

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 15.05.2025 01:12:39

Уникальный Программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

О.Г.Локтионова

2023 г.



## СТАТИКА

Методические указания для самостоятельных работ  
по разделам дисциплин "Теоретическая механика",  
«Механика», "Прикладная механика"

Курск 2023 г

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Статика: методические указания для самостоятельных работ по разделам дисциплин "Теоретическая механика", «Механика», "Прикладная механика"/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун. Курск, 2023. 79 с., ил. 22, табл. 7. Библиогр.: с. 77.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Статика» курсов «Теоретическая механика», «Механика», "Прикладная механика". Предложены варианты расчетных заданий для самостоятельного решения. Задания соответствуют программам дисциплин «Теоретическая механика», «Механика», "Прикладная механика" для машиностроительных и строительных специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1\16

Усл.печ.л. 4,6.Уч.изд.л.4,1. Тираж 50 экз.Заказ.534. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Статика» курсов «Теоретическая механика» «Механика», «Прикладная механика».

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

## **Требования к решению и оформлению расчетно-графических работ**

1. Не следует приступать к выполнению расчетно-графических работ, не изучив соответствующего раздела курса. Если студент слабо усвоил основные положения теории и не до конца разобрался в приведенных примерах, то при выполнении работ могут возникнуть большие затруднения. Несамостоятельно выполненное задание не даёт возможность преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену или зачету.

2. Не рекомендуется приносить преподавателю сразу несколько выполненных заданий. Это не даёт рецензенту возможность своевременно указать студенту на допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

3. Расчетно-графическая работа выполняется на листах формата А4. Титульный лист заполняется в соответствии с Приложением 1. Задания, полученные студентом, должны быть выполнены подробно, аккуратно. Зачеркивания и исправления текста недопустимы. Формулировки заданий должны быть приведены полностью. Сокращения не допускаются. При необходимости приводится список литературы.

Размеры полей страниц работы: - левое поле - 30 мм; - правое поле - 15 мм; - верхнее и нижнее поле - 20 мм.

Если текст работы набран на компьютере, то при оформлении следует придерживаться требований, приведенных выше, а так же: шрифт Times New Roman размера 14 pt с межстрочным интервалом 1,5 и абзацным отступом 1,25 см.

4. Если расчетно-графическая работа выполняется без титульного листа, то при оформлении, работа должна заполняться в соответствии с Приложением 2 и содержать: ФИО студента, номер группы и/или название факультета, номер варианта, название работы.

5. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и

пересказ учебника: студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж.

6. Необходимо указать размерность всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

7. В возвращенной расчетно-графической работе студент должен исправить все отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. В случае требования преподавателя-рецензента следует в кратчайший срок передать ему выполненные на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

# 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

## С-1. Определение реакций опор твердого тела

### Краткие теоретические положения

#### 1. Понятие о силе. Распределенные и сосредоточенные силы

**Сила** – это мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия.

Действие силы на рассматриваемое тело определяется тремя факторами: *точкой приложения, направлением, численным значением*. В Международной системе единиц (СИ) в качестве единицы силы используется *ньютон [Н]*.

Совокупность сил, приложенных к телу, называют **системой сил**. Если систему сил можно заменить одной силой так, что при этом движение тела не изменится, то такая сила называется **равнодействующей** системы сил.

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки объема или данной части поверхности, называются **распределенными**. При решении задач статики распределенную нагрузку  $q$  принято заменять сосредоточенной силой  $\bar{Q}$ . Случаи замены сосредоточенной силой равномерно распределенной по длине нагрузки представлены на рисунке 1.1 *а, б, в*.

Величину  $q$  называют **интенсивностью распределенной нагрузки**. Она измеряется в *ньютонах на метр [Н/м]*.

Графическое изображение изменения интенсивности нагрузки  $q$  в механике принято называть *эпюрой распределения нагрузки*. Для рассмотренных случаев по эпюре распределения нагрузки  $q$  величину сосредоточенной силы  $\bar{Q}$ , заменяющей нагрузку, и положение линии её действия определяют в соответствии с простым правилом: *величина силы равна площади эпюры, изображающей нагрузку, линия действия силы проходит через центр тяжести площади эпюры*.

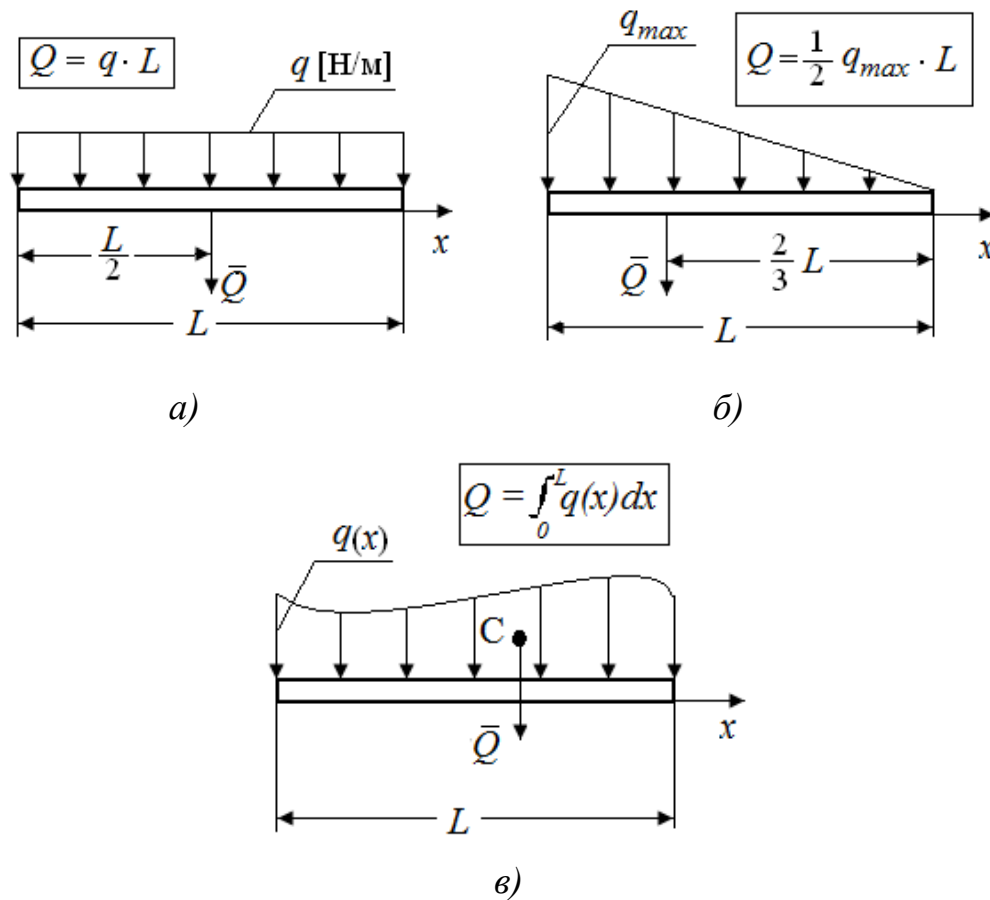


Рис. 1.1. Виды распределенных нагрузок

## 2. Проекция вектора на координатные оси

**Проекцией силы на ось** называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы (рис. 1.2):

$$F_x = AB_l = ab.$$

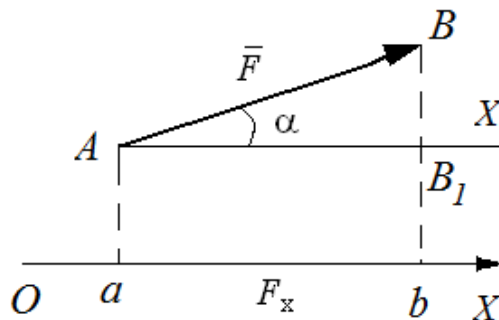


Рис. 1.2. Проекция силы на ось

Из чертежа видно, что  $F_x = F \cos \alpha$ , следовательно, проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

$F_x > 0$ , если  $\alpha$  – острый;  $F_x = 0$ , если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  $F_x < 0$ , если  $\alpha$  – тупой (рис.1.3).

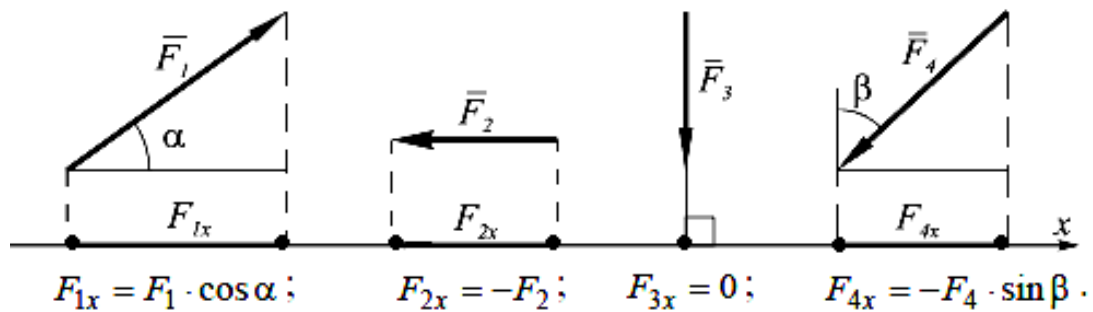


Рис. 1.3. Случаи нахождения проекций сил на ось координат

### 3 Момент силы относительно точки

**Моментом силы относительно точки  $O$**  называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через точку  $O$  и линию действия силы в ту сторону, откуда сила видна направленной относительно точки  $O$  против хода часовой стрелки (рис. 1.4).

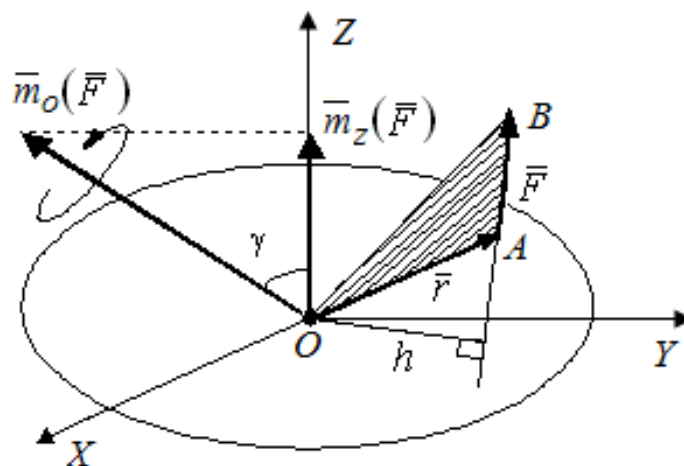


Рис. 1.4. Момент силы относительно центра и оси



Момент силы относительно центра

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы;  $\vec{F}$  – сила.

Алгебраический момент силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо, т.е.

$$m_0(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (2)$$

При этом момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра против часовой стрелки, а отрицательным – когда по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы пересекает эту точку.

В случаях, когда нахождение плеча затруднено, для вычисления момента силы относительно точки целесообразно использовать *теорему Вариньона*: если система сил имеет равнодействующую  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ , то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки  $\vec{m}_0(\vec{R}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_i)$

Проиллюстрируем применение теоремы Вариньона на примере (рис. 1.5).

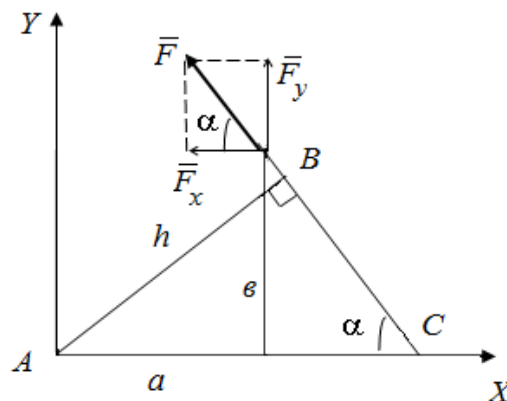


Рис. 1.5. Пример использования теоремы Вариньона

Момент силы  $F$  относительно точки  $A$ :

$$m_A(\vec{F}) = F \cdot h. \quad (3)$$

$$\text{Из } \triangle ABC \ h=AB=AC \cdot \sin\alpha = \left( a + \frac{b}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \sin\alpha = a \sin\alpha + b \cos\alpha;$$

$$m_A(\bar{F}) = Fa \sin\alpha + Fb \cos\alpha, \quad (4)$$

с другой стороны, по теореме Вариньона

$$m_A(\bar{F}) = m_A(F_X) + m_A(F_Y), \quad (5)$$

где  $F_X = F \cos\alpha$ ;  $F_Y = F \sin\alpha$ .

Окончательно получим

$$m_A(\bar{F}) = Fa \cos\alpha + Fb \sin\alpha. \quad (6)$$

#### 4 Пара сил и ее момент

**Парой сил** называется система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны (рис. 1.6). Расстояние между линиями действия этих сил называется плечом пары.

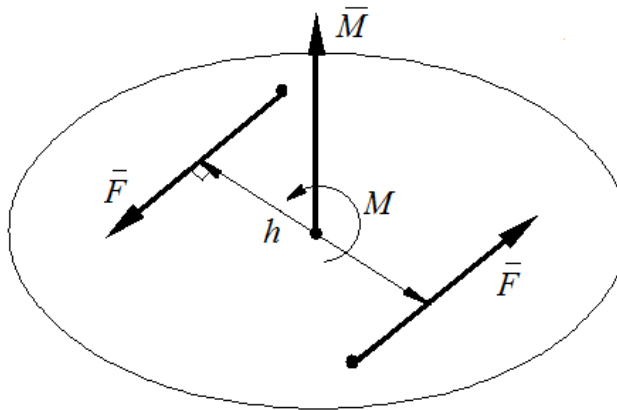


Рис. 1.6. Пара сил

Действие пары сил на тело характеризуется моментом. Вектор момента  $\bar{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежит пара, и направлен в ту сторону, откуда вращение под действием пары сил видно происходящим против часовой стрелки, а его модуль

$$M = \pm F h. \quad (7)$$

Пары сил, действующие на тело, можно складывать, а систему пар можно заменить одной равнодействующей парой, момент которой равен геометрической сумме векторов моментов всех пар системы.

Знак момента пары определяется по правилу: если пара сил стремится повернуть тело против часовой стрелки, то знак момента положительный, а если по часовой стрелке – отрицательный.

## 5. Механические связи и их реакции

Все силы, действующие на тела, делятся на активные и силы реакций механических связей.

Под **активными** понимаются силы, побуждающие тела к движению (например сила тяжести  $\vec{G}$ ).

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется *свободным*. В противном случае тело считается *несвободным*. Все, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называется **механической связью**.

Сила, с которой связь действует на тело, называется **реакцией связи**.

Рассмотрим направление реакций некоторых основных видов связей плоской системы сил (рис.1.7).

1. Гладкая плоскость или опора (см. рис. 1.7, а, б, в). Реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания.

2. Шарнирно-неподвижная опора (см. рис. 1.7, г). Реакция раскладывается на две составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ .

3. Шарнирно-подвижная опора (см. рис. 1.7, д). Реакция  $\bar{R}_A$  перпендикулярна опорной поверхности.

4. Жесткая заделка (см. рис. 1.7, е). Реакция раскладывается на две составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  и реактивный момент  $M_A$ .

5. Нить (см. рис. 1.7, ж). Реакция нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

6. Стержневая опора (см. рис. 1.7, з). Реакция стержня  $\bar{S}$  направлена вдоль стержня.

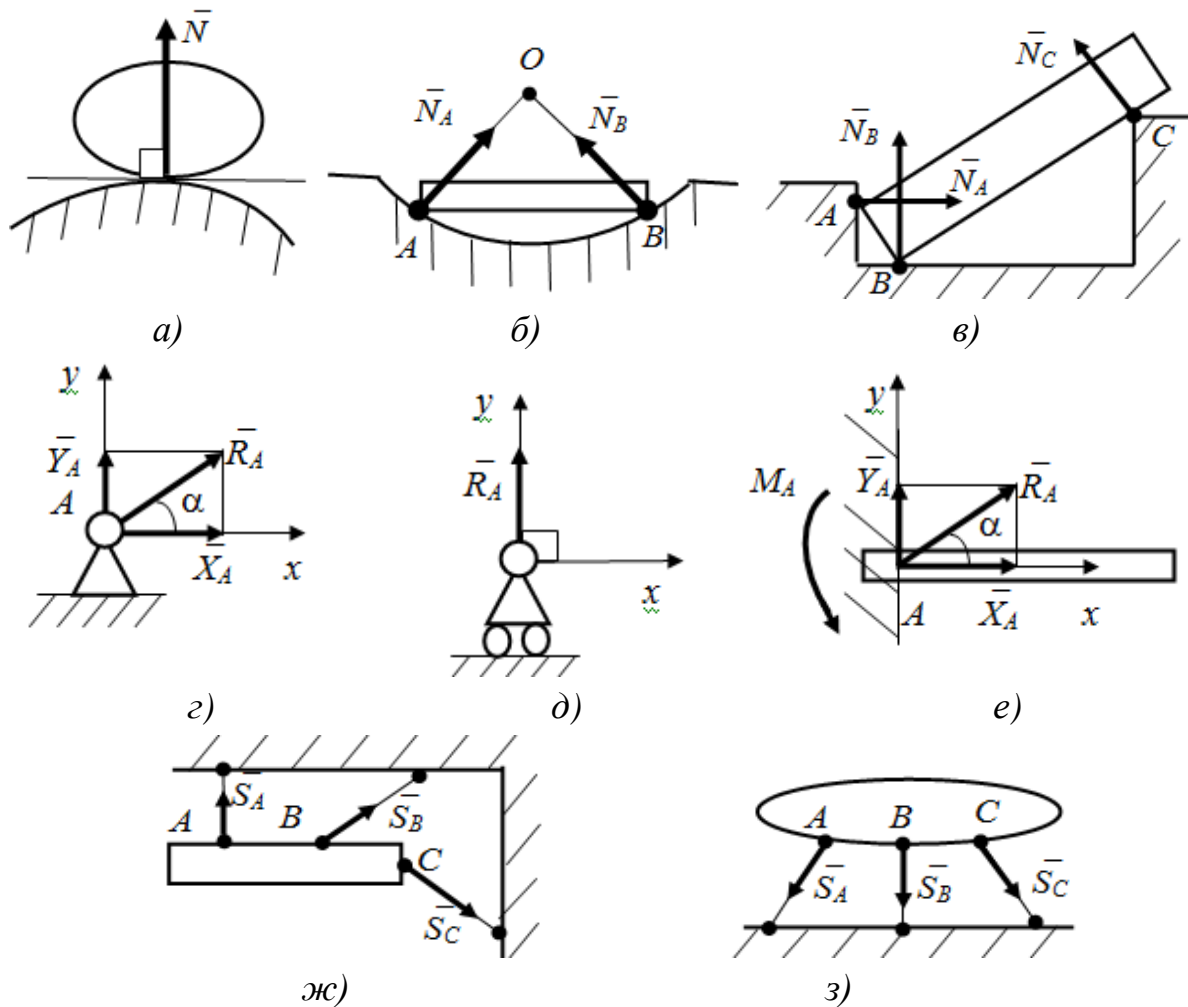


Рис. 1.7. Виды связей для плоской системы сил:

*а, б, в* – гладкая поверхность; *г* – шарнирно-неподвижная опора;  
*д* – шарнирно-подвижная опора; *е* – жесткая заделка;  
*ж* – нить; *з* – стержневая опора

## 6. Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю, т.е.

$$\bar{R} = 0; \bar{M} = 0 \quad (8)$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую координатную ось ( $x$ ,  $y$ ) и алгебраическая сумма моментов этих сил

относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases} \quad (9)$$

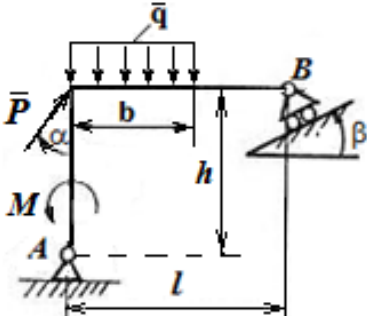
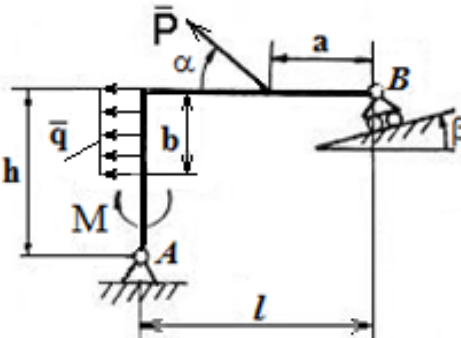
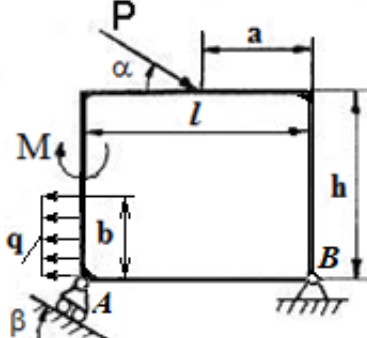
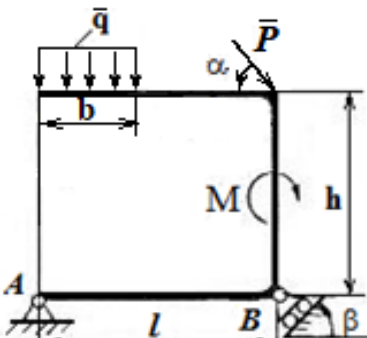
### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое сила? Чем характеризуется действие силы?
2. В каком случае тело будет находиться в равновесии под действием двух сил?
3. Как определить проекцию силы на ось?
4. Как определить момент силы относительно точки?
5. В каких случаях момент силы относительно точки равен нулю?
6. Чему равен момент равнодействующей относительно точки?
7. Какая система сил называется парой сил?
8. Чем характеризуется действие на твердое тело пары сил?
9. В чем заключается принцип освобожденности от связей?
10. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакций известны.
11. Каковы условия равновесия произвольной плоской системы сил?
12. Что такое главный вектор и главный момент системы сил?

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

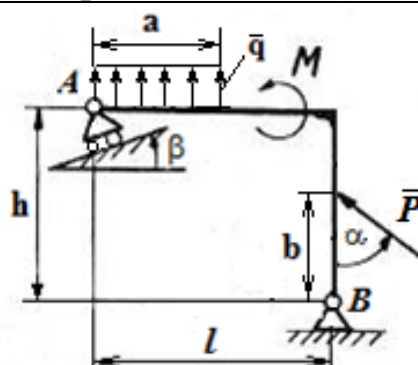
Для рам, схемы которых приведены в таблице 1.1, рассчитать реакции связей. Выполнить проверку правильности решения.

Таблица 1.1

<p><b><u>Вариант 1</u></b>  <math>P = 18 \text{ Н};</math>  <math>q = 4 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>b = 4 \text{ м}; l = 10 \text{ м};</math>  <math>h = 8 \text{ м}; \alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ.</math></p>	
<p><b><u>Вариант 2</u></b>  <math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q = 3 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 3 \text{ м}; b = 6 \text{ м};</math>  <math>l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 45^\circ; \beta = 30^\circ.</math></p>	
<p><b><u>Вариант 3</u></b>  <math>P = 15 \text{ Н};</math>  <math>q = 6 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 3 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math></p>	
<p><b><u>Вариант 4</u></b>  <math>P = 25 \text{ Н};</math>  <math>q = 7 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 25 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>b = 4 \text{ м}; l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math></p>	

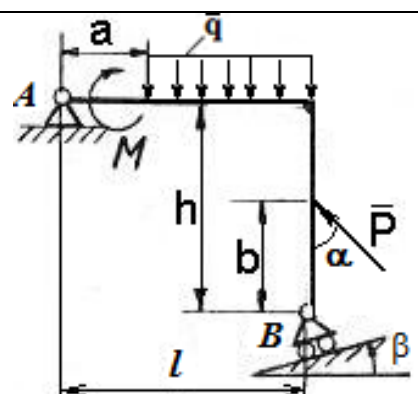
### **Вариант 5**

$P = 30 \text{ Н};$   
 $q = 4 \text{ Н/м};$   
 $M = 15 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $a = 3 \text{ м}; b = 4 \text{ м};$   
 $l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 90^\circ; \beta = 60^\circ.$



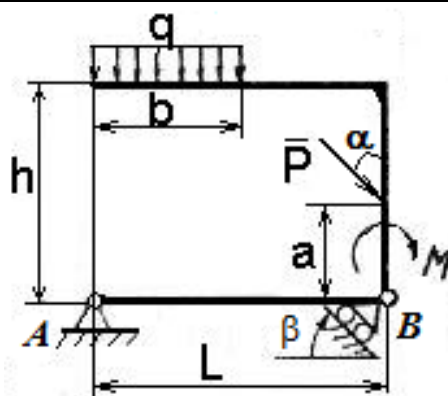
### **Вариант 6**

$P = 10 \text{ Н};$   
 $q = 5 \text{ Н/м};$   
 $M = 15 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $a = 3 \text{ м}; b = 4 \text{ м};$   
 $l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.$



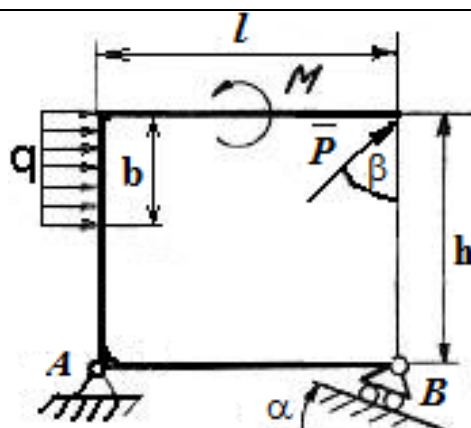
### **Вариант 7**

$P = 14 \text{ Н};$   
 $q = 8 \text{ Н/м};$   
 $M = 25 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $a = 3 \text{ м}; b = 4 \text{ м};$   
 $l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 60^\circ; \beta = 45^\circ.$



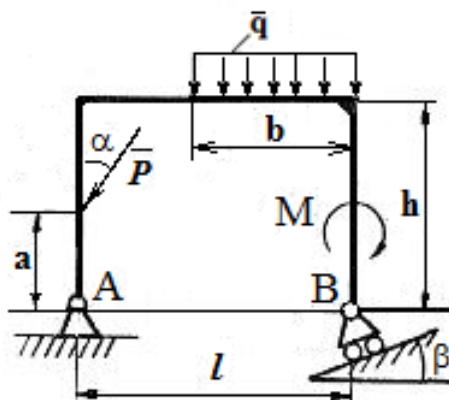
### **Вариант 8**

$P = 20 \text{ Н};$   
 $q = 10 \text{ Н/м};$   
 $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $b = 4 \text{ м}; l = 10 \text{ м};$   
 $h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 30^\circ; \beta = 30^\circ.$



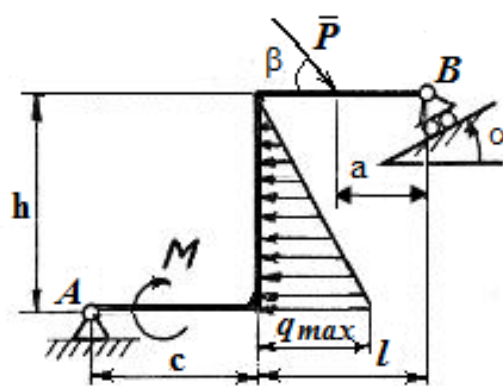
### Вариант 9

$P = 30 \text{ Н};$   
 $q = 15 \text{ Н/м};$   
 $M = 25 \text{ Н·м};$   
 $a = 4 \text{ м}; b = 5 \text{ м};$   
 $l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 30^\circ; \beta = 30^\circ.$



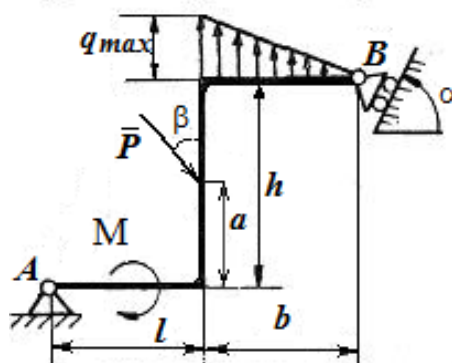
### Вариант 10

$P = 30 \text{ Н};$   
 $q_{\max} = 15 \text{ Н/м};$   
 $M = 25 \text{ Н·м};$   
 $a = 3 \text{ м}; c = 5 \text{ м};$   
 $l = 5 \text{ м}; h = 9 \text{ м};$   
 $\alpha = 45^\circ; \beta = 30^\circ.$



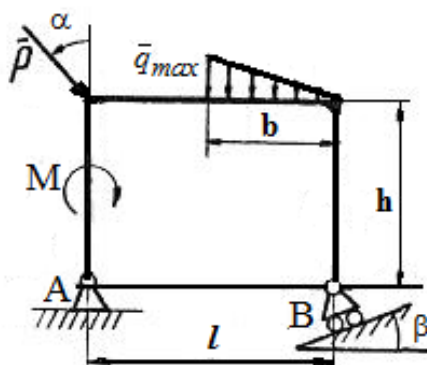
### Вариант 11

$P = 25 \text{ Н};$   
 $q_{\max} = 8 \text{ Н/м};$   
 $M = 20 \text{ Н·м};$   
 $a = 4 \text{ м}; b = 6 \text{ м};$   
 $l = 5 \text{ м}; h = 9 \text{ м};$   
 $\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.$

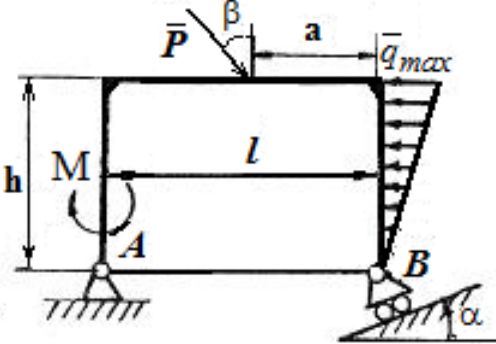
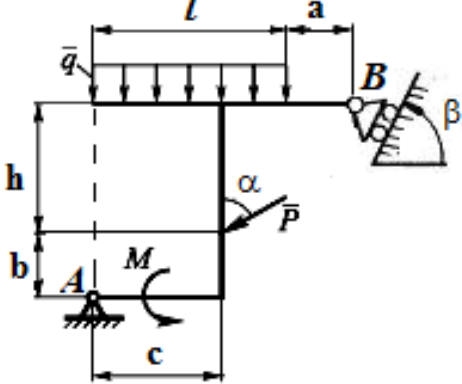
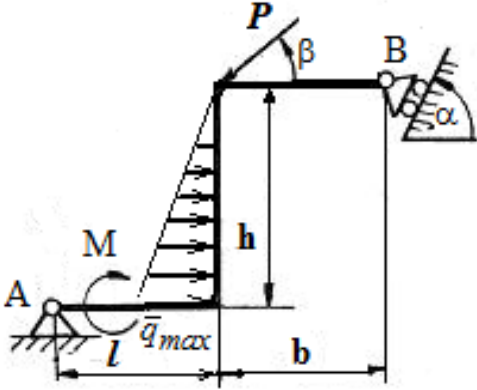
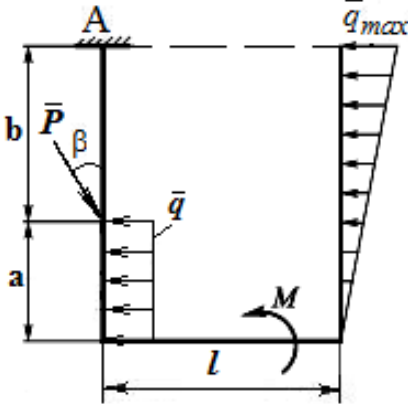


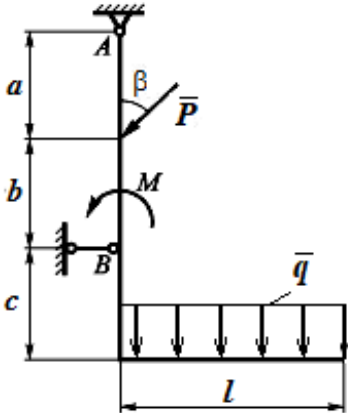
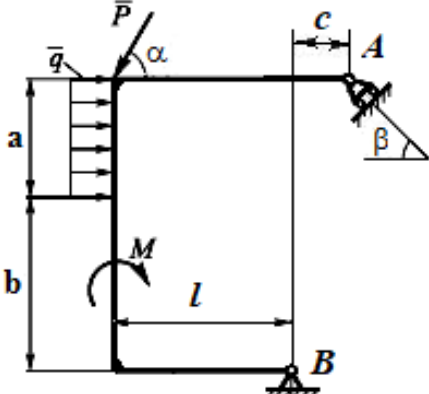
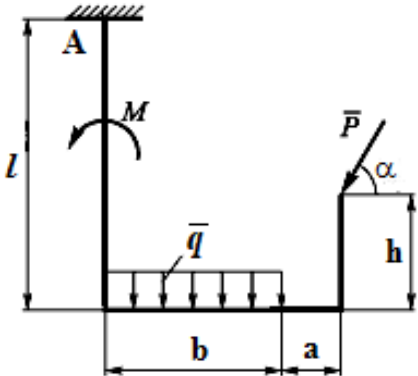
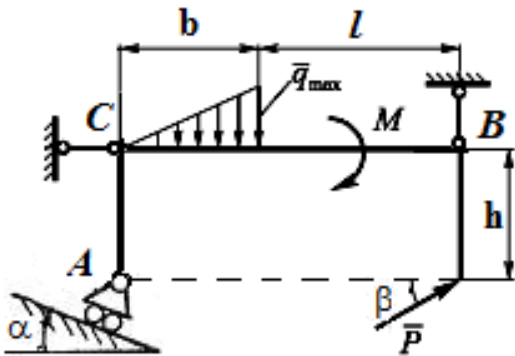
### Вариант 12

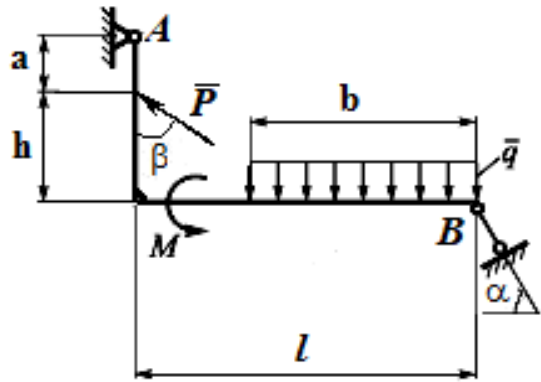
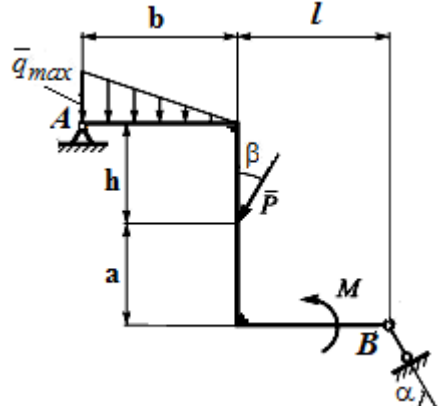
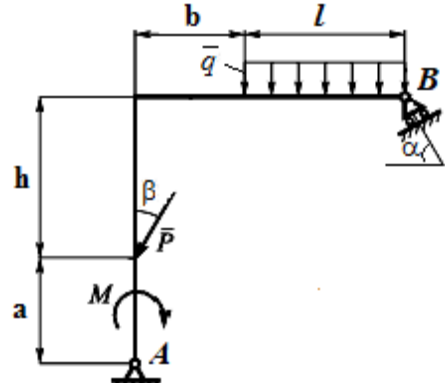
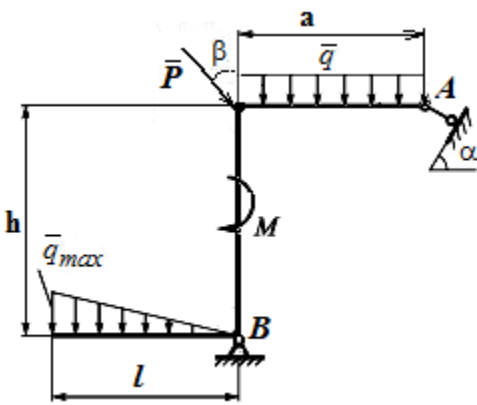
$P = 25 \text{ Н};$   
 $q_{\max} = 4 \text{ Н/м};$   
 $M = 10 \text{ Н·м};$   
 $b = 6 \text{ м};$   
 $l = 10 \text{ м}; h = 8 \text{ м};$   
 $\alpha = 30^\circ; \beta = 30^\circ.$

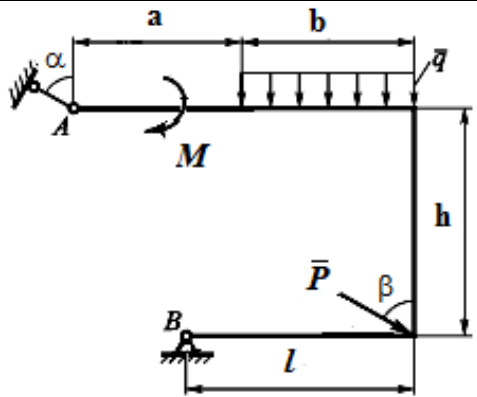
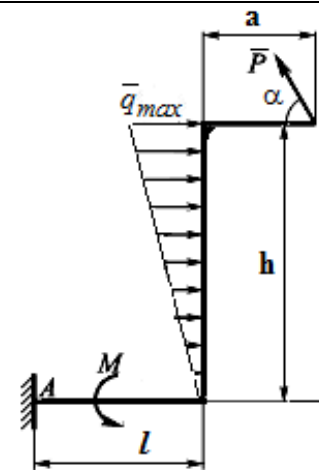
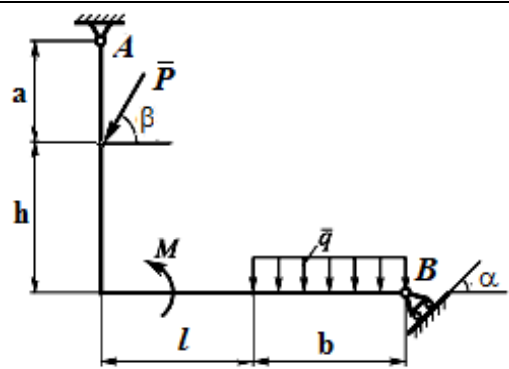
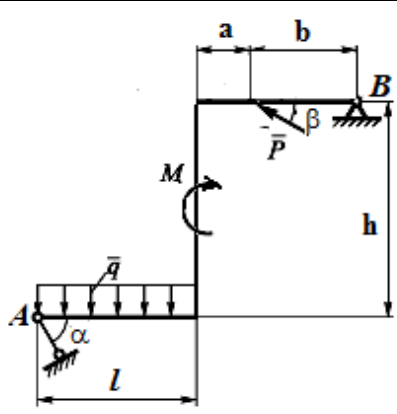


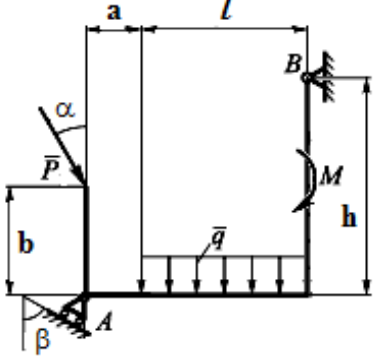
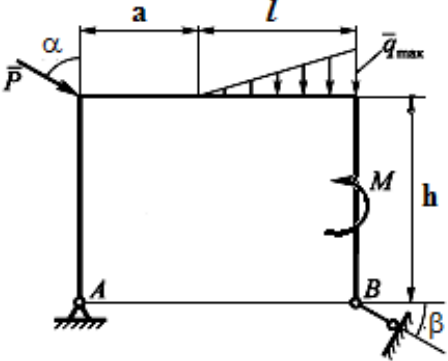
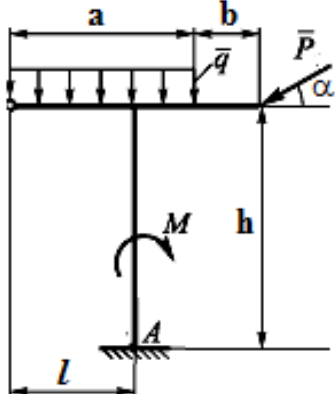
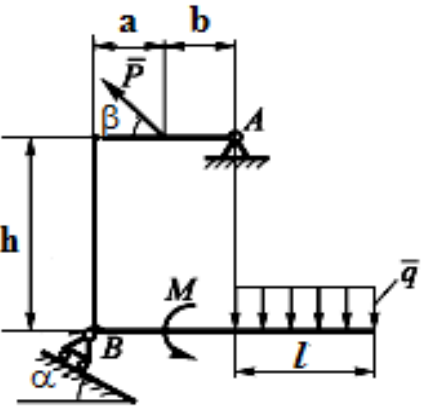


<p><b>Вариант 13</b></p> <p><math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 8 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 35 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 10 \text{ м}; h = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 14</b></p> <p><math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 1 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; c = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 9 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 15</b></p> <p><math>P = 5 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 8 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>b = 9 \text{ м};</math>  <math>l = 5 \text{ м}; h = 9 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 45^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 16</b></p> <p><math>P = 15 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 11 \text{ Н/м};</math>  <math>q = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 13 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 2 \text{ м}; b = 9 \text{ м};</math>  <math>l = 5 \text{ м}; \beta = 60^\circ.</math></p>	

<p><b>Вариант 17</b></p> <p> <math>P = 15 \text{ Н};</math>  <math>q = 12 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 3 \text{ м}; b = 3 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; c = 3 \text{ м};</math>  <math>\beta = 60^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 18</b></p> <p> <math>P = 14 \text{ Н};</math>  <math>q = 9 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 22 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 6 \text{ м};</math>  <math>l = 5 \text{ м}; c = 3 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 19</b></p> <p> <math>P = 20 \text{ Н};</math>  <math>q = 8 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 6 \text{ м};</math>  <math>l = 10 \text{ м}; h = 5 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 20</b></p> <p> <math>P = 8 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>b = 6 \text{ м}; h = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math> </p>	

<p><b>Вариант 21</b></p> <p><math>P = 8 \text{ Н};</math>  <math>q = 15 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 28 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 6 \text{ м};</math>  <math>l = 10 \text{ м}; h = 5 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 22</b></p> <p><math>P = 14 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 14 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 6 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 4 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 23</b></p> <p><math>P = 28 \text{ Н};</math>  <math>q = 20 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 21 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 5 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 45^\circ; \beta = 30^\circ.</math></p>	
<p><b>Вариант 24</b></p> <p><math>P = 14 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 30 \text{ Н/м}; q = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 34 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 5 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; \alpha = 60^\circ;</math>  <math>\beta = 30^\circ.</math></p>	

<p><b>Вариант 25</b></p> <p> <math>P = 15 \text{ Н};</math>  <math>q = 20 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 14 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 26</b></p> <p> <math>P = 13 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; l = 6 \text{ м};</math>  <math>h = 9 \text{ м}; \alpha = 60^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 27</b></p> <p> <math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q = 20 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 5 \text{ м}; h = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ.</math> </p>	
<p><b>Вариант 28</b></p> <p> <math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q = 12 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 20 \text{ Н·м};</math>  <math>a = 2 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math> </p>	

<p><b><u>Вариант 29</u></b></p> <p> <math>P = 14 \text{ Н};</math>  <math>q = 16 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 22 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 2 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ.</math> </p>	
<p><b><u>Вариант 30</u></b></p> <p> <math>P = 20 \text{ Н};</math>  <math>q_{\max} = 10 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 2 \text{ м}; l = 6 \text{ м};</math>  <math>h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ.</math> </p>	
<p><b><u>Вариант 31</u></b></p> <p> <math>P = 10 \text{ Н};</math>  <math>q = 16 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 12 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 6 \text{ м}; b = 3 \text{ м};</math>  <math>l = 4 \text{ м}; h = 8 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ.</math> </p>	
<p><b><u>Вариант 32</u></b></p> <p> <math>P = 9 \text{ Н};</math>  <math>q = 6 \text{ Н/м};</math>  <math>M = 9 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>a = 4 \text{ м}; b = 4 \text{ м};</math>  <math>l = 6 \text{ м}; h = 6 \text{ м};</math>  <math>\alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ.</math> </p>	

## Примеры выполнения заданий по теме «Определение реакций опор твердого тела».

### Пример 1.

Жесткая рама (рис. 1.8, а) закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикреплена к шарнирной опоре на катках.

На раму действуют пара сил с моментом  $M=5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , горизонтальная сила  $P_1=4 \text{ Н}$  и сила  $P_2 = 5 \text{ Н}$ , расположенная под углом  $\alpha=30^\circ$  горизонтальной оси.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять  $l=4 \text{ м}$ ,  $a = 6 \text{ м}$ ,  $b = 8 \text{ м}$ .

### Решение.

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции. Проведем координатные оси  $X$   $Y$  и изобразим действующие на раму активные силы: сосредоточенные силы  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , а также пара сил с моментом  $M$ . Отбросим связи, заменив их реакциями связей. Подвижную опору заменим вертикальной реакцией  $\bar{R}_B$ , а неподвижную опору  $A$  – горизонтальной  $\bar{X}_A$  и вертикальной  $\bar{Y}_A$ , (рис.1.8, б).

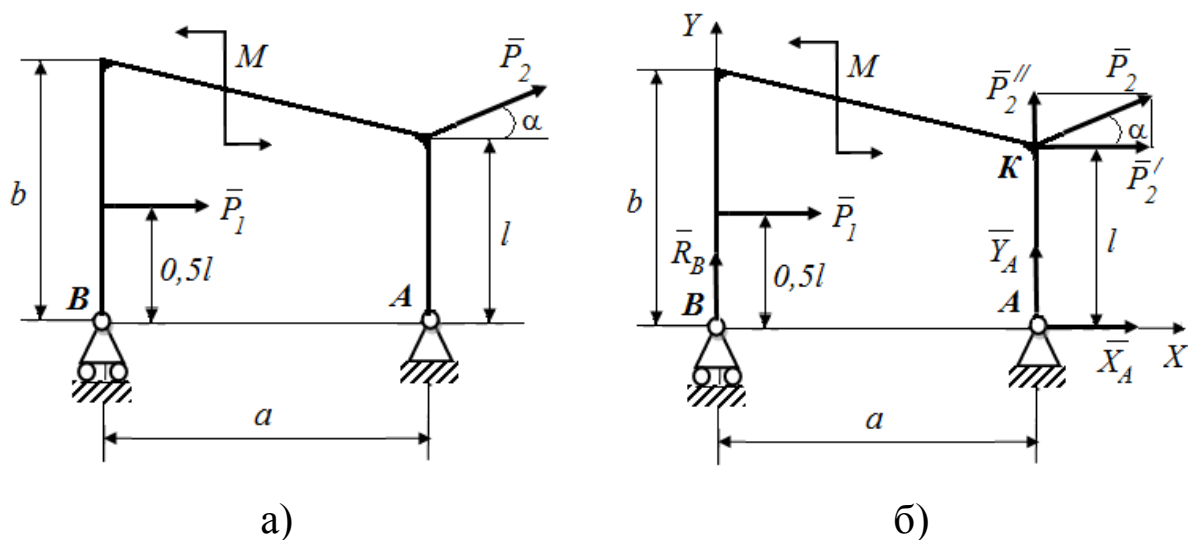


Рис.1.8. Схема рамы: а – исходная, б - расчётная

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\bar{P}$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $\bar{P}$  на составляющие  $\bar{P}'$ ,  $\bar{P}''$ , модули которых  $P' = P \cdot \cos \alpha$ ,  $P'' = P \cdot \sin \alpha$ , и учтем, что  $m_A(\bar{P}) = m_A(\bar{P}') + m_A(\bar{P}'')$ . Тогда получим:

$$\sum \bar{F}_{ix} = 0, \quad X_A + P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum \bar{F}_{iy} = 0, \quad Y_A + P_2 \cdot \sin \alpha + R_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad -P_1 \cdot 0,5l - P_2 \cdot \cos \alpha \cdot l + M - R_B \cdot a = 0 \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и, решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Из уравнения (1) определяем  $X_A = -8,33$  (Н).

Из уравнения (3) определяем  $R_B = -3,4$  (Н).

Из уравнения (2) определяем  $Y_A = 0,9$  (Н).

Отрицательные значения  $X_A$  и  $R_B$  означают, что в действительности они направлены в противоположные стороны.

Полная реакция опоры  $A$  найдется как геометрическая сумма сил  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . По модулю,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,4 \text{ (Н)}.$$

3. Для проверки правильности нахождения реакций связей составим уравнение моментов относительно точки  $K$ :

$$\sum M_K(\bar{F}_i) = 0, \quad X_A \cdot l + M - R_B \cdot a + P_1 \cdot 0,5 \cdot l = 0. \quad (4)$$

Подставляя сюда найденные величины  $X_A$  и  $R_B$ , убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют.

Следует иметь ввиду, что при такой проверке можно не обнаружить ошибок, связанных с неправильным определением проекций или моментов сил, перпендикулярных оси  $AX$ . Поэтому надо

или дополнительно проверить эту часть расчетов, или составить для проверки еще одно уравнение, например уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_K(\bar{F}_i)=0, \quad Y_A \cdot a + M - P_1 \cdot 0,5 \cdot l - P_2 \cdot \cos \alpha \cdot l + P_2 \cdot \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (5)$$

Подставляя сюда найденную из уравнения (2) величину  $Y_A$ , убеждаемся, что она этому уравнению удовлетворяет.

## Пример 2.

Рама, изображенная на рисунке 1.9, а, шарнирно закреплена в точке  $A$ , а в точке  $B$  удерживается в равновесии с помощью стержня. Пренебрегая весом рамы, определить реакции механических связей, если  $q = 1$  Н/м,  $q_{\max} = 2$  Н/м;  $P = 10$  Н;  $M = 5$  Н·м. Размеры конструкции и действующие силовые факторы указаны на рисунке.

## Решение:

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции. Проведем координатные оси  $X$  и  $Y$  и изобразим действующие на раму активные силы: сосредоточенная сила  $\bar{P}$ , равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью  $\bar{q}_1$ , распределенная нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника с максимальной интенсивностью  $\bar{q}_{\max}$ , а также пара сил с моментом  $M$ .

Отбросим связи, заменив их реакциями связей. Неподвижную опору  $A$  – горизонтальной  $\bar{X}_A$  и вертикальной  $\bar{Y}_A$ , реакцию невесомого стержня  $\bar{R}_B$  направляем вдоль стержня.

Распределенные силы заменим их равнодействующими. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $\bar{q}_1$  заменяем силой  $\bar{Q}_1$ , которую прикладываем в центре прямоугольника, изображающего эту нагрузку (рис.1.9, б):

$$Q_1 = q_1 \cdot AD = 1 \cdot 5 = 5 \text{ Н.}$$



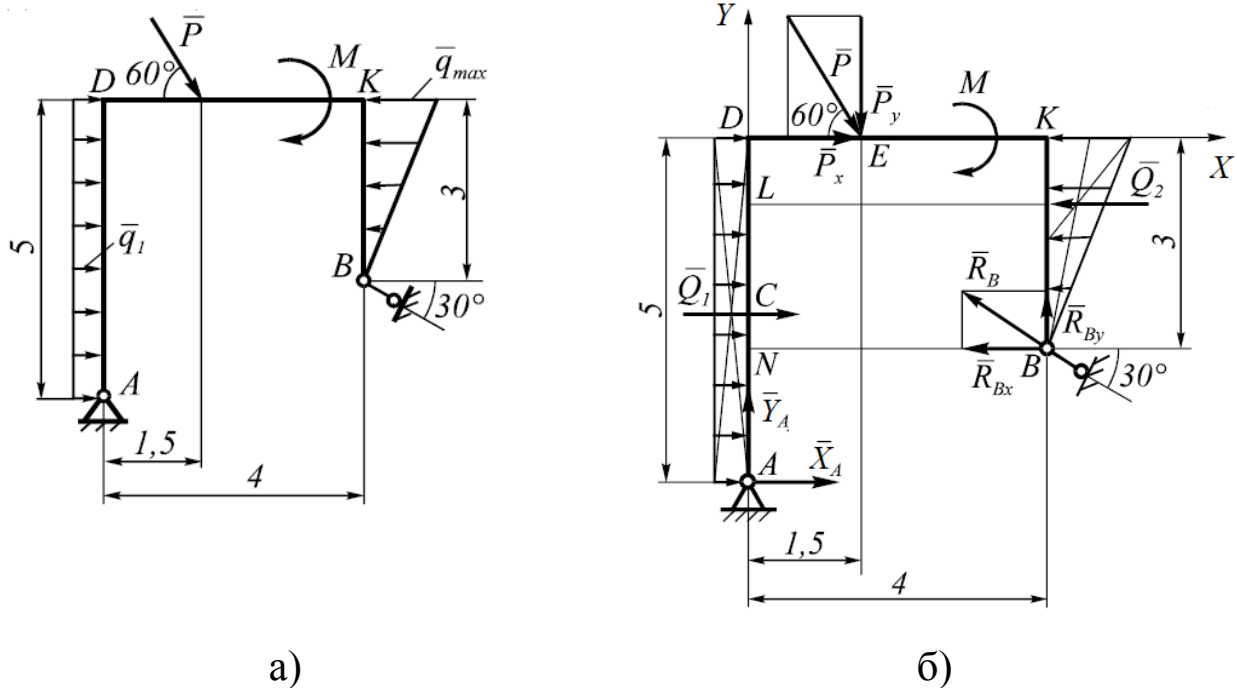


Рис.1.9. Схема рамы: а – исходная, б - расчётная

Распределенную нагрузку, изменяющуюся по закону треугольника, заменяем равнодействующей  $\bar{Q}_2$ . Ее прикладываем на расстоянии  $BK/3$  от места приложения  $q_{\max}$ :

$$Q_2 = q_{\max} \cdot BK/2 = 2 \cdot 3/2 = 3 \text{ Н.}$$

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\bar{P}$  и реакции связи  $\bar{R}_B$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $\bar{P}$  и реакцию связи  $\bar{R}_B$  на составляющие, модули которых:

$$\begin{aligned} P_x &= P \cdot \cos 60, & P_y &= P \cdot \sin 60, \\ R_{Bx} &= R_B \cdot \cos 30, & R_{By} &= R_B \cdot \sin 30, \end{aligned}$$

и учтем, что:

$$m_A(\bar{P}) = m_A(\bar{P}_x) + m_A(\bar{P}_y), \quad m_A(\bar{R}_B) = m_A(\bar{R}_{Bx}) + m_A(\bar{R}_{By}).$$

Тогда получим:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad X_A + Q_1 + P \cos 60^\circ - Q_2 - R_B \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad Y_A - P \sin 60^\circ + R_B \sin 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad -Q_1 \cdot AC - P_x \cdot AD - P_y \cdot DE - M + Q_2 \cdot AL + \\ + R_{Bx} AN + R_{By} NB = 0. \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и, решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Из уравнения (3) определяем  $R_B = 11,65$  (Н).

Из уравнения (2) определяем  $Y_A = 2,83$  (Н).

Из уравнения (1) определяем  $X_A = 3,09$  (Н).

Полная реакция опоры  $A$  найдется как геометрическая сумма сил  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . По модулю,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 4,19 \text{ (Н)}.$$

3. Для проверки правильности нахождения реакций связей составим уравнение моментов относительно точки  $E$ :

$$\Sigma M_E(\bar{F}_i) = 0, \quad Q_1 \cdot 2,5 - M - Q_2 \cdot 1 - R_{Bx} 3 + R_{By} 2,5 + \\ + X_A 5 - Y_A \cdot 1,5 = 0. \quad (4)$$

Подставляя сюда найденные величины  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $R_B$ , убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют.

## **С-2. Определение реакций опор составной конструкции (системы тел)**

### **Краткие теоретические положения**

Под *системой тел* понимается конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой через какие-либо связи, допускающие относительные перемещения этих тел (они могут соединяться шарнирами, гибкой нитью, опираться друг на друга и т.д.).

Силы, действующие на тела системы, делятся на внешние и внутренние.

*Внешними* называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих этой системе.

*Внутренними* называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Основным способом расчета систем твердых тел (составных конструкции) является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Следует заметить, что при рассмотрении равновесия всей системы твердых тел реакции связей между отдельными телами не должны учитываться, т.к. это взаимно уравнивающие внутренние силы. При рассмотрении равновесия отдельного тела соответствующие реакции связей, которые были мысленно расчленены, становятся внешними и входят в уравнения равновесия.

Задачи на равновесие системы твердых тел рекомендуется решать в следующем порядке:

- 1) выделить систему тел и отдельно твердые тела, равновесие которых следует рассмотреть для определения искомых величин;
- 2) изобразить заданные силы;
- 3) применить принцип освобожденности от связей: мысленно отбросить связи, заменить их действие силами реакций связей;

4) сопоставить число неизвестных величин и количество независимых уравнений равновесия (для статически определимой системы эти числа должны быть равны);

5) выбрать систему декартовых координат, при этом для каждого тела и для системы тел можно взять одну и ту же, или для каждого тела (системы) свою наиболее удобную систему координат;

6) записать аналитические условия равновесия для каждого твердого тела (для системы тел) в соответствии с силами, которые к ним приложены;

7) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Если система твердых тел расчленяются на отдельные тела, то их взаимодействие заменяется реакциями внутренних связей, которые согласно аксиоме статики равны по модулю, но направлены в противоположные стороны.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какие системы называются составными?
2. Какие способы расчета составных конструкций вы знаете?
3. Какой порядок решения задачи на равновесие системы твердых тел?

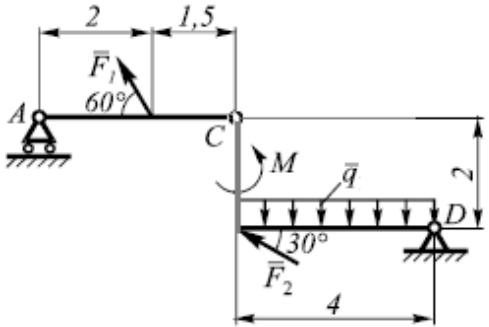
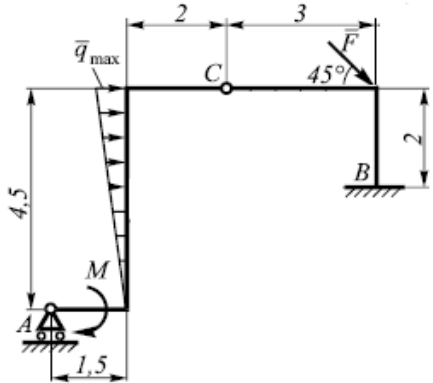
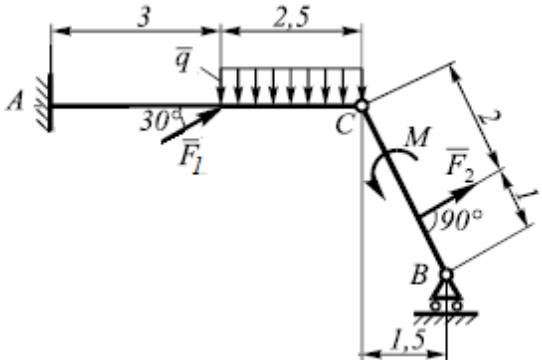
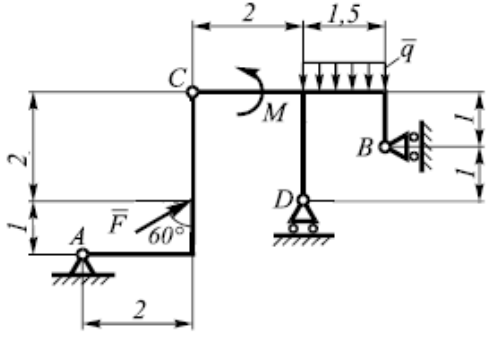
## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для рам, схемы которых приведены в таблице 1.2, рассчитать реакции внешних и внутренних связей составных конструкций.

Таблица 1.2

1		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$
2		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$
3		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$

продолжение таблицы 1.2

4		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
5		$F = 6 \text{ Н}; q_{\max} = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
6		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
7		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$

продолжение таблицы 1.2

8		$F = 6 \text{ Н}; q_{\max} = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
9		$F = 6 \text{ Н}; q_1 = 4 \text{ Н/м};$ $q_{2\max} = 6 \text{ Н/м}.$
10		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 4 \text{ Н/м}.$
11		$F = 6 \text{ Н}; q_{\max} = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$

продолжение таблицы 1.2

12		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$
13		$q_1 = 4 \text{ Н/м}; q_{2\max} = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$
14		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$
15		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н·м}.$



продолжение таблицы 1.2

16		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
17		$F = 6 \text{ Н}; q_1 = 4 \text{ Н/м};$ $q_{2\max} = 6 \text{ Н/м}.$
18		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
19		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$

продолжение таблицы 1.2

20		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q_{\max} = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
21		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
22		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
23		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$

продолжение таблицы 1.2

24		$F_1 = 2 \text{ H}; F_2 = 4 \text{ H};$ $q = 4 \text{ H/м};$ $M = 10 \text{ H}\cdot\text{м}.$
25		$F_1 = 2 \text{ H}; F_2 = 4 \text{ H};$ $q = 4 \text{ H/м};$ $M = 10 \text{ H}\cdot\text{м}.$
26		$F_1 = 2 \text{ H}; F_2 = 4 \text{ H};$ $q = 4 \text{ H/м};$ $M = 10 \text{ H}\cdot\text{м}.$
27		$F_1 = 2 \text{ H}; F_2 = 4 \text{ H};$ $q_{\max} = 4 \text{ H/м};$ $M = 10 \text{ H}\cdot\text{м}.$

продолжение таблицы 1.2

28		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
29		$F = 6 \text{ Н}; q = 4 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
30		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 6 \text{ Н/м};$ $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}.$
31		$F_1 = 2 \text{ Н}; F_2 = 4 \text{ Н};$ $q = 6 \text{ Н/м}.$

### Пример выполнения заданий по теме «Определение реакций опор составной конструкции»

Горизонтальная разрезная балка  $ACB$  у конца  $A$  заделана в стену, у конца  $B$  опирается на подвижную опору; в точке  $C$  – шарнир (рис.1.10). Балка загружена краном, несущим груз веса  $P=10$  кН, вес крана  $Q=50$  кН, центр тяжести крана лежит на вертикали  $CD$ .

Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках  $A$  и  $B$  для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой  $AB$ , если  $KL = 4$  м,  $AC = 4$  м,  $CB = 8$  м.

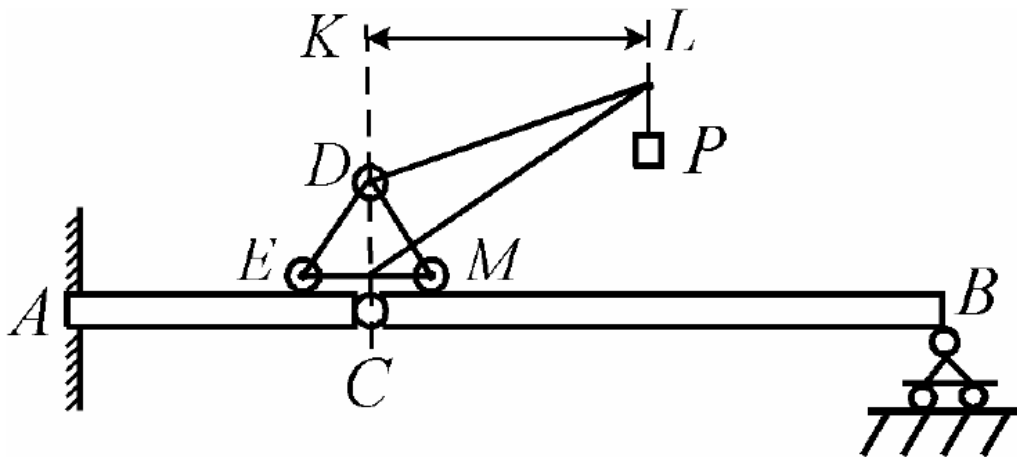


Рис. 1.10. Исходная схема

### Решение

Разрежем конструкцию на отдельные тела: кран и балки  $AC$  и  $CB$ .

1. Для определения искомых опорных реакций в точках  $A$  и  $B$  найдем сначала силы, с которыми кран давит на балку в точках  $E$  и  $M$ . Для этого рассмотрим равновесие крана (рис. 1.11).

Изобразим действующие на кран силы: силу тяжести груза  $\bar{P}$ , на вертикали  $CD$  – вес крана  $\bar{Q}$  и реакции гладкой поверхности составной балки  $ACB$ :  $\bar{N}_E$  и  $\bar{N}_M$ .

К крану приложена плоская система параллельных сил, направленных по вертикали.

Для определения  $\bar{N}_E$  и  $\bar{N}_M$  запишем аналитические условия равновесия для плоской системы параллельных сил в форме уравнений моментов относительно точек  $E$  и  $M$  приложения искомых реакций:

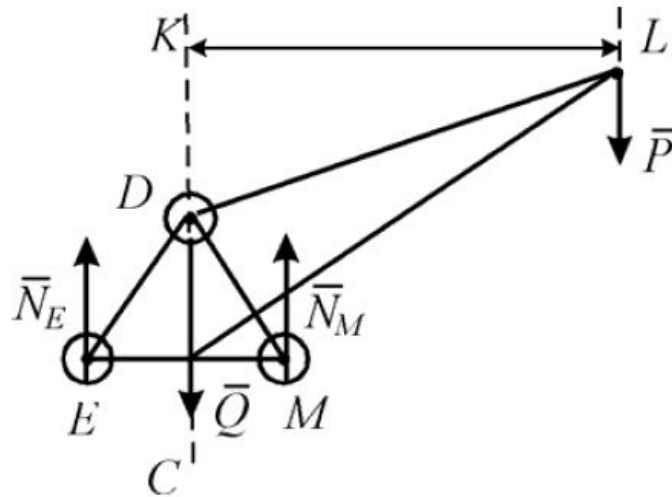


Рис. 1.11. Расчетная схема

$$\sum_{k=1}^n m_E(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_M(\bar{F}_k) = 0$$

или

$$\begin{cases} -Q \frac{EM}{2} + N_M EM - P \left( \frac{EM}{2} + KL \right) = 0, \\ -N_E EM + Q \frac{EM}{2} - HP \left( KL - \frac{EM}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Каждой уравнение содержит только по одному неизвестному, что позволяет сразу найти искомые реакции:

$$N_M = 0,5(5P + Q) = 50 \text{ кН},$$

$$N_E = 0,5(Q - 3P) = 10 \text{ кН}.$$

Силы  $N'_E$  и  $N'_M$ , с которыми кран давит на составную балку  $ACB$ , направлены противоположно соответствующим реакциям  $N_E$  и  $N_M$ , но равны по модулю, т. е.  $N'_M = N_M = 50 \text{ кН}$ ,  $N'_E = N_E = 10 \text{ кН}$ .

2. Рассмотрим теперь равновесие балки  $CB$  (рис. 1.12).

На нее действует сила давления крана  $N'_M$ , реакция подвижной опоры  $\bar{R}_B$  и реакция  $\bar{R}_C$  соединительного шарнира  $C$ , направленная по вертикали.

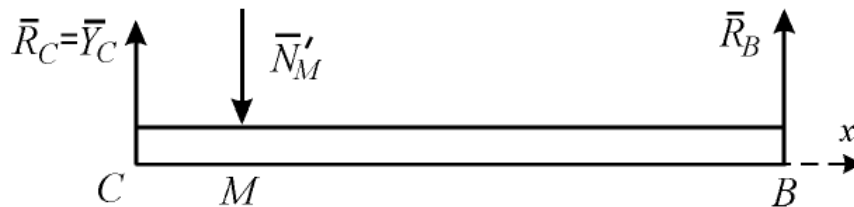


Рис. 1.12. Расчетная схема

Если в точке  $C$  реакцию  $\bar{R}_C$  заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $\bar{R}_C = \bar{X}_C + \bar{Y}_C$  и записать уравнение проекций всех сил, приложенных к балке  $CB$ , на горизонтальную ось  $x$ , то получим  $\bar{X}_C = 0$ . Поэтому  $\bar{R}_C = \bar{Y}_C$  и реакция соединительного шарнира  $C$  в рассматриваемом случае направлена по вертикали.

Запишем аналитические условия равновесия для плоской системы параллельных сил относительно точек  $C$  и  $B$  приложения неизвестных реакций:

$$\sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0$$

или

$$\begin{cases} R_B CB - N'_M CM = 0, \\ -R_C BC + N'_M BM = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим  $R_B = 6,25$  кН,  $R_C = 43,75$  кН.

3. Рассмотрим равновесие балки  $AC$  (рис.1.13). Проведем в точке  $A$  декартовы оси  $Ax$ . К балке  $AC$  приложены в точке  $E$  сила давления крана  $N'_E$ , реакции заделки в точке:  $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$ , реактивный момент  $m_A$  и реакция  $\bar{R}'_C$  соединительного шарнира  $C$ , направленная

согласно аксиоме статики противоположно вектору  $\bar{R}_C$  и равная ему по величине  $\bar{R}'_C = \bar{R}_C = 43,75$  кН.

Поскольку силы  $N'_E$  и  $\bar{R}'_C$  – вертикальные, то из уравнения проекций сил, приложенных к балке  $AC$ , на ось  $Ax$ , получаем  $X_A = 0$  и поэтому  $\bar{R}_A = \bar{Y}_A$ , т. е. направлена тоже по вертикали.

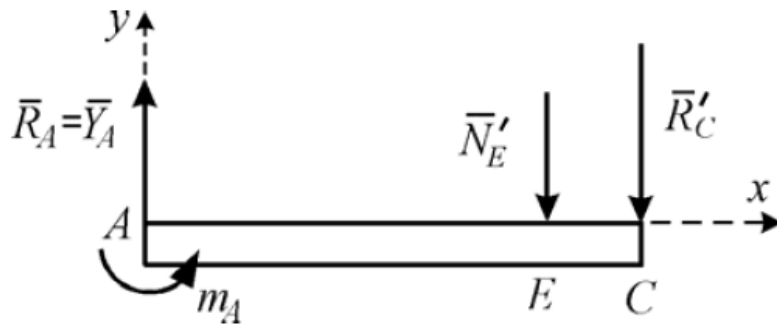


Рис.1.13. Расчетная схема

Следовательно, балка  $AC$  находится под действием плоской системы сил параллельных оси  $Ay$ . Воспользуемся основной формой аналитических условий равновесия системы параллельных сил

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0$$

или

$$\begin{cases} R_A - N'_E - R'_C = 0, \\ m_A - N'_E AE - R'_C AC = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим искомые реакции заделки  $A$ :

$$R_A = N'_E + R'_C = 53,75 \text{ кН},$$

$$m_A = N'_E \cdot AE + R'_C \cdot AC = 175 \text{ кН}.$$



## 2. СИСТЕМА СИЛ, НЕ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

### С-3. Определение реакций опор твердого тела под действием пространственной системы сил

#### Краткие теоретические положения

Решение задач на равновесие пространственной системы сил во многих случаях сводится к определению реакций связей, реже – тех из активных сил, величины которых следует определить по условию.

Ранее были даны понятия связи, реакции связи и основного положения механики – принципа освобожденности от связей (см. краткие теоретические положения к С-1).

На рисунке 1 представлены направление реакций некоторых основных видов связей пространственной системы сил.

1. Жесткая заделка (рис.2.1, а). Реакция заделки раскладывается на три составляющие  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$  и на три реактивных вектора момента  $\bar{M}_{Ax}, \bar{M}_{Ay}, \bar{M}_{Az}$ , направленных вдоль осей.

2. Подпятник (рис.2.1, б). Реакция раскладывается на три составляющие:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ .

3. Петля (рис.2.1, в). Реакции лежат в плоскостях, перпендикулярной оси вращения  $u$ , т.к. петля не препятствует скольжению тела вдоль оси  $u$ .

4. Сферический шарнир (рис.2.1, г). Реакция шарнира раскладывается на три составляющие:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ .

5. Цилиндрический шарнир (рис.2.1, д). Реакции лежат в плоскостях, перпендикулярной оси вращения  $x$  (рис.2.1, д), т.к. цилиндрический шарнир не препятствует скольжению тела вдоль оси  $x$ .

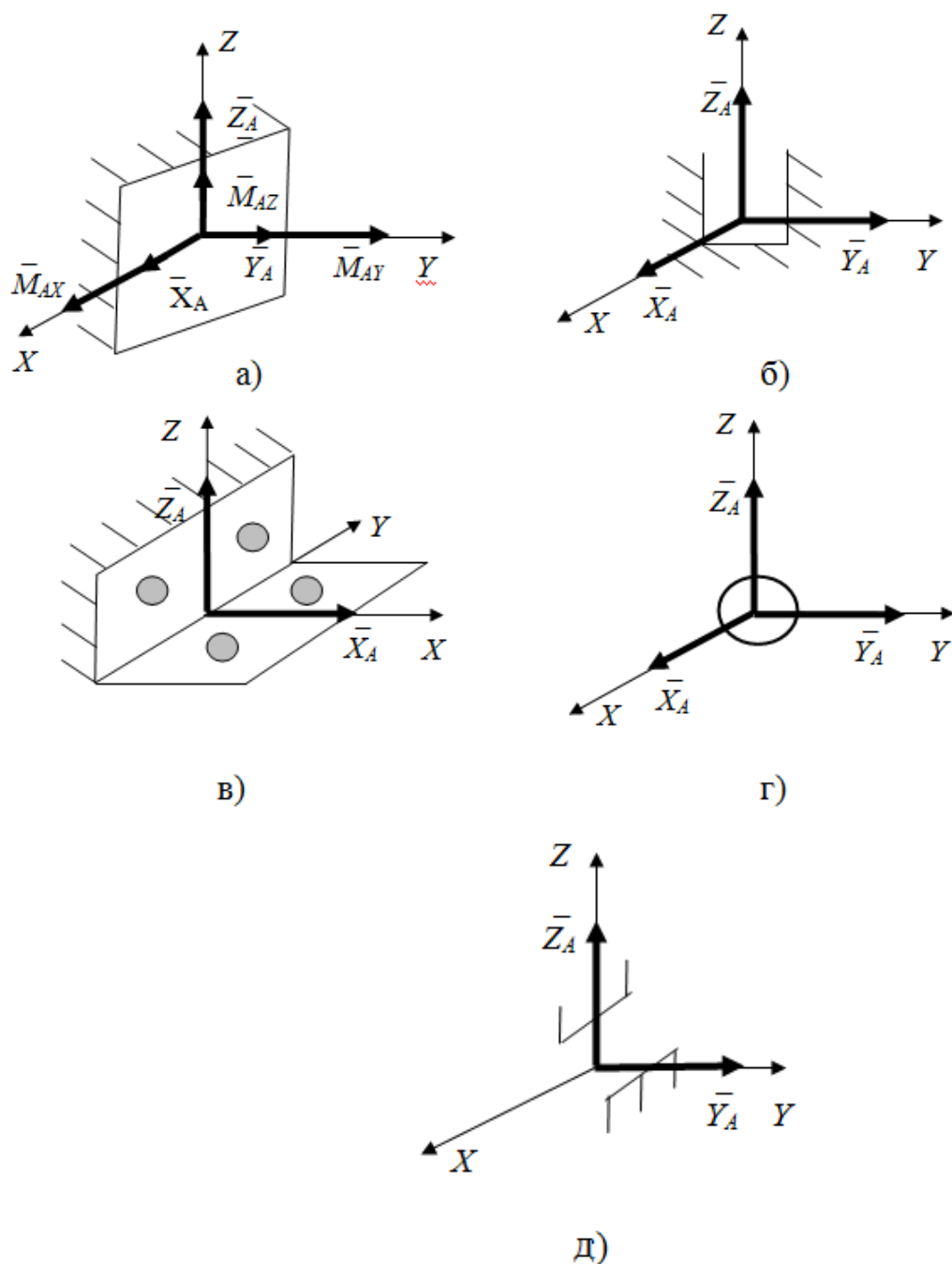


Рис. 2.1. Виды связей для пространственной системы сил: а - жесткая заделка; б - подпятник; в - петля; г – сферический шарнир; д – цилиндрический шарнир.

Основным элементом в составлении уравнений равновесия является вычисление моментов сил относительно осей. Напомним понятие момента силы относительно оси и порядок его вычисления.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно некоторой оси  $Oz$  называется скалярная величина  $M_z(\vec{F})$ , равная проекции на эту ось момента силы вычисленного относительно какой-либо точки  $O$  этой оси:

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z. \quad (1)$$

Далее рассмотрим, что указанная проекция на ось момента силы относительно точки на зависит от выбора этой точки на оси, и установим простой способ вычисления момента силы относительно оси.

Рассмотрим некоторую силу  $\vec{F}$ , расположенную по направлениям координатных осей:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad (2)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы (орты) декартовых координатных осей, проведенных из точки  $O$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  – проекции силы на координатные оси.

Пусть далее радиус-вектор точки  $A$  приложения силы относительно начала координат  $O$ , также выражается в виде геометрической суммы (рис. 2.2).

$$\vec{OA} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (3)$$

где  $x, y, z$  – координаты точки  $A$  (или проекции вектора  $\vec{OA}$  на координатные оси). Векторное произведение двух векторов выражается определителем:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \cdot \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) - \\ &- \vec{j}(xF_z - zF_x) + \vec{k}(xF_y - yF_x) \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что коэффициенты при единичных ортах  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  суть проекции вектора на соответствующие оси, заключим из последнего выражения, что

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (5)$$

Покажем, что момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки  $O$  пересечения оси с плоскостью.

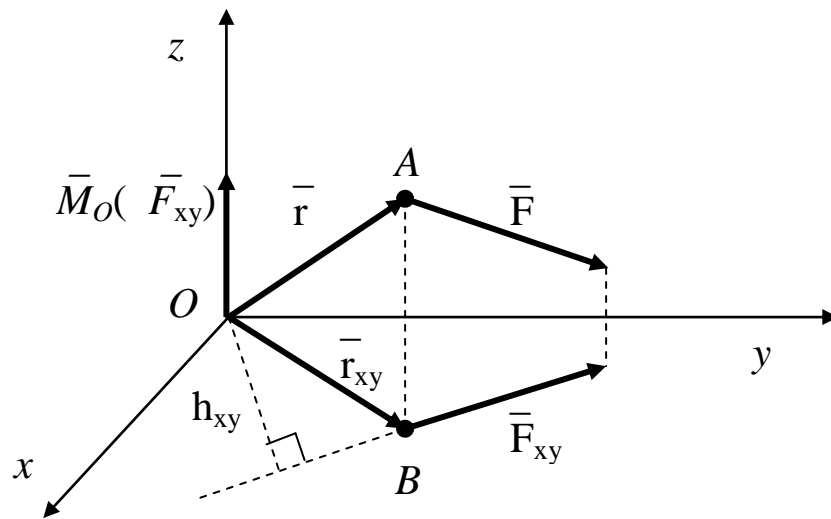


Рис. 2.2. Момент силы относительно оси  $Oz$

Рассмотрим, как вычислить момент силы относительно оси  $z$ .

Запишем согласно формула (5) моменты силы  $\vec{F}$  и её проекции  $\vec{F}_{xy}$  относительно оси  $z$ :

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x, \quad M_z(\vec{F}_{xy}) = xF_y - yF_x, \quad (6)$$

которые оказываются одинаковыми:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}) \quad (7)$$

и, действительно, не зависят от выбора точки  $O$  на оси  $z$ . Таким образом, вместо того чтобы искать момент данной силы относительно оси, достаточно найти момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси.

Учтем теперь, что момент силы относительно оси  $M_z(\vec{F}_{xy})$  - это проекция момента силы относительно точки  $\vec{M}_O(\vec{F}_{xy})$  на ось  $z$ . Из рисунка 1 ясно, что момент  $\vec{M}_O(\vec{F}_{xy})$  направлен вдоль оси  $z$ , и тогда его проекция на эту ось равна или его модулю, или его модулю, взятому со знаком "минус". Итак:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}) = [\vec{M}_O(\vec{F}_{xy})]_z = \pm M_O(\vec{F}_{xy}), \quad (8)$$

откуда следует

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} h_{xy}, \quad (9)$$

где  $h_{xy}$  – плечо вектора  $\bar{F}_{xy}$  относительно точки  $O$ . Аналогично могут быть вычислены моменты относительно осей  $x$  и  $y$ .

Из приведенного рассмотрения вытекает следующий способ вычисления момента силы относительно любой оси:

1. Сила проектируется на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Определяется произведение модуля этой проекции на её плечо относительно точки пересечения оси с плоскостью.
3. Вычисляется момент силы относительно оси, как это произведение, взятое со знаком "плюс" или "минус".

**Правило знаков** следующее: если глядя навстречу оси видеть вращение, которое пытается произвести проекция силы на плоскость, происходящим против часовой стрелки, то берется знак "плюс", иначе берется "минус".

Из сказанного выше следует, что **момент силы относительно оси равен нулю** в одном из двух случаев:

- 1) сила параллельна оси ( $\bar{F}_{xy} = 0$ );
- 2) сила пересекает ось ( $h=0$ ).

Оба эти случая объединяются следующим образом: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Для нахождения искомых величин следует воспользоваться аналитическими условиями равновесия, записываются в виде:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Т.е. для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из трех произвольно выбранных взаимно перпендикулярных осей и суммы моментов их относительно этих осей были равны нулю.

Если на тело, кроме сил, действуют ещё пара, заданная её векторным моментом  $\bar{M}$ , то определения её моментов относительно координатных осей рекомендуется найти проекции вектора  $\bar{M}$  на соответствующие координатные оси. Тогда вид первых трех из условий (10) не изменится (сумма проекций пары на любую ось равна нулю), а последние три условия примут вид:

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) + M_x = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + M_y = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) + M_z = 0. \quad (11)$$

В тех задачах, где имеются жесткие заделки тел в опорах, векторный момент пары сил в заделке следует разложить на три составляющие, направленные вдоль соответствующих координатных осей. Тогда проекции этих составляющих на координатные оси и будут моментами пары сил относительно этих осей.

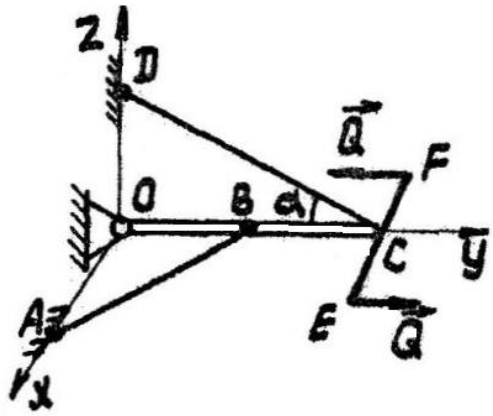
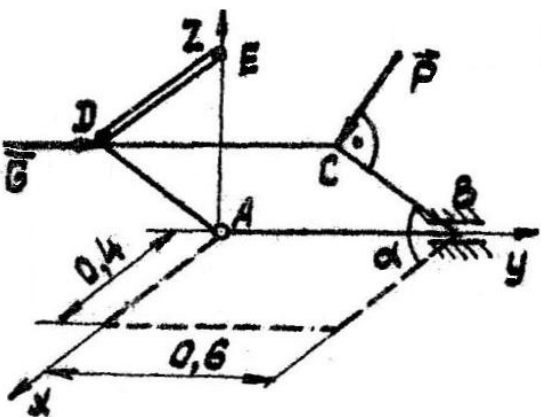
### Вопросы для самоконтроля

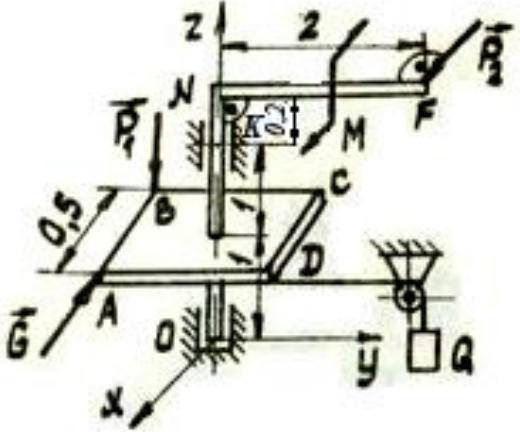
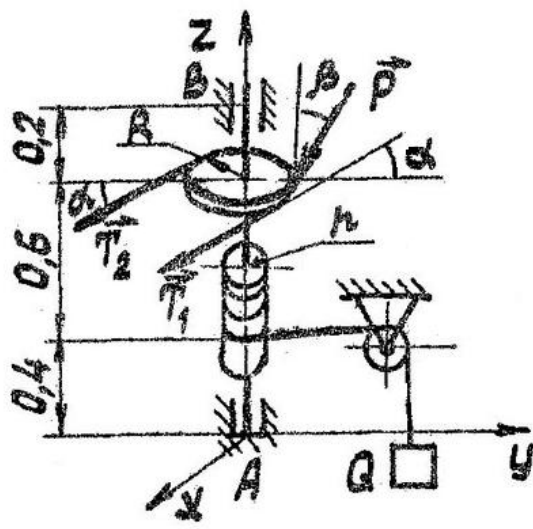
1. Как определяется величина и знак момента силы относительно оси? В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
2. Какая зависимость существует между моментом силы относительно Оси и моментом этой же силы относительно точки, взятой на той же оси?
3. При каких условиях модуль момента силы относительно точки равен моменту той же силы относительно оси, проходящей через эту точку?
4. Каковы аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей?
5. Как направлен вектор момента пары сил?
6. Чему равен главный момент сил, составляющих пару, относительно любой точки пространства?
7. Как определяются моменты сил, составляющих пару, относительно координатных осей?
8. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил и чем они отличаются от условий и уравнений равновесия такого же вида сил на плоскости?
9. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей пространственной системы сил относительно точки и оси.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

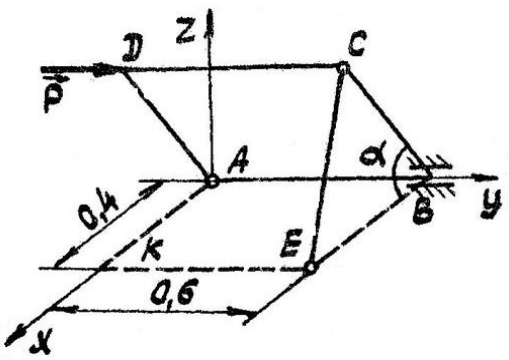
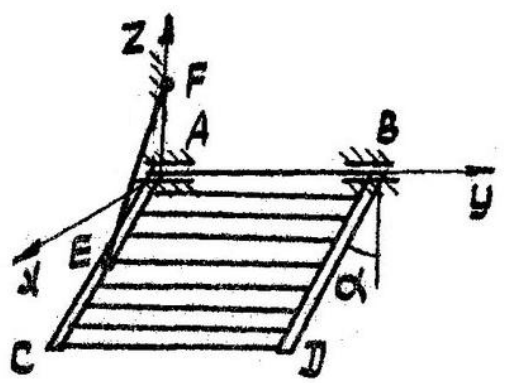
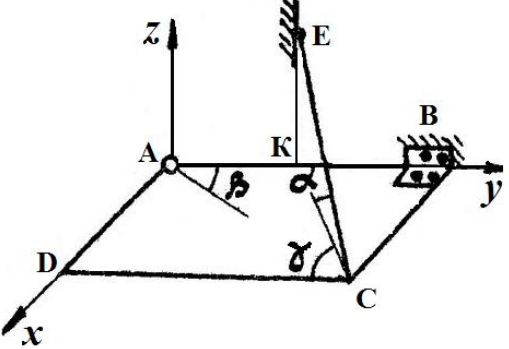
Для рам, схемы которых приведены в таблице 2.1, рассчитать реакции связей, в соответствии с заданиями.

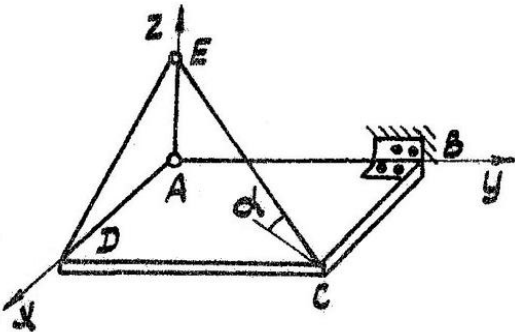
Таблица 2.1

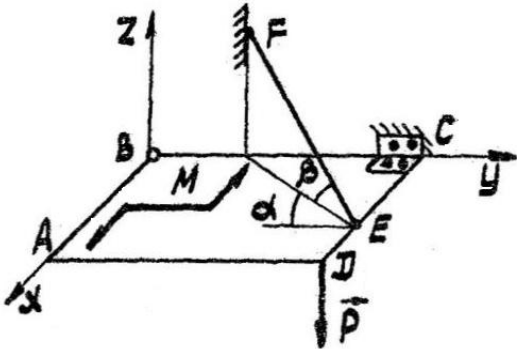
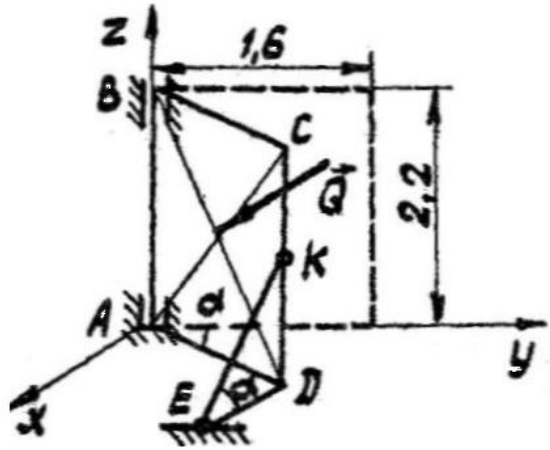
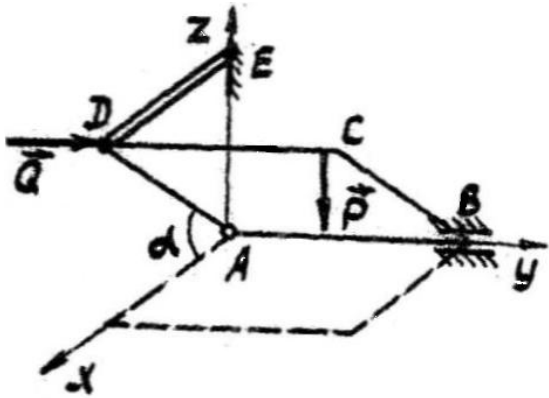
Вариант 1	
<p>Горизонтальная балка DC весом <math>P = 100</math> Н и длиной 2 м находится под действием пары сил <math>(Q, Q)</math>, лежащей в горизонтальной плоскости. <math>Q = 10</math> Н, плечо пары сил <math>EF = 0,2</math> м. Балка концом О прикреплена к стене с помощью сферического шарнира и удерживается в равновесии двумя веревками CD и AB. <math>OB = 0,5</math> м. Найти реакции опор и натяжения веревок, если угол <math>\alpha = 30^\circ</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T_1 = 100</math>Н, <math>T_2 = 0</math>Н, <math>X_0 = 4</math> Н, <math>Y_0 = 93,53</math> Н, <math>Z_0 = 50</math> Н.</p>	
Вариант 2	
<p>Однородная прямоугольная плита весом <math>G = 8</math> кН удерживается приоткрытой невесомым стержнем DE, ось которого параллельна оси Ax. Сила P перпендикулярна плоскости крышки; сила Q параллельна оси Ay, причем <math>P = 2</math> кН, <math>Q = 4</math> кН, <math>\alpha = 60^\circ</math>. Размеры на рисунке даны в метрах. Найти реакции опор A и B, усилие S в стержне DE.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>S = 2,31</math> кН, <math>X_A = 0,98</math> кН, <math>Y_A = -4</math> кН, <math>Z_A = 1,7</math> кН, <math>X_B = -0,4</math> кН, <math>Z_B = 7,3</math> Н.</p>	

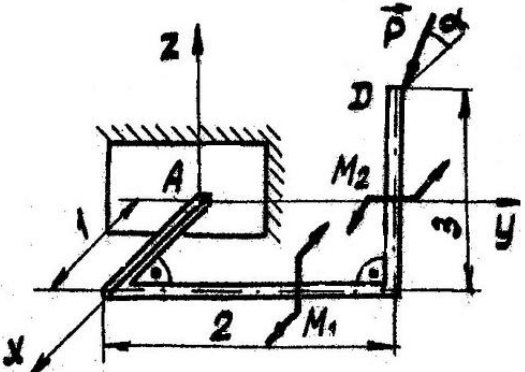
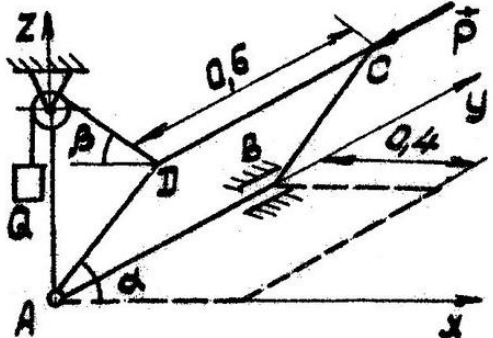
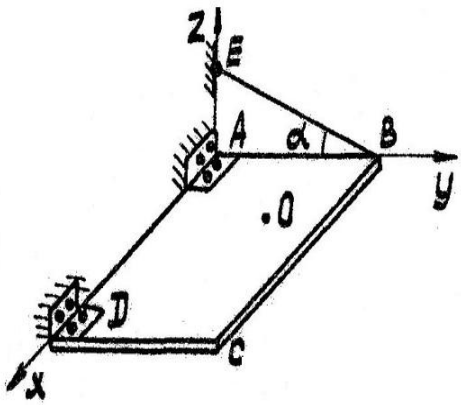
<p><b>Вариант 3</b></p>	
<p>На конструкцию, состоящую из невесомых коленчатого вала и квадратной полки, действуют силы <math>P_1 = 100 \text{ Н}</math>, <math>G = 200 \text{ Н}</math>, <math>P_2 = 50 \text{ Н}</math>, пара сил с моментом <math>M = 10 \text{ Нм}</math> и нить, к концу которой присоединен груз <math>Q</math>. Сила <math>\vec{G}</math> действует вдоль стороны <math>AB</math>, сила <math>\vec{P}_1</math> параллельна оси <math>Oz</math>, плоскость пары сил с моментом <math>M</math> перпендикулярна звену стержня <math>NF</math>, сила <math>\vec{P}_2</math> параллельна плоскости <math>xOy</math>. Определить вес груза <math>Q</math>, при котором конструкция будет находиться в равновесии и реакции опор в точках <math>O</math> и <math>K</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>Q=600 \text{ Н}</math>, <math>X_K=62,5 \text{ Н}</math>, <math>Y_K=-287,5 \text{ Н}</math>, <math>X_O=87,5 \text{ Н}</math>, <math>Y_O = -312,5 \text{ Н}</math>, <math>Z_O=100 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 4</b></p>	
<p>Груз <math>Q=5 \text{ кН}</math> равномерно поднимается при помощи ворота радиусом <math>r = 0,1 \text{ м}</math>, приводимого в движение бесконечной цепью, надетой на колесо радиусом <math>R=0,25 \text{ м}</math>. Силы натяжения ветвей цепи <math>\vec{T}_1</math> и <math>\vec{T}_2</math> составляют с горизонталью углы <math>\alpha = 60^\circ</math>. Сила <math>\vec{P}</math>, приложенная к колесу, лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>Ax</math>, и составляет с вертикалью угол <math>\beta = 30^\circ</math>, причем <math>P = 2 \text{ кН}</math>. Найти реакции опор <math>A</math> и <math>B</math> натяжения <math>\vec{T}_1</math> и <math>\vec{T}_2</math>, если <math>\vec{T}_1 = 2 \vec{T}_2</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T = 2 \text{ кН}</math>, <math>X_A = -0,865 \text{ кН}</math>, <math>Y_A = -2,31 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 2,73 \text{ кН}</math>, <math>X_B = -4,325 \text{ кН}</math>, <math>Y_B = 1,31 \text{ кН}</math>.</p>	

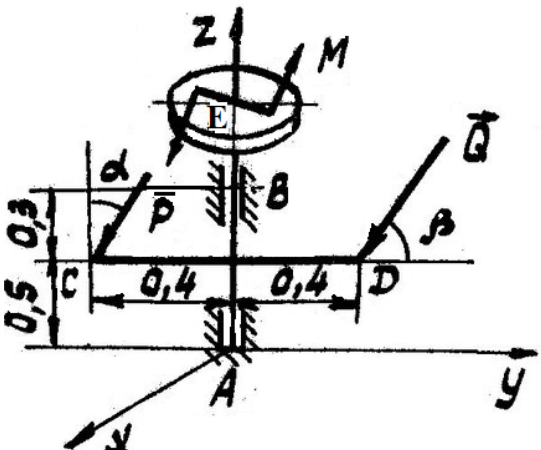
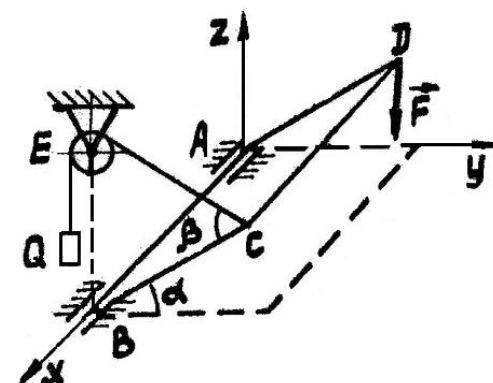
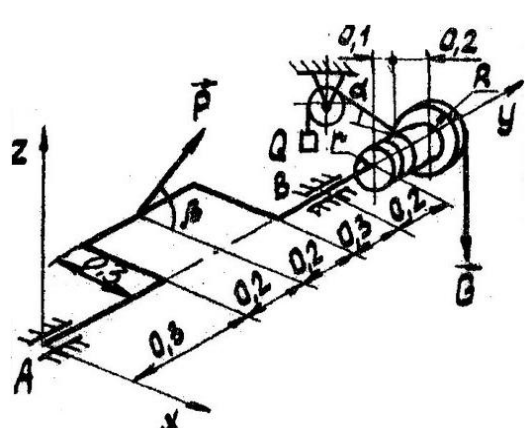


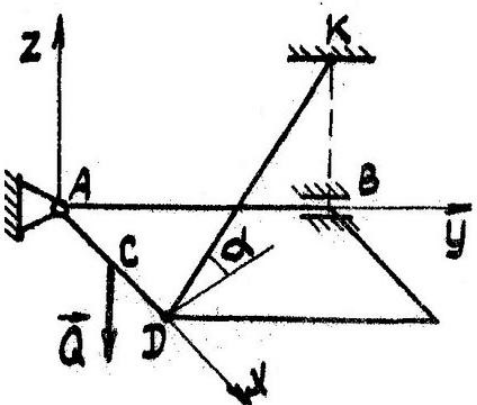
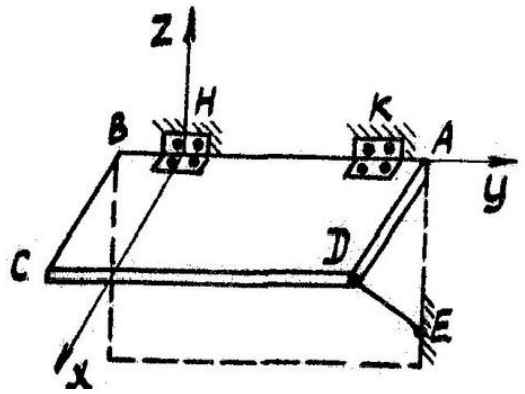
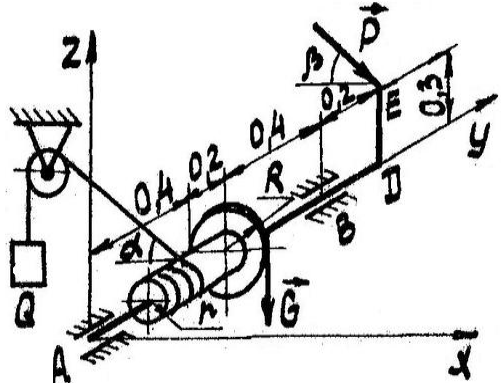
<p><b>Вариант 5</b></p> <p>Однородная прямоугольная плита весом <math>G=4</math> кН удерживается приоткрытой на угол <math>\alpha=60^\circ</math> над горизонтом невесомым стержнем ЕС, причем <math>CB=BE</math>. В точке D приложена сила <math>\vec{P}</math>, параллельная оси Ау и равная 2 кН. Размеры на рисунках даны в метрах. Найти реакции опор А и В и усилие S в стержне ЕС.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>S=1,16</math> кН, <math>X_A=-0,67</math> кН, <math>Y_A=-2</math> кН, <math>Z_A=0,85</math> кН, <math>X_B=1,25</math> кН, <math>Z_B=2,15</math> кН.</p>	
<p><b>Вариант 6</b></p> <p>Откидная лестница весом <math>P=300</math> Н прикреплена к кузову грузовика цилиндрическими шарнирами А и В и стержнем EF. Лестница составляет с вертикальной плоскостью угол <math>\alpha=60^\circ</math>. Центр тяжести лестницы находится в точке пересечения диагоналей. Определить реакцию S стержня EF и шарниров А и В, если на середине нижней ступеньки лестницы стоит человек, вес которого <math>G=600</math> Н.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>S=2975</math> Н, <math>X_A=1297</math> Н, <math>Z_A=-1800</math> Н, <math>X_B=0</math>, <math>Z_B=450</math> Н.</p>	
<p><b>Вариант 7</b></p> <p>Однородная прямоугольная рама весом 20 Н прикреплена к стене при помощи сферического шарнира А и петли В и удерживается в горизонтальном положении веревкой СЕ, привязанной в точке С рамы и к гвоздю Е, вбитому в стену на одной вертикали с точкой К. Углы <math>\alpha=\beta=30^\circ</math> <math>\gamma=60^\circ</math>. Найти натяжение веревки и опорные реакции.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T=P=20</math> Н, <math>X_A=5</math> Н, <math>Y_A=8,66</math> Н, <math>Z_A=10</math> Н, <math>X_B=10</math> Н, <math>Z_B=0</math></p>	

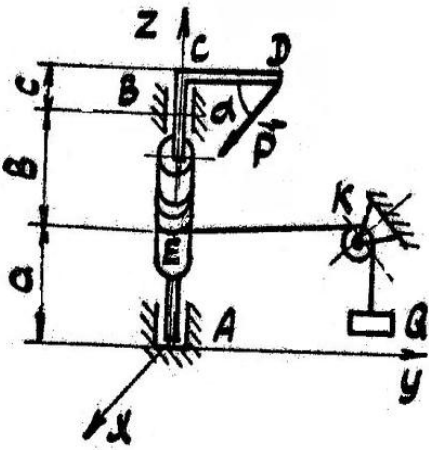
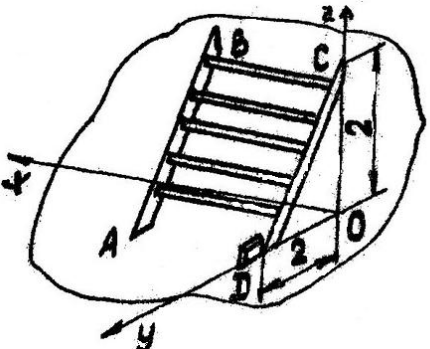
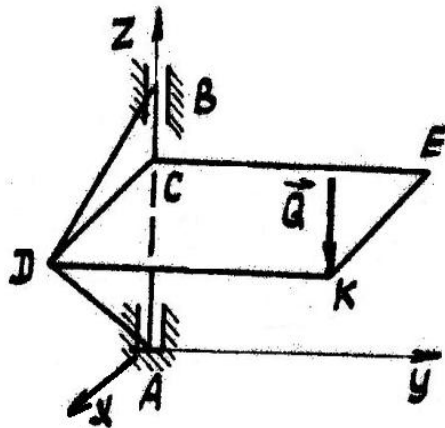
<p><b>Вариант 8</b></p>	
<p>Однородная квадратная плита ABCD весом <math>P = 120 \text{ Н}</math> прикреплена к стене сферическим шарниром A и цилиндрическим шарниром B и удерживается в горизонтальном положении нитью CED, пропущенной в точке E через кольцо. Часть нити CE составляет с плоскостью плиты угол <math>\alpha = 30^\circ</math>. Найти натяжение нити и реакции шарниров A и B.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T = 53 \text{ Н}</math>, <math>X_A = 73,1 \text{ Н}</math>, <math>X_B = 0</math>, <math>Y_A = 32,6 \text{ Н}</math>, <math>Z_B = 33,5 \text{ Н}</math>, <math>Z_A = 26,5 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 9</b></p>	
<p>На невесомый стержень ABCD расположенный в горизонтальной плоскости xAy и имеющий в точке A жесткую заделку, действуют сила <math>P = 300 \text{ Н}</math> и три пары сил с моментами <math>M_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>, <math>M_2 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}</math> и <math>M_3 = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>. Сила P расположена в вертикальной плоскости под углом <math>\beta = 60^\circ</math> к горизонту. Плоскость пары сил с моментом <math>M_1</math> образует угол <math>\alpha = 30^\circ</math> с плоскостью xAy. Плоскости пар с моментами <math>M_2</math> и <math>M_3</math> соответственно перпендикулярны участкам стержня BC и CD. Определить реакцию заделки.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A = 0</math>, <math>Y_A = -150 \text{ Н}</math>, <math>Z_A = -259,8 \text{ Н}</math>, <math>M_{Ax} = -759,8 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>, <math>M_{Ay} = 540,2 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>, <math>M_{Az} = 496,4 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>.</p>	

<p><b>Вариант10</b></p> <p>Однородная прямоугольная плита весом <math>Q = 10 \text{ Н}</math> прикреплена к стене с помощью шарового шарнира В, петли С и удерживается в горизонтальном положении нитью EF, прикрепленной одним концом к плите, а другим - к стене. На плиту действует сила <math>P = 5 \text{ Н}</math> и пара сил с моментом <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>. Найти натяжение нити Т и реакции опор, если <math>DE = EC = 0,5 \text{ м}</math>, <math>BC = 2 \text{ м}</math>, углы <math>\alpha = 60^\circ</math>, <math>\beta = 30^\circ</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T = 40 \text{ Н}</math>, <math>X_B = -5,68 \text{ Н}</math>, <math>Y_B = 17,3 \text{ Н}</math>, <math>Z_B = 7,5 \text{ Н}</math>, <math>X_C = 35,68 \text{ Н}</math>, <math>Z_C = -10 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 11</b></p> <p>Однородная прямоугольная дверь весом <math>P = 1 \text{ кН}</math>, находящаяся под равномерно распределенным, перпендикулярным к ее плоскости давлением ветра, приоткрыта на угол <math>\alpha = 30^\circ</math> и удерживается в этом положении стержнем ЕК, причем плоскость треугольника KED перпендикулярна плоскости двери. Равнодействующая сил давления ветра <math>Q = 3 \text{ кН}</math>. Размеры на рисунке даны в метрах. Найти величину усилия S в стержне ЕК и реакции опор А и В.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>S = 1,73 \text{ кН}</math>, <math>X_A = -0,78 \text{ кН}</math>, <math>Y_A = 0,146 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 0,135 \text{ кН}</math>, <math>X_B = -0,516 \text{ кН}</math>, <math>Y_B = 0,606 \text{ кН}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 12</b></p> <p>Однородная квадратная плита весом <math>G = 4 \text{ кН}</math> удерживается приоткрытой невесомым стержнем DE, ось которого параллельна оси Ax. Сила P приложена в точке С и параллельна оси Az; сила Q приложена в точке D и параллельна оси Ay, причем <math>P = 2 \text{ кН}</math>, <math>Q = 1 \text{ кН}</math>, <math>\alpha = 60^\circ</math>. Найти реакции опор А и В и усилие S в стержне DE.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>S = 2,31 \text{ кН}</math>, <math>X_A = 1,81 \text{ кН}</math>, <math>Y_A = -1 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 1,14 \text{ кН}</math>, <math>X_B = 0,5 \text{ кН}</math>, <math>Z_B = 4,86 \text{ кН}</math>.</p>	

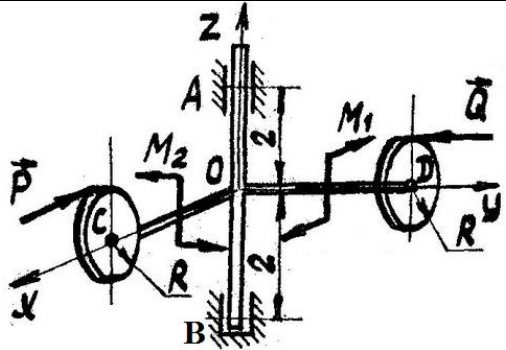
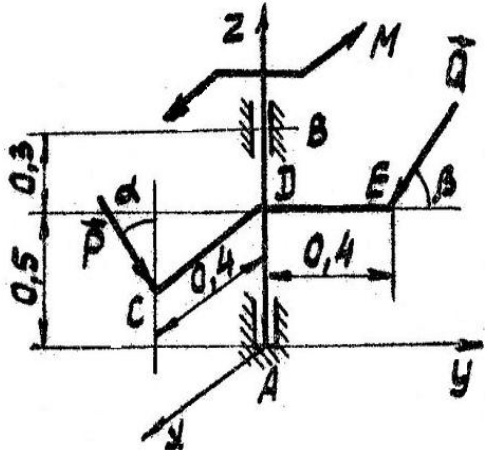
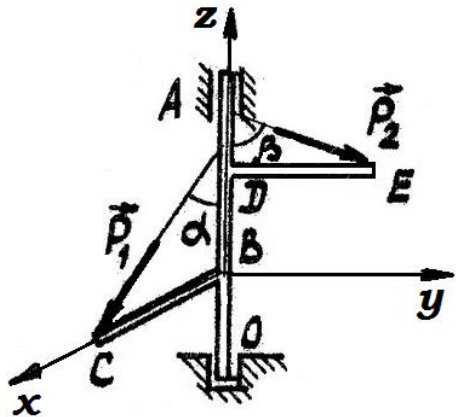
<p><b>Вариант 13</b></p> <p>На невесомый стержень ABCD имеющий в точке А жесткую заделку, действуют сила <math>P = 100 \text{ Н}</math>, расположенная в плоскости, параллельной <math>xAz</math> под углом <math>\alpha=60^\circ</math> к горизонту, и пары сил с моментами <math>M_1=200 \text{ Н}\cdot\text{м}</math> и <math>M_2=300 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>. Участки стержня АВ и ВС лежат в горизонтальной плоскости <math>xAy</math>, участок CD - в плоскости, параллельной <math>xAz</math>. Плоскости пар с моментами <math>M_1</math> и <math>M_2</math> соответственно перпендикулярны участкам стержня ВС и CD. Определить реакцию заделки,</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A=50 \text{ Н}</math>, <math>Y_A=0</math>, <math>Z_A=-86,6 \text{ Н}</math>, <math>M_{ax} = -173,2 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>, <math>M_{ay}=546,4 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>, <math>M_{az}=-400 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 14</b></p> <p>Однородная прямоугольная плита весом <math>G = 4 \text{ кН}</math>, на которую действует сила <math>P</math>, удерживается приоткрытой на угол <math>\alpha = 60^\circ</math> противовесом <math>Q</math>, причем веревка расположена в плоскости, перпендикулярной оси <math>Ay</math> и наклонена к горизонту под углом <math>\beta = 30^\circ</math>. Сила <math>P = 2 \text{ кН}</math> параллельна оси <math>Ay</math>. Размеры на рисунках даны в метрах. Определить величину противовеса <math>Q</math> и реакции опор А и В.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>Q=2 \text{ кН}</math>, <math>X_A= 2,4 \text{ кН}</math>, <math>Y_A= 2 \text{ кН}</math>, <math>Z_A=2,15 \text{ кН}</math>, <math>X_B= -0.67 \text{ кН}</math>, <math>Z_B= 0,85 \text{ кН}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 15</b></p> <p>Полка ABCD удерживается в горизонтальном положении при помощи петель А и D троса BE. Вес полки и лежащего на ней груза равен <math>900 \text{ Н}</math>, центр тяжести - в точке О, координаты которой <math>x=0,8 \text{ м}</math>, <math>y=0,3 \text{ м}</math>. Определить реакции связей, если <math>AB=0,6 \text{ м}</math>, <math>AD = 1,8 \text{ м}</math>, угол <math>\alpha=30^\circ</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T = 900 \text{ Н}</math>, <math>Y_A=450\sqrt{3} \text{ Н}</math>, <math>Z_A= 50 \text{ Н}</math>, <math>Y_D=Z_D= 400 \text{ Н}</math>.</p>	

<p><b>Вариант 16</b></p> <p>Вал АВ, к которому жестко прикреплен невесомый стержень CD, находится в равновесии. Сила <math>P</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>Az</math>, и наклонена к вертикали под углом <math>\alpha = 60^\circ</math>, сила <math>\bar{Q}</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>Az</math>, и составляет с осью стержня угол <math>\beta = 30^\circ</math>. К колесу E в плоскости, перпендикулярной оси <math>Az</math>, приложена пара сил с моментом <math>M = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}</math>. Размеры на рисунке даны в метрах. <math>P = 4 \text{ кН}</math>, <math>G = 1 \text{ кН}</math>. Найти силу <math>\bar{Q}</math> и реакции опор А и В.</p> <p>Ответ: <math>Q = 2 \text{ кН}</math>, <math>X_A = -0,375 \text{ кН}</math>,  <math>Y_A = -0,33 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 4,46 \text{ кН}</math>,  <math>X_B = -0,625 \text{ кН}</math>, <math>Y_B = 4,06 \text{ кН}</math>,</p>	
<p><b>Вариант 17</b></p> <p>Однородная прямоугольная крышка весом <math>P = 40 \text{ Н}</math>, на которую действует вертикальная сила <math>F = 20 \text{ Н}</math>, удерживается приоткрытой противовесом Q. Блок E укреплен на одной вертикали с точкой В. Пренебрегая трением на блоке, найти вес Q и реакции шарниров А и В. Углы <math>\alpha = 30^\circ</math>, <math>\beta = 60^\circ</math>.</p> <p>Ответ: <math>Q = 40 \text{ Н}</math>, <math>Y_A = 0</math>, <math>Z_A = 40 \text{ Н}</math>,  <math>Y_B = 34,6 \text{ Н}</math>, <math>Z_B = 0</math>.</p>	
<p><b>Вариант 18</b></p> <p>Груз Q равномерно поднимается при помощи ворота радиусом <math>r = 0,15 \text{ м}</math>. К колесу радиусом <math>R = 0,2 \text{ м}</math> подвешен противовес <math>G = 2 \text{ кН}</math>. Коленчатый выступ вала расположен в горизонтальной плоскости. Сила <math>\bar{P}</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси АВ, и составляет угол <math>\beta = 60^\circ</math> с горизонталью, причем <math>P = 3 \text{ кН}</math>, угол <math>\alpha = 30^\circ</math>. Размеры на рисунке даны в метрах. Найти величину силы Q и реакции подшипников А и В.</p> <p>Ответ: <math>Q = 6,12 \text{ кН}</math>, <math>X_A = -2,34 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 1,38 \text{ кН}</math>,  <math>X_B = 6,13 \text{ кН}</math>, <math>Z_B = -2,28 \text{ кН}</math>.</p>	

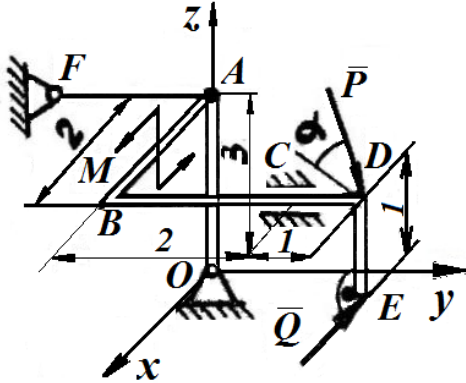
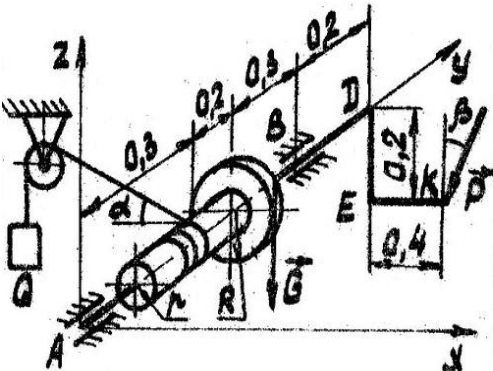
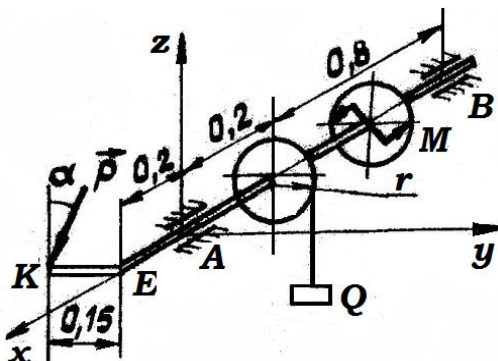
<p><b>Вариант 19</b></p> <p>Однородная прямоугольная пластинка весом <math>P = 600 \text{ Н}</math>, прикрепленная к стене сферическим шарниром <math>A</math> и цилиндрическим шарниром <math>B</math>, удерживается в горизонтальном положении невесомым стержнем <math>DK</math>. В точке <math>M</math> к пластинке приложена сила <math>Q = 800 \text{ Н}</math>. <math>AB = 1 \text{ м}</math>, <math>AD = 0,6 \text{ м}</math>, <math>AM = 0,4 \text{ м}</math>. Найти реакции шарниров <math>A</math> и <math>B</math> и усилие в стержне <math>DK</math>. Угол <math>\alpha = 45^\circ</math>.</p> <p>Ответ: <math>T = 1178 \text{ Н}</math>, <math>X_A = 0</math>, <math>Y_A = 715 \text{ Н}</math>, <math>Z_A = 267 \text{ Н}</math>, <math>X_B = 429 \text{ Н}</math>, <math>Z_B = 300 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 20</b></p> <p>Полка вагона <math>ABCD</math>, которая может вращаться вокруг оси <math>AB</math>, удерживается в горизонтальном положении стержнем <math>ED</math>, закрепленным при помощи шарнира <math>E</math>. Общий вес полки и лежащего на ней груза равен <math>P = 80 \text{ Н}</math> и приложен в центре прямоугольника <math>ABCD</math>. Размеры: <math>AB = 1,5 \text{ м}</math>, <math>AD = 0,6 \text{ м}</math>, <math>AK = BH = 6,25 \text{ м}</math>, <math>DE = 0,75 \text{ м}</math>. Определить реакций <math>S</math> стержня <math>DE</math>, пренебрегая его весом, и реакции петель <math>K</math> и <math>H</math>.</p> <p>Ответ: <math>S = 66,67 \text{ Н}</math>, <math>X_K = -66,67 \text{ Н}</math>, <math>Z_K = 10 \text{ Н}</math>, <math>X_H = 13,33 \text{ Н}</math>, <math>Z_H = 50 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 21</b></p> <p>Груз <math>Q = 9 \text{ кН}</math> равномерно поднимается при помощи ворота радиусом <math>r = 0,1 \text{ м}</math>. Веревка сходит с ворота под углом <math>\alpha = 30^\circ</math> к горизонтали. На колесо радиусом <math>R = 0,15 \text{ м}</math> намотана цепь, несущая груз <math>G = 4 \text{ кН}</math>. Рукоятка <math>DE</math> вертикальна. Сила <math>\bar{P}</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>AB</math> и составляет угол <math>\beta = 60^\circ</math> с горизонталью. Размеры на рисунке даны в метрах. Найти величину силы <math>\bar{P}</math> и реакции подшипников <math>A</math> и <math>B</math>.</p> <p>Ответ: <math>P = 2 \text{ кН}</math>, <math>X_A = 4,88 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = -1,45 \text{ кН}</math>, <math>X_B = 1,91 \text{ кН}</math>, <math>Z_B = 2,68 \text{ кН}</math>.</p>	

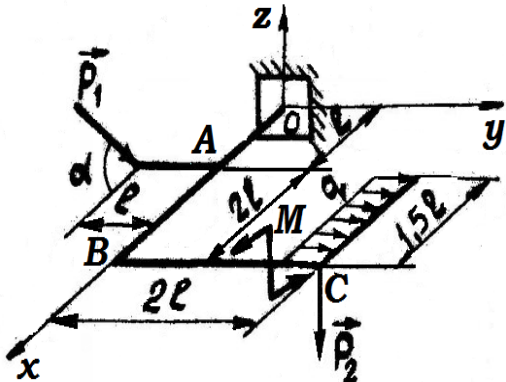
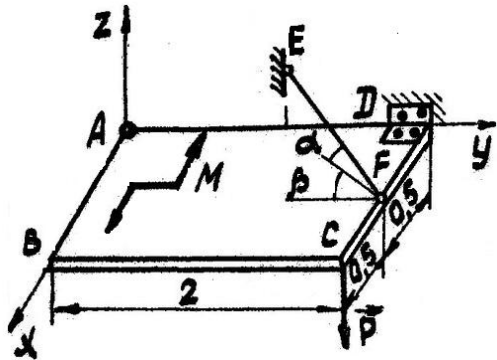
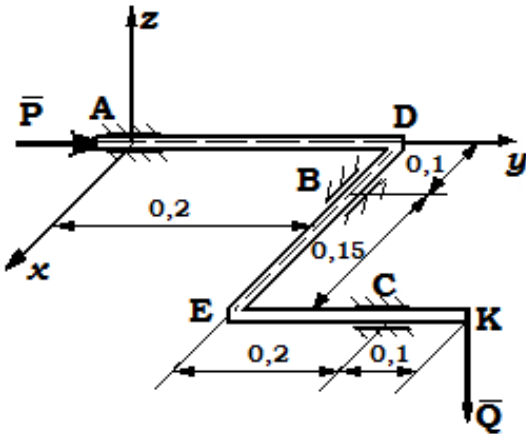
<p><b>Вариант 22</b></p> <p>Груз весом <math>Q = 50 \text{ Н}</math> поднимается при помощи вертикального ворота. Определить горизонтальную силу <math>P</math> приложенную к рукоятке ворота под углом <math>\alpha = 30^\circ</math>, а также реакции подпятника <math>A</math> и подшипника <math>B</math> при равновесии, если веревка <math>EK</math> параллельна рукоятке <math>CD</math> и если известны: вес барабана <math>G = 20 \text{ Н}</math>, радиус барабана <math>r = 0.1 \text{ м}</math>, расстояния <math>a = 0.25 \text{ м}</math>, <math>b = 0.35 \text{ м}</math>, <math>c = 0.15 \text{ м}</math>, <math>CD = 0.5 \text{ м}</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>P = 20 \text{ Н}</math>, <math>X_A = 2.5 \text{ Н}</math>, <math>Y_A = -33.5 \text{ Н}</math>, <math>Z_A = 20 \text{ Н}</math>, <math>X_B = -12.5 \text{ Н}</math>, <math>Y_B = 0.8 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 23</b></p> <p>Лестница опирается на гладкую стену и выступ на гладком полу в точках <math>B</math>, <math>C</math>, <math>A</math> и <math>D</math>. Определить реакции в указанных точках, если вес лестницы <math>P = 100 \text{ Н}</math> и приложен в ее центре.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>Z_A = 50 \text{ Н}</math>, <math>Y_B = 0</math>, <math>Y_C = 25 \text{ Н}</math>, <math>Y_D = -25 \text{ Н}</math>, <math>Z_D = 50 \text{ Н}</math></p>	
<p><b>Вариант 24</b></p> <p>Равносторонняя треугольная пластина <math>ADB</math> и невесомая прямоугольная пластина <math>DCEK</math> образуют неизменяемую систему. Пластина <math>ADB</math> расположена в вертикальной плоскости <math>xOy</math> и прикреплена к вертикальной стене при помощи подшипника <math>B</math> и подпятника <math>A</math>. Прямоугольная пластина <math>DCEK</math> горизонтальна и нагружена в точке <math>K</math> вертикальной силой <math>Q = 100 \text{ Н}</math>. Найти реакции подшипника и подпятника, если вес пластины <math>ADB</math> равен <math>P = 300 \text{ Н}</math>, <math>DK = 2 \text{ м}</math>, <math>BD = 1 \text{ м}</math>, <math>EK = 1 \text{ м}</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A = X_B = 173 \text{ Н}</math>, <math>Y_A = Y_B = 200 \text{ Н}</math>; <math>Z_A = 400 \text{ Н}</math>.</p>	



<p><b>Вариант 25</b></p> <p>На невесомую крестовину с дисками радиусом <math>R = 0,1</math> м действуют силы <math>P = 100</math> Н, <math>Q = 200</math> Н и пары сил с моментами <math>M_1 = 10</math> Н·м и <math>M_2 = 20</math> Н·м. Определить реакции опор в точках А и В, если <math>CO = OD = 1</math> м.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A = 60</math> Н, <math>Y_A = 120</math> Н, <math>X_B = 40</math> Н, <math>Y_B = 80</math> Н, <math>Z_B = 0</math>.</p>	
<p><b>Вариант 26</b></p> <p>Вал АВ, к которому жестко прикреплены невесомые стержни CD и DE, находится в равновесии. Ось стержня CD параллельна оси <math>Ax</math>, а стержня DE - оси <math>Ay</math>. Сила <math>\vec{P}</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>Ax</math>, и составляет с вертикалью угол <math>30^\circ</math>, сила <math>\vec{Q}</math> - в плоскости, перпендикулярной оси АВ, и составляет с осью стержня DE угол <math>\beta = 60^\circ</math>. В плоскости, перпендикулярной оси <math>Az</math>, к валу приложена пара сил с моментом <math>M = 0,4</math> кН·м. Размеры на рисунке даны в метрах. определить величину силы <math>\vec{Q}</math> и реакции опор А и В, если <math>P = 5</math> кН.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>Q = 1,73</math> кН, <math>X_A = 1,6</math> кН, <math>Y_A = 0,615</math> кН; <math>Z_A = 4,325</math> кН, <math>X_B = -3,1</math> кН, <math>Y_B = -1,02</math> кН.</p>	
<p><b>Вариант 27</b></p> <p>Вертикальный стержень ОА и горизонтальные стержни ВС и DE расположены взаимно перпендикулярно друг к другу и жестко скреплены между собой. В точках С и Е на стержни действуют силы <math>P_1 = 300</math> Н и <math>P_2 = 400</math> Н, составляющие углы <math>\alpha = 30^\circ</math> и <math>\beta = 60^\circ</math>. Пренебрегая весом стержней, определить давления стержня ОА на подшипник А и подпятник О, если <math>BC = 0,16</math> м, <math>AD = 0,2</math> м, <math>OB = 0,18</math> м, <math>BD = 0,22</math> м, <math>DE = 0,2</math> м.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A = 114</math> Н, <math>Y_A = 297,6</math> Н, <math>X_O = 35,7</math> Н, <math>Y_O = 48,8</math> Н, <math>Z_O = 459,8</math> Н.</p>	



<p><b>Вариант 28</b></p> <p>На невесомый коленчатый вал действуют силы <math>P = 100 \text{ Н}</math>, <math>Q = 200 \text{ Н}</math> и пара сил с моментом <math>M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}</math>. Сила <math>P</math> лежит в вертикальной плоскости, проходящей через точки <math>O</math>, <math>A</math> и <math>D</math>. Сила <math>Q</math> параллельна <math>xOz</math>. Угол <math>\alpha = 30^\circ</math>. Плоскость пары сил с моментом <math>M</math> перпендикулярна <math>BD</math>. Определить реакцию стержня <math>FA</math>, шарнира <math>O</math> и подшипника <math>C</math>.</p> <p>Ответ: <math>S = -398 \text{ Н}</math>, <math>X_0 = -148 \text{ Н}</math>, <math>Y_0 = 325,9 \text{ Н}</math>, <math>Z_0 = -332 \text{ Н}</math>, <math>X_C = 300 \text{ Н}</math>, <math>Z_C = 382,1 \text{ Н}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 29</b></p> <p>Груз <math>Q = 8 \text{ кН}</math> равномерно поднимается при помощи ворота радиусом <math>R = 0,15 \text{ м}</math>. веревка сходит с ворота под углом <math>\alpha = 50^\circ</math> к горизонтали. К колесу радиусом в <math>0,3 \text{ м}</math> подвешен груз. Стержень <math>DE</math>, несущий рукоятку <math>EK</math>, перпендикулярен оси <math>AB</math>. Рукоятка <math>EK</math> горизонтальна. Сила <math>\bar{P}</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>AB</math>, и составляет с вертикалью угол <math>\beta = 60^\circ</math>, причем <math>P = 2 \text{ кН}</math>. Размеры на рисунке даны в метрах. Найти величину силы противовеса <math>G</math> и реакции подшипников <math>A</math> и <math>B</math>.</p> <p>Ответ: <math>G = 1,51 \text{ кН}</math>, <math>X_A = 3,89 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = -2,18 \text{ кН}</math>, <math>X_B = 4,74 \text{ кН}</math>, <math>Z_B = 0,69 \text{ кН}</math>.</p>	
<p><b>Вариант 30</b></p> <p>Груз <math>Q = 2 \text{ кН}</math> равномерно поднимается при помощи ворота. Рукоятка <math>KE</math> перпендикулярна оси <math>AB</math> ворота. Сила <math>P</math> лежит в плоскости, перпендикулярной оси <math>AB</math>, и составляет угол <math>\alpha = 30^\circ</math> с вертикалью. К колесу в плоскости, перпендикулярной оси <math>AB</math> приложена пара сил с моментом <math>M = 0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}</math>. Размеры на чертеже даны в метрах, <math>R = 0,1 \text{ м}</math>. Найти силу <math>P</math> реакции подшипников <math>A</math> и <math>B</math>.</p> <p>Ответ: <math>P = 3,08 \text{ кН}</math>, <math>Y_A = 1,85 \text{ кН}</math>, <math>Z_A = 4,8 \text{ кН}</math>, <math>Y_B = -0,31 \text{ кН}</math>, <math>Z_B = -0,13 \text{ кН}</math>.</p>	

<p><b>Вариант 30</b></p> <p>Заделанный в стену стержень нагружен равномерно распределенной силой интенсивностью в 60 Н/м, парой сил с моментом <math>M = 20</math> Н·м, силой <math>P_1 = 20</math> Н, расположенной в вертикальной плоскости под углом <math>\alpha = 60^\circ</math> к плоскости горизонта и вертикальной силой <math>P_2 = 10</math> Н, приложенной в точке С. Определить реакцию заделки.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_O = 10</math> Н, <math>Y_O = -45</math> Н, <math>Z_O = 27,3</math> Н, <math>M_{Ax} = 1,35</math> Н·м, <math>M_{Ay} = -43,6</math> Н·м, <math>M_{Az} = -45,6</math> Н·м.</p>	
<p><b>Вариант 31</b></p> <p>Однородная прямоугольная плита весом <math>Q = 10</math> Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира А, петли D и удерживается в горизонтальном положении нитью EF, присоединенной одним концом к плите, другим - к стене. На плиту действуют сила <math>P = 5</math> Н и пара сил с моментом <math>M = 20</math> Н·м. Определить натяжение нити Т и реакции опор, если <math>\alpha = 30^\circ</math>, <math>\beta = 60^\circ</math>.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>T = 40</math> Н, <math>X_A = -5,68</math> Н, <math>Y_A = 17,3</math> Н, <math>Z_A = 7,5</math> Н, <math>X_D = 35,68</math> Н, <math>Z_D = -10</math> Н.</p>	
<p><b>Вариант 32</b></p> <p>На невесомый коленчатый стержень ADBECK, расположенный в горизонтальной плоскости xAy, действуют силы <math>P = 200</math> Н (линия действия направлена вдоль участка AD) и <math>Q = 400</math> Н (линия действия вертикальна). Определить реакции подшипников А, В и С.</p> <p><i>Ответ:</i> <math>X_A = 50</math> Н, <math>Z_A = -600</math> Н, <math>Y_B = -200</math> Н, <math>Z_B = 1000</math> Н, <math>X_C = -50</math> Н, <math>Z_C = 0</math>.</p>	

**Примеры выполнения заданий по теме «Определение реакций опор твердого тела под действием пространственной системы сил».**

**Пример 1.**

Однородная плита ABCD (рис. 2.3) находится под действием силы тяжести  $G$ , сосредоточенной силы  $P$  и равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$ .

*Дано:*  $AB = 1$  м;  $BC = 2$  м;  $P = 9$  кН;  $q = 12$  кН/м,  $G = 10$  кН.

*Определить:* реакции связей.

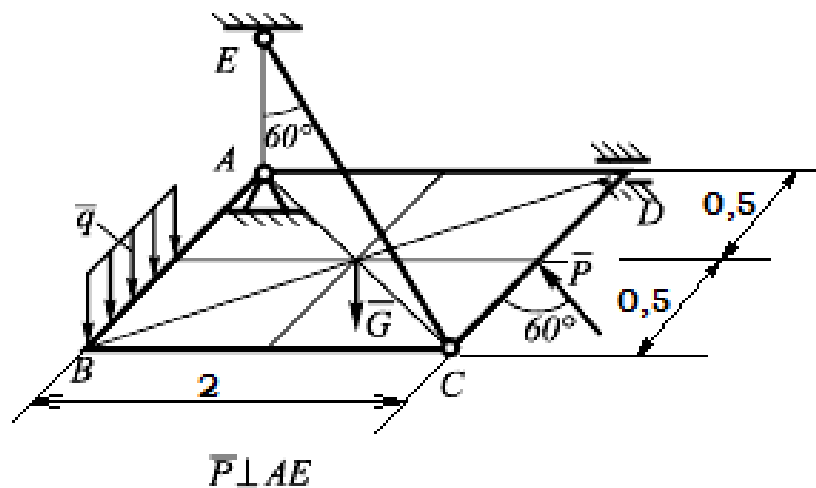


Рис. 2.3. Исходная схема

**Решение.**

1. Изображаем плиту и действующие на нее силы (рис. 2.4). Силу тяжести однородной плиты  $G$  прикладываем к центру масс (геометрическому центру). Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой  $Q = q \cdot (AB/2) = 6$  кН, которая приложена на расстоянии 0,25 м от точки В.

2. Реакцию невесомого стержня ЕС, обозначенную буквой  $S$ , направляем вдоль стержня. Реакцию сферического шарнира А раскладываем на три составляющие  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ . Реакцию цилиндрического шарнира D раскладываем на две составляющие  $\bar{X}_D$ ,

$\bar{Z}_D$ . Начало системы координат помещаем в точку  $A$ , так как в ней сходятся линии действия трех из шести неизвестных сил.

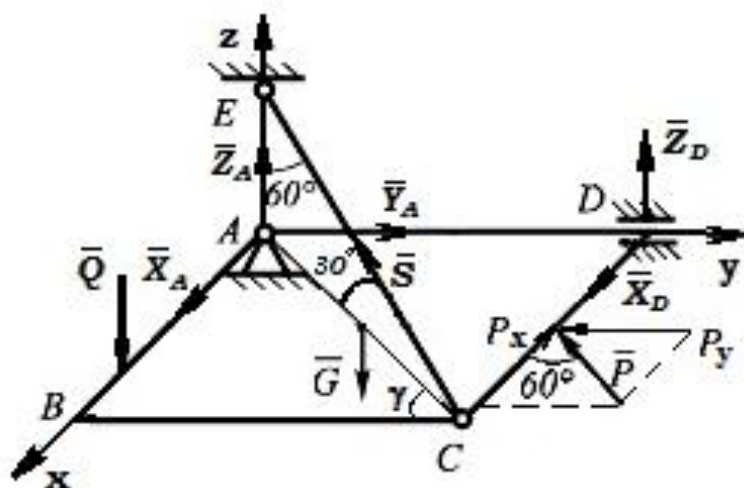


Рис. 2.4. Расчетная схема

3. Составляем уравнения равновесия плиты. Поскольку на нее действует произвольная пространственная система сил, то имеем шесть уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; & X_A + X_D - P \cos 60^\circ - S \sin 60^\circ \sin \gamma &= 0; \\
 \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; & Y_A - P \sin 60^\circ - S \sin 60^\circ \cos \gamma &= 0; \\
 \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; & Z_A + Z_D - G - Q + S \cos 60^\circ &= 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) &= 0; & Z_D \cdot AD + S \cos 60^\circ \cdot AD - G \cdot \frac{AD}{2} &= 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) &= 0; & -S \cos 60^\circ \cdot AB + G \cdot \frac{AB}{2} + Q \cdot \frac{3}{4} AB &= 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) &= 0; & -X_D \cdot AD - P \sin 60^\circ \cdot \frac{AB}{2} + P \cos 60^\circ \cdot BC &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Из рисунка 2.4 видно, что  $\gamma$  – угол между проекцией силы  $S$  на плоскость  $xy$  и осью  $y$ . Из треугольника  $ABC$  находим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \sin \gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0,4475;$$

$$\cos \gamma = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0,8944. \quad (13)$$

При вычислении момента силы  $P$  часто удобно разложить ее на составляющие  $P_x$  и  $P_y$ , для которых плечи легко вычисляются, в частности на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться **теоремой Вариньона**: тогда  $m_A(P) = m_A(P_x) + m_A(P_y)$ .

**Замечание.** Для составления уравнений равновесия можно изобразить чертеж пластины в проекциях на координатные плоскости (рисунок 2.5).

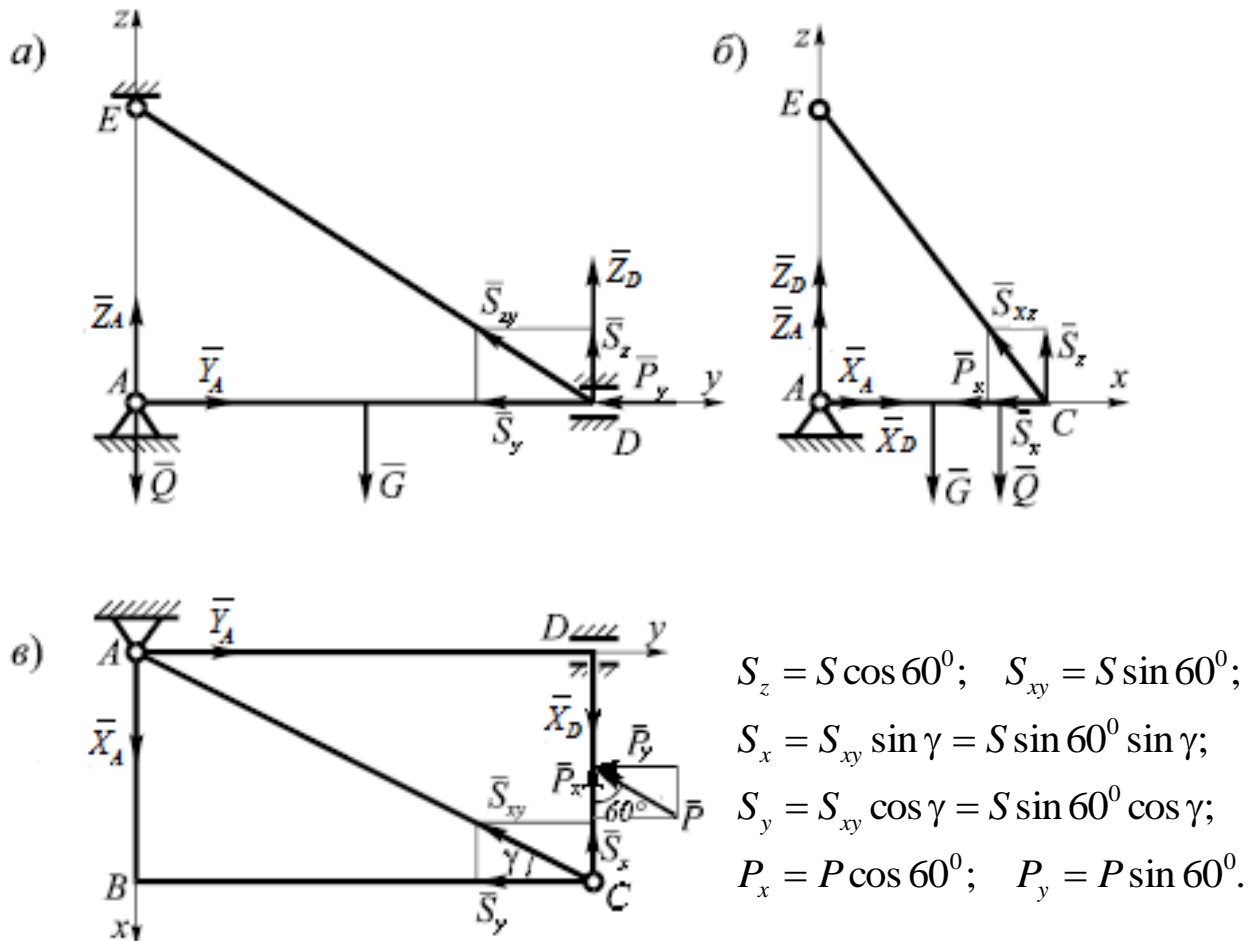


Рис.2.5. Проекция сил и реакций связей на координатные плоскости: а – плоскость  $Azu$ ; б – плоскость  $Axz$ ; в – плоскость  $Axy$

Тогда по проекции на плоскость  $zAy$  можно составить уравнения (рис. 2.5, а):

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= 0; \quad Z_A + Z_D + S_z - G - Q = 0; \\
\sum F_y &= 0; \quad Y_A - P_y - S_y = 0; \\
\sum M_{iAx} &= 0; \quad -G \cdot \frac{AD}{2} + S_z \cdot AD + Z_D \cdot AD = 0;
\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично по проекции на плоскость  $xAz$  (рис. 2.5, б):

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= 0; \quad Z_A + Z_D + S_z - G - Q = 0; \\
\sum F_x &= 0; \quad X_D + X_A - P_x - S_x = 0; \\
\sum M_{iAy} &= 0; \quad -G \cdot \frac{AC}{2} + S_z \cdot AC + Q \cdot \frac{3}{4} AC = 0;
\end{aligned} \tag{15}$$

И по проекции на плоскость  $xAy$  (рис. 2.5, в):

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= 0; \quad Y_A - S_y - P_y = 0; \\
\sum F_x &= 0; \quad X_D + X_A - P_x - S_x = 0; \\
\sum M_{iAz} &= 0; \quad -X_D \cdot AD + P_x \cdot AD - P_y \cdot \frac{1}{2} DC = 0;
\end{aligned} \tag{16}$$

Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться в правильности уравнений (14) – (16), составленных с использованием описанного подхода

4. Решая систему уравнений (12) находим:

$$\begin{aligned}
X_D &= \frac{-P \sin 60^\circ \cdot 0,5 + P \cos 60^\circ \cdot 2}{2} = 2,551 \text{ кН}; \\
S &= \frac{G \cdot 0,5 + Q \cdot 0,75}{\cos 60^\circ \cdot 1} = 19 \text{ кН} \\
Z_D &= \frac{-S \cos 60^\circ \cdot 2 + G \cdot 1}{2} = -4,5 \text{ кН}; \\
Z_A &= -Z_D + G + Q - S \cos 60^\circ = 11 \text{ кН}; \\
Y_A &= P \sin 60^\circ + S \sin 60^\circ \cos \gamma = 22,52 \text{ кН}; \\
X_A &= P \cos 60^\circ + S \sin 60^\circ \sin \gamma - X_D = 9,301 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

Знак "минус", получившийся при расчете реакции  $Z_D$ , показывает, что её действительное направление противоположно изображенному на рисунке 3.

Равнодействующая силы реакции сферического шарнира  $A$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 26,53 \text{ кН}$$

Равнодействующая силы реакции цилиндрического шарнира  $D$ :

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Z_D^2} = 5,173 \text{ кН}.$$

## Пример 2.

Вал  $AB$  к которому жестко прикреплены стержни  $CD$  к  $EK$ , находится в равновесии. Ось стержня  $CD$  параллельна оси  $Ax$ , а стержня  $EK$  – оси  $Ay$ . Сила  $\bar{P}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала  $AB$  и составляет с осью стержня  $EK$  угол  $\alpha=30^\circ$ , сила  $\bar{Q}$  – в плоскости, перпендикулярной оси  $Ax$  и составляет с горизонталью угол  $\beta=60^\circ$ . Пара сил с моментом  $M=0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$  расположена в плоскости, наклонной к оси  $AB$  под углом  $\alpha=30^\circ$ ,  $\bar{F} \parallel Ax$ ;  $LG \perp Ax$ ;  $P=2 \text{ кН}$ . Размеры на рисунке даны в метрах.

*Определить:* Величину силы  $Q$  и реакции опор  $A$  и  $B$  (рис. 2.6).

## Решение.

1. Рассмотрим равновесие вала  $AB$ . На него действуют заданные силы  $P$ ,  $Q$  и пара сил с моментом  $M$ , а также реакции связей. Реакцию подпятника или упорного подшипника разложим на три составляющие  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ , цилиндрического (подшипника) — на две составляющие  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника).

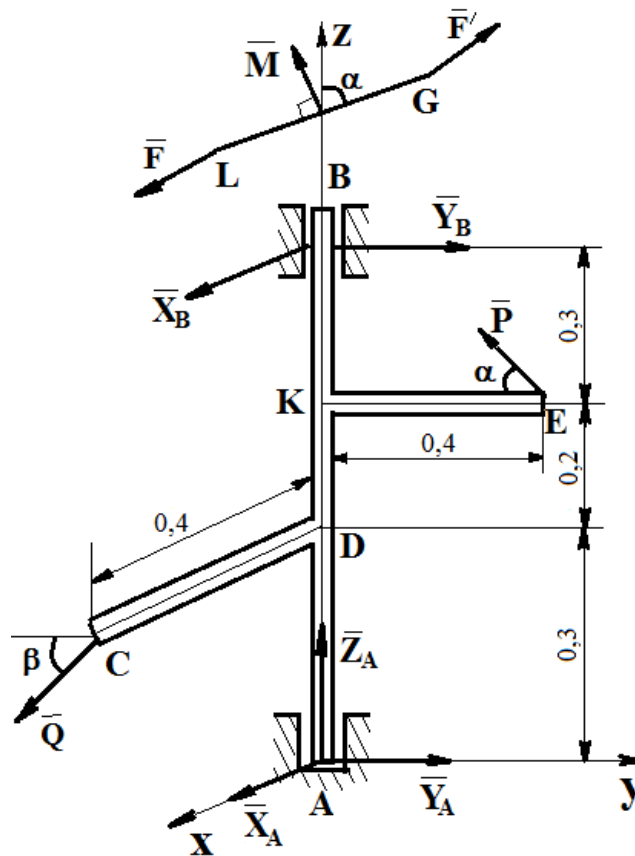


Рис. 2.6. Расчетная схема

2. Составляем уравнения равновесия вала. Поскольку на него действует произвольная пространственная система сил, то решая систему уравнений (10) и используя равенства (11), получим:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \quad X_A + X_B - P \sin \alpha = 0; \\
 \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; \quad Y_A + Y_B - Q \cos \beta - P \cos \alpha = 0; \\
 \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; \quad Z_A - Q \sin \beta = 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) &= 0; \quad -Y_B \cdot AB + P \cos \alpha \cdot AK + Q \cos \beta \cdot AD = 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) &= 0; \quad X_B \cdot AB - P \sin \alpha \cdot AK + Q \sin \beta \cdot CD - M \cos \alpha = 0; \\
 \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) &= 0; \quad -Q \cos \beta \cdot CD + P \sin \alpha \cdot KE + M \sin \alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$



Для определения момента силы  $Q$ , относительно осей  $y, z$  разложим  $Q$ , на составляющие  $Q_y$ , и  $Q_z$ , параллельные осям  $y$  и  $z$  ( $Q_y = Q \cos \beta$ ,  $Q_z = Q \sin \beta$ ), и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов силы  $P$ , относительно осей  $x, y$ . Разложим  $P$ , на составляющие  $P_y$ , и  $P_z$ , параллельные осям  $x$  и  $y$  ( $P_x = P \sin \alpha$ ,  $P_y = P \cos \alpha$ ).

**Замечание.** Для составления уравнений равновесия можно изобразить чертеж пластины в проекциях на координатные плоскости (рис. 2.7).

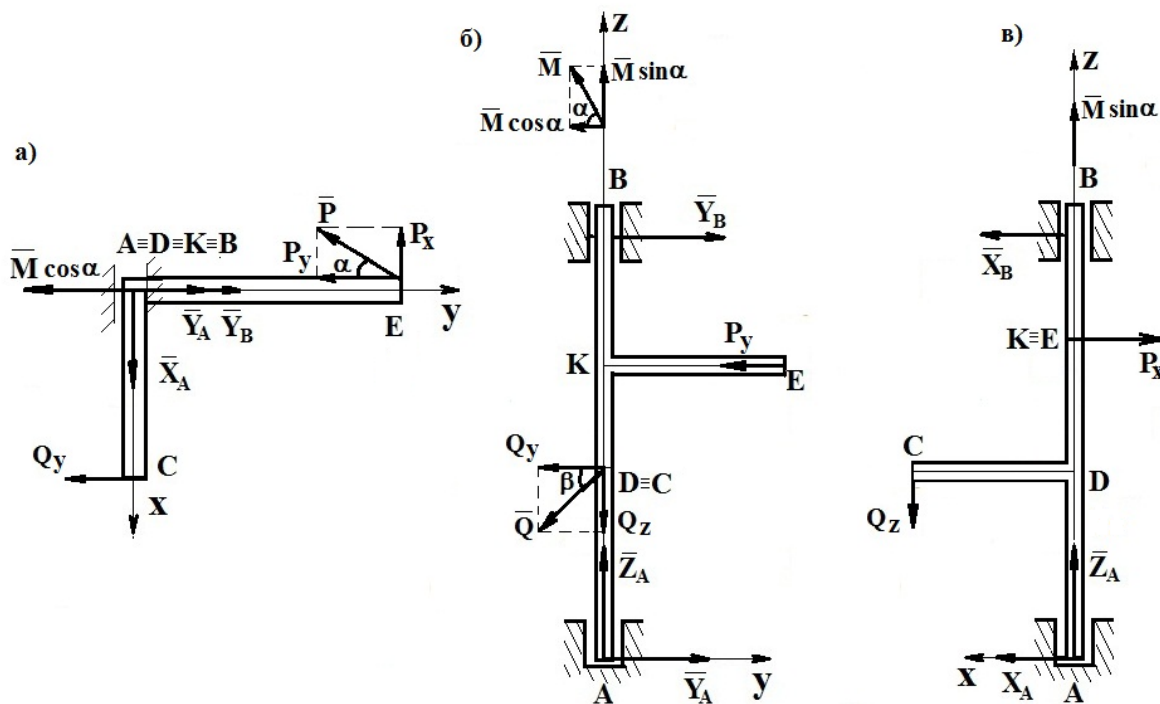


Рисунок 2.7. Проекция сил и реакций связей на координатные плоскости:  $a$  – плоскость  $Axu$ ;  $б$  – плоскость  $Auz$ ;  $в$  – плоскость  $Axz$

Проекция на плоскость  $xAu$  можно составить уравнения (рис.2.7,  $a$ ):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \quad X_A - P_x = 0; \\ \sum F_y &= 0; \quad Y_A + Y_B - P_y = 0; \\ \sum M_{iAz} &= 0; \quad -Q_y \cdot CD + P_x \cdot KE + M \sin \alpha = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично по проекции на плоскость  $yAz$  (рис. 2.7, б):

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0; \quad Z_A - Q_z = 0; \\ \sum F_y &= 0; \quad Y_B + Y_A - Q_y - P_y = 0; \\ \sum M_{iAx} &= 0; \quad Q_y \cdot AD + P_y \cdot AK - Y_B \cdot AB = 0;\end{aligned}\tag{19}$$

И по проекции на плоскость  $xAz$  (рис. 2.7, в):

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0; \quad Z_A - Q_z = 0; \\ \sum F_x &= 0; \quad X_B + X_A + P_x = 0; \\ \sum M_{iAy} &= 0; \quad Q_z \cdot CD - P_x \cdot AK + X_B \cdot AB - M \cos \alpha = 0;\end{aligned}\tag{20}$$

3. Решая систему уравнений (17) и используя равенства 18-20 находим:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{P \sin 30^\circ \cdot 0,4 + M \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ \cdot 0,4} = 3 \text{ кН}; \\ X_B &= \frac{P \sin 30^\circ \cdot 0,5 - Q \sin 60^\circ \cdot 0,4 + M \cos 30^\circ}{0,8} = 0,24 \text{ кН}; \\ Y_B &= \frac{P \cos 30^\circ \cdot 0,5 + Q \cos 60^\circ \cdot 0,3}{0,8} = 1,65 \text{ кН}; \\ Z_A &= Q \sin 60^\circ = 2,6 \text{ кН}; \\ Y_A &= -Y_B + Q \cos 60^\circ + P \cos 30^\circ = 1,58 \text{ кН}; \\ X_A &= -X_B + P \sin 30^\circ = 0,76 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Равнодействующая силы реакции подпятника  $A$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 3,13 \text{ кН}$$

Равнодействующая силы реакции цилиндрического шарнира  $B$ :

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 1,67 \text{ кН}.$$

### 3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

#### С-4. Определение центра тяжести плоских фигур

##### Краткие теоретические положения

*Центром тяжести тела* называется точка приложения его силы тяжести. Силы тяжести элементов тела представляют собой систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в центре Земли. Однако углы между этими линиями настолько малы, что в технических расчетах ими пренебрегают. Поэтому центр тяжести тела можно рассматривать как центр системы параллельных сил, образуемых силами тяжести его элементов.

Если на  $i$ -ю часть тела действует сила тяжести  $P_i$ , то координаты центра тяжести тела определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}; \quad y_C = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}; \quad z_C = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}, \quad (1)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  - координаты центров тяжести частей.

Если тело представляет собой однородную пластину постоянной толщины, то координаты ее центра тяжести:

$$x_C = \frac{1}{S} \sum S_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum S_k y_k, \quad (2)$$

где  $S = \sum S_k$  - площадь всего тела;  $x_k, y_k$  - координаты центров тяжести частей тела.

Координаты центра тяжести объемного тела постоянной плотности находятся по формулам:

$$x_C = \frac{1}{V} \sum V_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum V_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum V_k z_k \quad (3)$$

где  $V = \sum V_k$  - объем всего тела  $V_k$  - объём  $k$ -ой части.

Для тела, которое можно представить в виде тонкой линии в пространстве, формулы для координат центра тяжести получаются в виде:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum l_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum l_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum l_k z_k, \quad (4)$$

где  $L = \sum l_k$  - длина всей линии;  $l_k$  - длины ее частей.

Если однородное тело имеет *плоскость, ось или центр симметрии*, то его центр тяжести находится на плоскости, на оси или в центре симметрии.

Для тел, которые можно разбить на части, центры тяжести которых определяются без труда, используется метод *разбиения*, основанный на непосредственном использовании формул типа (2), (3), (4).

Для тел, имеющих вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны, используется метод дополнения. Согласно этому методу (например, в случае одного выреза) координаты центра тяжести находятся по формуле (2).

$$X_c = \frac{S_1 X_1 - S_2 X_2}{S_1 - S_2}, \quad Y_c = \frac{S_1 Y_1 - S_2 Y_2}{S_1 - S_2} \quad (5)$$

где  $S_1$  - площадь без выреза;  $X_1, Y_1$  - координаты центра тяжести;  $S_2$  - площадь выреза;  $X_2, Y_2$  - координаты центра тяжести выреза.

При рассмотрении однородных тел правильной геометрической формы используется интегрирование. Для пространственных тел в формулах (3) суммы обращаются в интегралы по объему:

$$X_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} X dV, \quad Y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} Y dV, \quad Z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} Z dV. \quad (6)$$

Для плоских фигур используются интегралы по площади:

$$X_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} X dS, \quad Y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} Y dS, \quad Z_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} Z dS. \quad (7)$$

Для линейных тел в пространстве используются криволинейные интегралы:

$$X_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} X dL, \quad Y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} Y dL, \quad Z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} Z dL. \quad (8)$$

### Порядок определения координат центров тяжести однородных тел

**I.** Для нахождения положения центров тяжести однородных тел *способом разбиения* следует:

1. Разбить фигуру на части, положения центров тяжести  $C_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) которых, известны.
2. Ввести декартову систему координат.
3. Определить центры масс, а так же величины  $l_k$ ,  $S_k$  или  $V_k$  каждой из частей.
4. Вычислить координаты центра тяжести искомой фигуры по формулам (2), (3), (4).

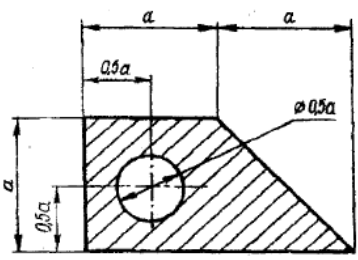
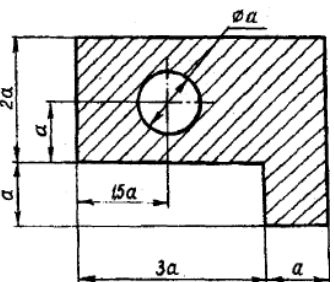
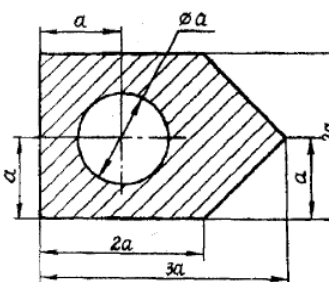
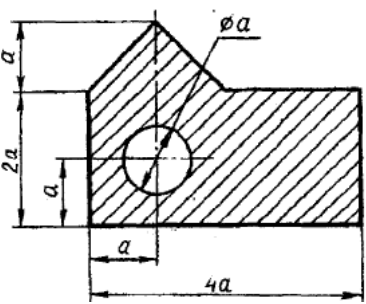
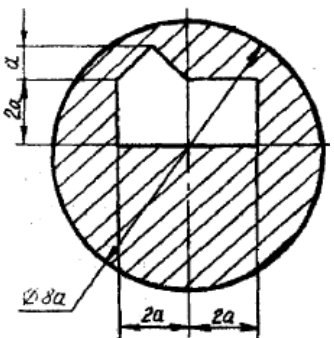
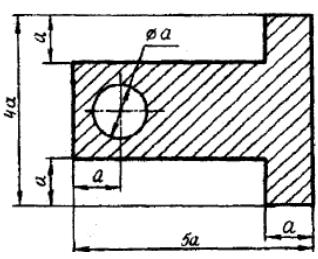
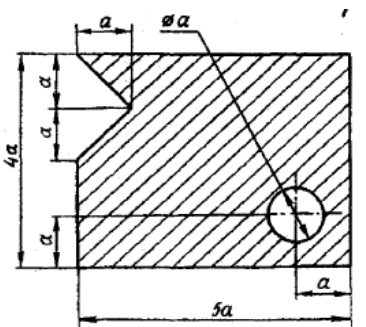
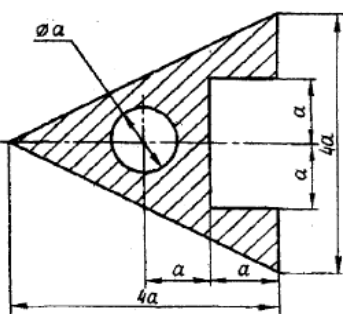
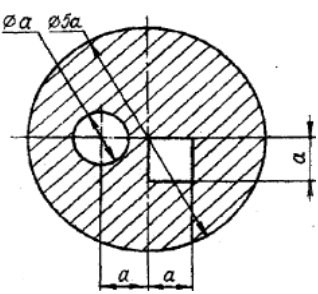
### **Вопросы для самоконтроля**

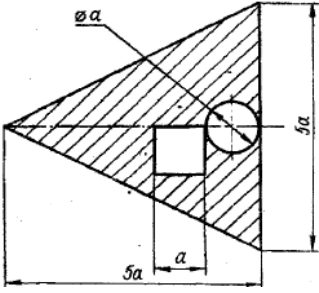
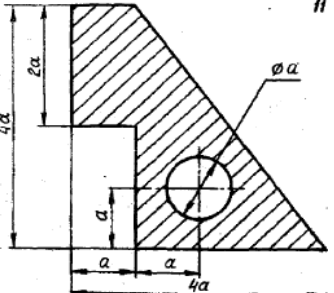
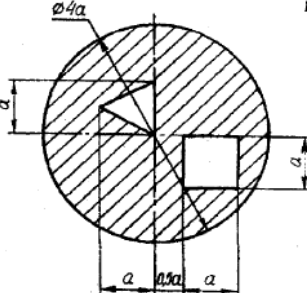
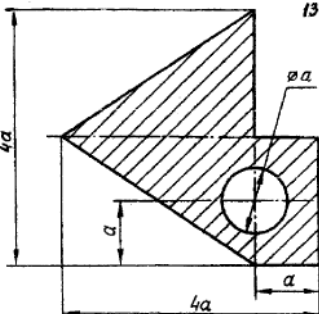
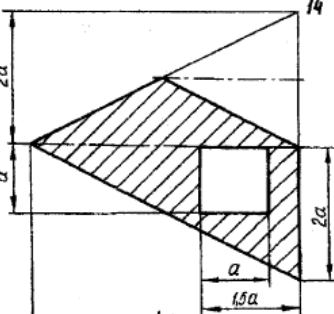
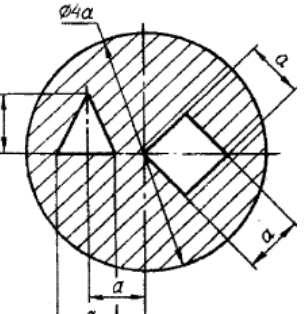
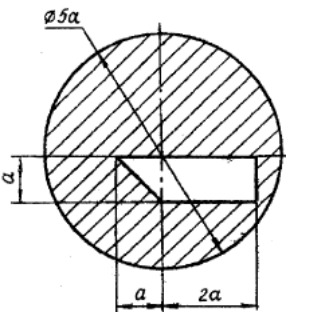
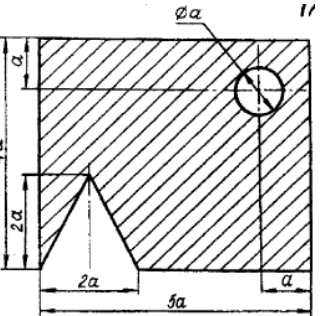
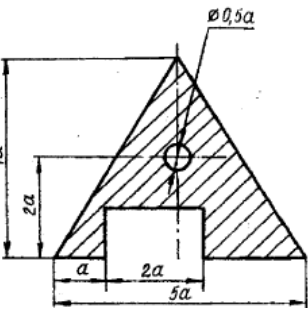
1. Дать определение центра тяжести.
2. Как найти центр тяжести плоских фигур?
3. Методы определения центра тяжести тел?

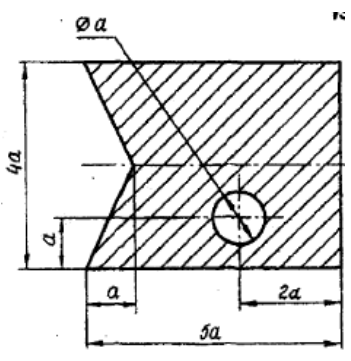
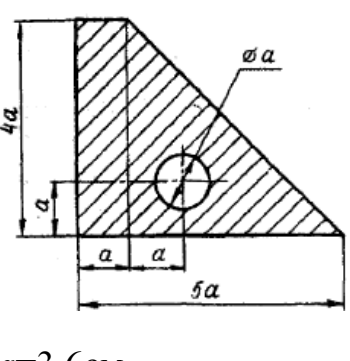
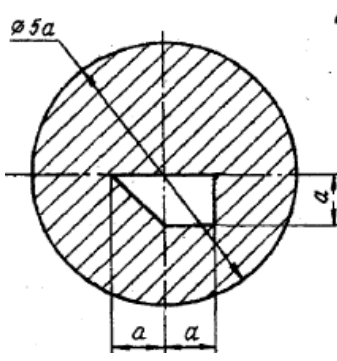
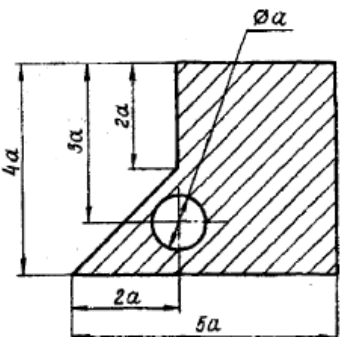
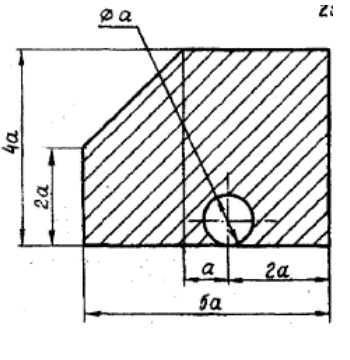
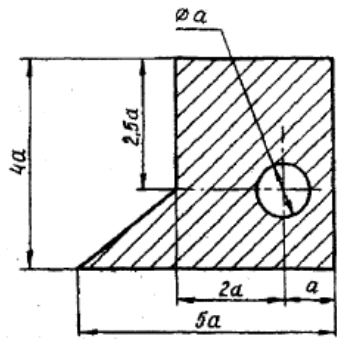
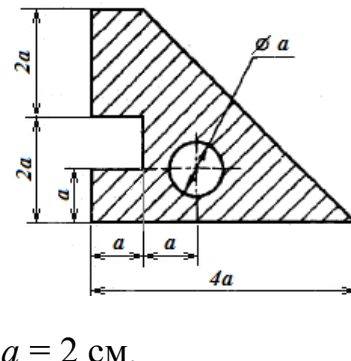
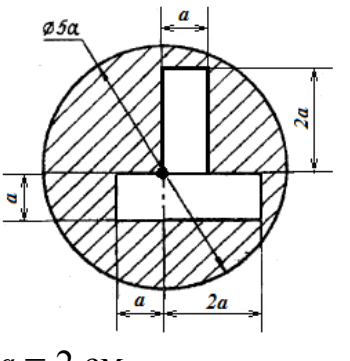
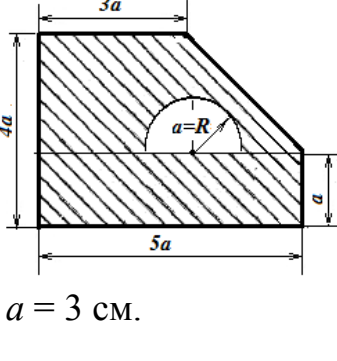
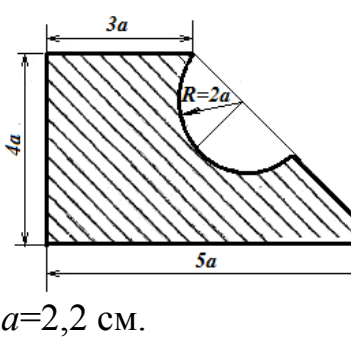
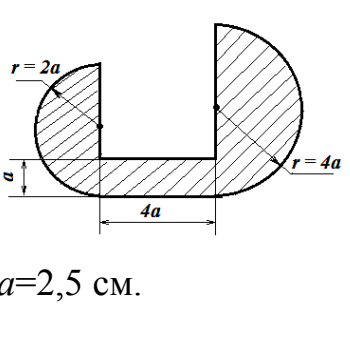
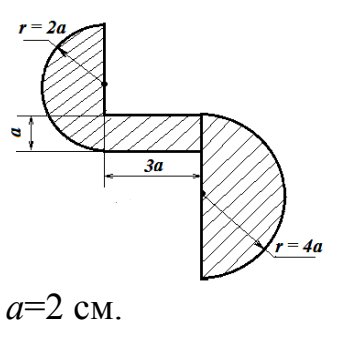
## Варианты заданий для самостоятельного решения

Найти координаты центра тяжести заштрихованной части изображенной плоской фигуры (тал.3.1).

Таблица 3.1

1	 <p><math>a=8,4\text{см}</math></p>	2	 <p><math>a=4,8\text{см}</math></p>	3	 <p><math>a=2,5\text{см}</math></p>
4	 <p><math>a=5,2\text{см}</math></p>	5	 <p><math>a=2,6\text{см}</math></p>	6	 <p><math>a=3,4\text{см}</math></p>
7	 <p><math>a=4,4\text{см}</math></p>	8	 <p><math>a=5\text{см}</math></p>	9	 <p><math>a=3,6\text{см}</math></p>

10	 <p><math>a=3,2\text{cm}</math></p>	11	 <p><math>a=4,2\text{cm}</math></p>	12	 <p><math>a=4,8\text{cm}</math></p>
13	 <p><math>a=4,4\text{cm}</math></p>	14	 <p><math>a=2,8\text{cm}</math></p>	15	 <p><math>a=5\text{cm}</math></p>
16	 <p><math>a=2,4\text{cm}</math></p>	17	 <p><math>a=3,6\text{cm}</math></p>	18	 <p><math>a=3,8\text{cm}</math></p>

19	 $a=3,6\text{cm}$	20	 $a=3,6\text{cm}$	21	 $a=2,8\text{cm}$
22	 $a=3,0\text{cm}$	23	 $a=2,4\text{cm}$	24	 $a=3,6\text{cm}$
25	 $a = 2 \text{ cm.}$	26	 $a = 2 \text{ cm.}$	27	 $a = 3 \text{ cm.}$
28	 $a=2,2 \text{ cm.}$	29	 $a=2,5 \text{ cm.}$	30	 $a=2 \text{ cm.}$



## Примеры выполнения заданий по теме «Определение центра тяжести плоских фигур»

**Пример 1 .** Рассчитать центр тяжести фигуры, размеры которой показаны на рисунке 3.1.

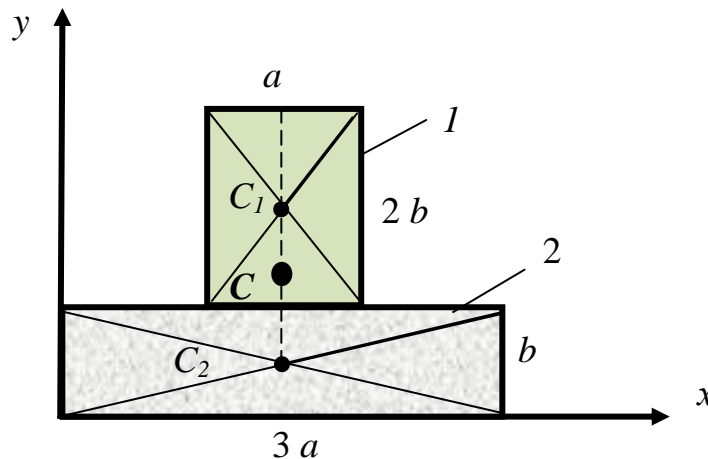


Рис. 3.1. Общий вид фигуры

**Решение:**

1. Разобьем данную фигуру на несколько частей.

2. Рассчитаем площади полученных фигур.

$$S_1 = 3ab; S_2 = 2ab; S = S_1 + S_2 = 3ab + 2ab = 5ab.$$

3. Найдём координаты центра масс. Расчеты выполним с помощью таблицы 3.2.

Таблица 3.2

№ фигуры	$S_i, \text{см}^2$	$X_i, \text{см}$	$Y_i, \text{см}$	$S_i \cdot X_i, \text{см}^3$	$S_i \cdot Y_i, \text{см}^3$
1	$3ab$	$1,5a$	$0,5b$	$4,5 a^2b$	$1,5 ab^2$
2	$2ab$	$1,5a$	$2b$	$3 a^2b$	$4 ab^2$
$\Sigma$	$5ab$			$7,5 a^2b$	$5,5 ab^2$

$$X_C = (S_1 \cdot X_1 + S_2 \cdot X_2) / (S_1 + S_2) = 7,5 a^2b / 5ab = 1,5a,$$

$$Y_C = (S_1 \cdot Y_1 + S_2 \cdot Y_2) / (S_1 + S_2) = 5,5 a^2b / 5ab = 1,1b.$$

Центр тяжести  $C$  пластины:  $C(1,5a; 1,1b)$ .

## Пример 2.

Из однородной пластины в виде прямоугольного треугольника  $OAB$  с основанием  $OB$  и высотой  $OA$  вырезан полукруг радиусом  $R$  (рис. 3.2). Определить координаты центра тяжести  $C$  оставшейся заштрихованной части треугольника, если  $OB = 60$  см,  $OA = 45$  см,  $R = 20$  см.

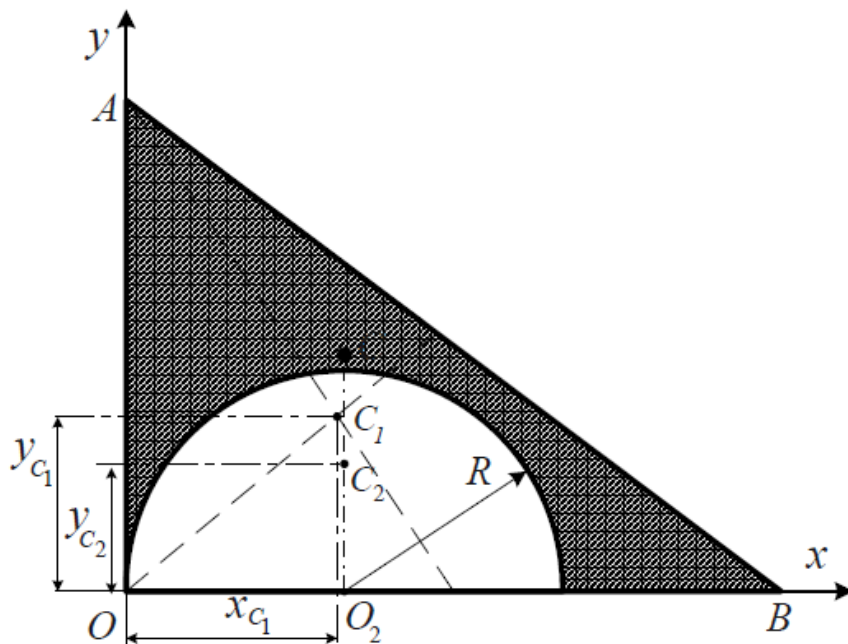


Рис. 3.2. Общий вид фигуры

## Решение.

Для нахождения координат центра тяжести этой пластины воспользуемся *способом дополнения*. Примем вершину  $O$  треугольника  $OAB$  за начало декартовой системы координат  $Oxy$ . Платину рассматриваем как фигуру, составленную из двух частей: треугольника  $OAB$  с центром тяжести  $C_1$  в точке пересечения его медиан; и выреза в виде полукруга радиусом  $R = 20$  см, с центральным углом  $2\alpha = \pi$  с центром тяжести  $C_2$ , лежащим на оси его симметрии параллельной оси  $Oy$  (рис.3.2).

Вычислим площади  $S_1$ ,  $S_2$  и координаты центров тяжести  $C_1$  и  $C_2$  частей пластины, подставляя данные задачи:

1) площадь треугольника  $OAB$

$$S_1 = S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 1350 \text{ см}^2$$

Координаты центра тяжести прямоугольного треугольника найдем по формулам:

$$x_{C_1} = \frac{1}{3} OB = 20 \text{ см}, \quad y_{C_1} = \frac{1}{3} OA = 15 \text{ см};$$

2) площадь полукруга радиусом  $R = 20$  см отрицательна, так как она вычитается из площади треугольника  $OAB$

$$S_2 = - \frac{\pi R^2}{2} = - 628 \text{ см}^2,$$

$$x_{C_2} = OO_2 = R = 20 \text{ см},$$

Координату  $y_{C_2}$  вычисляем по формуле:

$$y_{C_2} = O_2 C_2 = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2 \cdot R \sin \frac{\pi}{2}}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi} = 8,49 \text{ см}.$$

Сведем данные в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

№ фигуры	$S_i, \text{ см}^2$	$X_i, \text{ см}$	$Y_i, \text{ см}$	$S_i \cdot X_i, \text{ см}^3$	$S_i \cdot Y_i, \text{ см}^3$
1	1350	20	15	27 000	20 250
2	– 628	20	8,49	–12 560	–5 331, 72
$\Sigma$	722			14 440	14 918, 28

Координаты центра тяжести  $C$  треугольника из которого вырезан полукруг находим по формулам (5):

$$x_C = \frac{S_1 x_{C_1} + S_2 x_{C_2}}{S} = \frac{20 \cdot 1350 - 20 \cdot 628}{722} = 20 \text{ см},$$

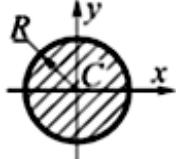
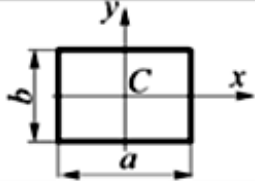
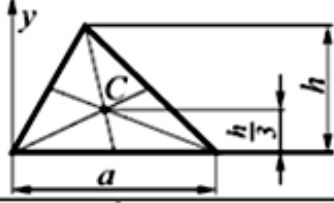
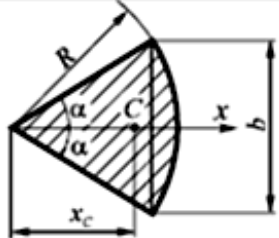
$$y_C = \frac{S_1 y_{C_1} + S_2 y_{C_2}}{S} = \frac{15 \cdot 1350 - 8,49 \cdot 628}{722} = 20,66 \text{ см}.$$

Координата центра тяжести заштрихованной части треугольника C (20; 20,66) (рис.3.2).

*Примечание:* площади и координаты центров тяжести плоских фигур, встречающихся в задании, приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4

Площади и координаты центров тяжести плоских фигур

Наименование	Расчетная схема	Площадь	Координаты центра тяжести
Круг		$S = \pi R^2$	$x_C = 0;$ $y_C = 0$
Прямоугольник		$S = ab$	$x_C = \frac{a}{2}; y_C = \frac{b}{2}$
Треугольник		$S = \frac{1}{2} ah$	$y_C = \frac{1}{3} h$
Круговой сектор		$S = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3S}$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.
2. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие / под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - Изд. 51-е, стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 448 с. - ISBN 978-5-9511-00 19-1. - Текст : непосредственный.
3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. - Текст : электронный
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / под общ. ред. А. А. Яблонского. - 18-е изд., стер. - Москва : Кнорус, 2011. - 392 с. - Текст : непосредственный.
5. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. Ч. 1. - 208 с. - Текст : электронный.
6. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. Ч. 2. - 140 с. – Текст : электронный.
7. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.

Приложение 1  
(Пример оформления  
титульного листа РГР)

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА**

по дисциплине «Теоретическая механика»

Выполнил: студент гр. \_\_\_\_\_  
(ФИО)

Проверил: \_\_\_\_\_  
(должность/ степень) (ФИО)

Курск 20\_\_\_\_г.

Приложение 2  
(Пример оформления листа РГР)

ФИО \_\_\_\_\_, гр. \_\_\_\_\_, вариант № \_\_\_\_\_

Название работы

Дано:

\_\_\_\_\_  
Найти:

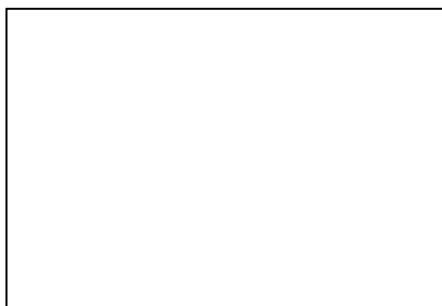


Рис. Исходная схема

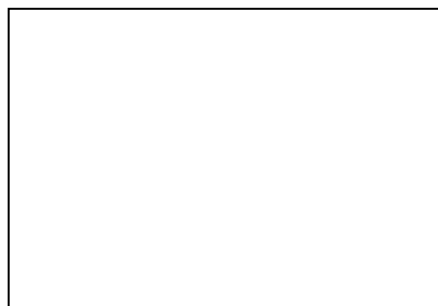


Рис. Расчетная схема

Решение:

*Пояснения к задаче см. в примерах методических указаний.*

*Ответ:*