

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 03.05.2019 10:07:54

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f111e66675e9943df4a4851fda56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

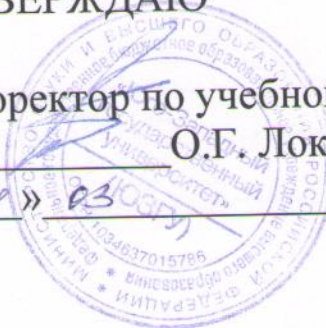
*Кафедра программной инженерии*

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 4 » 03 ЮЗГУ 2019 г.



### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

Методические указания к лабораторной работе №10  
по дисциплине «Вычислительная математика»  
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная  
техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

**Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты:** методические указания к лабораторной работе №10 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 14 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать *04.03.19*. Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,74. Тираж 100 экз. Заказ *144*.  
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет  
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

#### I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории дифференциальных уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши.
3. Изучение методов Рунге-Кутты решения системы дифференциальных уравнений.
4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

#### II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**1. Основные понятия. Задача Коши.** Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производные от искомой функции  $y(x)$ :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $x$  - независимая переменная,  $(n)$  - порядок производной. Наивысший порядок  $n$ , входящий в уравнение (2.1) называется порядком дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (2.2)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  - произвольные постоянные. Их количество определяется порядком уравнения.

Если значения  $c_1, c_2, \dots, c_n$  известны и соответственно равны  $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}$ , то из (2.2) получаем частное решение:

$$y = \varphi(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}).$$

Значения  $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}$  определяются из условий, которые называются дополнительными условиями для уравнения (2.1).

Графики частных решений называются интегральными кривыми для данного дифференциального уравнения. Общее решение можно представить в виде семейства интегральных кривых.

Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задачи Коши называются начальными условиями, а точка  $x=x_0$ , в которой они задаются - начальной точкой.

Если дополнительные условия задаются в двух точках  $a$  и  $b$  - “краях” отрезка  $[a, b]$ , где ищется решение, то такая задача называется краевой задачей.

Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b]; \quad (2.4)$$

при заданных начальных условиях  $y(x_0) = y_0$  называется задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Если мы имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка, то задачу Коши удобно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \\ \vec{y}(x_0) &= \vec{y}_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2. Методы Эйлера для решения задачи Коши

### 2.1 Метод Эйлера первого порядка точности

В методе Эйлера решение уравнения (2.4) представляется следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

где  $x_i = x_0 + ih$ ,  $x_0$  - начальная точка,  $h = x_{i+1} - x_i$  - шаг между узлами  $x_i$  и  $x_{i+1}$ ,  $y_i = y(x_i)$  - значение искомой функции  $y(x)$  в узле  $x_i$ ,  $y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ . При  $i=0$  имеем:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \quad (2.7)$$

где  $y_0 = y(x_0)$  - начальное значение искомой функции  $y(x)$ .

Абсолютная погрешность метода Эйлера на  $n$  шаге равна:

$$R_n \leq c_1 R_0 + c_2 h, \quad (2.8)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - константы,  $R_0$  - погрешность начального приближения.

Согласно (2.8) метода Эйлера имеет первый порядок точности.

### 2.2 Модификации метода Эйлера второго порядка точности

**а) метод трапеции.** В этом методе решение имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \quad (2.9)$$

Этот метод неявный, т.к. для определения значений  $y_{i+1}$  необходимо решать нелинейное уравнение (2.9). Метод трапеций имеет второй порядок точности по  $h$ .

**б) метод Эйлера-Коши.** Данный метод является прямым методом второго порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]. \quad (2.10)$$

**в) усовершенствованный метод Эйлера второго порядка точности:**

$$y_{i+1} = y_i + hf[x_i + (h/2), y_i + (h/2)f(x_i, y_i)]. \quad (2.11)$$

### 3. Методы Рунге-Кутты для задачи Коши

**а) расчетам формулы метода Рунге-Кутты второго порядка точности имеют следующий вид:**

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k, \quad k = \sum_{j=1}^2 c_j k^{(j)}; \quad (2.12)$$

$$k^{(1)} = f(x_i, y_i), \quad k^{(2)} = f(x_i + \alpha h, y_i + h(k^{(1)} / \alpha));$$
$$c_1 = \frac{1}{2}\alpha, \quad c_2 = 1 - \frac{1}{2}\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Данный метод является двух этапным. Вначале вычисляется значение  $k^{(1)}$ , а затем значения  $k^{(2)}$ .

При  $\alpha=1$  формулы (2.12) дают метод Эйлера-Коши, при  $\alpha=1/2$  - усовершенствованный метод Эйлера.

**б) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.** Наиболее известным из методов Рунге-Кутты является классический 4-этапный метод четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_i, \quad k_i = \frac{1}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)});$$
$$k_i^{(1)} = f(x_i, y_i), \quad k_i^{(2)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}), \quad (2.13)$$
$$k_i^{(3)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}), \quad k_i^{(4)} = f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}).$$

Этот метод прост и эффективен, когда отрезок  $[x_0, x_n]$  не очень велик.

**в) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы из 2-х уравнений.** Имеется система из двух дифференциальных уравнений:

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)),$$

$$z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x)).$$

Расчетные формулы для вычисления значений функции  $y(x)$  и  $z(x)$  имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}),$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(q_i^{(1)} + 2q_i^{(2)} + 2q_i^{(3)} + q_i^{(4)}); \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned}
k_i^{(1)} &= f(x_i, y_i, z_i), \\
k_i^{(2)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)}\right), \\
k_i^{(3)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)}\right), \\
k_i^{(4)} &= f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}), \\
q_i(1) &= \varphi(x_i, y_i, z_i); \\
q_i^{(2)} &= \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)}\right); \\
q_i^{(3)} &= \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)}\right); \\
q_i^{(4)} &= \varphi(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

**4. Автоматический выбор шага.** Локальная погрешность методов Рунге-Кутты точности  $p$  на  $i+1$  шаге допускает представление:

$$R_{i+1}^h \approx r(x_i, y_i) \cdot h_i^{p+1}, \tag{2.17}$$

где  $r(x_i, y_i)$  - непрерывная функция,  $p$  - порядок точности.

Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^h + r(x_i, y_i)h_i^{p+1}. \tag{2.17}$$

Здесь  $y(x_{i+1})$ -точное решение,  $y_{i+1}^h$ -приближенное решение с шагом  $h$ .

Уменьшим шаг интегрирования в два раза. Для вычисления значения функции  $y(x_{i+1})$  нам потребуется два шага. На первом шаге погрешность будет равна:

$$R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} = r(x_i, y_i)\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1},$$

а на втором:

$$\begin{aligned}
R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} &= r\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1} = \\
&= \left[r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i)(y_{i+\frac{1}{2}} - y_i)\right]\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1} = \\
&= \left[r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)\frac{h_i}{2}\right]\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1} \approx r(x_i, y_i)\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Суммарная погрешность после двух шагов по  $h_i/2$  будет равна сумме погрешностей на двух шагах:

$$R_{i+1}^{h_i} = R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} + R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} = 2r(x_i, y_i)\left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1}. \tag{2.18}$$

Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} + 2r(x_i, y_i) \left(\frac{h_i}{2}\right)^{p+1}, \quad (2.19)$$

здесь  $y(x_{i+1})$  - точное решение,  $y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}}$  - приближенное решение с шагом  $h_i/2$ .

Вычитая из равенства (2.17) равенство (2.19) получим:

$$\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| = |r(x_i, y_i)| (h_i)^{p+1} \left[1 - \frac{1}{2^p}\right] = R_{i+1}^{h_i} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right). \quad (2.20)$$

Окончательно имеем:

$$R_{i+1}^h = \frac{\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| 2^p}{2^p - 1}. \quad (2.21)$$

Если погрешность  $R_{i+1}^h$  отличается от заданной погрешности  $R$ , то шаг  $h$  заменяют на новый шаг  $\bar{h}$ , например, уменьшают или увеличивают в два раза.

### III. ЗАДАНИЕ

1. Разработать текст программы для решения задачи Коши для системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.
2. Предусмотреть в программе контроль точности численного решения и автоматический выбор шага при заданной погрешности численного решения.
3. Решить задачу Коши для системы из двух дифференциальных уравнений из таблицы индивидуальных заданий.

### IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

**1. Задание:** Решить задачу Коши для системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= \mu \cdot y - z - (y^2 + z^2) \cdot y, \\ z' &= \mu \cdot z + y - (y^2 + z^2) \cdot z; \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\mu$ -параметр на отрезке  $[a, b]$ ,  $a=0, b=100$  при следующих начальных условиях

$$y_0 = y(a) = 0, \quad z_0 = z(a) = 1; \quad (4.2)$$

с абсолютной точностью  $\varepsilon=10^{-4}$  при  $\mu=0.1$ .

2. Для решения задачи Коши будем использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В расчетных формулах (2.15, 2.16) имеем:

$$f(x, y, z) = \mu \cdot y - z - (y^2 + z^2) \cdot y,$$

$$\varphi(x, y, z) = \mu \cdot z + y - (y^2 + z^2) \cdot z;$$

3. Пример программ на Delphy (в консольном режиме) и на Mathcad.

```

program lab10;
  {Решение Задачи Коши для системы из двух уравнений}
  {методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности}
  {a - начало отрезка, где необходимо найти решение}
  {b - конец отрезка, где необходимо найти решение}
  {y0,z0 - начальные условия}
  {e - точность вычисления}
  {h0 - начальное значение шага}
var a,b,y0,z0,e,h0,x,h,k1,k2,k3,k4,q1,q2,q3,q4 : real;
var u,xx,yy,zz,yh,zh,yhh,zhh,ry,rz,m : real;
var i,p,j,kk,mm : integer;
var x,y,z : array[0..5000] of real;
var outfile : text;
label m1,m2;
  function f(x,y,z: real) : real;
    {функция трех переменных f(x,y,z)}
    begin
      f := m * y - z - (y * y + z * z) * y;
    end;    {f}
  function g(x,y,z: real) : real;
    {функция трех переменных}
    begin
      g := m * z + y - (y * y + z * z) * z;
    end;    {g}
begin
  assign(outfile, 'd:\lab.dat');           объявление внешнего файла lab.dat
  rewrite(outfile);                       открытие внешнего файла для записи
  writeln('Введите значение a и значение b');
readln (a,b);
  writeln('Введите значение y0 и значение z0');
readln (y0,z0);
  writeln('Введите точность вычислений e');
readln (e);
  writeln('Введите шаг h0');
readln (h0);
  p:=4;

```



```

i:=0;
x[0]:=a;
y[0]:=y0;
z[0]:=z0;
  while x[i]<b do begin
    i:=i+1;
    kk:=0;
    mm:=0;
  m2:h:=h0;
    xx:=x[i-1];
    yy:=y[i-1];
    zz:=z[i-1];
    j:=0;
  m1:k1:=f(xx,yy,zz);
    q1:=g(xx,yy,zz);
    k2:=f(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);
    q2:=g(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);
    k3:=f(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
    q3:=g(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
    k4:=f(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
    q4:=g(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
    if j=0 then begin
      yh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
      zh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
      h:=h/2;
      j:=1;
      goto m1;
    end;
    if j=1 then begin
      yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.;
      zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6.;
      xx:=xx+h;
      yy:=yhh;
      zz:=zhh;
      j:=2;
      goto m1;
    end;
    if j=2 then begin
      yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
      zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
    end;
u:=exp(p*ln(2));

```

формулы (2.16)

вычисление с шагом h

уменьшение шага в два раза

переход на вычисление с шагом h/2

первый шаг с шагом h/2

переход на второй шаг с шагом h/2

второй шаг с шагом h/2

вычисление 2 в степени p

```

ry:=(abs(yhh-yh)*u)/(u-1.);
rz:=(abs(zhh-zh)*u)/(u-1.);
if (kk=0) and ((ry>e) or (rz>e)) then begin
    mm:=1;
    h0:=h0/2;          автоматическое уменьшение шага в два раза
    goto m2;
end;
if (mm=0) and ((ry<e) and (rz<e)) then begin
    kk:=1;
    h0:=2*h0;          автоматическое увеличение шага в два раза
    goto m2;
end;
x[i]:=x[i-1]+h0;
y[i]:=yh;
z[i]:=zh;
writeln('i=',i,' h0=',h0,' x=',x[i],' y=',y[i],' z=',z[i]);
writeln(outfile,'i=',i,' h0=',h0,' x=',x,' y=',y[i],' z=',z[i]);
end;
close(outfile);      закрытие внешнего файла
end.

```

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений пераого порядка методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.

$\mu := 0.1$  -параметр

$$f(x,y,z) := \mu \cdot y - z - (y^2 + z^2) \cdot y \qquad g(x,y,z) := \mu \cdot z + y - (y^2 + z^2) \cdot z$$

$$:= 0 \qquad b := 100 \qquad y_0 := 0 \qquad z_0 := 1$$

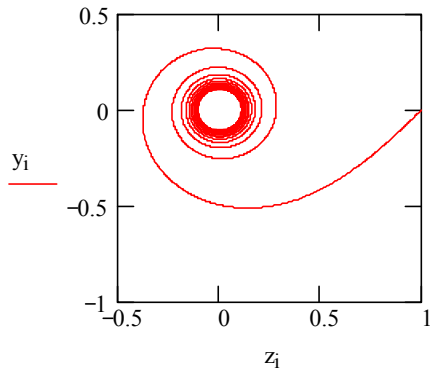
$$p := 4 \qquad h := 0.1 \qquad \varepsilon := 10^{-5} \qquad pp := \frac{1}{1 - 0.5^p} \qquad d6 := \frac{1}{6}$$

```

F(f,g,h) :=
  xx0 ← a
  yy0 ← y0
  zz0 ← z0
  i ← 0
  while xxi ≤ b
    i ← i + 1
    for j ∈ 1..3
      xxi ← xxi-1 + h
      k1 ← f(xxi-1, yyi-1, zzi-1)
      q1 ← g(xxi-1, yyi-1, zzi-1)
      k2 ← f(xxi-1 + 0.5·h, yyi-1 + k1·0.5·h, zzi-1 + q1·0.5·h)
      q2 ← g(xxi-1 + 0.5·h, yyi-1 + k1·0.5·h, zzi-1 + q1·0.5·h)
      k3 ← f(xxi-1 + 0.5·h, yyi-1 + k2·0.5·h, zzi-1 + q2·0.5·h)
      q3 ← g(xxi-1 + 0.5·h, yyi-1 + k2·0.5·h, zzi-1 + q2·0.5·h)
      k4 ← f(xxi-1 + h, yyi-1 + k3·h, zzi-1 + q3·h)
      q4 ← g(xxi-1 + h, yyi-1 + k3·h, zzi-1 + q3·h)
      if j = 1
        yyi ← yyi-1 + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
        zzi ← zzi-1 + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
        h ← 0.5·h
      otherwise
        if j = 2
          yh1 ← yyi-1 + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
          zh1 ← zzi-1 + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
          xxi-1 ← xxi
        if j = 3
          yh1 ← yh1 + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
          zh1 ← zh1 + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
          xxi-1 ← xxi-1 - h
          h ← 2·h
      ry ← pp·|yh1 - yyi|
      rz ← pp·|zh1 - zzi|
      if ry > ε ∧ rz > ε ∧ h ≥  $\frac{\varepsilon}{2}$ 
        h ← 0.51·h
        i ← i - 1
      h ← 2·h otherwise
      FFi,0 ← xxi
      FFi,1 ← yyi
      FFi,2 ← zzi
    FF0,0 ← xx0
    FF0,1 ← yy0
    FF0,2 ← zz0
    FF0,3 ← i

```

$cc := F(f, g, h)$                        $n := cc_{0,3}$                        $i := 0..n$   
 $x_i := cc_{i,0}$                                $y_i := cc_{i,1}$                                $z_i := cc_{i,2}$   
 $n = 5.418 \times 10^3$



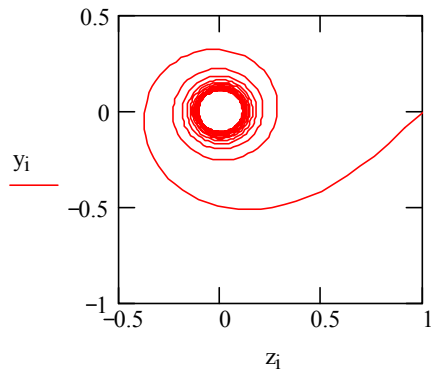
### Проверка встроенной программой Mathcad

$$x \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \mu \cdot x_0 - x_1 - [(x_0)^2 + (x_1)^2] \cdot x_0 \\ \mu \cdot x_1 + x_0 - [(x_0)^2 + (x_1)^2] \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

$Z := rkfixed(x, a, b, 1000, D)$                        $i := 0..999$

$y_i := Z_{i,1}$                                $z_i := Z_{i,2}$



## V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Текст программы.
4. Таблица результатов расчета на ЭВМ.

**Замечание:** Пункты 1-4, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы. Результаты программы в Delphi нужно вывести в виде графика используя файл с данными и соответствующую программу для построения графиков.

## VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Какое дифференциальное уравнение называется разрешимым относительно старшей производной.
3. Что называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Краевая задача
7. Определение интегральной кривой.
8. Методы Эйлера первого и второго порядка точности.
9. Модификации метода Эйлера.
10. Методы Рунге-Кутты второго и четвертого порядка точности.
11. Методы Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений.
12. Автоматический контроль погрешности и выбор шага численного решения.
13. Метод Адамса-Бошфорта.
14. Метод Адамса-Моултона.
15. Метод прогноза и коррекции.
16. Можно ли в методах Адамса контролировать точность расчетов с помощью изменения шага  $h$ ?

## VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Решить задачу Коши  $y'=f(x,y,z)$ ,  $z'=\varphi(x,y,z)$ ; при  $y_0=y(a)$ ,  $z_0=z(a)$ , на отрезке  $[a,b]$  с заданной абсолютной погрешностью  $\varepsilon$ .

№	$f(x,y,z)$	$\varphi(x,y,z)$	$y(a)$	$z(a)$	$a$	$b$	$\varepsilon$
1.	$\arctg 1 / (1 + y^2 + z^2)$	$\sin(yz)$	1	1	-1	1	$10^{-3}$
2.	$\arctg(x^2 + z^2)$	$\sin(x + y)$	0,5	1,5	0	2	$10^{-4}$
3.	$x^2y + z$	$\cos(y + xz)$	-1	1	0	4	$10^{-3}$
4.	$x^2 + z^2$	$xyz$	1	2	0	5	$10^{-4}$
5.	$\sin z$	$\cos y$	0,5	-0,5	1	3	$10^{-3}$
6.	$x \cos(x + z)$	$\sin(y - z)$	-0,6	2	2	5	$10^{-4}$
7.	$\sin y \cos^3 z$	$\cos y \cos z$	1	0	-1	3	$10^{-3}$
8.	$2\sqrt{3x^2 + y^2 + z}$	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	0,5	1,2	0	2	$10^{-4}$
9.	$(y + x) / e^{y+z}$	$(z - x) / e^{y+z}$	1	-1	2	4	$10^{-3}$
10.	$(3 + e^{-z})^{-1}$	$(2 + e^{-y})^2$	0	-3	2	5	$10^{-4}$
11.	$\cos(yz)$	$\sin(y + z)$	2	1	0	2	$10^{-3}$
12.	$y \ln x$	$y + z^2$	-2	-1	1	4	$10^{-4}$
13.	$x + y^2$	$(y - z)^2$	3	1	-1	1	$10^{-4}$
14.	$y^2 + z^2$	$yz$	-1	1	0	4	$10^{-3}$
15.	$e^{yz}$	$e^{-yz}$	0	0	0	2	$10^{-4}$
16.	$y + z + y^3 + z^3$	$y - z + z^3 + y^3$	0	1	1	20	$10^{-4}$
17.	$y + z^2 + y^3 + z^3$	$-y^2 + z^2 + y^3 + z^3$	0	-2	0	10	$10^{-4}$
18.	$y + z + (z + y)yz$	$y - z + (z + y)yz$	1	1	2	12	$10^{-3}$
19.	$\sin y + \cos^3 z$	$\sin^3 y + \cos^3 z$	1	0	0	5	$10^{-4}$
20.	$\sin y^2 + \cos^3 z^2$	$\sin y^2 - \cos z^2$					$10^{-3}$