Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 29.10.2026 13:57:10
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____ Т.Ю.Ткачева
«__21__» ____12____ 2026 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ
для направления подготовки 28.03.01 «Нанотехнология и
микросистемная техника»,
направленность (профиль) «Микро- и наносистемы»

Курск 2026

УДК 51

Составитель: С.В. Кулишова

Рецензент
кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики
О.А.Бредихина

Высшая математика: методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 28.03.01 Нанотехнология и микросистемная техника, направленность (профиль) «Микро- и наносистемы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В.Кулишова. – Курск, 2026. – 15 с.

Излагаются методические рекомендации к выполнению лабораторных работ. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики прикладных методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические рекомендации соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 28.03.01 Нанотехнология и микросистемная техника, направленность (профиль) «Микро- и наносистемы».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 21.10.26 . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.0,9. Уч.-изд. л.0,8.Тираж 100 экз. Заказ 693. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: Лабораторные работы предназначены для практического освоения математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать задачи прикладного характера.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

Лабораторная работа 1. «*Расчёт вероятностей случайных событий*» (2 часа)

Цель работы: освоить элементы комбинаторики, классическое определение вероятности, геометрические вероятности, формулы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и формулы Байеса, изучить схему независимых испытаний и асимптотические формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Пример. В классе 30 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны комсорг и староста, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

Решение. Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением из n элементов по k элементов.

Из определения вытекает, что размещения из n элементов по k элементов – это все k – элементные подмножества, отличающиеся или составом элементов или порядком их следования.

Из условия задачи ясно, что, если два ученика избраны на должности комсорга и старосты, то, поменяв порядок избрания, мы получим другую комбинацию выборов. Следовательно, нам необходимо найти число способов, равное числу размещений из 30 элементов по 2:

$$A_{30}^{2} = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870.$$

Ответ: 870 способов.

Задача 1. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определите вероятность того, что среди них i выигрышных. Исходные данные: n = 10, k = 5, i = 4, m = 6 (например).

Задача 2. Из 100 ламп n_i принадлежит i-ой партии, i = 1, 2, 3. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определите вероятность того, что выбранная лампа – бракованная. Исходные данные: $n_1 = 100$, $n_2 = 250$ (например).

Задача 3. При перевозке N +100 деталей, из которых 10 были забракованы, утеряна 1 стандартная деталь. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь оказалась бракованной. Исходные данные: N – номер студента в журнале преподавателя (например).

Задача 4. Зачет по стрельбе считается сданным, если курсант получает оценку не ниже 4. Какова вероятность сдачи зачета курсантом, если известно, что он получает за стрельбу оценку 5 с вероятностью 0,01·N и оценку 4 с вероятностью 0,02·N? Исходные данные: N – номер студента в журнале преподавателя (например).

Задача 5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й завод поставляет m_i% изделий (i = 1, 2, 3). Среди изделий i-го завода n_i% первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определите вероятность того, что изделие выпущено j-м заводом. Исходные данные: $m_1 = 50$, $m_2 = 30$, $m_3 = 20$, $n_1 = 70$, $n_2 = 80$, $n_3 = 90$; j = 1. Указание: используйте формулу Байеса.

Контрольные вопросы

1. Размещения с повторениями, формула для их числа.
2. Размещения (без повторений), формула. Перестановки.
3. Сочетания, формула для числа сочетаний.
4. Классическое определение вероятности.
5. Геометрические вероятности.
6. Условные вероятности.
7. Независимость событий.
8. Формула полной вероятности.
9. Формула Байеса.
10. Основные формулы для схемы Бернулли.

Лабораторная работа 2. ***«Повторные испытания. Случайные величины»*** **(2 часа)**

*Пример***.** Игральная кость брошена 4 раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

При четырёх бросаниях кости шестёрка может не появиться ни разу, появиться 1, 2, 3 или 4 раза. Значит, случайная величина – число появлений шестёрки при четырёх бросаниях, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности $P(X = x_i)$ найдём по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где n – количество испытаний, k – количество появления события А, p – вероятность появления события А в каждом опыте, $q = 1 - p$ – вероятность неудачи в каждом опыте.

По условию $n = 4$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{6^4};$$

$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4\cdot 5^3}{6^4} = \frac{500}{6^4};$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{6\cdot 5^2}{6^4} = \frac{150}{6^4};$$

$$P(X = 3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{4\cdot 5}{6^4} = \frac{20}{6^4};$$

$$P(X = 4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^4}.$$

Закон распределения числа появлений шестёрки примет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{625}{6^4}$	$\frac{500}{6^4}$	$\frac{150}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$

Проверка: $\frac{625}{6^4}+\frac{500}{6^4}+\frac{150}{6^4}+\frac{20}{6^4}+\frac{1}{6^4}=1$ – верно.

Задача 1. Вероятность приема радиосигнала равна 0,8. Какова вероятность того, что сигнал при пяти передачах будет принят ровно три раза?

Задача 2. Сколько следует произвести повторных испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений некоторого события оказалось равным 21, если вероятность появления события в отдельном испытании равна 0,8?

Задача 3. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Пример._Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения X – числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Дискретная случайная величина X может принимать значения 0,1,2 и 3. Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применим формулу Бернулли.

По условию $n=3; p=0.1; q=1-0,1=0,9.$

Получим

$P_3(0)=0,9^3=0,729;\quad P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot0,1\cdot0,9^3=0,243;$

$P_3(2)=C_3^1p^2q=3\cdot0,1^2\cdot0,9=0,027;\quad P_3(3)=0,1^3=0,001$

Искомый биномиальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Математическое ожидание

$MX=1\cdot0,243+2\cdot0,027+3\cdot0,001=0,3$

Для нахождения дисперсии используем формулу

$DX=M(X)^2-(MX)^2=(1\cdot0,243+4\cdot0,027+9\cdot0,001)-$

$-(0{,}3)^2 = 0{,}36 - 0{,}09 = 0{,}27$

Задача 4. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	$-\frac{n}{2}$	$-\frac{n}{4}$	$\frac{n}{10}$	$\frac{n}{5}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{4}$	n
p_i	0,02N	0,01N	0,03N	p_4	0,1N	0,1N	0,02N	0,1N

Найти:

а) вероятность p_4;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение случайной величины X;

в) начальный момент $N + 1$ порядка;

г) функцию распределения случайной величины $F(x)$ и построить ее график.

Контрольные вопросы

1. Опишите схему испытаний Бернулли.
2. Общая схема определения формулы для расчёта вероятности при повторном испытании.
3. Формула Бернулли.
4. Формула Пуассона.
5. Локальная теорема Лапласа.
6. Интегральная теорема Лапласа.
7. Наивероятнейшее число появлений события.
8. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
9. Закон больших чисел. Понятие о теореме Чебышева (общий случай). Значение теоремы Чебышева.
10. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова.

Лабораторная работа 3. ***«Расчет числовых характеристик случайных величин»*** **(4 часа)**

Цель работы: практическое освоение методик расчета основных числовых характеристик случайных величин.

Примеры расчетных заданий

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<2,\\ (x-2)^2, & \text{если } 2\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3. \end{cases}$$

Найдите:

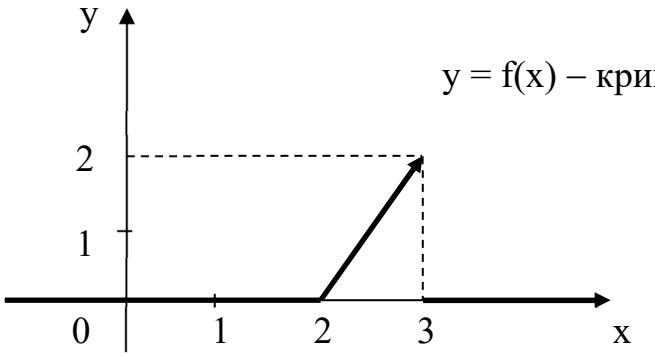
а) плотность распределения f(x);

б) вероятность попадания величины X в интервал (2,5; 3,5);

в) вероятность попадания величины X в интервал (2,5; 3,5).

Эта задача проверяет умение оперировать с простейшими объектами теории непрерывных случайных величин.

$$\text{а)}\quad f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<2,\\ 2(x-2), & \text{если } 2<x<3,\\ 0, & \text{если } x>3. \end{cases}$$



б) $p\{X\in(1;2,5)\}=p\{1<X<2,5\}=F(2,5)-F(1)=(2,5-2)^2-0=0,25;$

в) $p\{X\in(2,5;3,5)\}=F(3,5)-F(2,5)=1-0,25=0,75.$

Задача 2. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

а) Постройте функцию распределения F(x);

б) найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0,\frac{\pi}{4})$.

Характеристиками положения случайной величины являются математическое ожидание, мода и медиана.

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X − это

$MX=\sum_i x_i p_i$ (для дискретной случайной величины),

$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} x(f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины).

В этих формулах x_i − значения случайной величины; p_i − их вероятности, $f(x)$ − плотность вероятности.

Модой M_o дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Модой непрерывной случайной величины называется то значение x, при котором плотность $f(x)$ максимальна.

Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение M_e, для которого

$$p\{X < M\} = p\{X > M\} = 0{,}5.$$

Задача 3. Случайная величина распределена нормально с параметрами (a,σ). Укажите ее моду и медиану.

(Ответ: $M_o = M_e = a$).

Дисперсией случайной величины X называется

$$DX = M(X - MX)^2,$$

$DX=\sum_i (x_i - MX)^2 p_i$ (для дискретной случайной величины)

$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины)

Формула для вычислений: $DX = M(X^2) - (MX)^2$.

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Задача 4. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения

X	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача 5. Найдите среднее значение числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,05.

(Ответ: 2)

Задача 6. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их средняя масса равна 1,06 кг. Найдите стандартное отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону. Указание: при вычислении используйте функцию Лапласа.

(ответ: $\sigma \approx 0{,}0365$ кг).

Контрольные вопросы

1. Случайные величины и случайные события. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины и способы его задания.
2. Числовые характеристики случайных величин. Начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс.
3. Математическое ожидание случайной величины. Его смысл и примеры. Свойства математического ожидания.
4. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Их смысл и примеры вычисления. Формулы для вычисления дисперсии. Свойства дисперсии.
5. Мода.
6. Медиана.

7. Распределения дискретных случайных величин.

8. Распределения непрерывных случайных величин.

9. Дифференциальная и интегральная функции их распределения, их смысл и связь между ними.

10. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет точно заданное значение.

Лабораторная работа 4. ***«Элементы математической статистики» (4 часа)***

Рассмотрим пример.

Пусть N = 9, n = 50. Тогда A = 12, B = 3, C = 2, D = 3.

Для заданных значений параметров A, B, C, D корреляционная таблица имеет вид:

Таблица 3.4

Корреляционная таблица для заданных A, B, C, D.

X / Y	0	1	2	3	4	5	n_y
1	–	3	–	–	–	–	3
2	3	–	2	–	–	–	5
3	–	–	1	2	12	1	16
4	–	–	–	–	1	–	1
n_x	3	3	3	2	13	1	25

Объём выборки равен 2 +3 + 3 +1 + 2 + 12 + 1 + 1 = 25.

1) Вычислим выборочные характеристики:

$$\overline{x} = \frac{1}{25}(0\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 13 + 6\cdot 1) = \frac{72}{25};$$

$$\overline{y} = \frac{1}{25}(1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = \frac{13}{5};$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{25}(0^2\cdot 3 + 1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 2 + 4^2\cdot 13 + 6^2\cdot 1) = \frac{266}{25};$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{25}(1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 5 + 3^2\cdot 16 + 4^2\cdot 1) = \frac{183}{25};$$

$$S_X^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{266}{25} - \left(\frac{72}{25}\right)^2 = 2{,}346;$$

$$S_Y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{183}{25} - \left(\frac{13}{5}\right)^2 = 0{,}56;$$

$S_X = 1{,}532;$ $S_Y = 0{,}748;$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{25}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 12 + 5 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+ 4 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{210}{25}$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{210}{25} - \frac{72}{25} \cdot \frac{13}{5} = 0{,}912;$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{S_X . S_Y} = \frac{0{,}912}{1{,}532 \cdot 0{,}748} = 0{,}796.$$

2) Проверим значимость коэффициента корреляции по критерию Стьюдента.

Выдвинутая гипотеза H_0: коэффициент корреляции значим.

Конкурирующая гипотеза H_1: коэффициент корреляции незначим.

Расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t_{расч} = \frac{\rho_{XY}}{\sqrt{1 - \rho_{XY}^2}} \cdot \sqrt{n - 2} = \frac{0{,}796}{\sqrt{1 - 0{,}796^2}} \sqrt{25 - 2} = 6{,}31.$$

При доверительной вероятности P = 0,95 табличное значение критерия Стьюдента

$t_{табл}(0{,}05;\ 25 - 2) = 2{,}07.$

Так как расчетное значение превышает табличное, то выдвинутая гипотеза отвергается, т.е. коэффициент корреляции значим. Между величинами X и Y существует тесная прямая линейная связь, т.е. с увеличением X увеличивается Y и наоборот.

3) В общем случае уравнения прямых регрессий имеют вид:

Y на X: $y - \overline{y} = \rho_{XY} \cdot \frac{S_Y}{S_X}(x - \overline{x})$,

X на Y: $x - \bar{x} = \rho_{XY} \cdot \frac{S_X}{S_Y}(y - \bar{y})$.

При решении данной задачи уравнения прямых регрессий примут вид:

Y на X:

$y - 2{,}6 = 0{,}388(x - 2{,}88)$;

X на Y:

$x - 2{,}88 = 1{,}63(y - 2{,}6)$.

Графически прямые регрессии изображены на рис. 3.1.

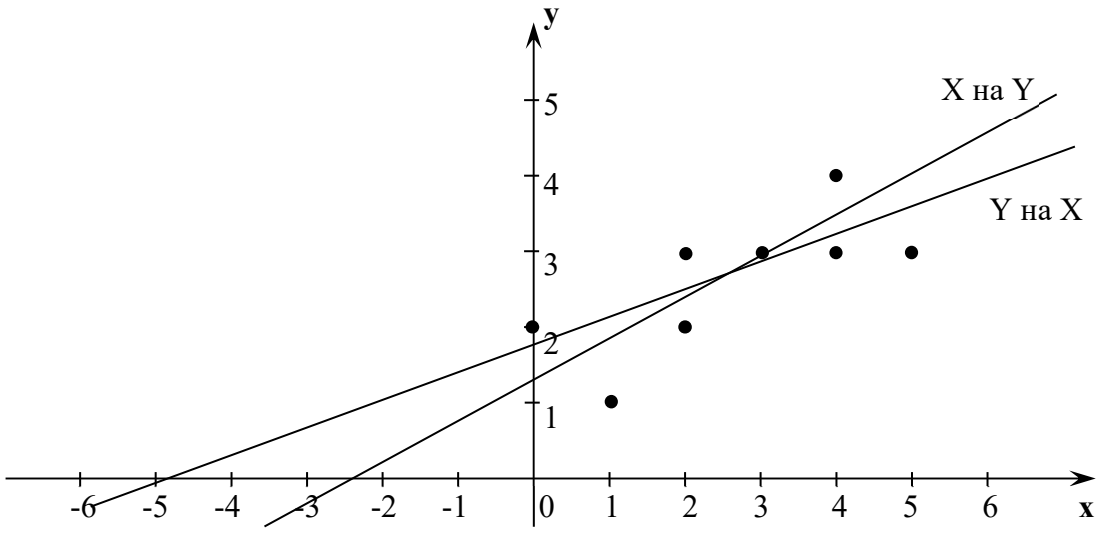


Рис. 3.1. Прямые регрессии

Задание. Для двух случайных величин X и Y проведена серия испытаний. Результаты испытаний записаны в следующую корреляционную таблицу. Четные варианты индивидуальные задания берут из таблицы 1, а нечетные – из таблицы 2.

Таблица 1

Индивидуальные данные к заданию 6

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	D	C	–	–	–	–
2	–	C	B	–	–	–
3	–	–	A	B	A	1
4	–	–	–	–	D	C

Таблица 2

Индивидуальные данные к заданию 6

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1						A
2				C	B	A
3		D	3	B		
4	C	2				

Для этих случайных величин:

1. Вычислить числовые характеристики выборочные средние, выборочные дисперсии, ковариацию и выборочный коэффициент корреляции $\rho_{XY.}$
2. Проверить для доверительной вероятности P = 0,95 значимость коэффициента корреляции ρ_{XY}. Сделать вывод о тесноте взаимосвязи.
3. Написать уравнения прямых регрессий Y на X и X на Y.
4. В подходящем масштабе изобразить на графике точки (x, y) из корреляционной таблицы и прямые регрессии.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
2. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
3. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
4. Дайте определение полной группы событий.
5. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
6. Дайте определение относительной частоты.
7. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
8. Что такое вариационный и статистический ряды, ряд распределения, функция распределения и эмпирическая функция распределения, гистограмма?
9. Что такое интервальные оценки? Как построить доверительный интервал для среднего генеральной совокупности?

10. Какие особенности генеральной совокупности отражают выборочные оценки числовых характеристик?
11. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
12. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
13. Дайте понятие доверительного интервала.
14. Дайте определение основной и конкурирующей гипотез.
15. Дайте определение прямой регрессии Y на X, X на Y.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. – М.: ЮРАЙТ, 2012. – 479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 404с.
3. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие / Е.А.Бойцова. − Старый Оскол: ТНТ, 2014. –156с.
4. Журавлева Е.В., Бойцова Е.А., Панина Е.А., Студеникина Л.И. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева, Е.А.Бойцова, Е.А.Панина, Л.И.Студеникина − Курск: ЮЗГУ, 2015. −178 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4 [Текст]: учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит, 2004. – 432с.
6. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлёва, Е.А.Панина. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
7. Повторные испытания. Случайные величины [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-17 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Журавлева Е.В., Панина Е.А. − Курск: ЮЗГУ, 2013. –49с.
8. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. –35 с.