

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 15.05.2025 01:12:39

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6d08abb13a5d426d79e5f1e11eabbf73a947df4a4851fda56d089

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)**

**Кафедра механики, мехатроники и робототехники**



**УТВЕРЖДАЮ:**

**Проректор по учебной работе**

**О.Г.Локтионова**

**«13» 06**

**2023 г.**

## **ДИНАМИКА**

**Методические указания для самостоятельных работ  
по разделам дисциплин "Теоретическая механика",  
«Механика», "Прикладная механика"**

**Курск 2023 г**

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Динамика: методические указания для самостоятельных работ по разделам дисциплин "Теоретическая механика", «Механика», "Прикладная механика"/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун. Курск, 2023. 53 с., ил. 11, табл. 3. Библиогр.: с. 48.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Динамика» курса «Теоретическая механика». По основным темам раздела предложены варианты расчетных заданий для самостоятельного решения. Задания соответствуют «Примерным программам дисциплин Теоретическая механика», «Механика», "Прикладная механика" для машиностроительных и строительных специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1\16

Усл.печ.л. . Уч.изд.л. . Тираж 50 экз. Заказ. **535**. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Динамика» курсов «Теоретическая механика» «Механика», «Прикладная механика».

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

## **Требования к решению и оформлению расчетно-графических работ**

1. Не следует приступать к выполнению расчетно-графических работ, не изучив соответствующего раздела курса. Если студент слабо усвоил основные положения теории и не до конца разобрался в приведенных примерах, то при выполнении работ могут возникнуть большие затруднения. Несамостоятельно выполненное задание не даёт возможность преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену или зачету.

2. Не рекомендуется приносить преподавателю сразу несколько выполненных заданий. Это не даёт рецензенту возможность своевременно указать студенту на допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

3. Расчетно-графическая работа выполняется на листах формата А4. Титульный лист заполняется в соответствии с Приложением 1. Задания, полученные студентом, должны быть выполнены подробно, аккуратно. Зачеркивания и исправления текста недопустимы. Формулировки заданий должны быть приведены полностью. Сокращения не допускаются. При необходимости приводится список литературы.

Размеры полей страниц работы: - левое поле - 30 мм; - правое поле - 15 мм; - верхнее и нижнее поле - 20 мм.

Если текст работы набран на компьютере, то при оформлении следует придерживаться требований, приведенных выше, а так же: шрифт Times New Roman размера 14 pt с межстрочным интервалом 1,5 и абзацным отступом 1,25 см.

4. Если расчетно-графическая работа выполняется без титульного листа, то при оформлении, работа должна заполняться в соответствии с Приложением 2 и содержать: ФИО студента, номер группы и/или название факультета, номер варианта, название работы.

5. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет

величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказ учебника: студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж.

6. Необходимо указать размерность всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

7. В возвращенной расчетно-графической работе студент должен исправить все отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. В случае требования преподавателя-рецензента следует в кратчайший срок передать ему выполненные на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

# 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

## Д-1. Исследование движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил и сил сопротивления воздуха

### Общие теоретические положения

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальных объектов с учетом сил, действующих на эти объекты.

Движение материальных объектов представляет собой изменение их положения в пространстве и во времени по отношению к другим телам. В рамках *классической* механики пространство принимается трехмерным *эвклидовым*, пространство и время считаются *абсолютными*, т.е. не зависящими друг от друга, а также от материи и движения. Принимается также, что масса точки не зависит от скорости ее движения.

В основе классической динамики лежат законы, впервые точно сформулированные Исааком Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии» (1687 г.).

Эти основные законы или аксиомы динамики относятся к движению простейшего тела – так называемой *материальной точки*, т.е. такого тела, размеры которого настолько малы, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь.

**1-й закон (закон инерции)** - изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

**2-й закон (закон зависимости между силой, массой и ускорением)** - произведение массы точки на ускорение равно по модулю силе, действующей на эту точку, а направление ускорения совпадает с направлением силы

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Если на точку действует несколько сил, то  $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ .

### **3-й закон (закон равенства действия и противодействия)** -

две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

**4-й закон (закон независимости действия сил)** – если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то ее ускорение равно геометрической сумме тех ускорений, которые получает эта точка при действии каждой из этих сил в отдельности.

В динамике различают две задачи - прямая и обратная.

В прямой задаче проводится определение сил по заданному движению.

В обратной задаче по заданным силам определяется закон движения точки, составляются дифференциальные уравнения движения точки в виде

$$m \ddot{x} = \sum F_{ix} ; m \ddot{y} = \sum F_{iy} ; m \ddot{z} = \sum F_{iz},$$

где  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  - проекции ускорения точки на оси координат;

$F_x, F_y, F_z$  - проекции сил на оси координат.

Решение обратной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т.е.

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t).$$

Для этого надо проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения, и найти шесть произвольных постоянных:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ , которые называются постоянными интегрирования. Для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые начальными условиями движения. Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Часто эти условия задаются для  $t=0$ .

Далее будет рассмотрен пример решения второй задачи динамики как аналитическим методом, так и с применением современных вычислительных программ.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для всех вариантов задания необходимо, приняв движущееся тело за материальную точку, массой  $m$ , сначала составить дифференциальные уравнения ее движения на первом (прямолинейном) участке АВ, длиной  $l$ , не учитывая сопротивления воздуха (т.е. при  $\mu=0$ ). Тело начало двигаться с начальной скоростью  $\bar{v}_A$ ; коэффициент трения скольжения тела по плоскости –  $f$ ; угол наклона участка АВ к горизонту –  $\alpha$ ; время движения точки на участке АВ –  $\tau$  (рис.1.1).

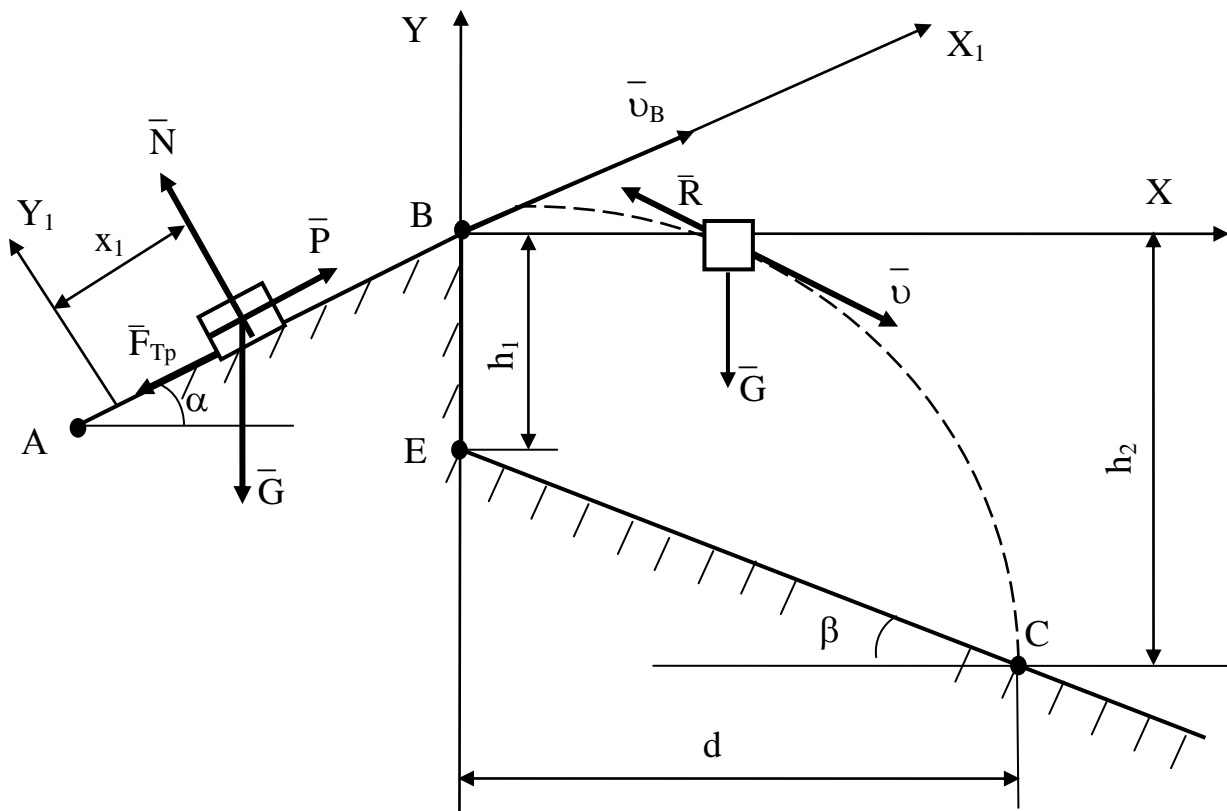


Рис.1.1. Расчетная схема:  $\bar{P}$  – сила тяги;  $\bar{G}$  – сила тяжести;  $\bar{F}_{\text{тр}}$  – сила трения;  $\bar{N}$  – реакция нормальной поверхности

Далее необходимо составить дифференциальные уравнения движения точки в воздухе на участке ВС под действием силы тяжести  $\bar{G}$  и силы сопротивления воздуха  $\bar{R}$ .

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$



где  $v$  - модуль скорости  $\bar{v}$ ,  $\mu$  - коэффициент сопротивления воздуха.

Зная угол  $\beta$  наклона плоскости ЕС к горизонту, перепад высот  $h_1 = BE$ , необходимо найти время полета  $T$  в воздухе, горизонтальную дальность  $d$ , высоту  $h_2$ , длину  $l$  участка АВ и построить графически траекторию движения материальной точки на участке ВС.

В таблице 1.1 заданные величины, а на рисунке 1.2 схемы для 30 вариантов, причем схема 1 соответствует вариантам 1-5, схема 2 – вариантам 6-10, схема 3 – вариантам 11-15, схема 4 – вариантам 16-20, схема 5 – вариантам 21-25, схема 6 – вариантам 26-30.

Задание выполняется в два этапа.

На первом этапе необходимо решить данную задачу аналитически. При построении графика траектории точки на участке ВС следует использовать уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_B^2 \cos^2 \alpha}$$

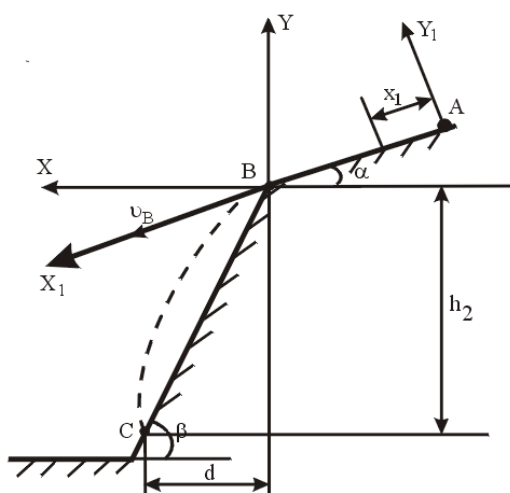
Выполнение второго этапа расчета движения материальной точки воздуха проводим с помощью программной среды MATHCAD.

## Исходные данные для расчета

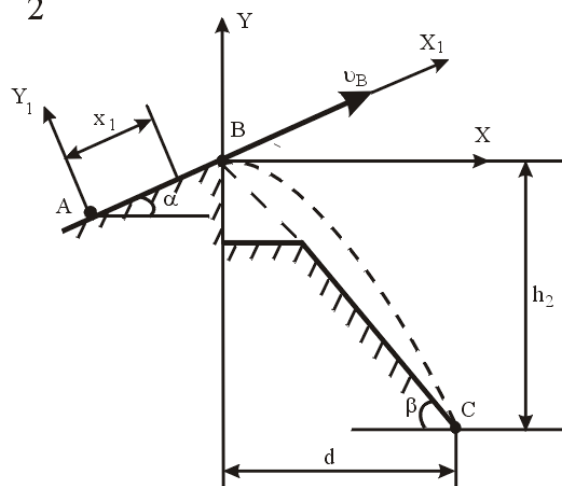
Таблица 1.1

№ п/п	№ схемы	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	m, кг	$f$	P, кН	$\tau$ , с	$h_1$ , м	$v_A$ , м/с	$\mu$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	30	60	1	0,2	0	2,5	0	0	0,8
2	1	15	45	1	0,2	0	5,2	0	2	0,8
3	1	30	60	1	0,22	0	1,6	0	2	0,8
4	1	30	60	1	0	0	2	0	0	0,8
5	1	30	45	1	0,32	0	3	0	0	0,5
6	2	20	30	1	0,1	0	0,2	0	20,9	0,5
7	2	15	45	1	0,1	0	0,32	0	16	0,5
8	2	20	60	1	0	0	0,3	0	21	0,5
9	2	15	45	1	0,1	0	0,3	0	14,3	0,5
10	2	15	60	1	0	0	0,21	0	12	0,9
11	3	30	0	400	0	2,6	18	1,15	0	0,9
12	3	30	0	400	0	0	3,2	1,5	20	0,9
13	3	60	0	400	0	4	20	1,3	0	0,9
14	3	30	0	400	0	2,2	11,7	0,51	0	0,9
15	3	60	0	280	0	3	20,6	2	0	0,7
16	4	30	0	1	0,2	0	1,1	3,5	1	0,7
17	4	45	0	1	0,42	0	1	6	8	0,7
18	4	30	0	1	0,1	0	1	5,4	0	0,7
19	4	15	0	1	0,13	0	1,5	3,1	1	0,7
20	4	45	0	1	0,3	0	0,91	4	0	0,09
21	5	30	0	1	0,1	0	1,5	10	1	0,09
22	5	45	0	1	0,28	0	2	20	0	0,09
23	5	45	0	1	0	0	2	20	0	0,08
24	5	45	0	1	0,2	0	2,5	22	0	0,65
25	5	60	0	1	0,2	0	1,9	4,5	0	0,65
26	6	0	0	1	0,2	0	2	20	7	0,65
27	6	0	0	1	0,1	0	2	4,7	4	0,78
28	6	0	0	1	0,3	0	1	5	5,2	0,76
29	6	0	0	1	0,16	0	1,3	20	3	0,78
30	6	0	0	1	0,25	0	2,7	5	9,6	0,9

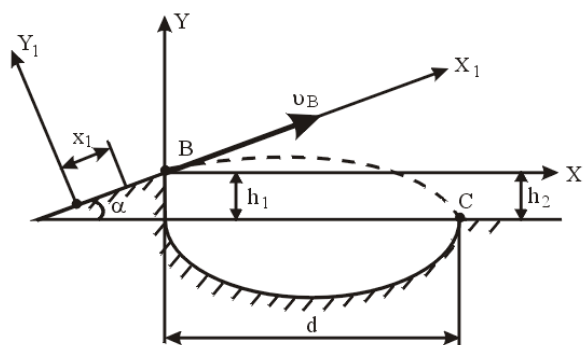
1



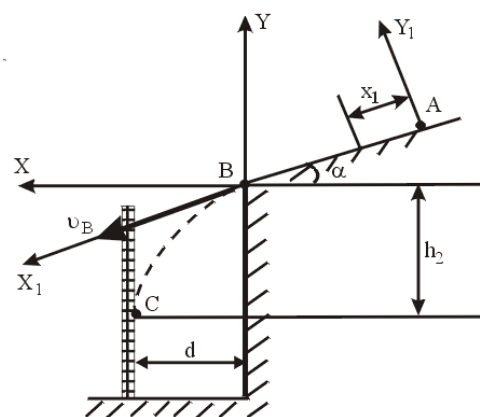
2



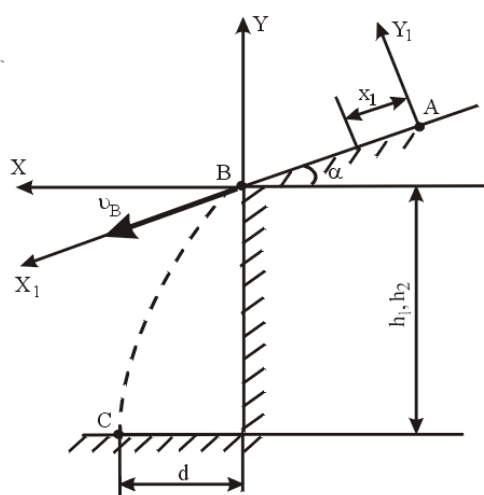
3



4



5



6

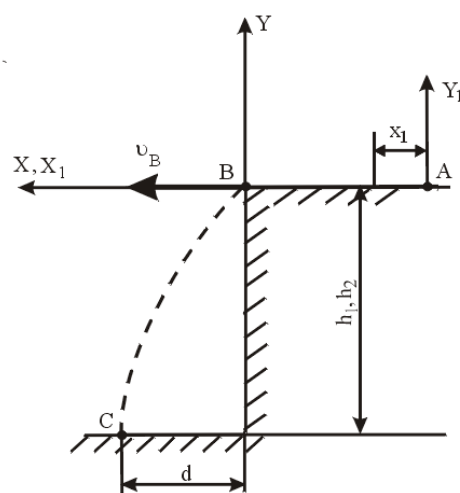


Рис.1.2. Расчетные схемы

### Пример выполнения задания по теме

Имея в точке А скорость  $v_A=16$  м/с, тело поднимается по участку АВ длиной  $l$ , наклоненного под углом  $\alpha=15^\circ$  к горизонту, в течении  $\tau=0,3$  с (рис.1.3). Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f=0,1$ . При постоянной на всем участке АВ движущей силе  $P=0$  тело в точке В приобретает скорость  $v_B$  и пролетает ров шириной  $d$ , находясь в воздухе  $T$ с. И приземляясь в точке С со скоростью  $v_C$ . Масса тела  $m=1$  кг, высота  $h_1=0$ ,  $\beta=45^\circ$ .

Найти:  $l$ ,  $T$ ,  $d$ ,  $h_2$ ,  $v_C$ ; построить график траектории точки на участке ВС с учетом сопротивления воздуха.

#### *Аналитическое решение задачи при отсутствии сопротивления*

1. Рассмотрим движение тела на участке АВ. Запишем векторное уравнение движения материальной точки:

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

где  $\vec{G} = m \vec{g}$ ,

$\vec{N}$  – нормальная реакция поверхности;  $F_{\text{тр}}$  – сила трения скольжения.

Спроецируем это уравнение на ось  $AX_1$ :

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix};$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}};$$

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N.$$

Определяем  $N$  из уравнения проекций на ось  $AY_1$ :

$$0 = -mg \cos \alpha + N; \quad N = mg \cos \alpha; \quad F_{\text{тр}} = f mg \cos \alpha.$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha;$$

$$\ddot{x}_1 = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha;$$

$$\dot{x}_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при  $t=0$   $x_0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = v_A$

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для  $t=0$  и найдем постоянные интегрирования:

$$\dot{x}_{10} = C_1 = v_A, \quad x_{10} = C_2 = 0;$$

$$\dot{x}_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + v_A;$$

$$x_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + v_A t.$$

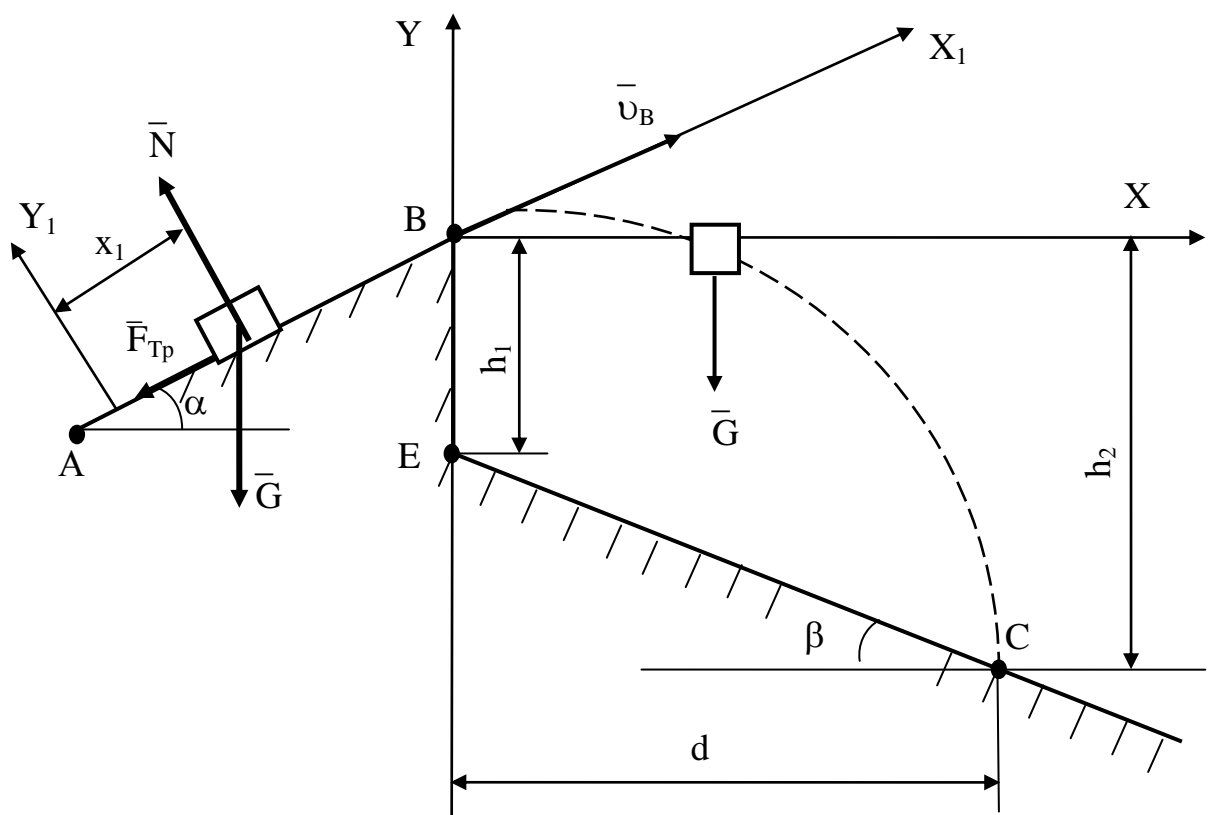


Рис.1.3. Расчетная схема

Для момента  $\tau$  когда тело покидает участок АВ:

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т.е.

$$v_B = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\tau + v_A;$$

$$l = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{\tau^2}{2} + v_A \tau.$$

2. Рассмотрим движение тела от точки В до точки С:

$$m \bar{a} = \bar{G}.$$

Спроецируем векторное уравнение на оси координат ВХ и ВУ:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg;$$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g;$$

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = -gt + C_4;$$

$$x = C_3t + C_5; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + C_4t + C_6.$$

Начальные условия задачи: при  $t=0$

$$x_0=0; \quad y_0=0;$$

$$\dot{x}_0 = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y}_0 = v_B \sin \alpha.$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = v_B \cos \alpha; \quad C_4 = v_B \sin \alpha; \quad C_5 = 0; \quad C_6 = 0$$

Получим следующие уравнения проекций скоростей тела:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y} = -gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения. Определив  $t$  из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$t = \frac{x}{v_B \cos \alpha}; \quad y = -\frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения  $x=d$ ;  $y=-h$ :

$$-h = -\frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{d}, \quad h = d \operatorname{tg} \beta.$$

Получаем следующее квадратное уравнение для определения  $d$ :

$$\frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) d = 0.$$

Время  $T$  движения материальной точки на участке ВС находим из уравнения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \text{ учитывая } x=d \text{ при } t=T:$$

$$T = \frac{d}{v_B \cos \alpha}.$$

Величину  $h_2$  смещения материальной точки по вертикали на участке ВС определяем, подставляя значение  $T$  в уравнение  $y(t)$ :

$$h_2 = y(T), \text{ т.е.}$$

$$h_2 = g \frac{t^2}{2} - v_B T \sin \alpha.$$

Скорость в точке С находим, подставляя  $t=T$  в выражение для модуля  $v_C$ :

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (-v_B \sin \alpha + gT)^2}.$$

Подставляя исходные данные, получаем окончательно числовые значения следующих величин:

$v_B=14,9$  м/с,  $l=5$  м,  $d=53,5$  м,  $T=3,7$  с,  $h_2=53,5$  м,  $v_C=35,5$  м/с, а также уравнение траектории (параболы) на втором участке ВС:

$$y=0,25x-0,0235x^2.$$

Для движения материальной точки на втором участке ВС имеем векторное уравнение движения:

$$m \bar{a} = \bar{G} + \bar{R},$$

где  $\bar{R}$  – сила сопротивления воздуха.

Так как сила  $\bar{R}$  направлена противоположно скорости, то

$\bar{R} = -\mu \bar{v}$ . Проекции сил  $\bar{G}$  и  $\bar{R}$  на координатные оси будут равны:

$$R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt} = -\mu \dot{x};$$

$$G_x = 0;$$

$$R_y = -\mu v_y = -\mu \frac{dy}{dt} = -\mu \dot{y};$$

$$G_y = -G = -mg.$$

Проецируя уравнение на координатные оси ВХ и ВУ, получаем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mu\dot{x}; \\ m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg. \end{cases}$$

Введем обозначение:  $\frac{\mu}{m} = n$ .

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -n\dot{x}; & \ddot{y} &= -(g + n\dot{y}); \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -n\dot{x}; & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -(g + n\dot{y}). \end{aligned}$$

Это – дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Перепишав их в виде

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -n dt; \quad \frac{n d\dot{y}}{g + n\dot{y}} = -n dt$$

и интегрируя, получим

$$\lg \dot{x} = -nt + C_1; \quad \lg (g + n\dot{y}) = -nt + C_2.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим по начальным условиям движения точка М. Так как в начальный момент (при  $t=0$ )

$$v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; \quad v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha;$$

то  $C_1 = \ln(v_0 \cos \alpha); \quad C_2 = \ln(g + nv_0 \sin \alpha);$

Следовательно,

$$\ln \dot{x} = \ln(v_0 \cos \alpha) - nt; \quad \ln(g + n\dot{y}) = \ln(g + nv_0 \sin \alpha) - nt,$$

или  $\ln \frac{\dot{x}}{v_0 \cos \alpha} = -nt; \quad \ln \frac{g + n\dot{y}}{g + nv_0 \sin \alpha} = -nt.$

Отсюда находим:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-nt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n} e^{-nt} - \frac{g}{n}.$$

Остается проинтегрировать эти уравнения, переписав их в виде



$$dx = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-nt} \cdot dt; \quad dy = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n} e^{-nt} \cdot dt - \frac{g}{n} \cdot dt$$

и интегрируя, получим:

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{n} e^{-nt} + C_3; \quad y = -\frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n^2} e^{-nt} - \frac{g}{n} t + C_4.$$

Так как в начальный момент, т.е. при  $t=0$ , точка М находится в начале координат, то  $x_0=y_0=0$ , а потому

$$C_3 = \frac{v_0 \cos \alpha}{n}; \quad C_4 = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{n} (1 - e^{-nt}); \quad y = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n^2} (1 - e^{-nt}) - \frac{g}{n} t.$$

Эти уравнения, выражающие зависимость координат точки М от времени, полностью определяют ее движение на участке ВС.

По полученным уравнениям в программной среде MATHCAD построим траекторию движения т.М на участке ВС. Для этого откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Используя данные таблицы 1.1 и результаты аналитических решений вводим следующие параметры, входящие в дифференциальные уравнения движения точки М, на участке ВС:  $\mu$  - коэффициент сопротивления воздуха;  $m$  - масса тела;  $V_0$  ( $v_B$ ) - скорость тела в т.В, которая будет являться начальной скоростью на участке ВС;  $\alpha$  - угол наклона участка АВ к горизонту;  $g$  - ускорение свободного падения ( $g=9,807 \text{ м/с}^2$ );  $t$  - дискретный расчетный интервал времени, с шагом 0,1. Затем вводим уравнения движения  $x(t)$  и  $y(t)$  (рис.1.4).

Подготовка вычислительных блоков облегчается благодаря выводу шаблона при задании того или иного оператора. Для этого служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций.

Вычисления выполняются посимвольным набором левой части вычисляемого выражения и установкой после него оператора вывода – знака «=» (равно).

После ввода уравнений движения и известных значений можно строить графики функций. Для этого щелкните на кнопке с изображением графика – на экране появится шаблон графика. Введите в место ввода по оси  $X$  и  $Y$  -  $x(t)$  и  $y(t)$  - имя независимого аргумента. Отведите от графика указатель мыши и щелкните левой кнопкой – график траектории движения на участке ВС будет построен (рис.1.4). Дополнительно построим графики координат точки в зависимость от времени (рис.1.5).

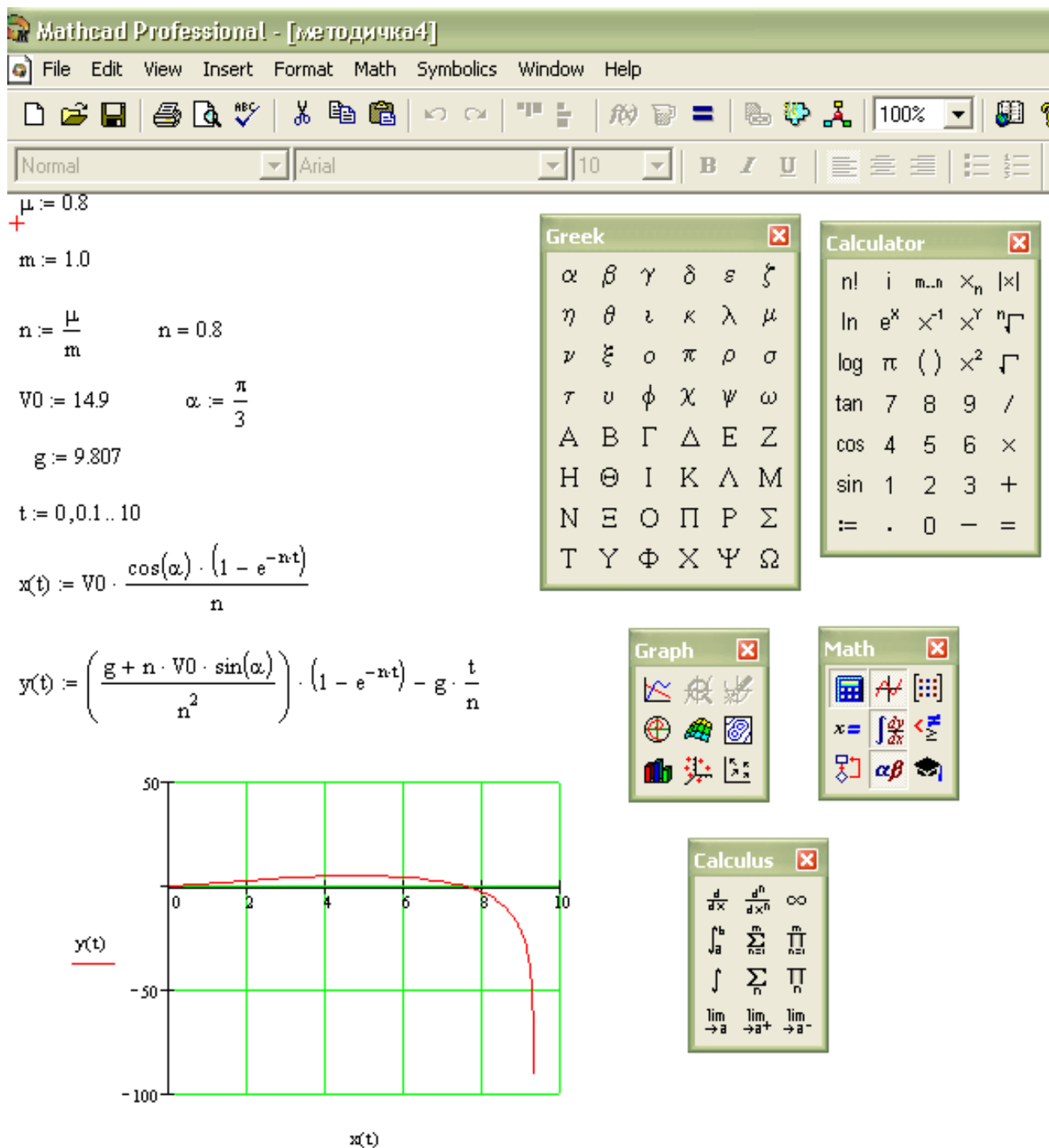
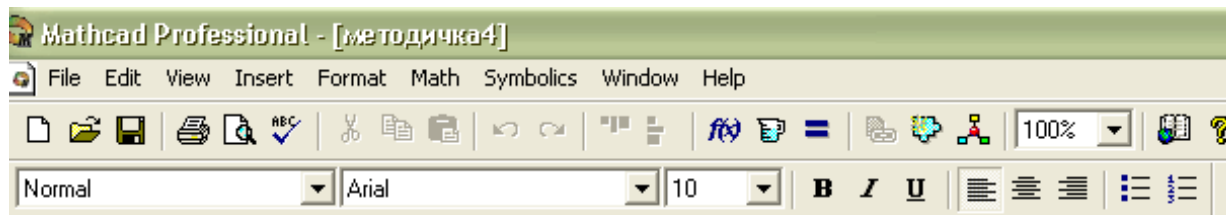
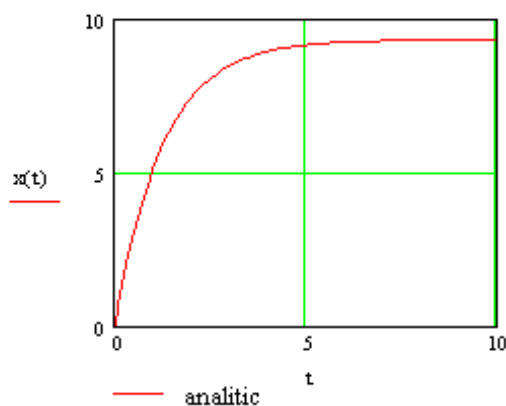


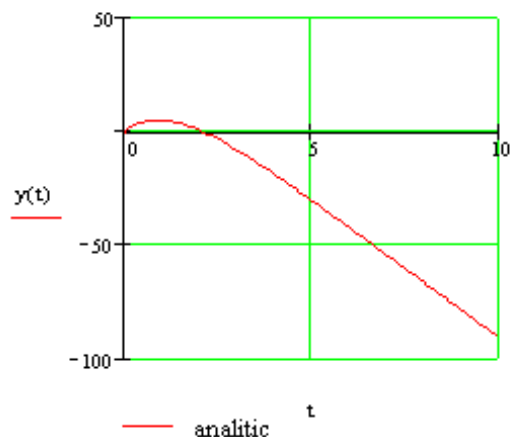
Рис. 1.4. График движения тела на участке ВС



$x(t)$



*a)*



*б)*

Рис.1.5. Графики зависимостей координат  $a - X$  и  $б - Y$  от времени

## Выполнение задания численным методом с применением ЭВМ

Численное решение дифференциальных уравнений можно проводить несколькими методами, например методом Эйлера или Рунге-Кутты [прил.3]. Выполним интегрирование уравнений движения точки на участке ВС в программной среде MATHCAD с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка и сопоставим аналитическое решение с численным.

Дифференциальные уравнения движения тела на участке ВС были получены ранее:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}; \quad m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg.$$

Введем обозначение :  $\frac{\mu}{m} = n;$

$$\ddot{x} = -n\dot{x}; \quad \ddot{y} = -n\dot{y} - g.$$

Откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление двух дифференциальных уравнений. Для первого уравнения  $\ddot{x} = -n\dot{x}$  посимвольно введем следующие параметры (рис.1.6):

T- расчетное время; N – число точек интегрирования, примем его равным 1000;

$V0x := V0 \cdot \cos(\alpha)$  - вектор начальных условий (проекция скорости на ось X в начальный момент времени на участке BC);

$$NUx := \begin{pmatrix} 0 \\ V0 \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{- начальное перемещение;} \\ \text{- начальная скорость.} \end{matrix}$$

Ввод матрицы осуществляем путем нажатия клавиши матрицы на панели математических символов и в открывшемся меню вводим необходимое количество строк и столбцов (рис.1.6).

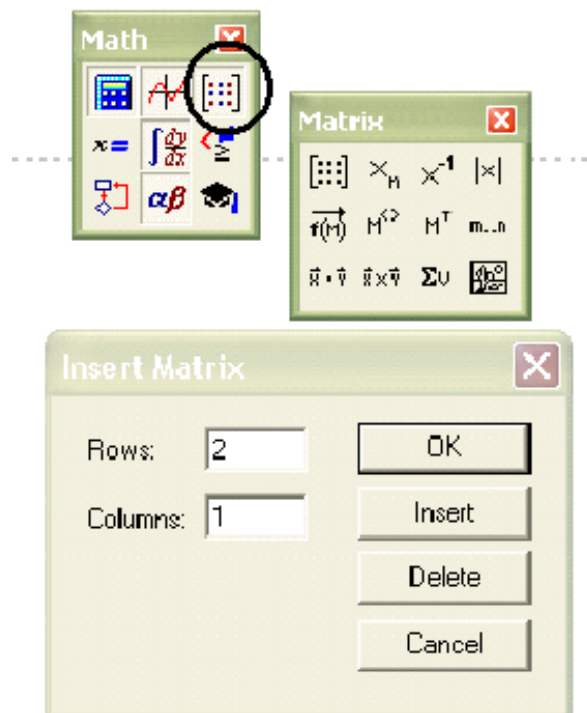


Рис.1.6.

Затем аналогично введем вектор-столбец дифференциального уравнения:

$$XXX(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ -n \cdot X_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- скорость точки М;} \\ \text{- ускорение точки М.} \end{array}$$

Введем оператор интегрирования дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом интегрирования (вводится посимвольно):

$$XX := rkfixed(NUX, 0, T, N, XXX)$$

После его ввода система Mathcad производит интегрирование дифференциальных уравнений.

Если Вы хотите просмотреть матрицу решений, то сразу ниже оператора интегрирования введем XX и установим после него оператора вывода – знак «=» (равно) (рис.1.7).

XX =

	0	1	2
0	0	0	7.45
1	0.01	0.074	7.391
2	0.02	0.148	7.332
3	0.03	0.221	7.273
4	0.04	0.293	7.215
5	0.05	0.365	7.158
6	0.06	0.436	7.101
7	0.07	0.507	7.044
8	0.08	0.577	6.988
9	0.09	0.647	6.932
10	0.1	0.716	6.877
11	0.11	0.784	6.822
12	0.12	0.852	6.768
13	0.13	0.92	6.714
14	0.14	0.987	6.661
15	0.15	1.053	6.608

Рис.1.7.

Матрица решения XX представляет собой матрицу вида:

$$(XX^{<0>}; XX^{<1>}; XX^{<2>}),$$

где  $XX^{<0>}$  - вектор-столбец времени;

$XX^{<1>}$  - вектор-столбец перемещения;

$XX^{<2>}$  - вектор-столбец скорости.

Справа в таблице имеется полоса прокрутки, с помощью которой можно просмотреть значения  $T$  в интервале от 0 до 10.

Если нет необходимости просмотра матрицы решений, то сразу строим график координат точки в зависимости от времени, как было описано ранее. В шаблоне графика введем по оси абсцисс – время ( $XX^{<0>}$ ) по оси ординат перемещение  $XX^{<1>}$ . Отведите от графика указатель мыши и щелкните левой кнопкой – график будет построен (рис.1.8).

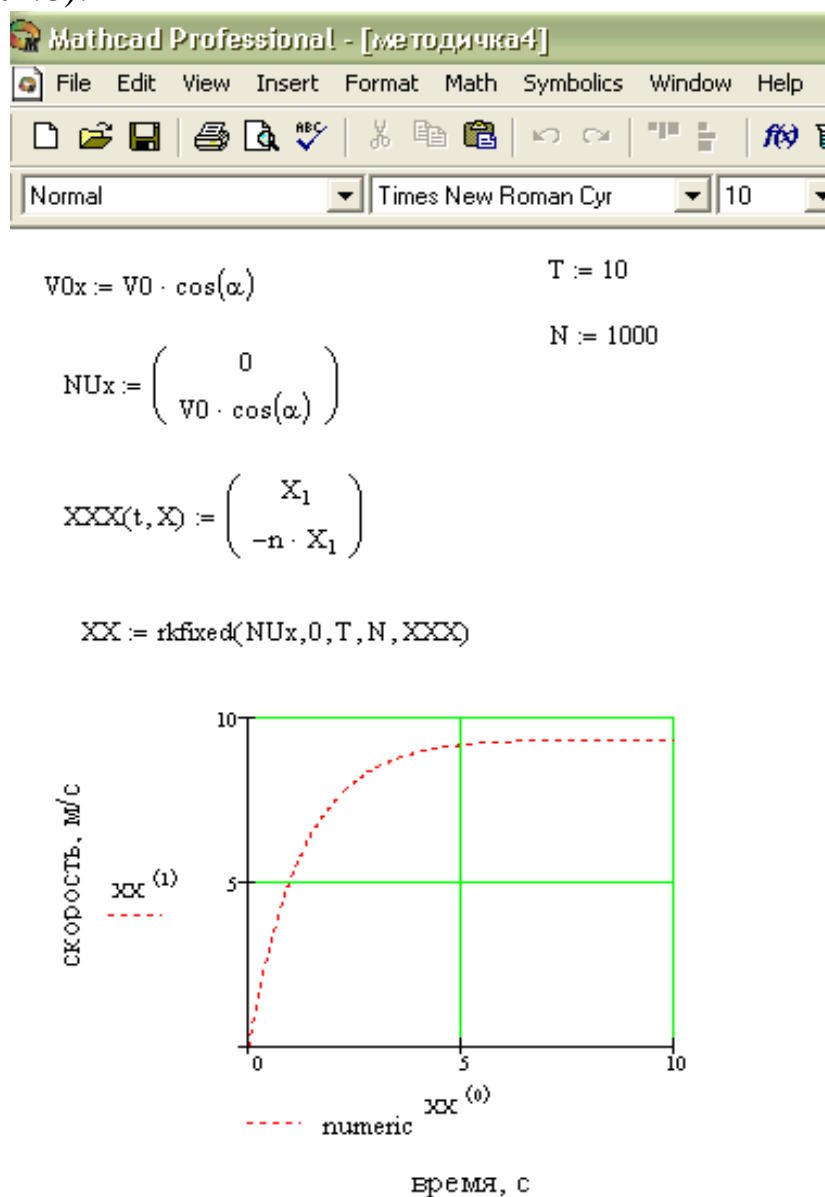


Рис. 1.8. График зависимости проекции скорости по оси  $x$  от времени

Аналогичную процедуру повторяем для вычисления второго дифференциального уравнения  $\ddot{y} = -n\dot{y} - g$ . Параметры  $T$  и  $N$  повторно вводить не надо. Необходимо учесть, что проекция скорости на ось  $Y$  в начальный момент времени  $V_{0y} := V_0 \cdot \sin(\alpha)$  (рис. 1.9). При построении графика введем по оси абсцисс – время ( $YY^{(0)}$ ) по оси ординат перемещение  $YY^{(1)}$ .

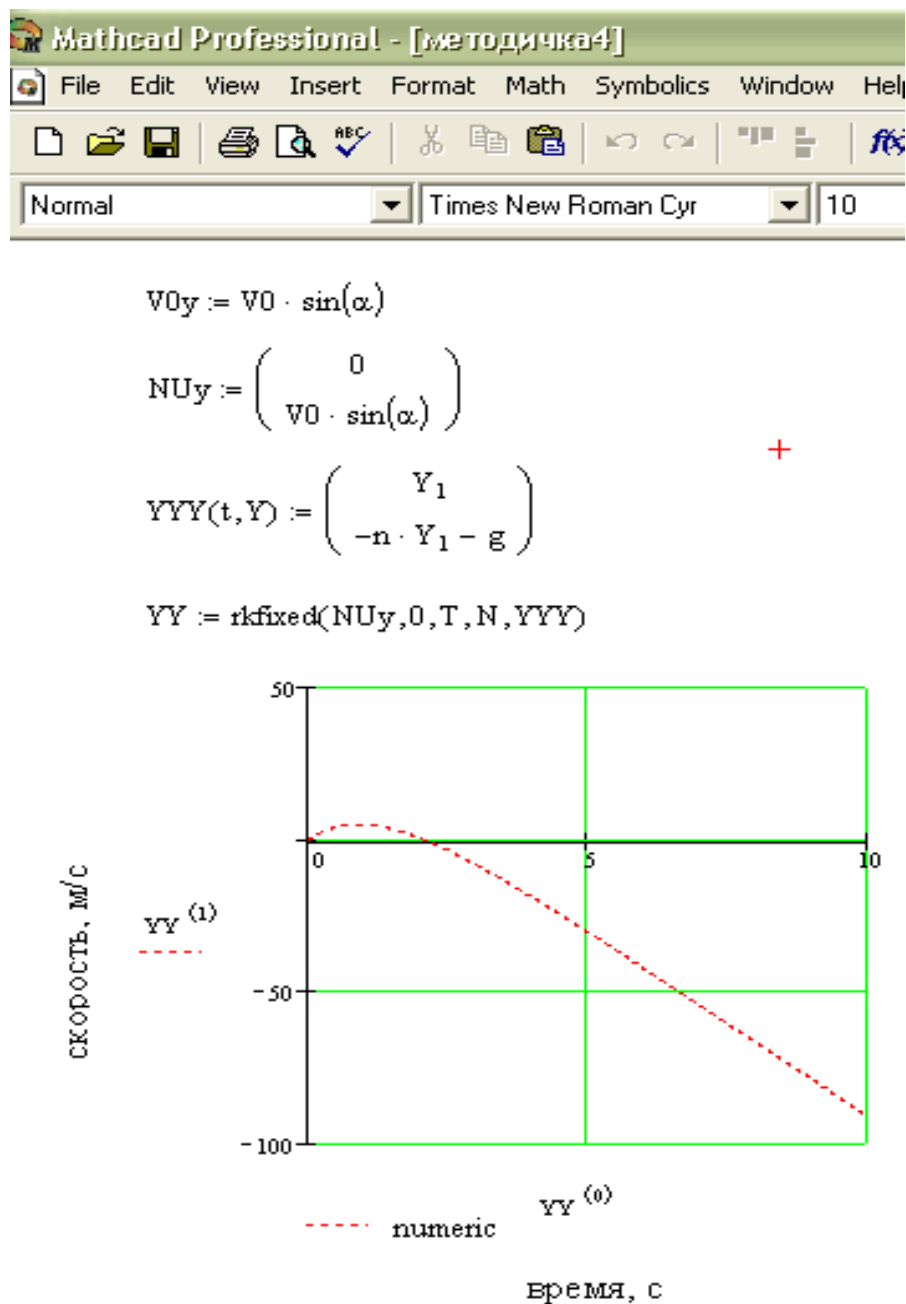


Рис. 1.9. График зависимости проекции скорости по оси  $y$  от времени



По результатам вычислений надо сравнить графики, полученные аналитически (рис.15) и численно (рис.1.8 и 1.9), написать отчет. В отчёт следует включить расчётную схему, исходные данные для расчёта, аналитическое и численное решение задачи, все необходимые формулы и графики. Необходимо привести основные выводы по содержанию работы.

Отчет оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ. К отчету прилагается расчетная часть программы.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какие основные законы динамики точки вы знаете?
2. Каковы две основные задачи динамики материальной точки?
3. Запишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на координатные оси.
4. Как определить постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
5. Численное и аналитическое решение дифференциальных уравнений. Способы и методы.

## 2. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Д–2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию динамики механической системы

#### Краткие теоретические положения

#### 1. Работа силы. Некоторые случаи вычисления работы

Работа силы на элементарном перемещении определяется следующим образом (рис. 2.1):

$$dA = \vec{F}_\tau \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cos \alpha. \quad (1)$$

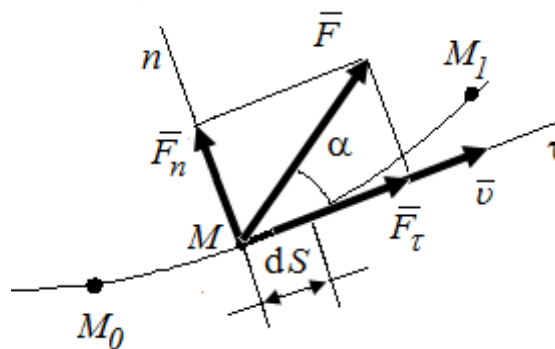


Рис. 2.1. Схема движения точки под действием силы  $F$  по траектории  $M_0M_1$

Элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы этого перемещения.

Единицей измерения работы в системе СИ является джоуль ( $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н м}$ ).

Рассмотрим некоторые случаи вычисления работы.

**Работа силы тяжести** равна весу тела  $P$ , умноженному на модуль перемещения центра тяжести тела по вертикали (рис. 2.2).

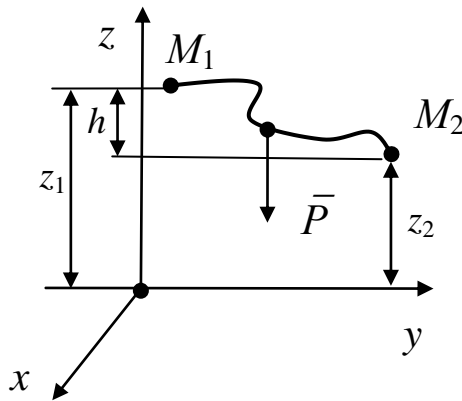


Рис. 2.2. Работа силы тяжести

Проекции силы тяжести:

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = -mg; \quad (2)$$

$$A_{M_1 M_2} = \int P_x dx + P_y dy + P_z dz; \quad (3)$$

$$A_{M_1 M_2} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = mg(z_1 - z_2), \quad (4)$$

где  $z_1, z_2$  – координаты, определяющие начальное и конечное положение тела.

$$A_{M_1 M_2} = \pm mgh, \quad (5)$$

где  $h$  – вертикальное перемещение центра масс (или центра тяжести).

Знак «+», если точка приложения силы тяжести опускается. Работа силы тяжести не зависит от формы траектории.

**Элементарная работа сил, приложенных к вращающемуся телу**, равна произведению момента на угол поворота, взятому с соответствующим знаком (разгоняющийся момент или тормозящий) (рис. 2.3).

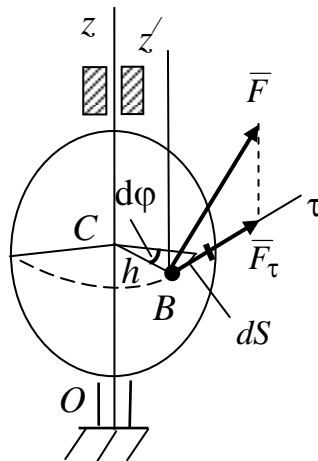


Рис. 2.3. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

$$dA = F_{\tau} dS = F_{\tau} h d\varphi, \quad (6)$$

так как  $dS = h d\varphi$ ,

где  $d\varphi$  – элементарный угол поворота тела.

Но  $F_{\tau} h = m_z(F) = M_z$  – вращающий момент, тогда получим:

$$dA = M_z d\varphi. \quad (7)$$

В частном случае постоянного момента ( $M = \text{const}$ ) имеем:

$$A = \pm M \varphi. \quad (8)$$

### ***Работа сил трения, действующих на катящееся тело.***

На колесо радиусом  $R$  (рис. 2.4), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует приложенная в точке  $B$  сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , препятствующая скольжению точки вдоль плоскости.

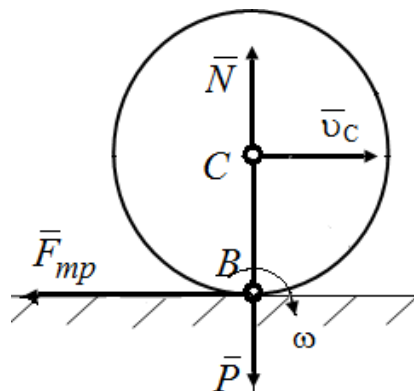


Рис.2.4. Работа сил трения, действующих на катящееся тело

Элементарная работа этой силы

$$dA = F_{\tau}^{\text{тр}} dS_B. \quad (9)$$

Точка  $B$  совпадает с мгновенным центром скоростей, т.е.  $v_B = 0$ .

Так как  $dS_B = v_B dt$ , то  $dS_B = 0$ , и для каждого элементарного перемещения  $dA = 0$ .

Следовательно, при качении без скольжения работа сил трения, препятствующих скольжению, на любом перемещении равна нулю.

По той же причине в этом случае равна нулю работа нормальной реакции  $\bar{N}$ , если считать тела недеформируемыми, а силу  $\bar{N}$  приложенной в точке  $B$  (как на рис. 2.4).

**Работа момента сопротивления качению.**

Сопротивление качению создаёт возникающая вследствие деформации поверхности (рис. 2.5) пара сил  $\bar{N}$ ,  $\bar{P}$ , момент которой  $M_{\text{тр.к}} = \delta N$ , где  $\delta$  – коэффициент трения качения.

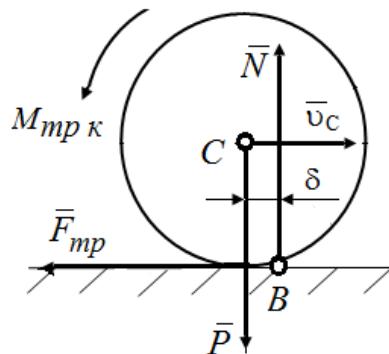


Рис. 2.5. Работа момента сопротивления качению

Учитывая, что при качении угол поворота колеса  $d\varphi = \frac{dS_C}{R}$ , получим

$$dA_{\text{тр.к}} = -\delta N d\varphi = -\frac{\delta}{R} N dS_C, \quad (10)$$

где  $dS_C$  – элементарное перемещение центра  $C$  колеса.

Если  $N=\text{const}$ , то полная работа сил сопротивления качению

$$A_{\text{тр.к}} = -\delta N \varphi = -\frac{\delta}{R} N S_c. \quad (11)$$

### **Работа силы упругости**

Упругими свойствами, как известно, обладают не только специально предназначенные для этого элементы, например пружины или рессоры, но и вообще все тела (стержни, тросы и т.п.).

При этом в определённом диапазоне деформаций сила упругости пропорциональна величине деформации (**закон Гука**). Для линейного упругого элемента закон Гука записывается (рис. 2.6) в виде

$$F=c|x| \text{ или } F_x=-cx,$$

где  $x$  – координата, отсчитываемая от нейтрального (недеформируемого) состояния упругого элемента;  $c$  – коэффициент жесткости элемента с размерностью  $[c]=\text{Н/м}$ .

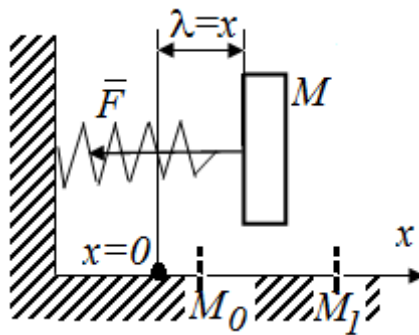


Рис. 2.6. Работа силы упругости

В данном случае удлинение пружины  $\lambda=x$ ,  $F_y = F_z = 0$ .

Работу силы упругости при перемещении конца упругого элемента из положения  $M_0(x_0)$  в положение  $M_1(x_1)$  находим по следующей формуле:

$$A_{M_0 M_1} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2), \quad (12)$$

где  $x_0$ ,  $x_1$  – начальное  $\lambda_0$  и конечное  $\lambda_1$  удлинение пружины.

Следовательно,

$$A_{M_0M_1} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \quad (13)$$

т.е. работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

Таким образом, если в результате перемещений конец элемента приближается к нейтральному положению, то работа силы упругости положительна, если удаляется – отрицательна. Заметим, что работа не зависит от того, каков был характер этого перемещения.

## 2. Кинетическая энергия

**Кинетической энергией материальной точки** называется величина, равная половине произведения массы точки на квадрат её скорости:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (14)$$

Размерность кинетической энергии – джоуль:

$$[T] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кинетическая энергия никогда не может быть отрицательной.

**Кинетической энергией механической системы** является арифметическая сумма кинетических энергий всех её точек:

$$T = \sum T_i. \quad (15)$$

Для механической системы кинетическая энергия для различных видов движения определяется следующим образом:

а) при поступательном движении (рис. 2.7)

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (16)$$

где  $v$  – скорость тела;

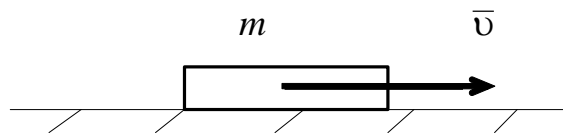


Рис. 2.7. Поступательное движение твердого тела

Таким образом, кинетическая энергия поступательно движущегося тела записывается так же, как и для материальной точки.

б) при вращательном движении (рис.2.8)

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (17)$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  $\omega$  – угловая скорость тела.

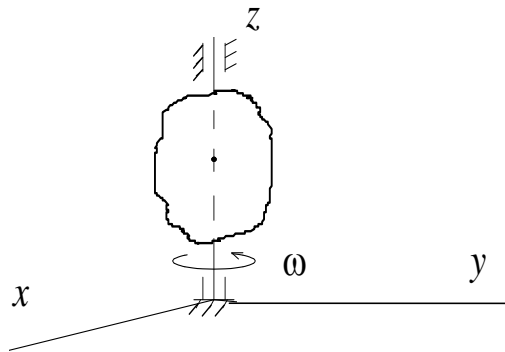


Рис. 2.8. Вращательное движение твердого тела

По системе механических аналогий при переходе к описанию вращательного движения скорость заменяется на угловую скорость, а масса – на осевой момент инерции.

в) при плоско-параллельном (плоском) движении (рис. 2.9)

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_z} \omega^2, \quad (18)$$

где  $v_C$  – скорость центра масс;  $\omega$  – угловая скорость тела.

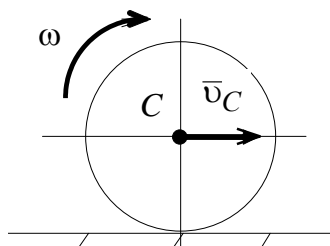


Рис.2.9. Плоско-параллельное (плоское) движение твердого тела



Последнее соотношение вполне соответствует известному факту – плоское движение представляет собой совокупность поступательного и вращательного движений.

### 3. Теорема об изменении кинетической энергии

Применим к материальной точке  $m$ , перемещающейся из одного положения в другое, основной закон динамики в проекции на касательную к траектории точки:

$$ma_{\tau} = \sum F_{\tau i} . \quad (19)$$

Представим

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v .$$

В результате получим:

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{\tau i} . \quad (20)$$

Умножив обе части на  $ds$ , получим

$$mv \frac{ds}{ds} dv = \sum F_{\tau i} ds . \quad (21)$$

Учтем, что  $F_{\tau} ds = dA$  и получим

$$d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = d \sum A_i . \quad (22)$$

Полученное выражение определяет **теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме**: дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

Проинтегрируем обе части, получим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки на любом перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i. \quad (23)$$

Для механической системы теорема об изменении кинетической энергии имеет следующий вид:

$$dT = dA_i^e + dA_i^i, \quad (24)$$

где  $dA_i^e, dA_i^i$  – элементарные работы действия на точку внешних и внутренних сил.

Проинтегрировав обе части, получим **теорему об изменении кинетической энергии системы**, которая формулируется следующим образом: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил:*

$$T_1 - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^i. \quad (25)$$

Теорема об изменении кинетической энергии используется для решения задач, в которых необходимо определять скорости и ускорения движущихся тел.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется элементарная работа силы? Некоторые случаи вычисления работы.
2. В каких случаях работа сил тяжести положительна, отрицательна и равна нулю?
3. Как определить кинетическую энергию материальной точки и механической системы?
4. Как определить кинетическую энергию твердого тела для различных случаев движения?
5. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы?

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Механическая система состоит из груза 1 (коэффициент трения груза о плоскость  $f = 0,1$ ), цилиндрического сплошного однородного катка 2, радиусом  $R_2 = 0,4$  м, ступенчатых шкивов 3 и 4 с радиусами ступеней  $R_3 = 0,5$  м,  $r_3 = 0,25$  м,  $R_4 = 0,3$  м,  $r_4 = 0,2$  м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) и однородного сплошного блока 5, массой  $m_5 = 3$  кг и радиусом  $R_5 = 0,6$  м (табл. 2.1). Тела системы соединены друг с другом невесомыми нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (рисунки в табл. 2.2).

Под действием силы  $F$  и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 3 и 4 и сплошной блок 5 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно  $M_3$ ,  $M_4$  или  $M_5$ .

Определить значение скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы  $F$  равно  $s_1$ , а углы  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

Таблица 2.1

Исходные данные для расчёта

Номер условия	$m_1$ кг	$m_2$ кг	$m_3$ кг	$m_4$ кг	$M_3$ Н·м	$M_4(M_5)$ Н·м	$F$ Н	$S_1$ м
1	2	1,5	1	-	5	-	440	1,8
2	1	4	2	-	4	-	420	1,2
3	1,5	3	2	-	3	-	410	1,0
4	4	2	-	-	-	2	380	1,1
5	3	3	-	-	-	4	400	0,9
6	2	1	-	-	-	3	360	0,8
7	1	4	1,5	-	6	-	340	1,0
8	1,5	2	3	-	2	-	320	0,6
9	4	3	2	-	3	-	415	1,4
10	1	1,5	-	-	-	5	300	1,6
11	2	4	3	-	3	-	345	1,0
12	1	1,5	-	-	-	6	400	0,8
13	1	2	-	-	-	3	315	1,0

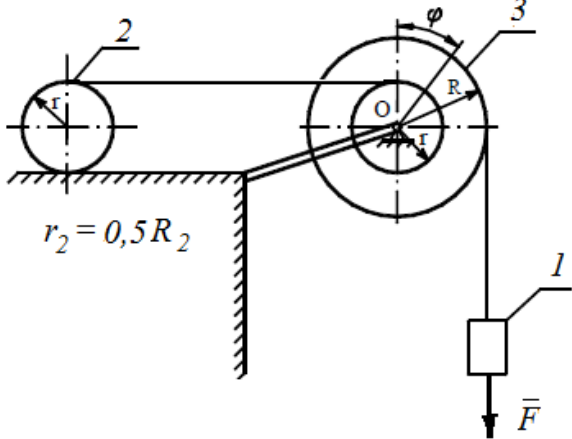
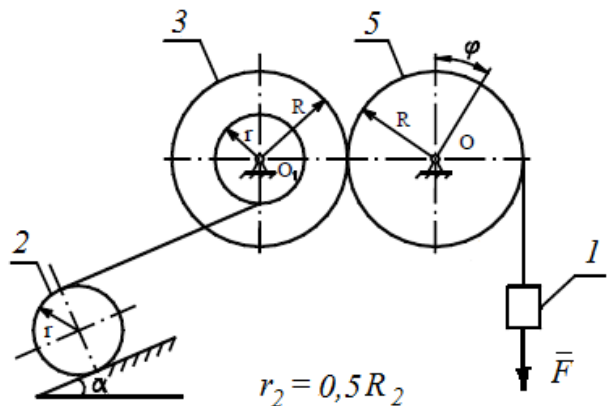
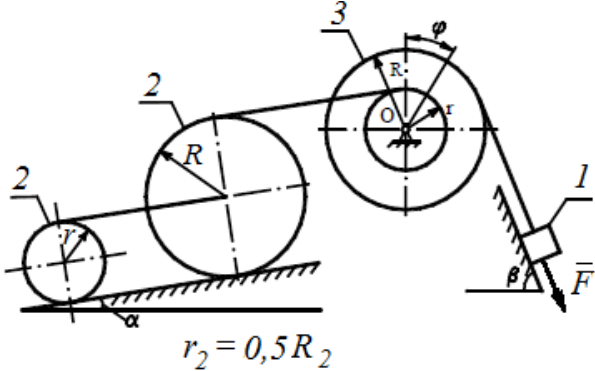
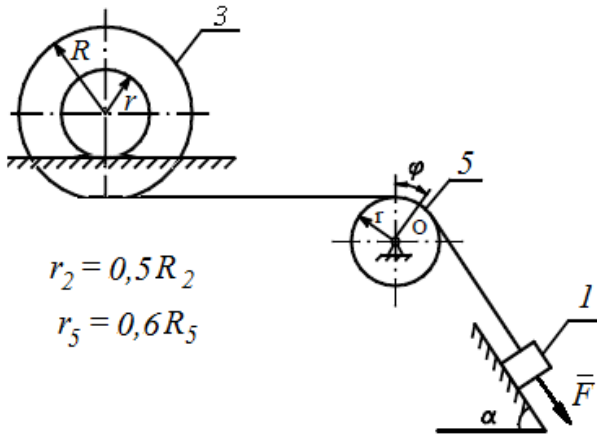
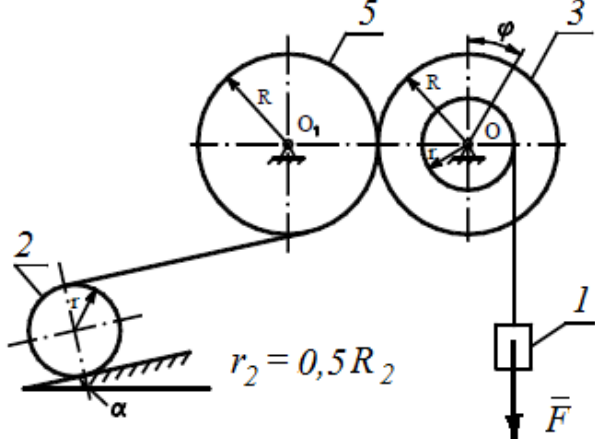
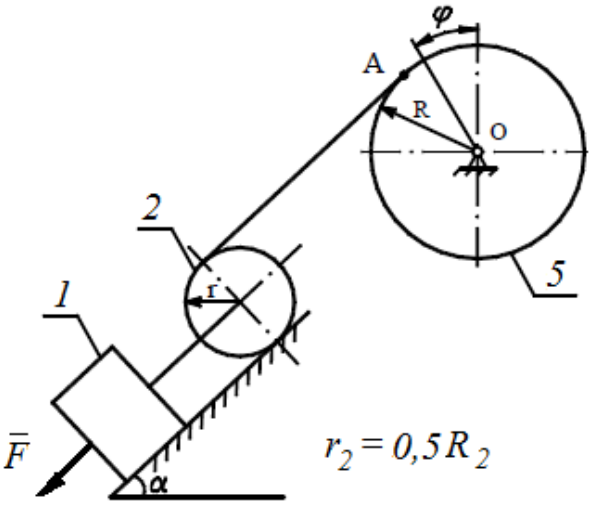
продолжение таблицы 2.1

Номер условия	$m_1$ кг	$m_2$ кг	$m_3$ кг	$m_4$ кг	$M_3$ Н·м	$M_4(M_5)$ Н·м	$F$ Н	$S_I$ м
14	-	4	-	-	-	6	275	1,8
15	4	3	-	-	-	4	300	0,9
16	-	1	1	-	-	3	255	1,2
17	6	2	2	1	6	0	200	1,2
18	3	4	6	8	0	4	220	0,8
19	2	2	4	1	3	0	240	0,6
20	8	1	2	6	0	6	260	1,4
21	8	2	4	5	9	0	280	1,6
19	3	6	2	8	0	8	300	1,0
20	5	4	6	3	6	0	320	0,8
21	6	2	4	1	3	0	340	1,6
22	8	4	6	10	0	4	360	1,4
23	2	1	4	6	0	8	380	1,0
24	5	3	2	1	0	5	390	1,0
25	6	5	4	7	5	0	400	0,9
26	3	6	4	2	0	4	410	0,7
27	6	2	1	4	4	0	420	1,0
28	6	2	3	4	0	8	430	0,6
29	4	5	6	7	8	0	440	0,9
30	7	3	6	4	0	7	450	0,7
31	5	2	4	3	0	6	460	1,1
32	8	5	6	7	6	0	470	1,1
33	2	3	4	5	7	0	480	1,0
34	2	3	-	3	-	7	280	1,1

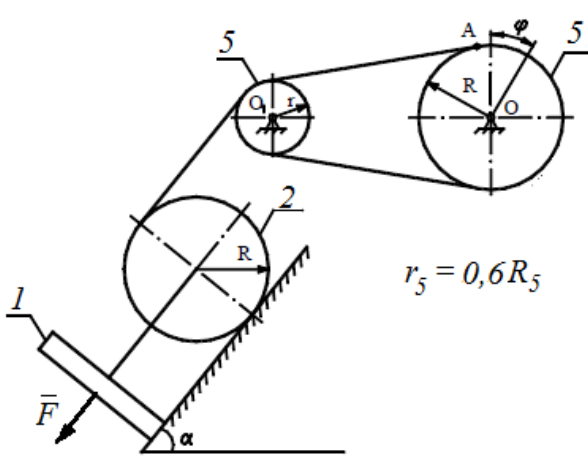
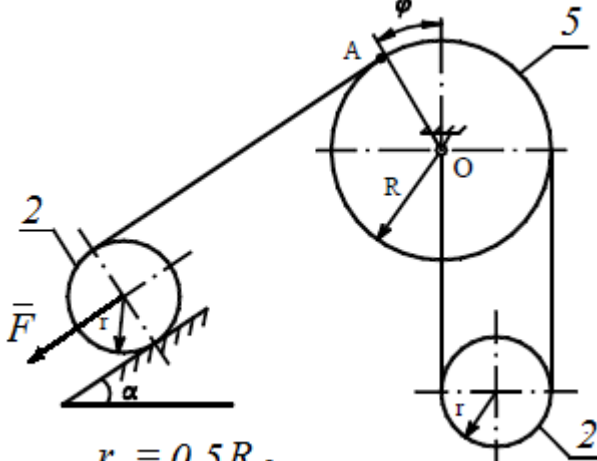
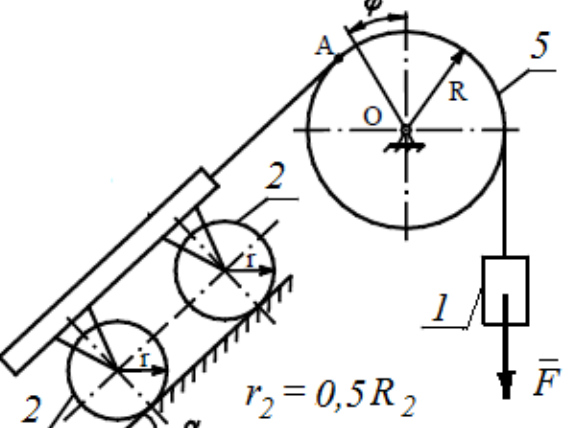
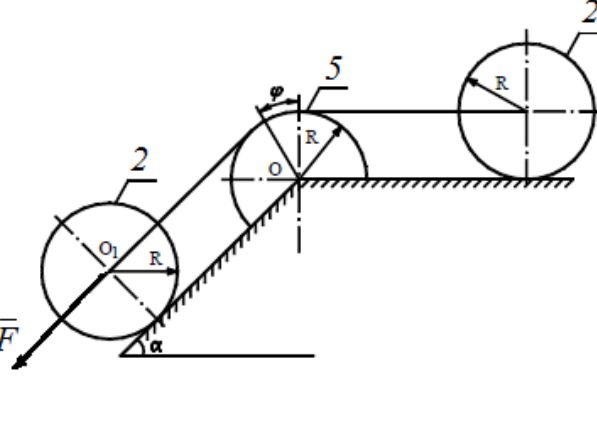
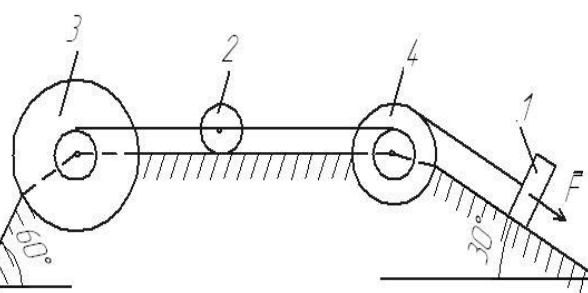
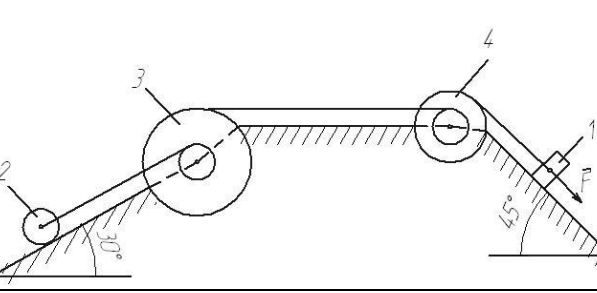
Таблица 2.2

1	2
3	4
5	6

продолжение таблицы 2.2

 <p style="text-align: center;">7</p>	 <p style="text-align: center;">8</p>
 <p style="text-align: center;">9</p>	 <p style="text-align: center;">10</p>
 <p style="text-align: center;">11</p>	 <p style="text-align: center;">12</p>

продолжение таблицы 2.2

 <p style="text-align: center;"><math>r_5 = 0,6 R_5</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>r_2 = 0,5 R_2</math></p>
<p style="text-align: center;">13</p>	<p style="text-align: center;">14</p>
 <p style="text-align: center;"><math>r_2 = 0,5 R_2</math></p>	
<p style="text-align: center;">15</p>	<p style="text-align: center;">16</p>
	
<p style="text-align: center;">17</p>	<p style="text-align: center;">18</p>

продолжение таблицы 2.2

19	20
21	22
23	24
25	26



продолжение таблицы 2.2

27	28
29	30
31	32
33	34

## Примеры выполнения заданий по теме «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию динамики механической системы»

### Пример 1.

Груз 1 массой  $m_1$  соединен нитью, переброшенной через невесомый блок с катком 2 массой  $m_2$ . Ось катка  $C_2$  связана нитями с пружиной жесткостью  $c$ .

Определить скорость груза 1 в момент, когда он пройдет путь  $S$  (рис. 2.10).

Каток считать однородным цилиндром радиусом  $R$ . Трением пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

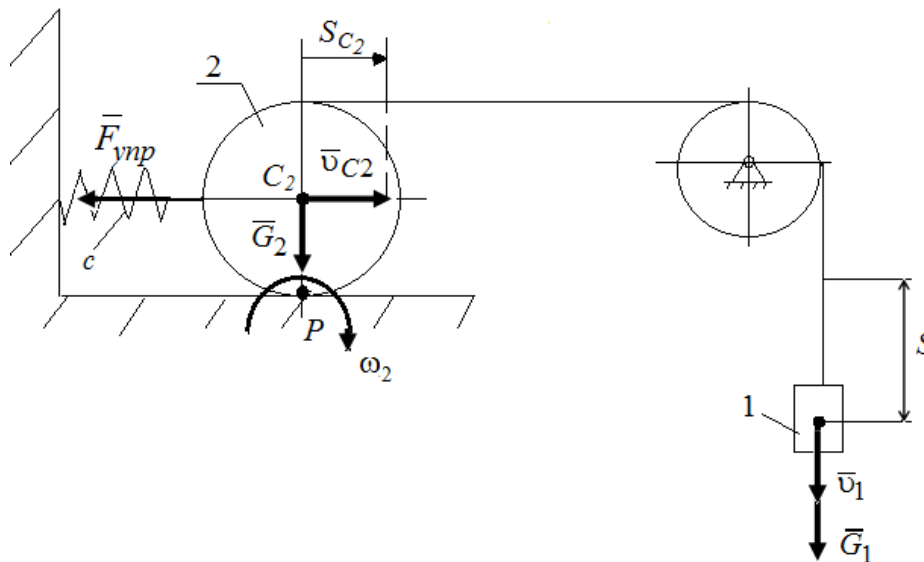


Рис. 2.10. Расчетная схема

### Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i.$$

$T_0 = 0$ , т.к. в начальный момент система находилась в покое.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2.$$

Так как груз 1 движется поступательно, а каток 2 совершает плоское движение, то

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_{C_2} \omega_2^2}{2}.$$

Выразим все скорости через искомую  $v_1$ :

$$\omega_2 = \frac{v_1}{2R}; \quad v_{C_2} = \omega_2 \cdot R = \frac{v_1}{2} \cdot R = \frac{v_1}{2},$$

и учитывая, что  $J_{C_2} = m_2 \frac{R^2}{2}$ , получим

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{3}{8} m_2 v_1^2 = \frac{1}{8} (4m_1 + 3m_2) v_1^2.$$

Найдем работу всех внешних сил:

$$A_{G_1} = m_1 g S; \quad A_{G_2} = 0,$$

т.к. сила  $\vec{G}_2$  перпендикулярна перемещению  $S$ ;

$$A_{F_{\text{упр}}} = -\frac{c \cdot S_3^2}{2} = -\frac{c S^2}{8},$$

где  $F_{\text{упр}} = c S_3$ , здесь  $S_3 = \frac{S}{2}$  – перемещение оси катка 3.

Тогда

$$\frac{1}{8} (4m_1 + 3m_2) v_1^2 = m_1 g S - \frac{1}{8} c S^2.$$

Отсюда находим скорость груза 1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{8(8m_1 g S - c S^2)}{4m_1 + 3m_2}}$$

## Пример 2.

Механическая система состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения грузов о плоскость  $f = 0,1$ ), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней  $R_4 = 0,3$  м,  $r_4 = 0,1$  м,  $R_5 = 0,2$  м,  $r_5 = 0,1$  м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему

ободу). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (рис. 2.11 и табл. 2.3).

Под действием силы  $F$  и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно  $M_4$  и  $M_5$ . Определить скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы  $F$  равно  $s_1$ .

Данные для расчета

Таблица 2.3

$m_1$ кг	$m_2$ кг	$m_3$ кг	$m_4$ кг	$m_5$ кг	$M_4$ Н·м	$M_5$ Н·м	$F$ , Н	$S_1$ м
6	0	4	0	8	0,3	0	240	1,6

### Решение.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Так как в начальный момент времени система покоится, то  $T_0=0$ . Тогда получим:

$$T = \sum A_i$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5$$

Определим кинетическую энергию каждого из тел, входящих в данную систему, когда пройденный телом 1 путь составит  $s_1$ .

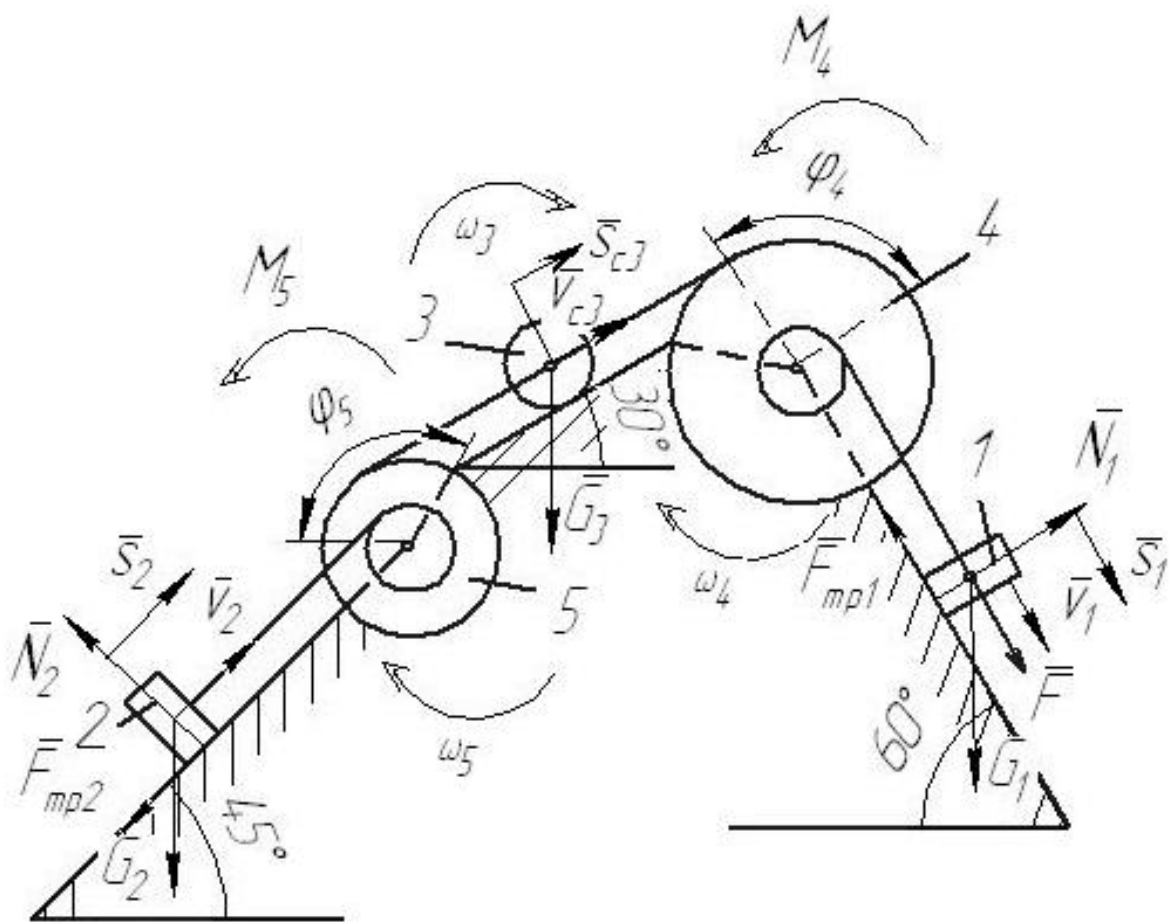


Рис. 2.11. Расчетная схема

Найдем кинетические энергии тел, имеющих ненулевую массу.

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2 - \text{поступательное движение,}$$

$$T_5 = J_5 \omega_5^2 / 2 - \text{вращательное движение,}$$

где  $J_5 = m_5 R_5^2 / 2$  – момент инерции колеса 5.

$$T_3 = m_3 v_{c3}^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 - \text{плоское движение,}$$

где  $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$  – момент инерции колеса 3.

Выразим все скорости через скорость 1 тела  $v_1$ .

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_4}$$

$$v_{c3} = \omega_4 R_4 = 3v_1 \quad \omega_3 = \frac{v_{c3}}{R_3} = \frac{3v_1}{R_3}$$

$$\omega_5 = \frac{v_{c3}}{R_5} = \frac{3v_1}{R_5} \quad v_2 = \omega_5 r_5 = 1,5v_1$$

Тогда получим выражение для кинетической энергии системы в конечный момент:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 4 + 9m_5 v_1^2 / 2$$

$$T = v_1^2 \left( m_1 / 2 + 9m_3 / 2 + 9m_3 / 4 + 9m_5 / 2 \right)$$

Получим:

$$T = v_1^2 \left( 6 / 2 + 9 \cdot 4 / 2 + 9 \cdot 4 / 4 + 9 \cdot 8 / 2 \right) = 66v_1^2$$

Найдём сумму работ внешних сил за время движения системы.

$$A_F = F \cdot s_1 = 240 \cdot 1,6 = 384 \text{ Дж} - \text{работа силы } F.$$

$A_{G_1} = G_1 s_1 \cos 30^\circ = 6 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \cos 30^\circ = 81.5 \text{ Дж} - \text{работа}$   
силы тяжести  $G_1$ .

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} s_1 - \text{работа силы трения } F_{mp1},$$

где  $F_{mp1} = fN = fG_1 \sin 30^\circ$ .

Тогда:

$$A_{F_{mp1}} = -f G_1 s_1 \sin 30^\circ = -0.1 \cdot 6 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \sin 30^\circ = -4.7 \text{ Дж}$$

$$A_{M_4} = -M_4 \varphi_4 - \text{работа момента сопротивления } M_4.$$

$$\varphi_4 = s_1 / r_4$$

С учетом

$$A_{M_4} = -M_4 s_1 / r_4 = -\frac{0.3 \cdot 1.6}{0.1} = -4,8 \text{ Дж}$$

$$A_{G_3} = -G_3 s_{c3} \cos 60^\circ - \text{работа силы тяжести } G_3.$$

$$\text{С учетом } s_{c3} = 3 \cdot s_1,$$

$$A_{G_3} = -3G_3 s_1 \cos 60^\circ = -3 \cdot 4 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \cos 60^\circ = -94.1 \text{ Дж}$$

Работа остальных сил и моментов равна нулю.

Тогда сумма работ всех внешних сил равна:

$$\sum A_i = 384 + 81,5 - 4,7 - 4,8 - 94,1 = 362 \text{ Дж}$$

Подставляя все найденные значения в уравнение, описывающее теорему об изменении кинетической энергии, получим:

$$66v_1^2 = 362$$

Отсюда находим скорость груза 1:

$$v_1 = \sqrt{362/66} = 2,34 \text{ м/с}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.
2. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие / под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - Изд. 51-е, стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 448 с. - ISBN 978-5-9511-0019-1. - Текст : непосредственный.
3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. - Текст : электронный
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / под общ. ред. А. А. Яблонского. - 18-е изд., стер. - Москва : Кнорус, 2011. - 392 с. - Текст : непосредственный.
5. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. Ч. 1. - 208 с. - Текст : электронный.
6. Яцун, С. Ф. Механика : учебное пособие / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко ; Курск. гос. техн. ун-т. - Курск : КГТУ, 2004. - В 2 ч. Ч. 2. - 140 с. – Текст : электронный.
7. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.



Приложение 1  
(Пример оформления  
титульного листа РГР)

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА**

по дисциплине «Теоретическая механика»

Выполнил: студент гр. \_\_\_\_\_  
(ФИО)

Проверил: \_\_\_\_\_  
(должность/ степень) (ФИО)

Курск 202\_\_\_\_ г.

Приложение 2  
(Пример оформления листа РГР)

ФИО \_\_\_\_\_, гр. \_\_\_\_\_, вариант № \_\_\_\_\_

Название работы

Дано:

\_\_\_\_\_  
Найти:

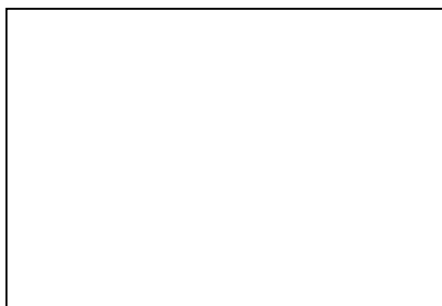


Рис. Исходная схема

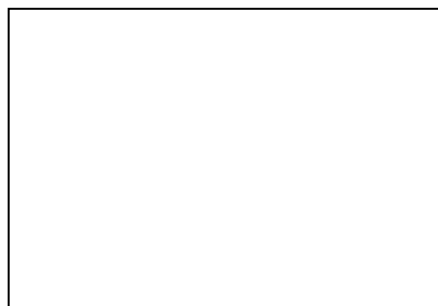


Рис. Расчетная схема

Решение:

*Пояснения к задаче см. в примерах методических указаний.*

*Ответ:*

## Приложение 3

Имеется большое число частных случаев дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать в конечном виде; однако большинство задач с дифференциальными уравнениями может быть решено только численно. Простейшим методом является **метод ломаной Эйлера**, легко реализуемый графически.

Пример 1.  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(a) = s$ .

Схема вычислений (рис.1):  $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$ ,

$$y'(a) = f(a, s) = \operatorname{tg} \varphi_0,$$

$$y_1 = s + hy'(a) = s + h f(x_0, y(x_0)),$$

$$y'_1 = f(x_1, y_1) = \operatorname{tg} \varphi_1,$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + h f(x_1, y_1),$$

.....

$$y'_i = f(x_i, y_i) = \varphi_i,$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

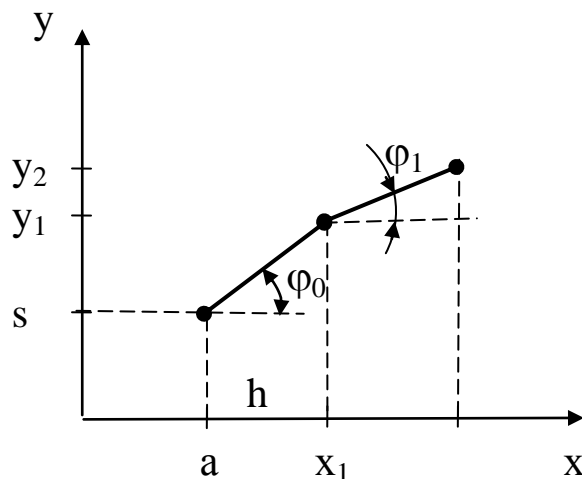


Рис. П1

Пример 2.  $y' = xy^{1/3}$ ,  $y(1) = 1$ . Точное решение:

$y(x) = ((x^2 + 2)/3)^{3/2}$ . Результаты по методу Эйлера (табл.П.1).

Таблица П1

Результаты вычислений по методу Эйлера

$x_i$	$h=0,10$	$h=0,10$	Точно
1	1,00	1,00	1,00
2	2,72	2,82	2,83
3	6,71	6,99	7,02
4	14,08	14,63	14,70
5	25,96	26,89	27,00

*Локальной погрешностью обрыва* называется погрешность, которую делают при переходе от  $x_j$  к  $x_{j+1}$ , если заменяют дифференциальное уравнение конечным выражением.

Для точного решения дифференциального уравнения  $y'(x) = f(x, y(x))$  в узлах  $x_j$  справедлива формула

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h f(x_j, y(x_j)) + \frac{1}{2} y''(\xi_j) h^2, \quad x_j \leq \xi_j \leq x_{j+1}.$$

Конечное приближение по методу Эйлера имеет вид:

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j), \quad \text{так что} \quad E_j = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_j)$$

является локальной погрешностью обрыва. *Погрешностью обрыва* называется погрешность  $y(x_j) - y_j$ , возникающая при сложении (аккумуляции) локальных погрешностей обрыва при некотором фиксированном  $j$ . *Погрешностью округления* называется доля погрешности, возникающая при фактическом проведении вычислений, а также вызванная этими округлениями нарастающая неустраняемая погрешность.

**Метод Рунге-Кутта.** Если в формуле Эйлера заменить  $f(x_j, y_j)$  на более общее выражение  $f(x_j, y_j)$ , то возникает общая формула *одношагового метода*:

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j), \quad y_0 = s \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Вместо дифференциального уравнения решается нелинейное разностное уравнение.

Здесь  $y_j = f(x_j, y_j)$  строится как весовое среднее значений функции  $f(x, y)$  в определенным образом выбираемых точках  $(x, y) = \xi_k \eta_k$  так, что локальная погрешность обрыва имеет порядок выше  $h$ .

Знание порядка локальной погрешности не имеет практического значения для прямой оценки фактической погрешности обрыва или округления. Общие оценки погрешностей другого типа являются большей частью также слишком грубыми. Поэтому для оценки погрешностей, для управления ходом вычислений или в данном случае для управления величиной шага (под этим понимают зачастую очень выгодное изменение величины шага  $h$  в зависимости от достигнутой точности) в настоящее время широко применяют принцип Рунге. Пусть погрешность метода имеет порядок  $k$ . Приближенное значение  $y(x)$ , вычисленное в точке  $x$  с величиной шага  $h$ , обозначим через  $Y(x, h)$ . Тогда в точке  $x = x_0 + 2nh$  имеем (по определению порядка погрешности метода)

$$y(x) - Y(x, h) \approx A 2^n h^{k+1} = A(x - x_0) h^k,$$

$$y(x) - Y(x, 2h) \approx A n (2h)^{k+1} = A(x - x_0) 2^k h^k,$$

$$\text{т.е. } Y(x, 2h) - Y(x, h) \approx A(x - x_0)(1 - 2^k) h^k$$

и следовательно,

$$y(x) - Y(x, h) \approx \frac{Y(x, h) - Y(x, 2h)}{2^k - 1}$$

Тем самым погрешность при шаге  $h$  выражается через приближенные значения при шаге  $h$  и  $2h$ .

Этот метод используют для вычисления последующего значения  $y_{j+1}$  только информацию из полуинтервала  $[y_j, y_{j+1})$  и поэтому всегда применяются в том случае, если вычисляются первые значения (начальная процедура) или если о свойствах непрерывности решения известно мало. Если кривые решения являются достаточно гладкими и известны некоторые начальные значения, то точность аппроксимации решения может быть увеличена благодаря учету  $k > 1$  предшествующих значений.