Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 02.05.2024 10:05:08
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«18» 01 2021 г.

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»

Курск 2021

УДК 51

Составители: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики
*В.И. Дмитриев*

**Высшая математика**: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов. – Курск, 2021. – 20 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника». Материал предназначен для бакалавров по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Высшая математика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01.21. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 212. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

**Цель работ**: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

## Задания по работам

1. Тема «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2); P_3{}^2+3P_3+4; P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = m$ к параболе $y = nx^2 + (n-1)x + m$, где m – число гласных букв в фамилии, n - число согласных букв в фамилии.

4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x $= \frac{\pi}{6}$ , y = 25.

5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$. Сделать проверку.

6. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx + ydy = xdx$.

7. Тема «Числовые и функциональные ряды».

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2n+1}$.

8. Тема «Двойные, тройные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения».

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (5x-4y)dxdy$, где область D – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми x=2, y=3.

9. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления».

Восстановить аналитическую функцию $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ по её известной действительной части $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$, $W(0) = 5$.

## Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

***1. Тема «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений».***

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

*Метод Крамера*

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы,

а $\Delta_j$ – определитель, полученный из определителя $\Delta$ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1,2,\dots,n$.

Решить СЛУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

*Матричный метод*

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на $A^{-1}$, получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём $A^{-1}$.

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15$.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3$; $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30$; $\qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24$; $\qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5$; $\qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10$;

3. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \dfrac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим X: $X = \dfrac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

*Метод Гаусса*

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.
5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$3стр - 6 \cdot 1стр$ $\quad$ $3стр : 5$ $\quad$ $2стр \leftrightarrow 3стр$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$3стр - 4 \cdot 2стр$ $\quad$ $3стр : 3$

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$1стр - 3 \cdot 3стр$ $\quad$ $1стр + 2 \cdot 2стр$

$1стр + 2 \cdot 3стр$

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{cases}$

### *2. Тема «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия»*

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3{}^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_8 = 5$.

Точки A, B, C образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}.$$

$$\vec{i} \qquad \vec{j} \qquad \vec{k}$$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (1+1;2+2;0-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4+1;14+2;-1-2)$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$, следовательно точки A, B, C образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{20^2+(-4)^2+12^2} = 4\sqrt{35}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

### *3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной»*

Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = m$ к параболе $y = nx^2 + (n-1)x + m$, где m – число гласных букв в фамилии, n - число согласных букв в фамилии.

Пусть $m = 8$ и $n = 10$, тогда $x_0 = 8$, $y = 10x^2 + 9x + 8$. Найдём значение функции в точке $x_0$: $y(8) = 10 \cdot 64 + 9 \cdot 8 + 8 = 720$. Производная $y'$ равна: $y' = 20x + 9$, а значение производной функции в точке $x_0$ равно: $y'(8) = 20 \cdot 8 + 9 = 169$.

Дальнейшее решение задачи удобнее записать в виде таблицы.

| | |
|---|---|
| Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$: $y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ | Уравнение нормали к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$: $y = y(x_0) - \dfrac{x - x_0}{y'(x_0)}$ |
| $y = 720 + 169(x - 8)$,<br>$y = 169x - 632$,<br>общий вид: $169x - y - 632 = 0$ | $y = 720 - \dfrac{x-8}{169}$,<br>$169y = 121680 - x + 8$,<br>общий вид: $x + 169 - 121688 = 0$ |

### *4. Тема «Функции нескольких переменных»*

Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x $= \dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x),\ \text{тогда}\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)} = -\log_5 25 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5},\ \text{тогда}\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

### *5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения»*

Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$. Сделать проверку.

$$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}-\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\right)dx = \int\left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{\left(5-x^2\right)\left(5+x^2\right)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{\left(5-x^2\right)\left(5+x^2\right)}}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx = \int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right| + C.$$

Проверка

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x+\sqrt{5+x^2}}\cdot\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{5+x^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{5+x^2}} = \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} = f(x).$$

### *6. Тема «Дифференциальные уравнения»*

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx + ydy = xdx$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0$ или $y' = f(x)\cdot g(y)$.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1) Если в уравнении присутствует $y'$, то заменим $y' = \frac{dy}{dx}$.

2) Разделим переменные, используя свойство пропорции.

3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения.

$$xy^2dx + ydy = xdx,$$
$$xy^2dx - xdx = -ydy,$$
$$\left(y^2 - 1\right)xdx = -ydy,$$
$$xdx = -\frac{y}{y^2 - 1}dy,$$
$$\int xdx = -\int \frac{y}{y^2 - 1}dy.$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

$$-\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{1}{y^2-1}\cdot ydy = \begin{bmatrix} t = y^2 - 1 \\ dt = \left(y^2-1\right)' dy = 2ydy \\ ydy = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} == -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + C.$$

Вернёмся к нашему уравнению: $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + C$.

Заменим $C = \frac{C_1}{2}$, получим $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + \frac{C_1}{2}$.

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2 - 1\right|$.

## *7. Тема «Числовые и функциональные ряды»*

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$.

Решение задачи основано на использовании признака Даламбера. Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$, то при $L>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится; при $L<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; при $L=1$ требуется дальнейшее исследование.

Общий член ряда $a_n=\dfrac{3^n}{2n+1}$, тогда $a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{2(n+1)+1}=\dfrac{3\cdot 3^n}{2n+3}$.

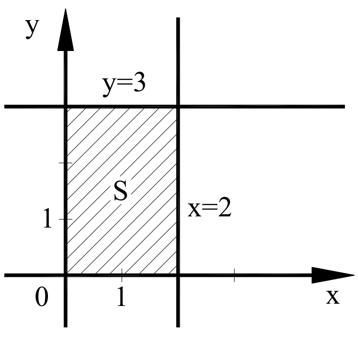
По признаку Даламбера: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 3^n}{2n+3}:\dfrac{3^n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 3^n\cdot(2n+1)}{(2n+3)\cdot 3^n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{2n+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{6+0}{2+0}=3.$$

Так как $L>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2n+1}$ расходится.

### *8. Тема «Двойные, тройные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения»*

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D(5x-4y)dxdy$, где область D – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми x=2, y=3.




Область D изображена на рисунке. Тогда

$$\iint\limits_D(5x-4y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^3(5x-4y)dy=$$

$$=\int_0^2\left(5xy\Big|_0^3-2y^2\Big|_0^3\right)dx=\int_0^2(15x-18)dx=$$

$$=\frac{15x^2}{2}\Big|_0^2-18x\Big|_0^2=30-36=-6.$$

### *9. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления»*

Восстановить аналитическую функцию $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ по её известной действительной части $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$, $W(0) = 5$.

Найдём частные производные первого порядка функции $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$: $u'_x = 6x$ и $u'_y = -6y$.

Тогда мнимая часть функции $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ рассчитывается по формуле: $v(x,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} u'_y(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} u'_x(x,y)dy$.

Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, тогда $v(x,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} -6y_0 dx + \int\limits_{y_0}^{y} 6x dy =$

$$= 6y_0 \int\limits_{x_0}^{x} dx + 6x \int\limits_{y_0}^{y} dy = 6y_0 x \Big|_{x_0}^{x} + 6xy \Big|_{y_0}^{y} = 6y_0 x - 6y_0 x_0 + 6xy - 6xy_0 =$$

$$= 6xy + C, \quad где \quad C = -6x_0 y_0.$$

$$u(x,y) + i \cdot v(x,y) = \left(3x^2 - 3y^2 + 5\right) + i \cdot (6xy + C) =$$

$$= 3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (i \cdot y) + (i \cdot y)^2\right) + 5 + C \cdot i = 3 \cdot (x + i \cdot y)^2 + 5 + C \cdot i.$$

Поскольку комплексное число $z = x + i \cdot y$, то функция $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ примет вид: $W(z) = 3z^2 + 5 + C \cdot i$. Постоянную С можно найти из условия: $W(0) = 5$. Решая уравнение $3 \cdot 0^2 + 5 + C \cdot i = 5$, получаем $C = 0$.

Таким образом, найденная функция комплексного переменного имеет вид: $W = 3z^2 + 5$.

## Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.
2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?

3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?
4. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.
5. В чём заключается правило треугольников?
6. Перечислить свойства определителей.
7. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?
8. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?
9. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?
10. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
11. Какие системы называются эквивалентными?
12. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?
13. Как записать и решить систему в матричной форме?
14. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
15. Написать формулы Крамера.
16. Что такое элементарные преобразования матрицы?
17. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?
18. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?
19. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?
20. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.
21. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.
22. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения

между координатами вектора и координатами точек «начала» и «конца» вектора.

23. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.
24. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.
25. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
26. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.
27. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
28. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.
29. Понятие об уравнении линии на плоскости.
30. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
31. Уравнение прямой «с угловым коэффициентом» (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями «с угловым коэффициентом»).
32. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).
33. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.
34. Понятие уравнения поверхности в пространстве.
35. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

36. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.
37. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениям).
38. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).
39. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
40. Сформулируйте определение предела функции.
41. Какая величина называется бесконечно малой?
42. Сформулируйте теоремы о пределах.
43. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.
44. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.
45. Дайте определение производной функции.
46. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.
47. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
48. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.
49. Сформулируйте лемму Ферма.
50. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.
51. Сформулируйте теорему Коши о среднем.
52. Сформулируйте правило Лопиталя.
53. Что называется функцией нескольких переменных?
54. Что называется областью определения функции двух переменных?
55. Что называется областью изменений или множеством значений функции двух переменных?
56. Что такое частная производная?
57. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
58. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.

59. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
60. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?
61. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
62. Дайте определение первообразной функции.
63. Что называется неопределенным интегралом?
64. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
65. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
66. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
67. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
68. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.
69. Понятие определенного интеграла.
70. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?
71. Перечислите свойства определенного интеграла.
72. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.
73. Вычисление длины дуги гладкой кривой, заданной следующим образом:

    а) $y = f(x),\quad a \le x \le b$;

    б) $x = \varphi(y),\quad c \le y \le d$;

    в) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\quad \alpha \le t \le \beta$;

    г) $\rho = \rho(\varphi),\quad \alpha \le \varphi \le \beta$.
74. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?
75. Что называется интегрированием дифференциального уравнения, а что – интегральной кривой?

76. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.
77. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
78. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
79. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
80. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
81. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
82. Укажите методы, позволяющие понизить порядок следующих дифференциальных уравнений:
    а) $y^{(n)} = f(x)$;
    б) $y'' = f(x; y')$;
    в) $y'' = f(y; y')$.
83. Укажите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и методы его решения.
84. Дайте определение числового ряда.
85. Дайте определение частичной суммы числового ряда, суммы ряда.
86. Дайте определение числового расходящегося ряда.
87. Сформулируйте свойства числового ряда.
88. Дайте определение ряда геометрической прогрессии.
89. Запишите формулу вычисления суммы ряда геометрической прогрессии.
90. Дайте определение знакочередующегося числового ряда.
91. Сформулируйте признак Лейбница.
92. Дайте определение функционального ряда.
93. Укажите формулы для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
94. Методы вычисления двойного интеграла.
95. Методы вычисления тройного интеграла.
96. Перечислите виды криволинейных интегралов.
97. Перечислите виды поверхностных интегралов.
98. Дайте определение функции комплексного переменного.

99. Сформулируйте условия Коши-Римана.
100. Дайте определения оригинала и изображения.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. -М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник. -М.: Физматлит, 2009.-224 с.
6. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
7. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.
12. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.
13. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] -М.: Высшая школа, 1983. -128с.
14. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст] – М.: Наука, 1988. -432с.
15. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст]: учебник. -М.: Наука, 1989. -464с.
16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра [Текст]: учебник. –М.: Наука, 1984. -294с.
17. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие. – М.: Наука, 1982. -254с.

18. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойцова Е.А., Шевцова Т.В. − Курск: ЮЗГУ, 2016. -26 с.
19. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойков А.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -30с.
20. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2013. -18 с.
21. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. – Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
22. Интегрирование функций [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к М-5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Моргунова Н.А., Пихлап А.Ф. –Курск: ЮЗГУ, 2014. − 38с.
23. Интегрирование функций одной переменной. Приложения [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Моргунова Н.А., Пихлап А.Ф. –Курск: ЮЗГУ, 2014. −53с.
24. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. –15 с.