $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ 4) $5x + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

Задание в открытой форме:

Точка минимума функции $y = (2x+1)^2 \cdot (x+3) + 4$ равна…

Задание на установление правильной последовательности:

Задание на установление последовательности	Варианты ответов
Расположите последовательность действий при нахожде-	1) зафиксировать x, вычислить значение функции $f(x)$ 2) найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

нии производной функции по определению	3) дать аргументу x приращение Δx и вычислить значение функции $f(x+\Delta x)$ 4) найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 5) определить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Задание на установление соответствия:

Установить соответствие между функцией $y = f(x)$ и способом нахождения ее первой производной y'.

1) $y = \sin(\ln x)$	1) логарифмическое дифференцирование
2) $y = x \cdot \mathrm{tg}\, x$	2) табличная производная
3) $y = (\log_2 x)^{\cos x}$	3) производная неявно заданной функции
4) $y = 5^x$	4) производная произведения
	5) производная сложной функции

Компетентностно-ориентированная задача

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме Q ед. Известны функция затрат $C(Q) = 1{,}92 \cdot Q^3 + 4{,}32 \cdot Q^2 + 2{,}88 \cdot Q + 15$ и функция цены продукции $P(Q) = -1{,}44 \cdot Q + 89{,}28$. Требуется определить средние и предельные затраты, соответствующие максимальной прибыли.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

Т 1 «Линейная алгебра»

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = 3\mathrm{A} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$.

Элемент c_{23} матрицы С равен

1) 8 2) 9 3) –3 4) 11 5) 3

2. Найти x из уравнения $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 14$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти элемент a_{12} обратной матрицы A^{-1}.

5. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Мебельная фабрика специализируется по выпуску изделий четырех видов: диваны, кровати, комоды и шкафы. При этом используется сырье четырех типов. Нормы расхода каждого из них на один вид мебели и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида мебели.

Вид сырья	Нормы расходы сырья на одну пару, усл.ед.				Расход сырья на 1 день, усл.ед.
	Диван	Кровать	Комод	Шкаф	
S_1	8	5	4	1	26
S_2	1	3	2	1	11
S_3	2	10	9	7	40
S_4	3	8	9	2	37

7. Установить соответствие.

1) $\begin{cases} 4x + 6y = -1, \\ 12x + 18y = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x - 7y = 5, \\ -48x + 28y = -15 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 5y = 6, \\ x + 2y = 25 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 6x - 15y = 0 \end{cases}$	а) система имеет единственное ненулевое решение б) система имеет бесконечное множество решений в) система несовместна г) система имеет только тривиальное решение д) система имеет два решения

8. После приведения системы уравнений $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ 10x + 7y + 4z = 7 \\ -5x + 4y + 2z = -7 \end{cases}$

к виду $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ y + mz = n \\ y + pz = q \end{cases}$ произведение n·q равно

1) –5/2 2) –40/15 3) 0 4) –4/25 5) –4/3

9. Найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$ 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ 3) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$
4) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$ 5) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$

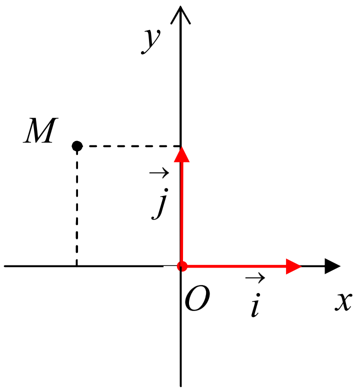
10.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} \sqrt{5}x + 2y = 1, \\ 6x - 3\sqrt{5}y = 12\sqrt{5} \end{cases}$ методом Крамера. Ответ представить в виде последовательности действий, например, 1, 2, 4, 5, 3. Замечание: вычисления производить в следующей последовательности 1) $\det A$ 2) $\det A_x$ 3) x 4) $\det A_y$ 5) y	1) $\sqrt{5}$ 2) $-27\sqrt{5}$ 3) –2 4) –27 5) 54	

Т 2 «Метод координат. Векторная алгебра»

1. Найти сумму координат точки *B*, если $A(6,\ 2)$ и вектор $\vec{AB}(-1,5)$.

2. Найти абсциссу вектора $\vec{OM}$, изображенного ниже, в базисе ($\vec{i}$, $\vec{j}$).



3. Модуль вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(-1; 0; 5)$, $\vec{b}(2; -1; 1)$ равен

1) $\sqrt{222}$ 2) $\sqrt{1404}$ 3) $\sqrt{468}$ 4) 10 5) 15

4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными. Выберите утверждение, которое является не верным:

1) их скалярное произведение равно 0,
2) их векторное произведение равно 0,
3) один из векторов можно выразить через другой,
4) координаты векторов пропорциональны.

5. Установить соответствие.

1) нахождение скалярного произведения векторов 2) нахождение векторного произведения векторов 3) нахождение смешанного произведения векторов 4) нахождение длины вектора	а) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ б) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ г) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ д) $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

6. Найти λ, при котором векторы $\vec{s}_1(-3,\ 6)$ и $\vec{s}_2(1,\ \lambda)$ образуют линейно зависимую систему?

7. Вычислить работу силы $\vec{F}(2,1)$ по перемещению материальной точки по отрезку прямой из положения $P(-1,\ 3)$ в положение $Q(1,\ 2)$.

8. Вычислить площадь треугольника *STR*, если $S(1,\ 5,\ -2)$, $T(4,\ 1, -1)$ и $R(3,\ 3,\ -1)$.

9. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}\,(4,\ 0,\ 3)$, $\vec{b}\,(2,\ -2,\ 2)$ и $\vec{c}\,(3,\ 2,\ 5)$.

10.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов
Расположите последовательность действий при вычислении площади треугольника ABC, если $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$.	1) вычислить $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ 2) найти определитель $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 3) вычислить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ 4) разделить модуль векторного произведения на два

Т 3 «Аналитическая геометрия»

1. Уравнение прямой, проходящей через т. $B\,(0;1)$, угловой коэффициент которой $k=3$

1) $y=3x+1$ 2) $y=x+3$ 3) $x=3y+1$ 4) $3y=x+1$

2. Найти тангенс угла наклона прямой $l: y=2x-4$ к положительному направлению оси *Ox*.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;3)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{s}\,(-2;1)$

1) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}$ 2) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}$ 3) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{3}$ 4) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}$

4. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}\,(1;4)$

1) $x+4y+10=0$ 2) $x+4y+1=0$ 3) $2x-3y+10=0$ 4) $x+4y-10=0$

5. Даны точки $A(1;4)$, $B(-3;7)$. Установите соответствие между различными уравнениями прямой AB и их названиями

1) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-4}{3}$ 2) $3x+4y-19=0$	а) каноническое уравнение б) уравнение прямой в отрезках в) общее уравнение прямой

3) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$ 4) $\frac{x}{19/3} + \frac{y}{19/4} = 1$	г) уравнение прямой с угловым коэффициентом д) параметрические уравнения прямой

6. Найти расстояние от точки $M(1; 2)$ до прямой $6x - 8y - 5 = 0$.

7. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4; 1; 3)$ параллельно векторам $\vec{p}(2; 1; -2)$ и $\vec{q}(1; 0; 3)$.

1) $x + 4y - 3z - 14 = 0$ 2) $3x - 8y - z - 23 = 0$

3) $x + 4y - 3z - 23 = 0$ 4) $3x - 8y - z - 14 = 0$

8. Вычислить расстояние от точки $M(-2, 2, -1)$ до плоскости $\pi : 3x + 4z - 5 = 0$.

9. Установить верную последовательность действий при нахождении точки пересечения прямой AB, где $A(3; 2; 1)$, $B(5; 5; 0)$ и плоскости, задаваемой уравнением: $x + 3y + 2z - 2 = 0$.

1) Подставить x, y, z, выраженные через параметр t, в уравнение $x + 3y + 2z - 2 = 0$
2) Составить параметрические уравнения прямой AB
3) Подставить значение параметра t в параметрические уравнения прямой AB
4) Вычислить значение параметра t

10. Найти длину меньшей оси эллипса, задаваемого уравнением: $9x^2 + 4y^2 = 36$.

*Т 4 «*Элементы теории множеств и математической логики*»*

1. Верными являются равенства:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 2) $A \cup \overline{A} = \varnothing$

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 4) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2. Разность $A \setminus B$ множеств $A = \{3, 5, 6\}$ и $B = \{3, 5, 8\}$

1) $\{3, 5, 6, 8\}$ 2) $\{8\}$

3) $\{3, 5\}$ 4) $\{6\}$

3. Даны числовые промежутки $A = [3;\ 5)$ и $B = [0;3]$. Выполнить операции над множествами и установить соответствие

1) $A \cap B$ 2) $A \cup B$ 3) $A \setminus B$ 4) $B \setminus A$	а) [0;5) б) $\emptyset$ в) (3;5) г) [3;5) д) $\{3\}$

4. В курскую область приезжает представитель министерства здравоохранения и социального развития РФ. Он обязан посетить с проверкой хотя бы одно из следующих учреждений: больницу скорой медицинской помощи, областную клиническую больницу, детскую областную больницу, инфекционную больницу им. Н. Семашко. Сколько возможностей посещения для него существует?

5. На кафедре иностранных языков работают 18 преподавателей. Из них 12 преподают английский язык, 11 – немецкий язык, 9 – французский язык. 5 преподавателей преподают английский и немецкий языки, 4 – английский и французский, 3 – немецкий и французский. Сколько преподавателей преподают все три языка?

6. Какие из следующих предложений являются высказываниями?
1) В г. Курске есть улица 50 лет Октября.
2) Закройте окно!
3) Произведение чисел положительно.
4) Произведение двух отрицательных чисел положительно.

7. Какая из булевых функций записана в базисе ИЛИ-НЕ?

1) $\overline{x_1 \wedge x_2} \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3)$ 2) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$ 3) $(x \wedge y) \oplus 1$

4) $\overline{x_1 \vee x_2} \vee (\overline{x}_2 \vee x_3)$ 5) $(x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$

8. Установите правильную последовательность алгоритма построения СКНФ для булевой функции с помощью таблицы истинности:

1) составить конъюнкцию элементарных дизъюнкций
2) каждому набору поставить в соответствие элементарную дизъюнкцию, равную 0 на этом наборе
3) построить таблицу истинности для заданной функции
4) выделить те наборы, на которых функция принимает значение 0

9. Установить соответствие между словесной формулировкой высказываний и их символической записью с помощью кванторов всеобщности и существования

1) Существует действительное число, квадрат которого равен 2 2) Существует рациональное число, квадрат которого равен 2 3) Существует единственное рациональное число, квадрат которого равен 2 4) Квадрат любого действительного числа равен 2	а) $\exists x \in Q(x^2 = 2)$ б) $\exists x! \in Q(x^2 = 4)$ в) $\exists x \in R(x^2 = 2)$ г) $\forall x \in R(x^2 = 2)$ д) $\forall x \in Q(x^2 = 2)$

10. Выписать из предыдущего задания номера тех высказываний, которые являются ложными.

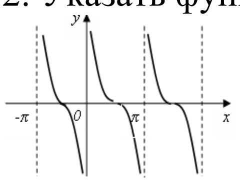
Т 5 «Введение в математический анализ»

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{4}{\sqrt{x} - 2}$

1) $(4;+\infty)$ 2) $(-\infty;4) \cup (4;+\infty)$

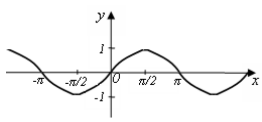
3) $[0;4) \cup (4;+\infty)$ 4) $(0;4) \cup (4;+\infty)$

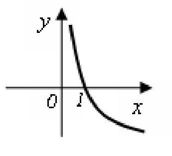
2. Указать функцию, график которой изображен на рисунке

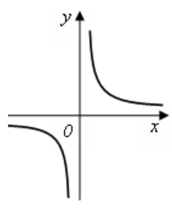


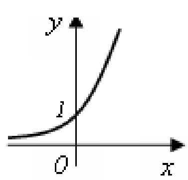
1) $y = \dfrac{1}{x}$ 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$ 3) $y = x^3$ 4) $y = ctgx$

3. Указать график функции $y = \log_{0,5} x$

а) 

б) 

в) 

г) 

4. Исследуйте данные ниже функции на ограниченность и установите соответствие.

1) $y = 3^x$	а) ограничена сверху, не ограничена снизу
2) $y = -x^2 + 3x$	б) ограничена снизу, не ограничена сверху,
3) $y = tg\,x$	в) ограничена и сверху, и снизу
4) $y = \sin x$	г) не ограничена ни сверху, ни снизу

5. Ниже дано определение бесконечно большой числовой последовательности. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II)

Числовая последовательность $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой , если ______ существует ______ такой, что если _______ , то выполняется условие _________*

I. $|x_n| > \varepsilon$

II. $n > N(\varepsilon)$

III. для любого числа $\varepsilon > 0$

IV. номер $N(\varepsilon) > 0$

6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4 - 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$.

7. Установить соответствие между пределами и неопределенностями, обнаруженными в каждом из них

1) $\lim_{x\to1}(1-x)\cdot tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$	а) неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$
2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x^2+8}{3x^3+5x^2-10}$	б) неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
3) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	в) неопределённость (1^∞)
4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3-4x}$	г) неопределённость $(0\cdot\infty)$
	д) неопределённость $(\infty+\infty)$

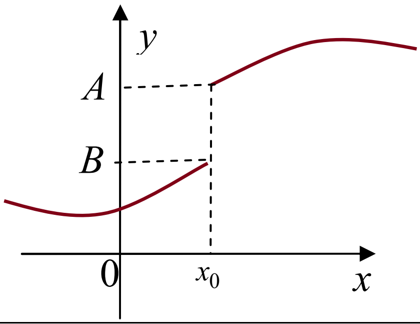
8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$ равен

1) e 2) e^3 3) $3/e$ 4) 1

9. Бесконечно малые в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если

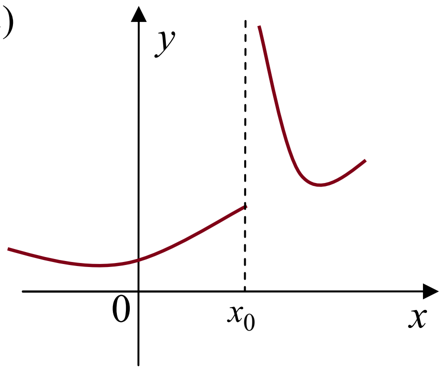
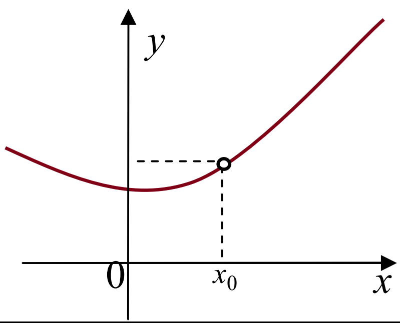
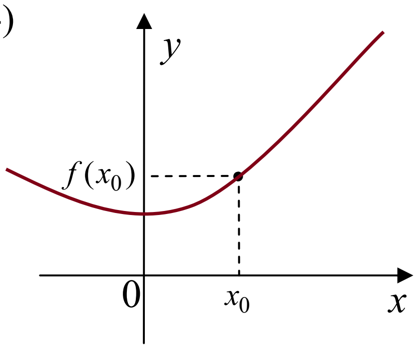
1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

10. Пользуясь графиками функций, исследуйте вопрос о непрерывности функции в точке x_0 и поставьте в соответствие каждой указанной точке x_0 ее характеристику.

<table>
<tr><td>1)

</td><td rowspan="4">а) x_0 – точка непрерывности функции

б) x_0 – точка устранимого разрыва 1го рода

в) x_0 – точка неустранимого разрыва 1го рода

г) x_0 – точка разрыва 2го рода</td></tr>
<tr><td>2)

</td></tr>
<tr><td>3)

</td></tr>
<tr><td>4)

</td></tr>
</table>

Т 6 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Производная функции $y = x^5 - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{x^3}$ равна

1) $5x^4 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ 2) $5x^4 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$

3) $5x^4 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ 4) $5x + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

2.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении производной функции по определению	1) зафиксировать x, вычислить значение функции $f(x)$ 2) найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 3) дать аргументу x приращение Δx и вычислить значение функции $f(x+\Delta x)$ 4) найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 5) определить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	

3. Производная функции $f(x) = \cos^3(x^2 + 2x)$ равна

1) $3\cos^2(x^2 + 2x)(2x + 2)$ 2) $3\cos^2(x^2 + 2x)(-\sin(x^2 + 2x))(2x + 2)$

3) $3\sin^2(x^2 + 2x)(2x + 2)$ 4) $3\cos^2(x^2 + 2x)\sin(x^2 + 2x)(2x + 2)$

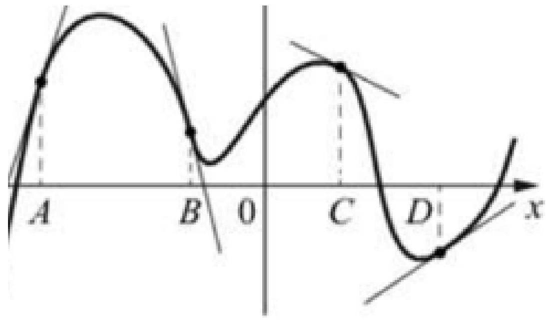
4. Производная функции $y = x^x$

1) $y' = \dfrac{x^{x+1}}{x+1}$ 2) $y' = x^x$ 3) $y' = x^x \ln x$ 4) $y' = x^x(1 + \ln x)$

5. Установить соответствие между функцией $y = f(x)$ и способом нахождения ее первой производной y'.

1) $y = \sin(\ln x)$ 2) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$ 3) $y = (\log_2 x)^{\cos x}$ 4) $y = 5^x$	1) логарифмическое дифференцирование 2) табличная производная 3) производная неявно заданной функции 4) производная произведения 5) производная сложной функции

6. На рисунке изображен график функции и касательные к нему, проведенные в точках с абсциссами A, B, C, D. Поставьте в соответствие каждой точке значение ее производной в этой точке.



1) A	а) - 4
2) B	б) 3
3) C	в) -0,5
4) D	г) 0,7

7. Найти коэффициент k касательной $y = kx + b$ к параболе $y = 7x^2 - 14x + 5$ в точке $x_0 = 2$.

8. Найти точку минимума функции $y = (2x + 1)^2 \cdot (x + 3) + 4$.

9. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+49}{x}$ на отрезке $[-9; -1]$.

10. Способность человека развить и понимать пространственные концепции задается законом $A(t) = \frac{1}{3}\sqrt{t}$, t – возраст, $5 \le t \le 18$. Найти скорость улучшения понимания пространственных понятий когда человеку 9 лет.

Т 7 «Неопределенный интеграл»

1. Неопределенным интегралом от функции f(x) называется
1) Любая первообразная этой функции
2) Совокупность всех первообразных этой функции
3) Производная этой функции
4) Дифференциал этой функции

2. Первообразная функции $f(x) = \sin\frac{x}{2} + x + 1$, график которой проходит через M (0; 4), имеет вид

1) $\cos\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$ 2) $2\cos\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + 2$

3) $-2\cos\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$ 4) $2\cos\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$

3. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$ равен

1) $-\frac{1}{4} ctg 4x + C$ 2) $\frac{1}{4} tg\, 2x + C$

3) $-\frac{1}{2} ctg\, x + C$ 4) $-\frac{1}{4} ctg\, 2x + C$

4. Установите соответствие между интегралами и их значениями

1) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 4) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	а) $\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c$ б) $\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$ в) $\arcsin\frac{x}{a} + c$ г) $arctg \frac{x}{a} + c$ д) $\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + c$

5. Неопределённый интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5 - 2\sin x}} dx$ равен

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} + C$ 2) $2\ln\left|5 - 2\sin x\right| + C$

3) $-\sqrt{5-2\sin x}+C$ 4) $2\sqrt{5-2\sin x}+C$

6. Неопределённый интеграл $\int (2x+1)\cdot e^{2x+1}dx$ равен

1) $xe^{2x+1}+C$ 2) $2xe^{2x+1}+C$

3) $(x^2+x)e^{2x+1}+C$ 4) $2(x^2+x)e^{2x+1}+C$

7. Равенства, которые являются верными

1) $\int dF(x)=f(x)$ 2) $\int (f_1(x)\cdot f_2(x))dx=\int f_1(x)\,dx\cdot\int f_2(x)\,dx$

3) $\int dF(x)=F(x)+C$ 4) $\int f(ax+m)dx=\dfrac{F(ax+m)}{a}+C$

8. Вид разложения дроби $\dfrac{x-4}{x^3+6x^2+8x}$ на простейшие

1) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2+6x+8}$ 2) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Mx+P}{x^2+6x+8}$

3) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+6x+8}$ 4) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+4}$

9. Для того, чтобы свести подынтегральную функцию в интеграле $\int sin^5x\cos x\,dx$ к рациональной, целесообразна замена

1) $t=\cos x$ 2) $t=\sin x$ 3) $t=sin^5x\cos x$ 4) $t=sin^5x$

10. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла $\int (x+1)\cdot\sin x\,dx$.

1) Вычислить du и v
2) Установить, что нужно взять за u, а что за dv
3) Определить, относится ли интеграл к типу интегралов, интегрируемых по частям
4) Воспользоваться формулой $\int u\,dv=uv-\int vdu$, подставив вместо u, dv, du и v их значения.

Т 8 «Определенный интеграл»

1. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

1) $\int_a^b udv=uv|_b^a+\int_a^b vdu$ 2) $\int_a^b udv=uv-\int_a^b vdu$

3) $\int_a^b udv=-\int_a^b vdu$ 4) $\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$

2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{1}^{8}\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$.

3. Равенства, которые являются верными

1) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ 2) $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$ 4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4. Установите соответствие между определенными интегралами, записанными в левой колонке, и равными им выражениями в правой колонке

1) $\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$ 2) $\int\limits_{a}^{a} f(x)dx$ 3) $\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$ 4) $\int\limits_{a}^{b}(f(x)+g(x))dx$	а) 0 б) $-\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ в) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ г) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx-\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ д) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx+\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$

5. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}+2}{e^x}dx$.

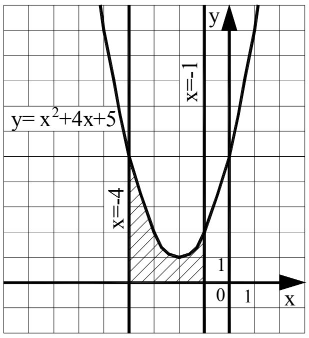
6. Указать интегралы, которые являются несобственными

1) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x}{x+1}dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{x+1}{x}}\,dx$

3) $\int\limits_{-1}^{1}\ln(x+5)\,dx$ 4) $\int\limits_{-1}^{1}(x-1)(x+1)\,dx$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-x^3$ и прямой, проходящей через точки A(-1; 4) и B(1;-4)

8. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке



1) $\frac{230}{3}$ 2) 70 3) 16 4) $\frac{100}{3}$ 5) 6

9. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$. Укажите верную последовательность математических действий, которые для этого нужно совершить.

1) Доказать, что расходится хотя бы один из интегралов: $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ или $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$.

2) Представить интеграл в виде $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$.

3) Установить, что подынтегральная функция не определена в точке x=0, в окрестности которой она не ограничена.

4) Сделать вывод о расходимости интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$.

10. Найти работу силы $F(x)=\frac{-3}{x^2}$ по перемещению мат. точки вдоль оси Ox из точки x=1 в точку x=2.

Т 9 «Функции нескольких переменных»

1. Областью определения функции $f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является

1) круг радиуса 1 с центром в начале координат, не включая граничную окружность;
2) круг радиуса 1 с центром в начале координат, включая граничную окружность;
3) часть плоскости вне круга радиуса 1 с центром в начале координат, включая окружность, ограничивающую указанный круг;
4) часть плоскости вне круга радиуса 1 с центром в начале координат, не включая окружность, ограничивающую указанный круг

2. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{3-y^2}{1+x}$

1) $-2y$ 2) $\frac{3-2y}{1+x}$ 3) $\frac{2y}{(1+x)^2}$ 4) $\frac{-2y}{1+x}$

3. Вычислите значения частных производных функции $z=5x^3-3xy^2-2y$ в точке $M_0(1;2)$ и установите соответствие.

1) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{M_0}$ 2) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{M_0}$ 3) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{M_0}$ 4) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{M_0}$ 5) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right\|_{M_0}$	а) 30 б) −14 в) −12 г) −6 д) −4 е) 3

4. Найти частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z=x\ln y$

1) $-\frac{x}{y^2}$ 2) $\frac{x}{y^2}$ 3) $\frac{x}{y}$ 4) $\ln y$

5.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов
Расположите последовательность действий при исследовании функции двух переменных на экстремум	1) вычисляем значения A, B, C 2) вычисляем $z_0(x_0; y_0)$ 3) определяем стационарные точки 4) находим частные производные функции первого и второго порядков 5) определяем, минимум или максимум имеется в точке экстремума 6) вычисляем значение Δ 7) определяем наличие точки экстремума

6. Производная функции $z=x^3y^2$ по направлению вектора $\bar{\lambda}(-1;-1)$ в т. $P(1;1)$

1) $-5\sqrt{2}/2$ 2) $5\sqrt{2}/2$ 3) - 5 4) $-\sqrt{2}/2$

7. Градиент функции $z = e^{x^2+y}$ в точке Р (0;1)

1) $(0; e)$ 2) $(0;0)$ 3) $(e; e)$ 4) (1;1)

8. Исследуйте на экстремум функцию $z = \frac{x^3}{3} - 2xy + y^2 - 3x$. В ответе запишите значение z_0, если исследование дало результат $z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$.

9. Производится два вида товаров в количестве x и y. Пусть цены на эти товары, соответственно, $P_1 = 32$ и $P_2 = 24$ тыс. руб. а функция издержек имеет вид C=$1{,}5x^2 + 2xy + y^2$. Найдите максимальную прибыль в тыс. руб., которую можно получить при продаже этих товаров.

10. В таблице приведены данные об уровне безработицы (x) и уровне преступности (y) в некотором населенном пункте.

x_i	1,3	2,2	3,3	4,2
y_i	4,3	4,4	4,5	4,7

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать уровень преступности в случае, когда безработица отсутствует.

Т 10 «Дифференциальные уравнения»

1. Дифференциальное уравнение $(3x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ является

1) уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным уравнением
3) линейным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) уравнением в полных дифференциалах

2. Общее решение дифференциального уравнения $y' = xy^2$

1) $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$ 2) $y = (x^2 + C)^{-1}$ 3) $y = \sqrt{x + C}$ 4) $y = -2(x^2 + C)^{-1}$

3. Тип дифференциального уравнения $(y^2 - 1)\,dx - \frac{x-1}{y+1}dy = 0$

1) уравнение с разделяющимися переменными
2) однородное уравнением
3) линейное уравнение
4) уравнение Бернулли
5) уравнение в полных дифференциалах

4. Найти постоянную C в частном решении дифференциального уравнения

$y \cdot y' = 4x^3$ при $y(5) = 2$.

5. Уравнение, к которому сводится уравнение $yy'' - y' = 0$ с помощью введения переменной $z = y'$

1) $y^2\, dz = zdy$ 2) $y\, dz = z^2 dy$ 3) $y\, dz = zdy$ 4) $ydz = dy$

6. Замена, целесообразная для понижении порядка диф.уравнения $y'y'' = y^2$

1) $z(y) = y'$ 2) $z(x) = y$ 3) $z(y) = y'$ 4) $z(x) = y'$

7. Записать верную последовательность действий для нахождения общего решения дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

I. Воспользоваться методом неопределенных коэффициентов для нахождения параметра A. Получить A=3.

II. Составить и решить уравнение $k^2 - 3k + 2k = 0$.

III. Записать уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

IV. Определить вид частного решения: $y = Ae^{2x}x$.

I. Записать общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$.

II. Записать сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + 3e^{2x}x$.

8. Вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 3y = x\, e^{3x}$

1) $A\, x\, e^{3x}$ 2) $(A\, x + B)\, e^{3x}$ 3) $x(A\, x + B)\, e^{3x}$ 4) $x^2(A\, x + B)\, e^{3x}$

9. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и видом решения.

1) $y'' + y' - 6y = 0$ 2) $y'' - 10y' + 29y = 0$ 3) $y'' - 10y' + 25y = 0$ 4) $y'' + 25y = 0$	а) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))$ б) $y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$ в) $y = C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)$ г) $y = C_1 \cdot e^{k_1x} + C_2 \cdot e^{k_2x}$ д) $y = C_1 \cdot e^{k_1x} + C_2$

10. Решение задачи Коши для диф.уравнения $x^2 y'' = 1$,если $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$

1) $y = -\ln|x| + 2x + 1$ 2) $y = \ln|x| + 2$ 3) $y = x^2 + 2$ 4) $y = \dfrac{1}{x^2} + 3x$

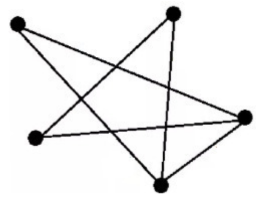
Т 11 «Теория графов»

1. Дан граф с 7 вершинами. Какими могут быть степени вершин этого графа?

1) 6, 6, 4, 4, 3, 2, 1, 2) 6, 5, 4, 3, 2, 2, 1

3) 7, 4, 2, 2, 2, 2, 1 4) 6, 3, 3, 2, 2, 2, 2

2. Определить количество нечетных вершин графа, изображенного на рисунке



3. 10 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

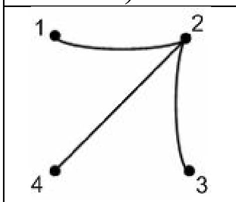
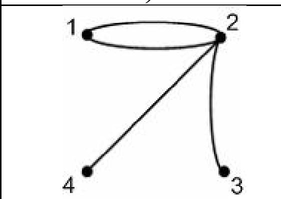
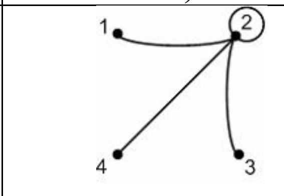
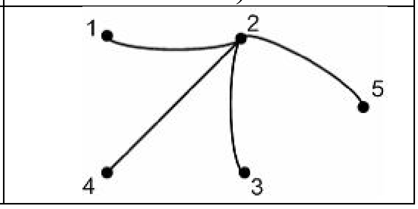
4. Установить соответствие

Термин	Определение
1) Эйлеров путь	А) Маршрут, в котором нет повторяющихся ребер
2) Простой путь	Б) Путь, у которого совпадает начало и конец
3) Цикл	В) Путь, в котором нет повторяющихся вершин
4) Путь	Г) Путь, при котором граф можно изобразить «одним росчерком

5. Неверным является утверждение:

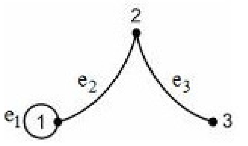
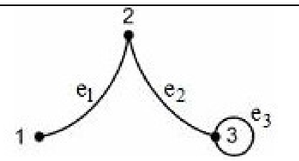
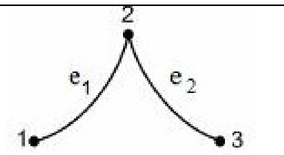
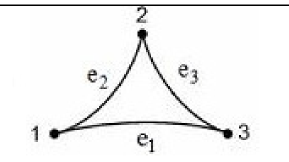
1) Если все вершины связного графа четные, то в нем есть эйлеров цикл
2) Если ровно две вершины графа нечетные, то в нем есть эйлеров путь, но не цикл
3) Если в графе более двух нечетных вершин, то в нем нет эйлерова пути
4) Если в графе нет нечетных вершин, то в нем нет эйлерова пути

6. Реализацией неориентированного графа со множеством вершин V={1,2,3,4} и ребер E={(1,2);(2,3);(2,4);(2,2)} является

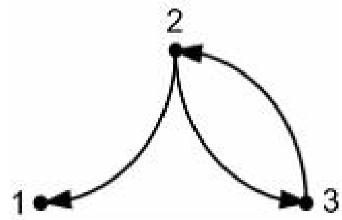
1)	2)	3)	4)
			

7. Неориентированный граф, заданный матрицей инцидентности

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

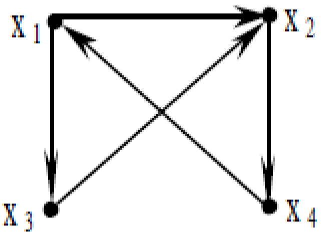
1)	2)	3)	4)
			

8. Матрица смежности ориентированного графа



1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Установите верную последовательность, которая задает Эйлеров цикл:



I. x_1
II. x_2
III. x_3
IV. x_4

10. На кружок по математике пришло 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что у Антона в этой компании 66 друзей, у Бори –5, у Вовы и Глеба по 3, у Димы и Евгения по 2, у Жоры всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.

Т 12 «Теория игр»

1. Если в игре имеется седловая точка, то
1) игра может быть решена в чистых стратегиях
2) игра может быть решена в смешанных стратегиях
3) игра не имеет решения
4) игра имеет бесконечное множество решений
5) игра имеет тривиальное нулевое решение

2. Игры, в которых возможно объединение нескольких игроков, называют
1) кооперативными
2) коалиционными
3) интегральными
4) антагонистическими
5) неантогонистическими

3. Установить соответствие

1) Игры, в которых один игрок забирает весь выигрыш, а проигравший теряет все. 2) Игры, в которых весь выигрыш можно распределить между разными игроками. 3) Игры, в которых участники ходят одновременно или вслепую 4) Игры, в которых участники ходят по очереди	А) Параллельные игры Б) Последовательные игры В) Игры с нулевой суммой Г) Игры с ненулевой суммой

4. Нижняя цена игры в чистых стратегиях – это:
1) минимальный выигрыш игрока А, если он следует своей максиминной стратегии
2) минимальный выигрыш игрока А

3) максимальный выигрыш игрока А, если он следует своей максиминной стратегии

4) максимальный выигрыш игрока А.

5. Значение нижней цены игры в чистых стратегиях

1) не превосходит значения верхней цены игры

2) меньше значения верхней цены игры

3) больше значения верхней цены игры

4) может быть больше, а может быть и меньше верхней цены

6. Для матричной игры $p = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ верно утверждение

1) Стратегия B_2 доминирует стратегию B_3

2) Стратегия B_3 доминирует стратегию B_2

3) Стратегия B_1 доминирует стратегию B_4

4) Стратегия B_4 доминирует стратегию B_1

7. Количество удовлетворительных ситуаций для игрока А:

1) не менее количества столбцов матрицы выигрышей и не более числа всех её элементов

2) не менее количества строк матрицы выигрышей и не более числа всех её элементов

3) больше количества столбцов матрицы выигрышей и не более числа всех её элементов

4) больше количества строк матрицы выигрышей и не более числа всех её элементов.

8. Требуется найти решение матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Установите верную последовательность результатов нахождения верхней цены игры, нижней цены игры, седловой точки, цены игры (решения матричной игры) в указанном порядке

I. $\beta = minmax = min\{2, 1, 0\} = 0$

II. (A_3, B_3)

III. a_{33}=0

IV. $\alpha = maxmin = max\{-2, -1, 0\} = 0$

9. Игра, в которой интересы двух игроков строго противоположны, т.е. выигрыш одного есть проигрыш другого, называются _______________.

10. Найти все максиминные и минимаксные стратегии игроков, нижнюю и верхнюю цену игры. Указать все ситуации равновесия и решение игры.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

№ 1. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

1 способ

$\Delta = -2\cdot 2\cdot 3 + 6\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 0 - (-1)\cdot 6\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot(-2) = -3$.

2 способ

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta=-2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\cdot(6+1) - 6\cdot(-3) + 1\cdot(-1) = 3.$$

№ 2. Найти матрицу, обратную матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Вычислим $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow$$ матрица A имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&0\\3&2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4.$$

3. Заменим все элементы матрицы A на их алгебраические дополнения и транспонируем полученную матрицу, получим

$$\begin{pmatrix}1&-4&2\\-5&2&-1\\7&-1&-4\end{pmatrix}.$$

4. Разделим все элементы полученной матрицы на $|A|=-9$, получим A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}\\\frac{5}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{-7}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

№ 3. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2=-6,\\3x_1+2x_2+x_3=3,\\x_1+3x_2+2x_3=0.\end{cases}$

Решение:

1 способ

Запишем систему в виде $\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$,

то есть в виде $A\cdot X=B$,

где $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$,

тогда $X=A^{-1}B$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 способ

$x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ – формулы Крамера, где i =1, 2, 3.

$\Delta=-9$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-18,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=36,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-45;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-4,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=5.$$

3 способ

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-6, \\ x_2+2x_3=6, \\ 9x_3=45. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 2x_2, \\ x_2 = 6 - 2x_3, \\ x_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -4, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ:
$x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 5$.

№ 4. Найти $\vec{b} = 4\vec{a}_1,\ \vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{d} = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2,$

если $\vec{a}_1(-2;1;0)$ и $\vec{a}_2(1;4;-3)$.

Решение:

$\vec{b} = 4\vec{a}_1,\ \vec{a}_1(-2;1;0) \Rightarrow \vec{b}(4\cdot(-2);\ 4\cdot 1;\ 4\cdot 0) = \vec{b}(-8;\ 4;\ 0);$

$\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{a}_1(-2;1;0),\ \vec{a}_2(1;4;-3) \Rightarrow \vec{c}\ (-2+1;\ 1+4;\ 0+(-3)) \Rightarrow \vec{c}\,(-1;\ 5;-3);$

$\vec{d} = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2, \vec{a}_1(-2;1;0), \vec{a}_2(1;4;-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{d}\ (-2\cdot(-2)+3\cdot 1;\ -2\cdot 1+3\cdot 4;\ -2\cdot 0+3\cdot(-3)) \Rightarrow \vec{d}\ (7;\ 10;-9).$

№ 5. При каком m векторы $\vec{a}(3,m)$ и $\vec{b}(-4,2)$ перпендикулярны?

Решение:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0,$ поэтому $\vec{a}\,\vec{b} = 3\cdot(-4) + m\cdot 2 = 0 \Rightarrow m = 6.$

№ 5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-2,1,0)$ и $\vec{b}(1,4,-3)$.

Решение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\,(-3;-6;-9)$$

№ 6. Найти объем тетраэдра *ABCD*, площадь грани *ABC* и высоту *DH* тетраэдра, если $\vec{AB}(2,1,1),\ \vec{AC}(2,3,2), \vec{AD}(3,3,4)$.

Решение:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}\text{ (кв. ед.).}$$

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=7\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 7=\frac{7}{6}\text{ (куб. ед.).}$$

С другой стороны, $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot DH\Rightarrow$

$$\Rightarrow DH=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{6\sqrt{21}}=\frac{7}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{3}\text{ (ед.).}$$

№ 7. Составить различные уравнения прямой p на плоскости, проходящей через точки $M_1(-4;2)$ и $M_2(5;1)$.

Решение:

1) Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t.\end{cases}$

Имеем: $\begin{cases}x=-4+(5-(-4)t,\\ y=2+(1-2)t;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4+9t,\\ y=2-t.\end{cases}$

2) Выражая параметр t из параметрических уравнений прямой и приравнивая получающиеся выражения, приходим к каноническому уравнению прямой:

$$\frac{x+4}{9}=\frac{y-2}{-1}.$$

Заметим, что $\vec{a}(9;-1)$ – направляющий вектор прямой p.

3) Выразим y из канонического уравнения прямой и получим уравнение прямой p с угловым коэффициентом:

$$y-2=-\frac{1}{9}(x+4)\Rightarrow\ y=-\frac{1}{9}x-\frac{4}{9}+2\Rightarrow\ y=-\frac{1}{9}x+\frac{14}{9}.$$

4) Перенесем в предыдущем уравнении прямой все в одну сторону равенства:

$$\frac{1}{9}x + y - \frac{14}{9} = 0.$$

Получили общее уравнение прямой. Его можно также записать в виде:

$$x + 9y - 14 = 0.$$

Если прямая задана в п.д.с.к., то $\vec{n}(1;9)$ – нормальный вектор этой прямой.

5) Из общего уравнения прямой можно получить уравнение прямой "в отрезках".

$$x + 9y = 14 \Rightarrow \frac{x}{14} + \frac{9}{14}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{14} + \frac{y}{14/9}y = 1.$$

Прямая р пересекает координатные оси в точках $A(14;0)$ и $B(0;14/9)$.

№ 8. Составить общее уравнение плоскости *π*, если *π* проходит через точки $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$ и $M_3(1;1;4)$.

Решение:

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому для плоскости *π* можем записать:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первой строке, имеем:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1) - 2(y+1) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y + z - 5 = 0.$$

Итак, общее уравнение плоскости *π:*

$$2x - y + z - 5 = 0.$$

№ 9. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

1) 1 января 2023 года – среда
2) Семеро одного не ждут

3) x+y – нечетное число
4) Сумма нечетных чисел – четное число

Решение:

1) Указанное предложение является высказыванием, причем ложным, так как 1 января 2023 года – воскресение.
2) Указанное предложение не является высказыванием, не ясно, о каких конкретно семерых идет речь.
3) Указанное предложение не является высказыванием, так как не сказано, что подразумевается под x и y.
4) Указанное предложение является высказыванием, причем истинным. Сумма нечетных чисел действительно является четным числом.

№ 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение:

Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}=3^1=3$.

№ 11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение:

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^\infty\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}} = e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}} = \frac{e^{-1}}{e^{3}} = e^{-4}.$$

№ 12. Найти производную от функции $y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение:

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5)\cdot(x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

№ 13. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}$.

Решение:

Логарифмируем обе части равенства по основанию e

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x^2 + x - 2) + \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{5}\ln(x^4 - 1).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1)+30x(x^2-1)(x+2)-12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{10x^4+15x^3+15x^2+15x+5+30x^4+60x^3-30x^2-60x-12x^4-24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}\cdot\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x+2)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

№ 14. Найти интегралы:

а) $\int\frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx$; б) $\int\frac{2\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$.

Решение.

а) $\int\frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx = \int\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx = \int\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx =$

$= \int(x+2\sqrt{x}+4)\,dx = \int x dx + 2\int x^{1/2}dx + 4\int dx =$

$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$

б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx =$

$= \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx = 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= 2 \cdot (-\mathrm{ctg}x) + 3 \cdot \mathrm{tg}x + C = 3 \cdot \mathrm{tg}x - 2 \cdot \mathrm{ctg}x + C$.

№ 15. Найти интегралы:

а) $\int \sin(7x + 2)dx$; б) $\int 5^{7x-3} dx$.

Решение.

Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x + 2)dx = \frac{1}{7} \cdot \int \sin(7x + 2)d(7x + 2) = -\frac{1}{7} \cdot \cos(7x + 2) + C$

б) $\int 5^{7x-3} dx = \frac{1}{7} \int 5^{7x-3} d(7x - 3) = \frac{1}{7} \cdot \frac{5^{7x-3}}{\ln 5} + C$

№ 16. Найти интеграл $\int x \cdot e^{-x^2} dx$.

Решение:

Сделаем замену переменной полагая $t = -x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t = -x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)' dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\frac{1}{2} dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2 dx} = \int e^{-x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

№ 17. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение:

Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1+x,\ x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt.$ Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0,\quad t^2 - 1 = 0,\quad t = 1;$ при $x = 15,$ $15 = t^2 - 1;\ t^2 = 16,\quad t = 4.$

Получим

$$\int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int\limits_1^4 (2t^2 - 2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

№ 18. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение:

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x\Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{array} \right| = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - 2\int\limits_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2\cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2\sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

№ 19. Вычислить площадь (рис.1), заключенную внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение:

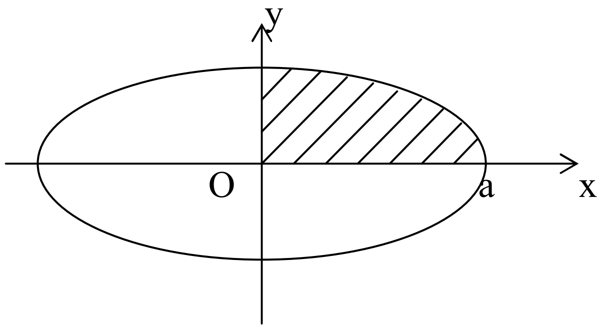


Рис. 1. Площадь эллипса

Уравнение части эллипса, удовлетворяющей условию x≥0, y≥0 можно записать в виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь четверти эллипса равна

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi ab}{4}.$$

Полная площадь эллипса равна S=πab.

№ 20. Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [y = const] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y)\cdot(3x - 4y)' =$$

$$= -\sin(3x - 4y)\cdot(3\cdot x' - 0) = -3\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [x = const] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y)\cdot(3x - 4y)' =$$

$$= -\sin(3x - 4y)\cdot(0 - 4\cdot y') = 4\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [y = const] = (-3\sin(3x - 4y))' = -3\cos(3x - 4y)\cdot(3x - 4y)' =$$

$$= -3\cos(3x - 4y)\cdot(3\cdot x' - 0) = -9\cos(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [x = const] = (-3\sin(3x-4y))' = -3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$
$$= -3\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y') = 12\cos(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = [x = const] = (4\sin(3x-4y))' = 4\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$
$$= 4\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y') = -16\cos(3x-4y).$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

8.1 Основная учебная литература

1. Балдин, К. В. Высшая математика : учебник: / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; под общ.ред. К. В. Балдина. – 3-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2021. – 360 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79497 (дата обращения 22.09.2023). – Режим доступа : по подписке. - Текст : электронный.
2. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва: Физматлит, 2009. – 224 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3).– URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82797 (дата обращения 15.07.2023). – Режим доступа : по подписке. – Текст : электронный.
3. Мышлявцева М.Д. Интегральное исчисление функций нескольких переменных : учебное пособие / Мышлявцева М.Д., Соколовский М.Н., Троценко Г.А.. — Омск : Омский государственный технический университет, 2022. — 160 с. — URL: https://www.iprbookshop.ru/131198.html (дата обращения 22.09.2023). – Режим доступа : по подписке. – Текст : электронный.
4. Мышлявцева, М. Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / М. Д. Мышлявцева, Г. А. Троценко ; ред. Е. В. Осикина. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2021. – 145 с. –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=700631 (дата обращения 22.09.2023). – Режим доступа : по подписке. – Текст : электронный.

8.2 Дополнительная учебная литература

5. Магазинников, Л.И. Высшая математика: дифференциальное исчисление : учебное пособие/ Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников. – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481033 (дата обращения 02.09.2023) . − Режим доступа : по подписке. − Текст: электронный.
6. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник: в 2 томах / А.А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Том 1. – 544 с. –URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=572287 (дата обращения 10.09.2023). – Режим доступа : по подписке. – Текст: электронный.
7. Бугров, Я.С. Сборник задач по высшей математике : учебное пособие / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 4-е изд. – Москва : Физматлит, 2001. – 301 с. –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67851 (дата обращения 11.03.2023) . - Режим доступа : по подписке. – Текст : электронный.
8. Математика для гуманитариев : учебник / под ред. К. В. Балдина. - 2-е изд. - М. : Дашков и К, 2009. - 512 с. - Текст : непосредственный.
9. Захаров, А.В. Теория игр в общественных науках: учебник / Савватеев, А.В.

– 2-е изд., исправл. – М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2019. – 303 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=439990 (дата обращения 10.09.2023) Режим доступа : по подписке. – Текст : электронный.

10. Шевцова, Татьяна Васильевна. Аналитическая геометрия: учебное пособие для студентов 1-го курса технических направлений очного и заочного отделений / Т. В. Шевцова ; Юго-Зап. гос. ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2021. - 112 с. – Текст : непосредственный.
11. Микони, С.В. Дискретная математика для бакалавра: множжества, отношения, функции, графы: учебное пособие / С.В. Микони. – Санкт-Петербург: Лань, 2012. – 192 с. – Текст : непосредственный.

8.3 Перечень методических указаний

1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений : индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост.: Е. А. Бойцова, Т. В. Шевцова. - Курск: ЮЗГУ, 2016. – 26 с. – Текст : электронный
2. Высшая математика: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 39.03.01 Социология, направленность (профиль) «Экономическая социология» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: К.В.Жилина, Е.А.Панина – Курск, 2021. – 66с. – Текст : электронный.
3. Высшая математика: методические рекомендации для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 39.03.01 Социология, направленность (профиль) «Экономическая социология» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: К.В.Жилина – Курск, 2021. – 11с. – Текст : электронный.