

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 02.05.2024 10:12:15
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 11 » 05 2019 г.



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Дискретная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная
техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составитель Е.П. Кочура

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент А.Е. Кузько

Элементы теории множеств. Основы математической логики: методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура. Курск, 2019. 25 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторных работ, индивидуальные задания, пример выполнения лабораторной работы, вопросы для самопроверки, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать *11.03.19*. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ *201* Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

Содержание

Краткие теоретические сведения	4
Элементы теории множеств	4
Основы математической логики	9
Задания	14
Пример выполнения	19
Контрольные вопросы	24
Рекомендуемая литература	25

Краткие теоретические сведения

Элементы теории множеств

Понятие *множества* – одно из первичных в математике, поэтому для него нет строгого определения.

Множество – совокупность, набор каких-либо объектов. Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*.

Множества обозначают большими буквами: A, B, \dots , а их элементы соответствующими маленькими буквами: a, b, \dots . В математике приняты следующие обозначения:

- \mathbf{Z} – множество целых чисел,
- \mathbf{Q} – множество рациональных чисел,
- \mathbf{R} – множество действительных чисел,
- \mathbf{N} – множество натуральных чисел.

То, что элемент a входит в множество A , записывается так: $a \in A$ (читается: a есть элемент множества A , или: a принадлежит A). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A .

Множество считается *заданным*, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом данного множества или нет. Если множество состоит из конечного числа элементов (*конечное множество*), то оно может быть задано:

1. *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов несущественен. Например, множество всех цифр: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества. Например, $A = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$ означает множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Для задания *бесконечных множеств* используется только второй способ. Например, $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 2\}$ есть бесконечное множество действительных чисел, лежащих между 0 и 2.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается \emptyset .

Множество A есть *подмножество* множества B , если каждый элемент A является элементом B . В этом случае также говорят, что

множество A *включено* во множество B или множество B *включает* множество A , обозначается $A \subseteq B$.

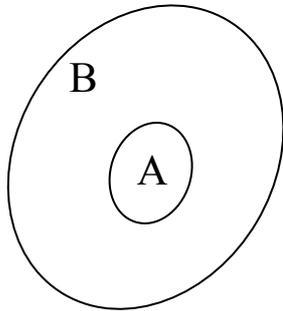


Рис. 1. Диаграмма Эйлера-Венна множества A , являющегося подмножеством множества B

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называют *равными* и обозначают: $A = B$.

Множества и отношения множеств наглядно иллюстрируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 1).

Диаграмма Эйлера-Венна – это замкнутая линия, внутри которой расположены элементы данного множества, а снаружи – элементы, не принадлежащие этому множеству.

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U , то это множество U называется *универсальным* для данного рассуждения. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а его подмножества - в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника (рис. 2).

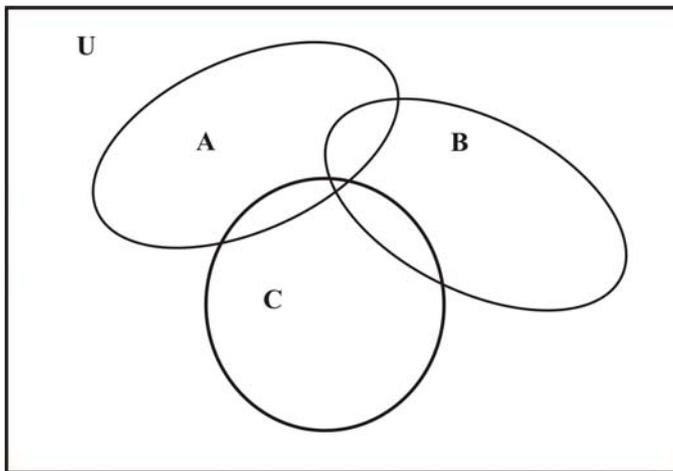


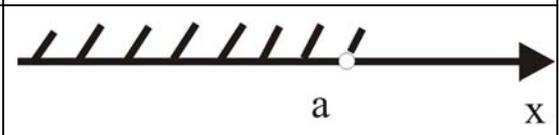
Рис. 2. Диаграмма Эйлера-Венна универсального множества U и его подмножеств A , B , C

Пусть множество A есть некоторое подмножество универсального множества U . Тогда множество \bar{A} , состоящее из всех элементов множества U , не принадлежащих множеству A , называется *дополнением* множества A .

При решении задач часто приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называют *числовыми*, они являются подмножествами множества действительных чисел \mathbb{R} . Пусть a и b – действительные числа, $a < b$. Приведем названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и изобразим их на координатной прямой (табл. 1).

Табл. 1. Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	(a, b)	
Открытый слева промежуток от a до b	$a < x \leq b$	$(a, b]$	
Открытый справа промежуток от a до b	$a \leq x < b$	$[a, b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$x \geq a$	$[a, +\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$x > a$	$(a, +\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \leq a$	$(-\infty, a]$	

a			
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty, a)$	

Операции над множествами

Объединением C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B (рис. 3). Объединение множеств обозначается: $C = A \cup B$. Другими словами, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. В определении объединения множеств подразумевается неисключающее значение союза «или». Объединение часто называют *суммой* множеств. Объединение трех и более множеств определяется аналогично.

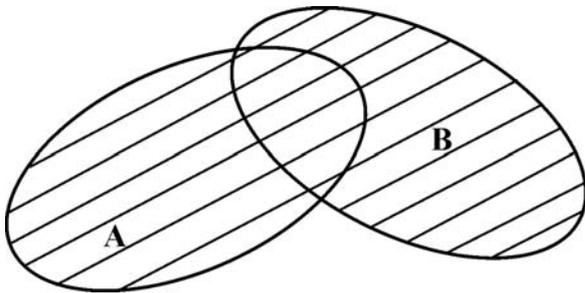


Рис. 3. Объединение двух множеств A и B

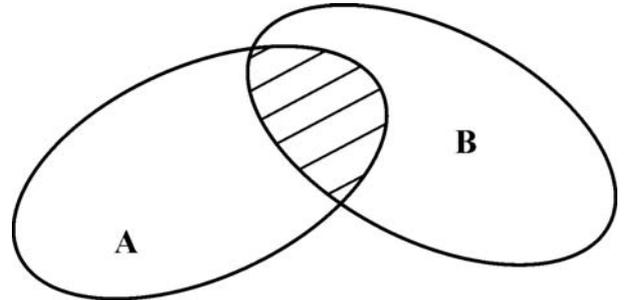


Рис. 4. Пересечение двух множеств A и B

Пересечением C двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B одновременно: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 4). Иными словами, пересечение образовано всеми общими элементами данных множеств.

Разностью C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A , не входящих в B (рис. 5). $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Таким образом, из множества A

достаточно удалить общие элементы множеств A и B , то есть все элементы множества $A \cap B$, чтобы получить разность $A \setminus B$.

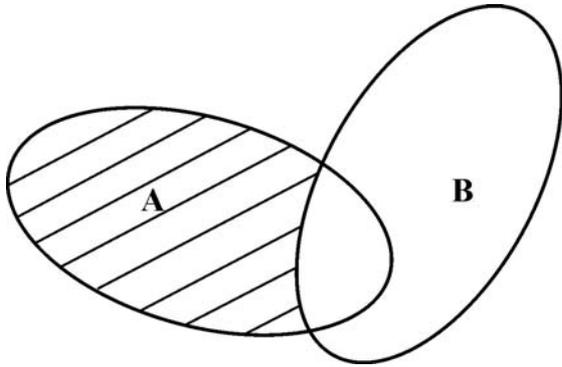


Рис. 5. Разность множеств $A \setminus B$

Свойства операций над множествами

В следующей теореме формулируются *основные свойства объединения и пересечения*:

Теорема 1. Для любых подмножеств A , B и C универсального множества U справедливы следующие тождества:

Ассоциативный закон

$$1. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C. \quad 1'. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

Коммутативный закон

$$2. A \cup B = B \cup A. \quad 2'. A \cap B = B \cap A.$$

Дистрибутивный закон

$$3. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad 3'. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \\ 4. A \cup \emptyset = A. \quad 4'. A \cap \emptyset = \emptyset. \\ 5. A \cup \bar{A} = U. \quad 5'. A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Справедливость каждого из этих тождеств можно проверить, показав, что множество, стоящее по одну сторону тождества, включено во множество, стоящее по другую сторону.

В следующей теореме формулируются дополнительные свойства операций над множествами.

Теорема 2. Для любых подмножеств A и B универсального множества U справедливы следующие утверждения:

$$6. \text{Если для всех } A \text{ имеет место } A \cup B = A, \text{ то } B = \emptyset. \quad 6'. \text{Если для всех } A \text{ имеет место } A \cap B = A, \text{ то } B = U.$$

7, 7'. Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \emptyset$, то $B = \bar{A}$.

8, 8'. $\bar{\bar{A}} = A$.

9. $\bar{\emptyset} = U$.

9'. $\bar{U} = \emptyset$.

10. $A \cup A = A$.

10'. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$.

11'. $A \cap U = A$.

Закон поглощения

12. $A \cup (A \cap B) = A$.

12'. $A \cap (A \cup B) = A$.

Закон де Моргана

13. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

13'. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Основы математической логики

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, относительно которого известно, что оно либо истинно, либо ложно. Пример ложного высказывания: А: «сумма чисел 2 и 6 больше числа 8».

Высказывание, которое можно разложить на части, называется *сложным*, а неразложимое далее высказывание – *простым*. Например, высказывание С: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x » состоит из двух простых высказываний: А: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна при всех значениях x » и В: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ дифференцируема при всех значениях x ».

Подобно тому, как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, так из заданных высказываний получаются новые с помощью операций *конъюнкции*, *дизъюнкции*, *импликации*, *эквивалентности*, *отрицания*.

Операции над высказываниями

Отрицанием высказывания А называют такое высказывание \bar{A} (или $\neg A$), что \bar{A} ложно, если А истинно и \bar{A} истинно, если А ложно. Обозначение \bar{A} читается: «Не А» или «Неверно, что А».

Следующая таблица показывает связь между высказываниями A и $\neg A$:

A	$\neg A$
1	0
0	1

1 соответствует значению «истина», 0 – значению «ложь». Эти слова в логике называют значениями истинности. Таблица называется *таблицей истинности $\neg A$* .

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется такое высказывание $A \wedge B$ (читается « A и B »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих его высказывания.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний.

Таблица истинности $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Высказывание C : «Число 2 четное и простое» сложное, оно состоит из двух высказываний: A : «Число 2 четное» и B : «Число 2 простое», связанных союзом «и». Оба этих высказывания истинны. Истинным является и сложное высказывание, которое есть конъюнкция высказываний A и B .

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается « A или B »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из составляющих его высказываний.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний. Определение дизъюнкции двух высказываний может быть выражено следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Примером дизъюнкции двух высказываний является высказывание С: «Если последняя цифра числа равна 0 или 5, это число делится на 5» есть дизъюнкция высказываний А: «Если последняя цифра числа равна 0, то это число делится на 5» и В: «Если последняя цифра числа равна 5, то это число делится на 5».

Импликацией двух высказываний А и В называется такое высказывание $A \rightarrow B$ (читается «из А следует В» или «если А, то В»), которое ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В – ложно.

Таблица истинности для импликации имеет следующий вид:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Высказывание А называют *условием* (или *посылкой*), а В – *заключением* (*следствием*). Существует немало синонимов для связки «если, ..., то...», например:

- Из А следует В;
- А влечет за собой В;
- Как только А, то В;
- А достаточное условие В.

Пример импликации: С: «Если $\triangle ABC$ равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C$ ». А: « $\triangle ABC$ равносторонний», В: « $\angle A = \angle B = \angle C$ ».

Эквивалентностью двух высказываний А и В называется такое высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В либо истинны, либо оба – ложны.

Читается запись $A \leftrightarrow B$ так: «А тогда и только тогда, когда В». Таблица истинности такова:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример эквивалентности двух высказываний: С: «Для того, чтобы некоторый параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Здесь высказывание А: «Некоторый параллелограмм – ромб» и В: «Диагонали некоторого параллелограмма взаимно перпендикулярны».

В логике, как и в арифметике, операции делятся по старшинству. Это позволяет при записи сложных высказываний избегать большого количества скобок. *Порядок выполнения операций* таков: приоритет имеет отрицание, затем на одном уровне – дизъюнкция и конъюнкция, следующая связка – импликация и, наконец, самая последняя – эквивалентность.

Для сложных высказываний (*составных формул*) применяют также таблицы истинности, где перебирают все возможные значения истинности составляющих высказываний (*элементарных формул*, простых компонент, то есть таких высказываний, которые нельзя представить как результат действия логических операций). Такая таблица содержит 2^n строк, где n – количество простых компонент. Таблицу истинности удобно составлять, разбивая сложное высказывание на более простые и добавляя вспомогательные столбцы со значениями истинности этих составляющих.

Приведем таблицу истинности для высказывания $(A \vee B) \wedge (B \rightarrow \neg C)$:

A	B	C	$A \vee B$	$\neg C$	$B \rightarrow \neg C$	$(A \vee B) \wedge (B \rightarrow \neg C)$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1

0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

Высказывание содержит три простые компоненты A , B и C , поэтому в таблице $2^3 = 8$ строк.

Логическая эквивалентность. Свойства логических операций

Формула A логически эквивалентна формуле B , если их таблицы истинности совпадают. Это записывается: $A \Leftrightarrow B$.

Проверим, например, что $A \vee B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B$. Для этого составим таблицу истинности формулы $(A \rightarrow B) \rightarrow B$:

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Видно, что построенная таблица совпадает с таблицей истинности дизъюнкции.

Логически эквивалентные высказывания неразличимы с точки зрения формальной логики, поскольку они при каждом наборе значений компонент принимают одинаковые значения истинности. В любом рассуждении высказывание можно заменить на логически эквивалентное.

В следующей теореме отражены алгебраические свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Теорема 3. Следующие пары формул логически эквивалентны:

1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	1'. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
2. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	2'. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
3. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	3'. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4 и 4'. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	
5. $A \vee A \Leftrightarrow A$	5'. $A \wedge A \Leftrightarrow A$

6. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	6'. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
7. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	7'. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Задания

Вариант 0

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $A \cap (B \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна.

Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных - 15, красивых и воспитанных - 11, умных и воспитанных - 9, умных и красивых - 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P))$.

6. Докажите равносильность: $\neg A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge B$.

Вариант 1

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (1, 4)$, $B = [0, 8]$.
2. Упростите выражение: $\overline{\bar{A} \cap B \cup B}$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

4. Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$.

6. Докажите равносильность: $\overline{A \rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Вариант 2

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, +\infty)$, $B = [1, 4)$.
2. Упростите выражение: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.

4. В группе 30 студентов. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4» и «3». Число студентов, имеющих оценки «5» - двенадцать, «4» - четырнадцать, «3» - шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и на «3», трое – лишь на «5» и «4» и четверо лишь на «4» и на «3». Сколько человек имеет одновременно оценки «5», «4» и «3»?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

6. Докажите равносильность:

$$A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Вариант 3

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 5]$, $B = (-\infty, 3)$.

2. Упростите выражение: $(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B})$.

3. Докажите равенство: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

4. Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимается спортом и любит слушать музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(\neg A \vee \neg B) \wedge C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

6. Докажите равносильность: $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

Вариант 4

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 7)$, $B = (-\infty, 2)$.

2. Упростите выражение:

$$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D).$$

3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

4. Среди 35 туристов одним английским языком владеют 11 человек, английским и французским – 5 человек, 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \wedge (\neg C \rightarrow \neg B)) \leftrightarrow A$.

6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$.

Вариант 5

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-3, 7)$, $B = [0, 10)$.
2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B \cup C}$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
4. Анкетирование, проведенное среди 57 студентов, показало, что в шахматы умеют играть 35 человек, в шашки – 40 человек, причем в обе игры умеют играть 21 человек. Сколько человек не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$.
6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$.

Вариант 6

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 5]$, $B = (-\infty, 10)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. Из 25 студентов группы «отлично» по английскому языку по экзамену получили 10 человек, «отлично» по математике получили 14 человек. 7 студентов получили «отлично» по обоим предметам. Сколько студентов группы не имеют отличной оценки ни по математике, ни по английскому языку?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний:
 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
6. Докажите равносильность:
 $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \Leftrightarrow A \vee B$.

Вариант 7

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [-2, 4)$, $B = (1, 6)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

4. В олимпиаде по математике приняло участие 10 учеников класса, в олимпиаде по биологии – 7 человек, в олимпиаде по физике – 9 человек. Известно, что в олимпиадах по математике и биологии участвовало 4 ученика, в олимпиадах по математике и физике – 5 человек, во всех трех олимпиадах – 2 ученика. Сколько школьников участвовало в олимпиадах по физике и биологии, если всего участников олимпиад было 17 человек?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$.

6. Докажите равносильность: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Вариант 8

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [1, 3]$, $B = [2, 10)$.

2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B} \cup A$.

3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

4. В группе 30 студентов. Известно, что 18 человек имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. 10 студентов не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько студентов имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \vee \overline{P}$.

6. Докажите равносильность: $A \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$.

Вариант 9

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 7)$, $B = (-\infty, 5)$.

2. Упростите выражение: $A \cup (\overline{A} \cap B)$.

3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

4. Множество M состоит из m лиц, владеющих хотя бы одним иностранным языком – английским, французским, немецким. Известно, что английским языком владеют 70 лиц, французским – 65, немецким – 50, английским и французским – 40, английским и немецким – 30, французским и немецким – 20, а всеми тремя языками – 5. Найти m .

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \overline{P})) \wedge (\overline{Q} \rightarrow P) \vee Q$.

6. Докажите равносильность: $\neg A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

Вариант 10

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 5)$, $B = [2, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $\overline{\overline{A} \cup B \cup B}$.
3. Докажите равенство: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
4. В одной семье было много детей. 7 любили капусту, 6 – морковь, 5 – горох, 4 – капусту и морковь, 3 – капусту и горох, 2 – морковь и горох, 1 – все. Сколько детей в семье?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $P \rightarrow \overline{Q \wedge P} \rightarrow (P \vee R)$.
6. Докажите равносильность: $\neg A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B)$.

Вариант 11

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-7, -3)$, $B = [-5, 0)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap \overline{(A \cup B)}$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
4. В отчете об изучении иностранных языков студентами говорилось, что из 100 человек 5 изучают английский, немецкий и французский, 10 – английский и немецкий, 8 – французский и английский, 20 – немецкий и французский, 30 – английский, 23 – немецкий, 50 – французский. Тому, кто составил отчет, было указано на ошибки. Верно ли это?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow P) \vee Q)$.
6. Докажите равносильность: $A \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$.

Пример выполнения

Вариант 0

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.

Решение.

Изобразим числовые множества на оси Ox (рис. 11).

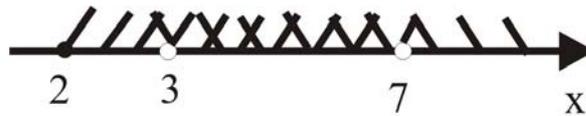


Рис. 11

Исходя из определений операций над множествами и рис. 11, получим:

$$A \cup B = [2; +\infty),$$

$$A \cap B = (3; 7),$$

$$A \setminus B = [2; 3],$$

$$B \setminus A = [7; +\infty).$$

2. Упростите выражение: $A \cap (B \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

Решение.

Применяя к исходному выражению ассоциативный закон, получим:

$$(A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap B. \quad (1)$$

Применим к выражению $A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ дистрибутивный закон, вместо (1) получим:

$$((A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})) \cap B. \quad (2)$$

Согласно свойству 5' операций над множествами $A \cap \bar{A} = \emptyset$, тогда (2) переписывается в виде:

$$(\emptyset \cup (A \cap \bar{B})) \cap B. \quad (3)$$

Согласно свойству 4 объединения пустого множества с любым множеством есть само множество: $\emptyset \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B}$, тогда вместо (3) получим:

$$(A \cap \bar{B}) \cap B. \quad (4)$$

Применим к выражению (4) ассоциативный закон и перепишем его в виде:

$$A \cap (\overline{B \cap B}). \quad (5)$$

$\overline{B \cap B} = \emptyset$ по свойству 5', тогда вместо (5) получим:

$$A \cap \emptyset. \quad (6)$$

По свойству 4' $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Итак,

$$A \cap (B \cap (\overline{A \cup \overline{B}})) = \emptyset.$$

3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Решение.

1 способ

Согласно определению множества A и B равны ($A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Следовательно, необходимо доказать, что:

$$1. (A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$$

$$2. (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C.$$

Для доказательства вышеуказанных включений будем использовать определения операций над множествами.

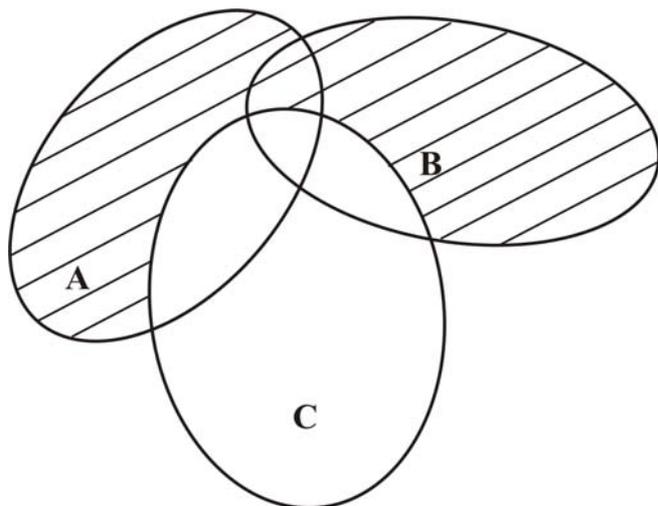
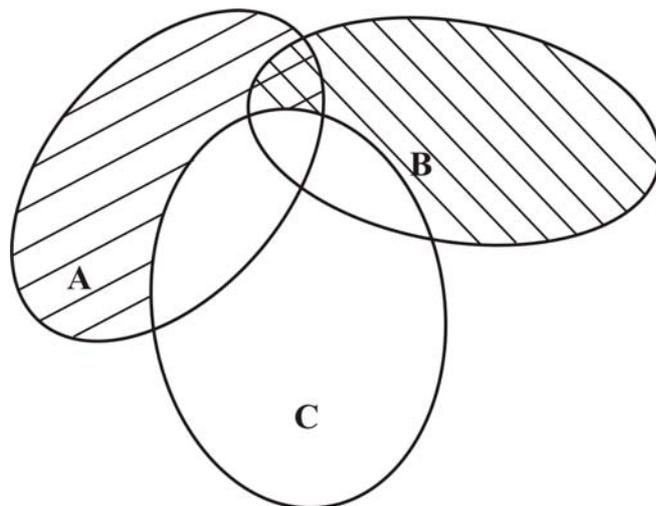
1. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Пусть $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Следовательно, равенство доказано.

2 способ

Для доказательства исходного равенства изобразим множества слева и справа от знака равенства с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 12, 13):

Рис. 12. $(A \cup B) \setminus C$ Рис. 13. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Так как диаграммы Эйлера-Венна множеств слева и справа от знака равенства совпадают, то исходное равенство доказано.

4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна. Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных - 15, красивых и воспитанных - 11, умных и воспитанных - 9, умных и красивых - 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?

Решение.

Пусть U – множество невест, $A = \{x \mid x \text{ – красивая невеста}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{ – воспитанная невеста}\}$, $C = \{x \mid x \text{ – умная невеста}\}$.

Пусть D – некоторое конечное множество. Обозначим $m(D)$ – число элементов в этом множестве.

Множества A , B и C – конечны. По условию:

$$m(A) = 18,$$

$$m(B) = 21,$$

$$m(C) = 15,$$

$$m(A \cap B) = 11,$$

$$m(B \cap C) = 9,$$

$$m(A \cap C) = 7,$$

$$m(A \cup B \cup C) = 30.$$

Требуется найти $x = m(A \cap B \cap C)$.

Изобразим указанные выше множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 14).

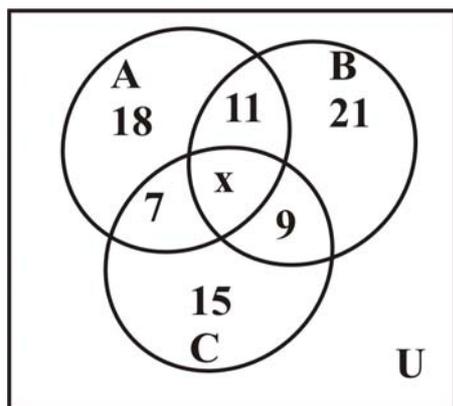


Рис. 14

Для решения задачи будем использовать следующий вывод теории множеств. Пусть A , B и C – некоторые конечные множества. Тогда для них справедливо равенство:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) - m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C) \quad (7)$$

Для двух произвольных конечных множеств A и B справедливо равенство:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) \quad (8)$$

Выразим из формулы (7) $x = m(A \cap B \cap C)$:

$$x = m(A \cup B \cup C) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A \cap B) + m(B \cap C) + m(A \cap C).$$

Подставляя числовые значения в последнее выражение, получим:

$$x = 30 - 18 - 21 - 15 + 11 + 9 + 7 = 3.$$

Итак, 3 невесты одновременно умны, воспитаны и красивы.

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P))$.

Решение.

Исходная формула содержит две элементарные формулы P и Q , поэтому в таблице истинности для нее будет $2^2 = 4$ строки.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \wedge P$	$P \rightarrow (Q \wedge P)$	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

6. Докажите равносильность: $\neg A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge B$.

Решение.

Две формулы алгебры высказываний равносильны (логически эквивалентны), если их таблицы истинности совпадают. Поэтому для

доказательства равносильности составим таблицы истинности формул слева $F_1 = \neg A \wedge (A \vee B)$ и справа $F_2 = \neg A \wedge B$ от знака логической эквивалентности.

Формулы F_1 и F_2 содержат два простых высказывания A и B , поэтому их таблицы истинности будут содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$F_1 = \neg A \wedge (A \vee B)$	$F_2 = \neg A \wedge B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

Поскольку таблицы истинности F_1 и F_2 совпадают (выделенные столбцы), то равносильность доказана.

Контрольные вопросы

1. Понятие множества.
2. Числовые множества.
3. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств.
4. Понятие подмножества. Свойства включений.
5. Равенство множеств.
6. Понятие универсального множества, пустого множества, дополнения множества.
7. Графическое изображение множеств: понятие диаграммы Эйлера-Венна.
8. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность.
9. Свойства операций над множествами.
10. Понятие высказывания. Простые и сложные высказывания.
11. Понятие таблицы истинности, значений истинности.
12. Операции над высказываниями: отрицание.
13. Операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция.
14. Операции над высказываниями: импликация.
15. Операции над высказываниями: эквивалентность.
16. Порядок выполнения логических операций.
17. Понятие логически эквивалентных формул.
18. Свойства логических операций.
19. Понятие тавтологии (тождественно истинной формулы), противоречия.
20. Соответствие понятий теории множеств и математической логики.

Рекомендуемая литература

1. Бережной, В.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Бережной, А.В. Шапошников. - Ставрополь: СКФУ, 2016. - 199 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.

2. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.М. Отрыванкина, О.С. Арапова, Т.А. Огурцова. - Оренбург: ОГУ, 2016. - Ч. 1. - 108 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.

3. Зайцева, О.Н. Математические методы в приложениях. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 173 с. . – Режим доступа: biblioclub.ru.

4. Зюзьков, В.М. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М. Зюзьков. - Томск: Эль Контент, 2015. - 236 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.

5. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие / сост. А.Н. Макоха, А.В. Шапошников, В.В. Бережной р. - Ставрополь: СКФУ, 2017. - 418 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.