

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 09.07.2024 09:32:54

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e55fc11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники



## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ: МЕТОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ И МИНИМИЗАЦИЯ МНОГОМОДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям для  
студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

**Численные методы одномерной минимизации: методы с использованием производных и минимизация многомодальных функций:** методические указания к лабораторным и практическим занятиям для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 Информатика и вычислительная техника/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2022. – 11 с.: ил.7. – Библиогр.: с. 11.

Описываются алгоритмы численного поиска минимума функции с использованием производных первого, второго порядков. Описан алгоритм минимизации многомодальных функций, называемый методом ломаных. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 2022. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1. Цель работы

Изучение численных методов одномерной минимизации с использованием производных первого, второго порядков, а также алгоритма минимизации многомодальных функций методом ломаных.

## 2. Постановка задачи

Если  $f(x)$  унимодальная и непрерывной дифференцируемая функция на отрезке минимизации  $[a; b]$ , то точку минимума  $x_*$  можно вычислить как корень уравнения  $f'(x) = 0$  с помощью методов численного решения нелинейных уравнений

## 3. Метод средней точки

Точку  $x_*$  минимума  $f(x)$  вычисляют как корень уравнения

$$f'(x) = 0, \quad [a, b]$$

методом деления отрезка пополам.

Так как  $f(x)$  унимодальная на отрезке  $[a, b]$ , то  $f'(a) < 0$  и  $f'(b) > 0$ . Алгоритм очень простой и включает следующие шаги.

- Шаг 1. Задать  $a, b, \varepsilon$ .
- Шаг 2. Вычислить среднюю точку  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  и  $f'(x_0)$ .
- Шаг 3. Если  $f'(x_0) < 0$ , то положить  $a = x_0$ , иначе  $b = x_0$ .
- Шаг 4. Если  $|a - b| < \varepsilon$ , то закончить поиск, положив  $x_* = x_0$ . Иначе перейти к шагу 2.

## 4. Метод Ньютона и его модификации

### 4.1. Метод Ньютона-Рафсона

Метод основан на вычислении  $x_*$  корня уравнения

$$f'(x) = 0, \quad [a, b]$$

методом Ньютона-Рафсона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a, b]. \quad (1)$$

Формулу можно получить и следующим образом.

Рассмотрим разложение функции  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности  $k$ -го приближения

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2 + O(x - x_k)^3.$$

Взяв три первых члена разложения, запишем

$$\varphi_k(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2.$$

Функция  $\varphi_k(x)$  есть квадратичный трехчлен, аппроксимирующий  $f(x)$  в малой окрестности  $x_k$ .

Найдем точку минимума функции  $\varphi_k(x)$  из условия

$$\varphi'_k(x) = 0.$$

Если считать полученный корень уравнения  $\varphi'_k(x) = 0$  следующим приближением  $x_{k+1}$  точки минимума исходной функции, то получим формулу (6.).

## 4.2. Гибридный алгоритм Ньютона-Рафсона

Метод Ньютона является локально  $q$ -квадратично сходящимся. Поэтому приходится затрачивать значительные вычислительные усилия на достижение достаточной близости текущего приближения к решению, чтобы метод Ньютона смог реализовать свою высокую скорость сходимости.

На практике применяются так называемые гибридные методы. Заметим, что термин «гибридный» или «регуляризованный» введен специалистами вычислительной математики <sup>1</sup>, для алгоритмов, которые представляют собой комбинации надежных, но медленно сходящихся методов (глобально сходящихся) с недостаточно надежными, но быстро сходящимися методами (например, Ньютона-Рафсона). Такие алгоритмы обладают высокой надежностью и гарантированной сходимостью. <sup>2</sup>

В качестве глобальной стратегии можно применить такой прием.

---

<sup>1</sup>см. например, Powell, M.J.D. A Hybrid Method for Nonlinear Equations/M.J.D. Powell//Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations. – 1970. – 7. Pp. 87–114.  
Dennis, J.E. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations/J.E. Dennis, R.B. Schnabel//New Jersey: Prentice-Hall, Inc.– 1983. – P. 395.

<sup>2</sup>Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие/А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.

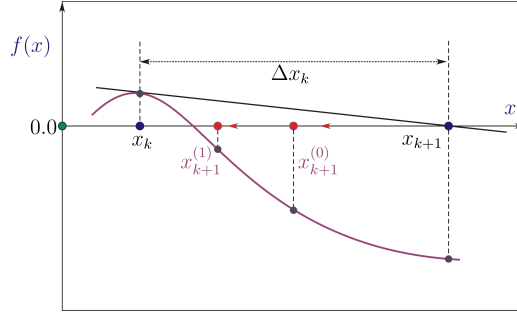


Рис. 1.

Если ньютоновская точка  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$  ( $\Delta x_k = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$ ) не приводит к уменьшению  $|f'(x)|$ , то разумная стратегия состоит в дроблении шага  $\Delta x_k$  с движением в обратном направлении  $x_{k+1}$  к  $x_k$ , пока не встретится точка  $x_{k+1}^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , для которой  $|f'(x_{k+1}^{(i)})| < |f'(x_k)|$  (рис. 1).

Таким образом, на каждой итерации надо выполнить:

$$x_+ = x_- - \frac{f'(x_-)}{f''(x_-)};$$

$$\text{while } |f'(x_+)| \geq |f'(x_-)| \text{ do}$$

$$x_+ \leftarrow \frac{x_+ + x_-}{2}.$$

### 4.3. Упрощенный метод Ньютона

В формуле метода Ньютона-Рафсона полагают  $f''(x_k) = f''(x_0) = \text{const}$ :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a, b].$$

### 4.4. Метод секущих

В методе Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

используют конечно-разностную аппроксимацию второй производной:

$$f''(x_k) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}. \text{ Тогда расчетная формула:}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a, b]$$

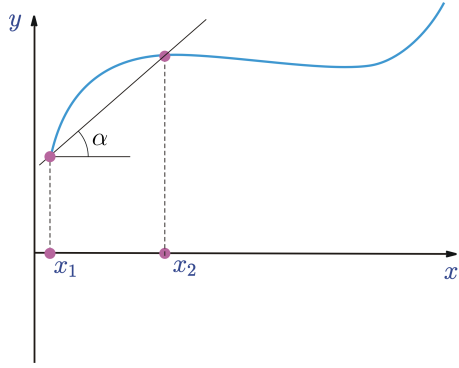


Рис. 2.

или

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - y_k}{f'(x_k) - f'(y_k)} f'(x_k),$$

$$y_{k+1} = x_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a, b]$$

## 5. Минимизация многомодальных функций: метод ломаных

Метод рассчитан на минимизацию многомодальных функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Функция  $f(x)$  удовлетворяет *условию Липшица* на отрезке  $[a, b]$ , если существует число  $L > 0$  такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{при всех } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Число  $L$  называется *постоянной Липшица*.

*Геометрический смысл условия Липшица* — модуль углового коэффициента любой хорды графика функции  $f(x)$  не превосходит  $L$ :  $|\operatorname{tg} \alpha| \leq L$  (рис. 2).

*Достаточное условие существования постоянной Липшица.*

Если  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную и для этой производной  $\max_{[a, b]} |f'(x)| \leq L$ , то  $L$  — постоянная Липшица.

В методе ломаных используются кусочно-линейные аппроксимации функции  $f(x)$ , графиками которых являются ломаные.

Пусть  $f(x)$  удовлетворяет на  $[a, b]$  условию Липшица с константой  $L$ . Выберем точку  $x_0 \in [a, b]$  построим функцию

$$g(x, x_0) = f(x_0) - L|x_0 - x|.$$

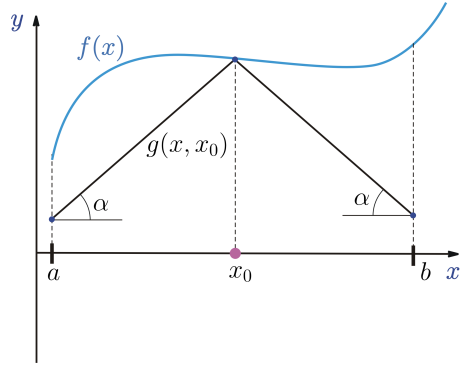


Рис. 3.

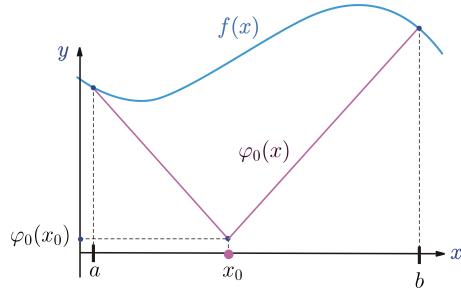


Рис. 4.

Функция  $g(x_0, x)$  имеет максимум в точке  $x = x_0$  и минимальна на концах отрезка  $[a, b]$  (рис. 3).

Аппроксимирующие кусочно-линейные функции строятся следующим образом.

- **Шаг 1:** Рассмотрим прямые  $y = f(a) - L(x - a)$ ,  $y = f(b) + L(x - b)$ . Графики функций пересекаются в точке  $(x_0, y_0)$  с координатами

$$x_0 = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)], \quad y_0 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a - b)].$$

Определим кусочно-линейную функцию  $\varphi_0(x)$ :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} f(a) - L(x - a), & a \leq x < x_0, \\ f(b) + L(x - b), & x_0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Точкой минимума  $\varphi_0(x)$  является  $x = x_0$  (рис. 4).

- **Шаг 2:** Построим вспомогательную функцию

$$g(x, x_0) = f(x_0) - L|x_0 - x|$$

и произведем «исправление» ломаной  $\varphi_0(x)$  путем построения новой аппроксимирующей кусочно-линейной функции (рис. 5) :

$$\varphi_1(x) = \max[\varphi_0(x), g(x_0, x)]$$



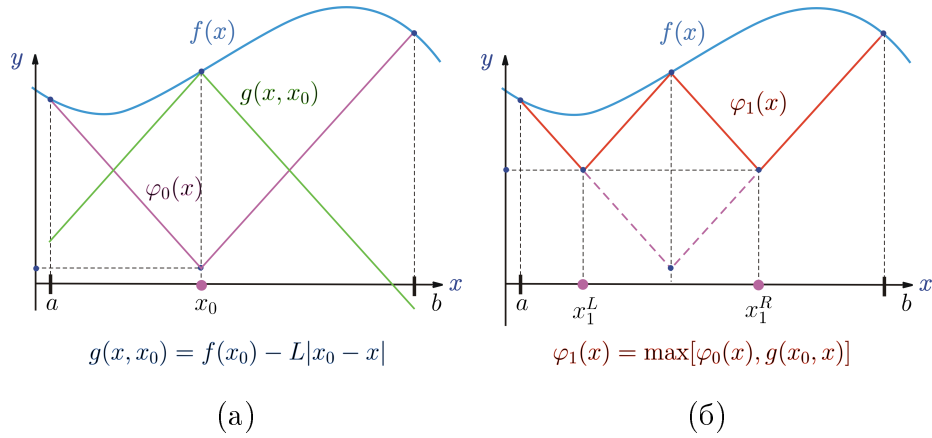


Рис. 5.

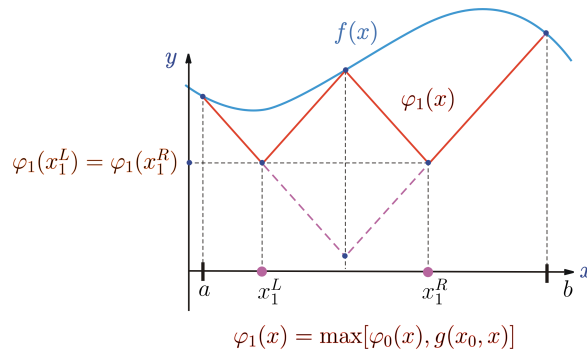


Рис. 6.

Это приводит к появлению двух новых «нижних» вершин: новая аппроксимирующая функция  $\varphi_1(x)$  по сравнению с  $\varphi_0(x)$  имеет две точки минимума:

$$x_1^L = x_0 - \Delta_1, \quad x_1^R = x_0 + \Delta_1, \quad \text{где} \quad \Delta_1 = \frac{1}{2L}[f(x_0) - \varphi_0(x_0)],$$

$$\varphi_1(x_1^L) = \varphi_1(x_1^R) = \frac{1}{2}[f(x_0) + \varphi_0(x_0)],$$

Из двух точек  $x_1^L, x_1^R$  минимума  $\varphi_1(x)$  за точку  $x_1$  глобального минимума берется та, в которой  $f(x)$  принимает меньшее значение. Так, если  $f(x_1^L) > f(x_1^R)$ , то  $x_1 = x_1^L$ , иначе  $x_1 = x_1^R$  (рис. 6).

Обозначим ее  $x_1$ . Построим вспомогательную функцию

$$g(x, x_1) = f(x_1) - L|x_1 - x|$$

и новую аппроксимирующую кусочно-линейную функцию  $\varphi_2(x)$ :

$$\varphi_2(x) = \max[\varphi_1(x), g(x_1, x)]$$

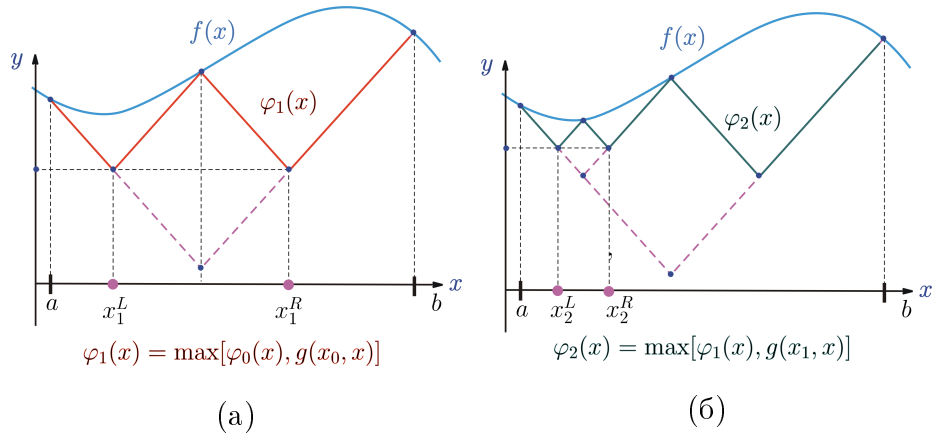


Рис. 7.

У функции  $\varphi_2(x)$  по сравнению с  $\varphi_1(x)$  появились две новые точки минимума (рис. 7), которые находятся аналогично:

$$x_2^L = x_1 - \Delta_2, \quad x_2^R = x_1 + \Delta_2, \quad \text{где} \quad \Delta_2 = \frac{1}{2L}[f(x_1) - \varphi_1(x_1)],$$

$$\varphi_2(x_2^L) = \varphi_2(x_2^R) = \frac{1}{2}[f(x_1) + \varphi_1(x_1)].$$

Из двух точек  $x_2^L, x_2^R$  минимума  $\varphi_2(x)$  за следующую точку глобального минимума  $x_2$  берется та, в которой  $f(x)$  принимает меньшее значение.

- **Шаг  $k$ :** Пусть известны точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ . Построим вспомогательную функцию

$$g(x, x_k) = f(x_k) - L|x_k - x|$$

и аппроксимирующую кусочно-линейную функцию  $\varphi_{k+1}(x)$ :

$$\varphi_{k+1}(x) = \max[\varphi_k(x), g(x_k, x)]$$

Найдем минимум  $\varphi_{k+1}(x)$ .

В результате получим последовательность функций  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , такую, что

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \leq f(x).$$

С ростом  $k$  полученная ломаная сколь угодно близко приближает график функции  $f(x)$ . При этом  $x_k$  стремится к точке глобального минимума  $f(x)$ .

Условие окончания поиска:

$$\delta_k = 2L\Delta_k < \varepsilon.$$

## 5.1. Алгоритм

- **Шаг 1.** Задать  $[a, b]$ ,  $L$ ,  $\varepsilon$ .

- **Шаг 2.** Вычислить

$$x_0 = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)], \quad y_0 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a - b)],$$
$$\varphi_{min} \leftarrow y_0.$$

- **Шаг 3.**

$$\Delta = \frac{1}{2L}[f(x_0) - \varphi_{min}]$$

- **Шаг 4.** Если  $2L\Delta < \varepsilon$ , то  $x_{min} \leftarrow x_0$  и закончить поиск. Иначе, перейти к шагу 5.

- **Шаг 5.**

$$x_1^L = x_0 - \Delta, \quad x_1^R = x_0 + \Delta, \quad \varphi \leftarrow \frac{1}{2}[f(x_0) + \varphi_{min}],$$

- **Шаг 6.**

Если  $f(x_1^L) < f(x_1^R)$ , то  $x_0 \leftarrow x_1^L$ . Иначе  $x_0 \leftarrow x_1^R$ .

$\varphi_{min} \leftarrow \varphi$ .

Перейти к **шагу 3**.

## 6. Задания к лабораторным и практическим занятиям

- 1. Реализовать метод Ньютона-Рафсона, гибридный алгоритм, метод средней точки, метод хорд на тестовой задаче

$$f(x) = 2x^2 + 4x, \quad -2.0 < x < 0, \quad a = -2.0, \quad b = 0.0, \quad \varepsilon = 10^{-10}.$$

Предварительно постройте график функции.

- 2. Минимизируйте функцию

$$f(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

на отрезке  $[-6, 6]$  методом Ньютона-Рафсона, гибридным алгоритмом, методом средней точки, методом секущих. Выбирая различные начальные приближения. Найдите какое-либо значение  $x_0$ , при котором метод Ньютона-Рафсона начнет расходиться.

- 3. Минимизируйте функции

$$f(x) = (x^4 - 1) \quad \text{на отрезке} \quad [0.5; 2];$$

$$f(x) = x \sin(1/x) \quad \text{на отрезке} \quad [0.2; 1]$$

методом Ньютона-Рафсона, гибридным алгоритмом, методом средней точки, упрощенным методом Ньютона, методом секущих. Сравните эти методы. Решения задач проиллюстрируйте графически.

- 4. Минимизируйте функции

$$f(x) = \frac{\cos 10x}{e^x} \quad \text{на отрезке} \quad [1; 5];$$

$$f(x) = 0.1x + 2 \sin 4x \quad \text{на отрезке} \quad [0; 4]$$

методом методом ломаных. Решения задач проиллюстрируйте графически.

### Библиографический список

1. *Аттетков, А. В.* Введение в методы оптимизации [Текст]: учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. - М. : Финансы и статистика, 2008. - 272 с.
2. *Гончаров, В. А.* Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие / В. А. Гончаров. - М. : Юрайт, 2010. - 191 с.
3. *Пантелеев, А. В.* Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с.