Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 01.10.2026 10:29:10
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_____ О.Г.Локтионова
«24» 06 2026 г.

ДИНАМИКА

ЧАСТЬ 1

Методические указания для практических работ
по разделам дисциплин "Теоретическая механика",
"Механика", "Механика роботов","Прикладная механика"

Курск 2026 г

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Динамика. Часть1: методические указания для практических работ по разделам дисциплин "Теоретическая механика", "Механика", "Механика роботов", "Прикладная механика"/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун, Е.В. Савельева Курск, 2026. 65с., ил. 22, табл. 7. Библиогр.: с. 65.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Динамика» курсов дисциплин "Теоретическая механика", "Механика", "Механика роботов", "Прикладная механика" для специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 24.06.26 . Формат 60x84 1\16
Усл.печ.л. 4,1. Уч.изд.л. 3,4. Тираж 50 экз.Заказ. Бесплатно. 551
Юго-Западный государственный университет.
305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Кинематика» курсов «Теоретическая механика» «Механика", "Прикладная механика".

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

Тема №1
Законы динамики. Дифференциальные уравнения динамики материальной точки. Несвободное и относительное движение точки

1.1. Основные понятия и определения

Материальная точка – точка обладающая массой. Материальное тело можно рассматривать как материальную точку, если его размерами и формой в данных условиях можно пренебречь. При этом материальная точка имеет массу материального тела.

Масса – это физическая величина, характеризующая степень сопротивляемости материальной точки изменению ее скорости, т.е. является мерой инертности материальной точки.

Сила – это физическая величина, которая является мерой механического взаимодействия.

На движущееся тело наряду с постоянными силами действуют обычно **силы переменные**, модули и направления которых при движении тела изменяются. При этом переменными могут быть и заданные (активные) силы, и реакции связей. Переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, положения тела и его скорости:

1) постоянные силы (сила тяжести $P = mg$);

2) силы, зависящие от времени (например, периодически изменяющаяся сила, вызывающая колебания материальной точки;

3) силы, зависящие от положения точки (например, силы сопротивления движению точки.

В более общем случае:

$$F = f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

1.2. Законы динамики (законы Галилея-Ньютона) и задачи динамики

Закон инерции (первый закон): материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

Основной закон динамики (второй закон): ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

$$\bar{F} = m\ \bar{a}. \qquad (1.1)$$

Законы равенства действия и противодействия (третий закон): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Закон независимости действия сил (четвертый закон): несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n,$$

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{F}_1}{m},\ \ \bar{a}_2 = \frac{\bar{F}_2}{m},\cdots \bar{a}_n = \frac{\bar{F}_n}{m}.$$

Стоит иметь ввиду, что при определении скорости материальной точки аналогичный закон не имеет место, т.е. скорость материальной точки не равна векторной сумме скоростей, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности.

Основной закон динамики материальной точки, массой m, движущейся под действием приложенных к ней n сил:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k\ ;\quad m\bar{a} = \bar{R}\ ;$$

$$1H = \frac{1\text{кг}}{\text{с}^2};\quad 1\text{кг} = 9{,}81H.$$

Задачи динамики

В динамике различают две задачи - прямая и обратная.

В *прямой* задаче проводится определение сил по заданному движению (первая задача динамики);

В *обратной* задаче по заданным силам определяется закон движения точки (вторая или **основная** задача динамики).

1.3. Динамика точки

1.3.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В декартовых координатах векторное соотношение (1.1), выражающее основной закон Ньютона, записывается в виде трех скалярных уравнений:

$$ma_x = \sum F_{kx}, \quad ma_y = \sum F_{ky}, \quad ma_z = \sum F_{kz}. \qquad (1.2)$$

Учитывая установленные в кинематике соотношения

$$a_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \ddot{z},$$

получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \qquad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \qquad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \qquad (1.3)$$

Проекции сил на декартовые оси могут зависеть, как было показано выше, от координат точки x, y, z, от проекций скорости точки $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; некоторые силы могут явно зависеть от времени. В общем случае движения точки в пространстве получаем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка (1.3).

Решение **основной** задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т.е.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Для этого надо проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения, при этом появляются шесть

произвольных постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые начальными условиями движения. Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Часто эти условия задаются для t=0.

Для нахождения искомых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (т.е. для получения закона движения) необходимо решить систему (1.3), задавшись шестью начальными условиями:

$$\begin{aligned} &x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad z(0)=z_0, \\ &\dot{x}(0)=V_{x0}, \quad \dot{y}(0)=V_{y0}, \quad \dot{z}(0)=V_{z0}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

При естественном задании движения точки основной закон динамики проектируется на касательную и нормальную составляющие подвижной системы координат:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \qquad ma_n = \sum F_{kn}\ .$$

Учитывая, что $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$, $\qquad a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, запишем:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}\ , \qquad m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}\ . \tag{1.5}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки являются записью второго закона Ньютона в скалярной форме.

1.3.2. Относительное движение точки

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) разложить абсолютное движение материальной точки на относительное и переносное, выбрав неподвижную и подвижную системы отсчета, связанные соответственно с неподвижным телом и подвижной средой, относительно которой движется точка;

2) записать начальные условия относительного движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы $\bar{F}_k$ (активные и реакции связей), действующие на материальную точку;

4) найти ускорение $\bar{a}_e$ точки в переносном движении и ускорение Кориолиса $\bar{a}_c$, а затем определить переносную $\bar{\Phi}_e = -\, m\ \bar{a}_e$ и Кориолисову $\bar{\Phi}_c = -\, m\ \bar{a}_c = -\, 2\ m\ \bar{\omega}_e \times \bar{V}r$ силы инерции, добавив их к действующим силам $\bar{F}_k$;

5) составить дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на оси подвижной системы координат;

6) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;

7) определить искомые величины.

При решении первой (прямой) задачи динамики точки, т. е. при определении сил по заданному движению, пункты 2) и 6) надо опустить.

Материальную точку следует изобразить в произвольном положении, соответствующем положительным значениям её координат, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

1.3.3. Общие указания к решению задач

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. Выбрать систему координат – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при $t = 0$) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.

1.2. Изобразить точку в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при $t > 0$) так, чтобы координаты были положительными ($s > 0$, $x > 0$). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция

скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.

1.3. Освободить материальную точку от связей, заменить их действие реакциями, **добавить** активные силы.

1.4. Записать основной закон динамики в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. Понизить производную, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду, например:

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}, \qquad \text{или} \qquad \ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}.$$

2.2. Разделить переменные, например

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x, \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt \qquad \text{или} \qquad \frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2, \quad \frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$$

2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx, \quad \frac{dv_x dx}{dtdx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$$ и затем разделить переменные

2.4. Вычислить неопределенные интегралы в левой и правой частях уравнения, например

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m} k dt \ln v_x = -\frac{1}{m} kt + C_1$$

Используя начальные условия, например, $t = 0$, $v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования**

$$\ln v_x\big|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m} kt\big|_0 + C_1; \quad C_1 = \ln v_{x0}.$$

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом.**

Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия). Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m} k dt. \qquad \ln v_\tau\big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m} kt\big|_0^t;$$

$$\ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m} kt - 0; \quad \ln v_\tau = -\frac{1}{m} kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. Выразить скорость через производную координаты по времени, например

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m} kt + \ln v_{\tau 0}}$$

и **повторить пункты 2.2 -2.4**

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий.

Примеры решения задач по теме 1.
Прямая задача динамики.

Пример 1.1.

Кабина весом ***G*** лифта поднимается тросом с ускорением ***a***. Определить натяжение троса.

Решение.

1. Выбираем объект (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку) (рис.1.1).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***. Показываем вес тела $\bar{G}$.

3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y*:

$$(y): \quad ma_y = R - G.$$

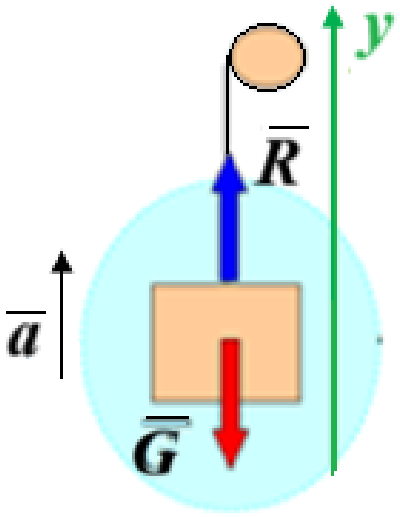


Рис. 1.1. Иллюстрация к примеру 1.1

Определяем реакцию троса:

$$R = G + ma_y = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

Определяем натяжение троса:

$$\overline{T} = -\overline{R}; \quad T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

При равномерном движении кабины $a_y = 0$ и натяжение троса равно весу: $T = G$.

При обрыве троса $T = 0$ и ускорение кабины равно ускорению свободного падения: $a_y = -g$.

Пример 1.2.

График изменения скорости лифта при подъеме показан на рисунке. Определить силу натяжения троса, на котором подвешен лифт, если вес лифта 5,5 кН (на участках 1, 2, 3).

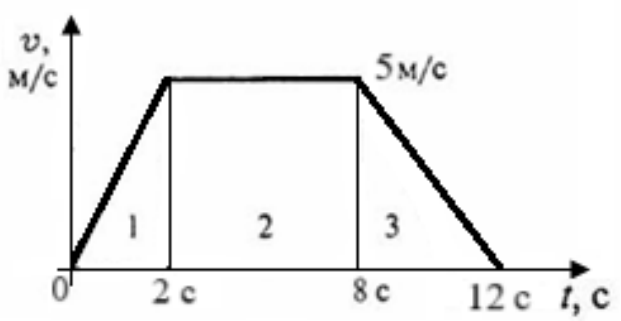


Рис. 1.2. Иллюстрация к примеру 1.2

Решение.

Расчетная схема поступательного движения кабины лифта приведена на рисунке 1.1.

Так же в задаче 1.1 решена задача по определению реакции и силы натяжения троса:

$$\overline{T} = -\overline{R}; \quad T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

Ускорение лифта, в соответствии с графиком на рисунке 1.2, определим как:

– на участке 1: $a_1 = (\upsilon - \upsilon_0)/t = 5/2 = 2{,}5$ м/с^2;

– на участке 2: $a_2 = 0$, так как υ = const (равномерное движение);

– на участке 3: $a_3 = -5/4 = -1{,}25$ м/с^2.

Таким образом, натяжение троса:

– на участке 1: $T_1 = 5{,}5\,(1 + 2{,}5/9{,}81) = 6{,}9$ кН ;

– на участке 2: $T_2 = G = 5{,}5$ кН;

– на участке 3: $T_3 = 5{,}5\,(1 - 1{,}5/9{,}81) = 4{,}9$ кН.

Пример 1.3.

Груз весом $\boldsymbol{G}$ подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α. Определить натяжение троса и скорость груза.

Решение.

1. Выбираем объект (груз).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией $\bar{\boldsymbol{R}}$. Показываем вес тела $\bar{\boldsymbol{G}}$.

3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$$

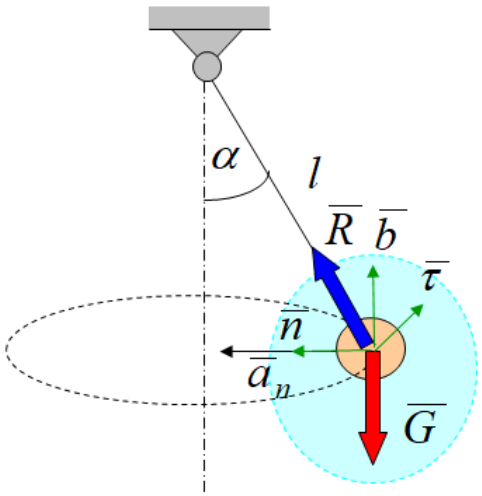


Рис. 1.3. Иллюстрация к примеру 1.3

4. Проецируем основное уравнение динамики на оси τ, *n*, *b* *(тангенциаль, нормаль, бинормаль)*:

$$(\tau): \quad ma_\tau = 0;$$
$$(n): \quad ma_n = R\sin\alpha;$$
$$(b): \quad 0 = R\cos\alpha - G.$$

Из третьего уравнения определяем реакцию троса:

$$R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Определяем натяжение троса:

$$\overline{T} = -\overline{R}; \quad T = R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Подставляем значение реакции троса, нормального ускорения во второе уравнение и определяем ***скорость груза***:

$$\frac{G}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha.$$

отсюда:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$$

Пример 1.4.

Чему равна сила давления тела массой 70 кг на опору в верхней точке мертвой петли при равномерном движении самолета со скоростью 120 м/с. Радиус петли *r* = 1,2 км.

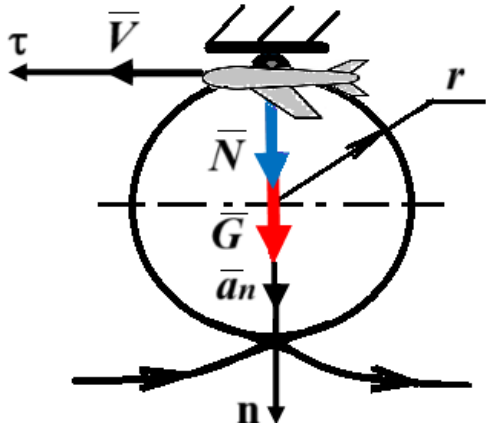


Рис. 1.4. Иллюстрация к примеру 1.4

Решение.

1. Выбираем объект (самолет, размерами пренебрегаем и рассматриваем как материальную точку).

2. Отбрасываем связь (нормальную поверхность) и заменяем реакцией ***N***. Показываем вес тела $\bar{G}$.

3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\,\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{N} + \bar{G}\,.$$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось n:

$$(n):\ ma_n = G + N\,.$$

Отсюда определяем нормальную реакцию:

$$N = ma_n - G = ma_n - mg\,.$$

Определяем давление самолета на опору :

$$\bar{Q} = -\bar{N};\quad Q = G(1 - \frac{v^2}{gR}).$$

$$Q = 153{,}3\ (H).$$

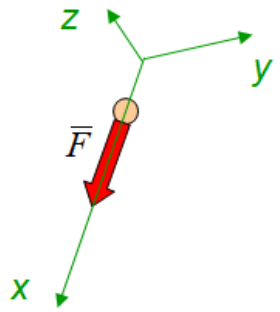
Скорость, соответствующую нулевому давлению на опору определим как ($Q = 0$):

$$v = \sqrt{gR}. = 108{,}5\ \text{м/с}.$$

Обратная задача динамики.

Пример 1.5.

Свободная материальная точка массы m движется по действием силы F, постоянной по модулю и величине (рис. 1.5).



В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.

Рис. 1.5. Иллюстрация к примеру 1.5

Решение.

1. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}.$$

2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось:

$$(x): \quad ma_x = F_x = F.$$

или

$$m\ddot{x} = F.$$

3. Представим проекцию ускорения как производную скорости по времени:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F.$$

4. Разделяем переменные и интегрируем:

$$dv_x = \frac{F}{m}dt. \qquad \int dv_x = \int \frac{F}{m}dt.$$

5. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

$$\boxed{v_x = \frac{F}{m}t + C_1.}$$

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1.$$

7. Разделяем переменные:

$$dx = (\frac{F}{m}t + C_1)dt.$$

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

$$\int dx = \int (\frac{F}{m}t + C_1)dt. \qquad \boxed{x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.}$$

9. Для определения значений постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = x_0.$$

,

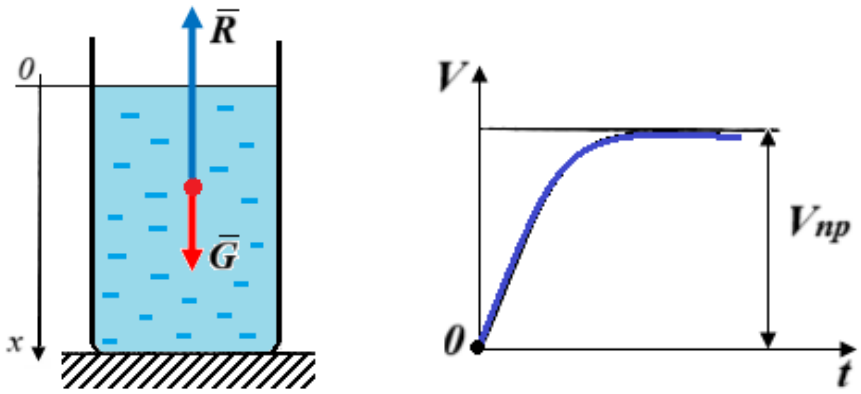
$$\boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.}$$

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси x):

$$\boxed{x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.}$$

Пример 1.6.

Тяжелый шарик без начальной скорости начал погружаться в вязкую жидкость (рисунок 1.6, *а*). Найти закон изменения скорости шарика во времени, если силу сопротивления $\bar{R}$ допустимо полагать пропорциональной первой степени скорости: $R = m\mu V$, где m —масса шарика, μ — приведенный коэффициент вязкого трения.



а) *б)*

Рис. 1.6. Иллюстрация к примеру 1.6

Решение.

1. Выбираем объект (шарик).

2. Освобождаем шарик от связей (воды) и заменяем реакцией $\bar{R}$ (выталкивающей силой – силой Архимеда). Добавляем активную силу (силу тяжести) $\bar{G}$.

3. Составляем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$$

4. Проецируем основное уравнение динамики на вертикальную ось x. Дифференциальное уравнение движения шарика, записанное относительно скорости, имеет вид:

$$m\frac{dV}{dt} = G - R = mg - m\mu V.$$

После сокращения на m запишем:

$$\frac{dV}{dt} + \mu V = g\,, \qquad \text{(а)}$$

или в дифференциальном виде уравнение (а) имеет вид:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = g. \qquad \text{(б)}$$

Уравнение (а) есть линейное уравнение первого порядка с правой частью. В этом случае, решение ищется в виде суммы:

$$V = V_1 + V_2, \qquad \text{(в)}$$

где V_1 — общее решение однородного уравнения, которое в механике (а также в электротехнике, теории автоматического регулирования и т.п.) принято называть свободной составляющей), V_2 — частное решение, соответствующее правой части (которое в прикладных технических науках именуют вынужденной составляющей).

Общее решение V_1 – это решение левой части уравнения (б) следующего вида:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0,$$

характеристическое уравнение иметь вид:

$$n^2 + \mu n = 0 \quad \text{или} \quad n + \mu = 0, \Rightarrow \quad n = -\mu .$$

Свободная составляющая в данном случае равна

$$V_1 = Ce^{-\mu t}, \qquad (г)$$

где C – постоянная интегрирования.

P.s. указания к решению дифференциальных уравнений рассмотрено в п. 2 подраздела 1.3.3.

Вынужденную составляющую (частное решение) ищем в виде:

$$V_2 = A, \text{ тогда } \dot{V}_2 = 0. \qquad (д)$$

где A = const.

Подставляя уравнение (д) в уравнение (б) получим:

$$\mu A = g \Rightarrow \qquad A = {}^{g}/_{\mu} .$$

Таким образом, вынужденная составляющая имеет вид:

$$V_2 = {}^{g}/_{\mu} . \qquad (е)$$

Подставляем (г) и (е) в общее уравнение (в):

$$V = Ce^{-\mu t} + {}^{g}/_{\mu} .$$

Произвольную постоянную C находим из начальных условий: при $t = 0$; $V_0 = 0$, тогда

$$V(0) = C + \frac{g}{\mu} = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{g}{\mu}.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$V(t) = \frac{g}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

График функции $V(t)$ показан на рисунке 1.5, *б*. При $t \to \infty$ скорость асимптотически приближается к предельному значению

$$V = Vпр = \frac{g}{\mu}.$$

Пример 1.7.

Железный сердечник *1*, который может свободно без трения перемещаться по горизонтальной направляющей, проходит через закрепленную катушку 2 соленоида (рисунок 1.7). Сердечник находился в покое, когда к обмотке соленоида подключили переменный ток, в результате чего на сердечник в горизонтальном направлении начала действовать сила:

$$F_Э = ma \sin \omega t,$$

где ma — амплитуда силы, представленная в виде произведения массы сердечника m и коэффициента a, имеющего размерность ускорения. Найти закон движения шарика вдоль горизонтальной направляющей *Ox*.

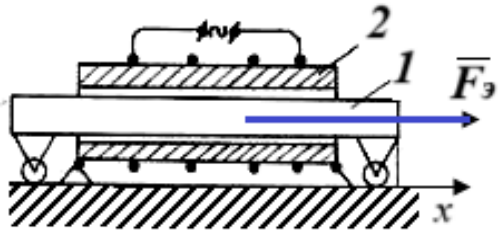


Рис. 1.7. Иллюстрация к примеру 1.7

Решение.

Дифференциальное уравнение движения сердечника имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_Э = a\, m \sin \omega t$$

или

$$\ddot{x} = a \sin \omega t.$$

Последовательно интегрируя, получаем:

$$\dot{x} = -\frac{a}{\omega}\cos\omega t + C_1 \ , x = -\frac{a}{\omega^2}\sin\omega t + C_1 t + C_2 \quad .$$

Из начальных условий $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ следует $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{a}{\omega}$.

Таким образом, закон движения примет вид:

$$x(t) = \frac{a}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right).$$

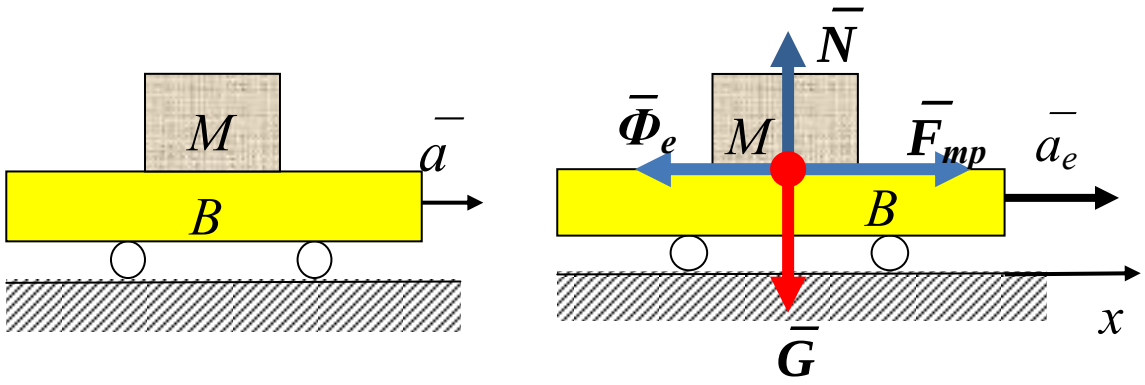
Относительное движение

Пример 1.8.

Коэффициент трения между грузом *M* и платформой *B* равен *f*=0,1. При каком времени *t* груз начнет двигаться по платформе, если сама платформа движется с ускорением *a*=*t* м/с^2. (*Груз M рассматривать в предельном состоянии относительного равновесия*) (рис. 1.8, *а*).

Решение.

Направим ось *x* вдоль платформы *B*. Движение груза *M* является сложным: относительное – движение груза *M* по платформе, переносное – вместе с платформой. К грузу приложены следующие силы: сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция $\bar{N}$ платформы *B* и сила трения скольжения $\bar{F}_{mp}$, направленная в сторону, противоположную возможному движению груза *M*. (рис. 1.8, *б*).



а) *б)*

Рис. 1.8. Иллюстрация к примеру 1.7: *а* - исходная схема; *б* - расчетная схема

Для решения задачи методом динамики относительного движения материальной точки (тела) надо ко всем силам, приложенным к материальной точке, добавить силу инерции $\bar{\Phi}_e$ в переносном движении, направленную в сторону противоположную переносному ускорению платформы *B*:

$$\bar{\Phi}_e = m\ \bar{a}_e = m\ \bar{a}.$$

Так как переносное движение является поступательным ($\omega_e = 0$), то ускорение Кориолиса равно нулю ($a_c = 0$) и, следовательно, кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_c = 0$.

Так как груз *M* находится в состоянии относительного покоя, то дифференциальное уравнение его относительного покоя имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e = 0.$$

Составим дифференциальное уравнение относительного покоя в проекции на ось *x*:

$$F_{mp} - \Phi_e = 0.$$

Учитывая, что $F_{mp} = fN = fmg$, находим:

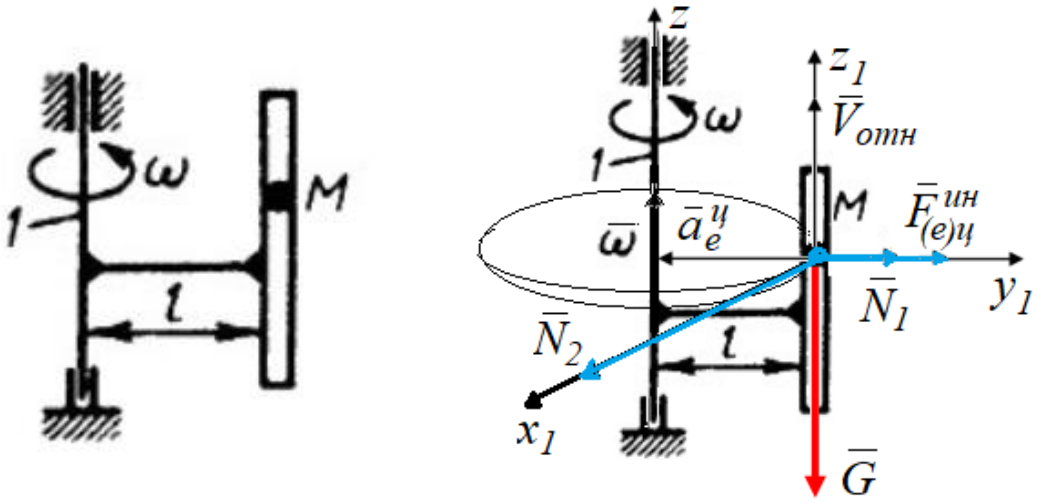
$$fmg - ma = 0,$$

откуда после подстановки исходных данных получим $t = 0.981$ с.

При t > 0.981с. груз *M* начнет двигаться в сторону, противоположную движению платформы *B*.

Пример 1.9.

Шарик М массой m = 0,2 кг движется со скоростью υ = 19,62 м/с относительно вертикальной трубки, которая на расстоянии *l*=0,5 м прикреплена к вертикальному валу *1*. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 = 5 рад/с. Определить переносную силу инерции шарика (рис. 1.9, *а*).



а) *б)*

Рис. 1.9. Иллюстрация к примеру 1.9: *а* - исходная схема; *б* - расчетная схема

Решение.

Движение шарика внутри трубки (прямолинейное поступательное) – является относительным движением, а вращение трубки с вертикальным валом *1* вокруг оси *z* – переносное (рис. 1.9, *б*).

Уравнение динамики относительного движения:

$$m\bar{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \bar{F}_e^{\,u} + \bar{F}_c^{\,u}.$$

Покажем силы, действующие на шарик: активная сила тяжести $\bar{G}$, реакции нормальной реакции стенок трубки $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$, и переносная сила инерции: $\bar{F}_e^{ин} = \bar{F}_e^{ц} + \bar{F}_e^{вр}$;

$\bar{F}_e^{ц} = m \cdot a_e^{ц} = m\omega^2 l$; $\bar{F}_e^{вр} = m \cdot a_e^{вр} = m\varepsilon l = 0$, так как ω=const, то ε=0.

Кориолисова сила инерции:

$\bar{F}_c^{ин} = m \cdot 2V_{отн}\omega_e \sin(\bar{V}_{отн}\ \bar{\omega}_e) = 0$, *т.к.* $\sin(\bar{V}_{отн}\ \bar{\omega}_e) = 180^0\ (\bar{V}_{отн} \parallel \bar{\omega}_e)$.

Тогда уравнение динамики относительного движения будет иметь вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{G} + \bar{F}_e^{ц} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 .$$

По условию задачи нужно определить переносную силу инерции шарика, тогда

$$\bar{F}_e^{ц} = m \cdot a_e^{ц} = m\omega^2 l = 0{,}2 \cdot 5^2 \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \quad (H).$$

Пример 1.10.

Груз *A* весом *P* спускается вниз по боковой грани призмы *B*, расположенной под углом α к горизонту (рис. 1.10). Призма движется по гладкой горизонтальной плоскости направо с ускорением *a*. Определить ускорение a_r груза по отношению к призме и его давление на ее боковую грань, если коэффициент трения скольжения груза о грань призмы равен *f*.

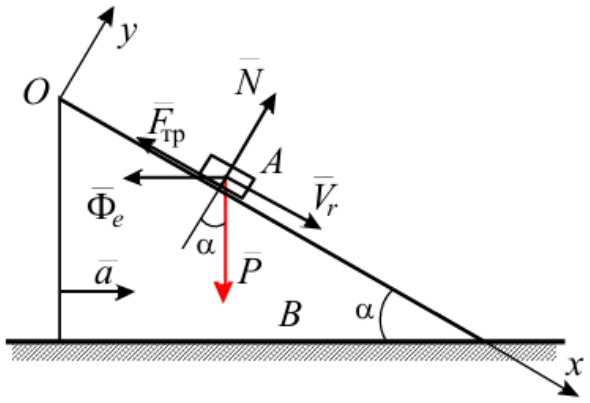


Рис. 1.10. Иллюстрация к примеру 1.9

Решение.

Свяжем с гладкой горизонтальной плоскостью неподвижную систему координат (на рис. 1.10 не изображена), а с призмой B подвижную систему Oxy, направив ось x вдоль боковой грани призмы вниз по вектору её скорости. Движение груза A является сложным, так как оно складывается из относительного движения груза вниз по боковой грани призмы и переносное движение вместе с призмой B.

К грузу A приложены силы: сила тяжести $\bar{P}$, нормальная реакция $\bar{N}$ боковой грани призмы и сила трения скольжения $\bar{F}_{mp}$, направленная в сторону, противоположную скорости $\bar{V}$ движения груза.

Для решения задачи к этим действующим на точку силам добавить переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$ и кориолисову силу инерции $\bar{\Phi}_c$. Так как переносное движение является поступательным ($\omega_e = 0$), то ускорение Кориолиса равно нулю ($a_c = 0$) и, следовательно, кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_c = 0$.

Переносная сила инерции $\bar{\Phi}_e$ направлена в сторону, противоположную вектору переносного ускорения $\bar{a}_e$ призмы B, т. е. по горизонтали налево (рис. 1.10) и равна по модулю

$$\bar{\Phi}_e = m\,\bar{a}_e = ma. \qquad (1.6)$$

Для определения величины ускорения $\bar{a_r}$ ($\bar{a_r} = \ddot{x}$) груза относительно боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение его относительного движения в проекции на ось *x*:

$$m\ddot{x} = P \sin\alpha - F_{TP} - \Phi_e \cos\alpha.$$

Учитывая, что $F_{mp} = fN$ и (1), находим

$$\ddot{x} = g \sin\alpha - {}^{fN}/_{m} - a\cos\alpha. \qquad (1.7)$$

Для определения величины *N* нормальной реакции боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось *y*:

$$m\ddot{y} = N - P\cos\alpha - \Phi_e \sin\alpha.$$

Так как ускорение груза в относительном движении $\bar{a_r} = \ddot{x}$ и направлено перпендикулярно к оси *y*, то $a_{ry} = \ddot{y} = 0$. Тогда, с учетом (1.6) находим

$$N = P(\cos\alpha + a/g \sin\alpha). \qquad (1.8)$$

Искомое давление груза на боковую грань призмы направлено противоположно нормальной реакции *N* и равно ей по модулю. Подставив в уравнение (1.7) значение *N* из формулы (1.8), получим искомое относительное ускорение груза *A* при его движении вниз по боковой грани призмы:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - a(\cos\alpha + f\sin\alpha). \qquad (1.9)$$

Воспользовавшись уравнением (1.9), можно найти предельное значение угла α, при котором груз будет находиться в относительном покое. Полагая в (4) $\ddot{x} = 0$, получаем

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - a(\cos\alpha + f\sin\alpha) = 0.$$

откуда находим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\left(f + \frac{a}{g}\right)}{1 - f\frac{a}{g}}.$$

Тема №2

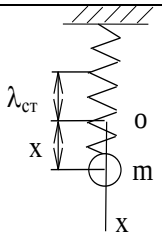
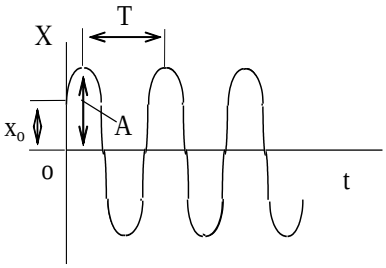
Прямолинейные колебания точки

На практических занятиях при исследовании прямолинейных колебаниях материальной точки решается вторая (основная) задача динамики, т. е. по заданным действующим силам определяется закон колебательного движения и его характеризующие параметры (частота, амплитуда, фаза, период колебаний).

Основные характеристики свободных и вынужденных колебаний материальной точки представлены в таблице 2.1 и 2.2 соответственно.

Таблица 2.1

Основные характеристики свободных колебаний материальной точки

Название	Расчетная схема	Дифференциальное уравнение	Решение уравнения	График колебаний
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Свободные колебания без учета сил сопротивления движению	 $\lambda_{ст}$ - статическая деформация	$m\ddot{x} + cx = 0$ $\ddot{x} + k^2 x = 0$ где k - циклическая частота свободных колебаний $k^2 = \frac{c}{m}$	$x = C_1 \sin kt +$ $+ C_2 \cos kt$ или $x = A\sin(kt + \alpha)$, где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; а $tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}$, C_1 и C_2 - постоянные интегрирования $A = \sqrt{x_0^2 + {\upsilon_0^2}/{k^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = {kx_0}/{\upsilon_0}$.	 $T = \frac{2\pi}{k}$ – период колебаний; $f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$ – частота колебаний, Гц.

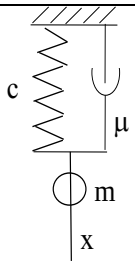
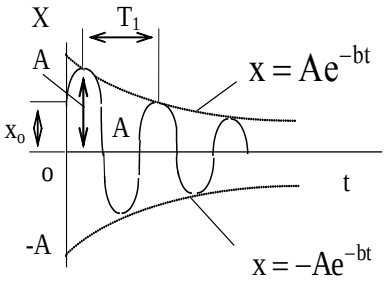
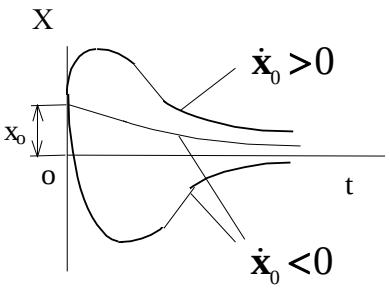
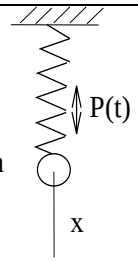
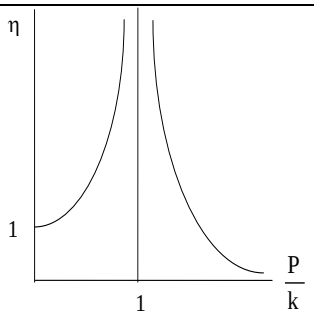
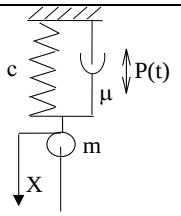
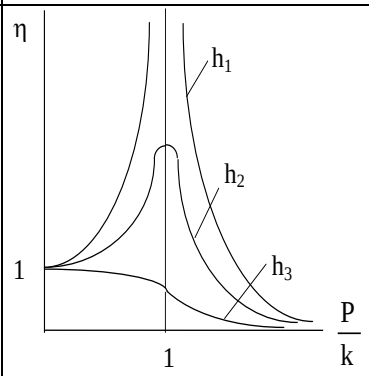
1	2	3	4	5
Свободные колебания с учетом сил сопротивления движению (затухающие)		$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$ или $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$ $2b = \frac{\mu}{m}$.	1.$k>b$ $x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + + C_2 \cos k_1 t)$ или $x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha)$ где $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$,	 $T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ – период колебаний.
			2.$k<b$ $b^2 - k^2 = r^2$, $x = C_1 e^{-(b+r)t} + + C_2 e^{-(b-r)t})$.	
			3.$k=b$ $x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t)$.	апериодическое движение

Таблица 2.2

Основные характеристики вынужденных колебаний материальной точки

Название	Расчетная схема	Дифференциальное уравнение	Решение уравнения	График коэффициента динамичности η
1	2	3	4	5
Без учета сил сопротивления движению	 $P=P_o \sin pt$ - возмущающая сила; p - частота возмущающей силы	$m\ddot{x} + cx = = P_0 \sin pt$ $\ddot{x} + k^2 x = = Q_0 \sin pt$ $Q_0 = \frac{P_0}{m}$	$x = A\sin(kt + \alpha) + + B\sin pt,$ $B = \frac{Q_0}{k^2 - p^2}$, при $p=k$ – резонанс	 $\eta = \frac{B}{\lambda_0}$, где λ_0 - статическое отклонение точки под действием постоянной силы P_0.

1	2	3	4	5
С учетом сил сопротивления движению		$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx =$ $= P_0 \sin pt$ или $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x =$ $= Q_0 \sin pt$ $Q_0 = \frac{P_0}{m}$	$x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha) +$ $+B\sin(p t - \beta),$ $B = \frac{Q_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}};$ $tg\beta = \frac{2bp}{k^2-p^2},$ $\beta = arctg\,\beta.$	 $h_1 < h_2 < h_3,\ h = \frac{b}{k}.$

Примеры решения задач по теме 2

Пример 2.1.

Какое движение будет совершать материальная точка массой 100 г, если жесткость пружины c = 25 г/см, а коэффициент сопротивления μ = 50 г/см. Определить период и частоту свободных колебаний.

Решение.

В соответствии с условием задачи, колебательная система обладает внутренним трением: $\overline{R} = \mu\,\overline{\upsilon}$, поэтому материальная точка совершает свободные колебания с учетом сил сопротивления.

Для определения вида движения материальной точки необходимо сравнить коэффициенты b и k:
где

$$2b = \frac{\mu}{m} \;\Rightarrow\; b = \frac{\mu}{2b}; \qquad k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

Подставляя числовые значения, находим: $b = \frac{1}{4}$; $k = \frac{1}{2}$, где k > b (случай малых сопротивлений) – затухающие колебания.

Период колебаний: $T_1 = 2\pi / k_1$; частота: $f = 1/T_1$.

где $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, тогда

$$T_1 = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \approx 14{,}5 \text{ сек}. \qquad f = \frac{1}{14{,}5} = 0{,}07 \quad \text{Гц}.$$

Пример 2.2

Определить амплитуду свободных колебаний материальной точки массой 100 г., если жесткость пружины c = 100 Н/см и точке, находящейся в покое на пружине, была сообщена скорость 13,5 см/сек.

Решение.

Амплитуда свободных колебаний материальной точки:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \ .$$

В соответствии с условием задачи x_0 = 0, $\dot{x}_0$ = 13,5 см/сек. – начальные условия.

Циклическая частота:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{100}{100} = 1 \ ,$$

тогда $A = 13{,}5$ см.

Пример 2.3.

Найти амплитуду вынужденных колебаний материальной точки массой 10 кг, если жесткость пружины с=0,4 Н/см, а возмущающая сила F=5 sin(t), Н.

Решение.

Амплитуда вынужденных колебаний материальной точки:

$$B = \frac{P_0}{m\left(k^2 - p^2\right)}.$$

Из условия задачи: P_0 = 5 Н; p = 1 рад/с, c = 40 Н/м.

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{40}{10} = 4 \text{ рад/с}.$$

Подставляя числовые значения получим:

$$B = \frac{5}{10(4-1)} = 0{,}16 \text{ м}.$$

Пример 2.4.

Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки имеет вид:

$$5\ddot{x} + 320x = 90\sin 7t\,.$$

Определить период, круговую частоту колебаний точки, амплитуду вынужденных колебаний, выяснить, происходят ли колебания в зоне до резонанса ($p < k$), за резонансом ($p > k$) или в режиме резонанса ($p = k$).

Решение.

Дифференциальное уравнение характеризует вынужденные колебания материальной точки без учета сил сопротивления движению, общий вид которого имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = P_0 sinpt\ .$$

Из условия задачи:

- масса материальной точки m=5 кг;
- жесткость пружины c = 320 Н/см;
- амплитуда возмущающей силы P_0 = 90 Н;
- частота вынужденных колебаний p = 7 рад/с,

Тогда:

– круговая частота колебаний точки:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{320}{5}} = 8 \ \ \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

– период колебаний:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8} = 0{,}25\pi \ \ c;$$

– амплитуда вынужденных колебаний материальной точки:

$$B = \frac{P_0}{m(k^2 - p^2)} = \frac{90}{5(64 - 49)} = 1{,}2 \text{ см.}$$

– $p < k$ (коэффициент расстройки $z = p/k = 0{,}875$) происходят вынужденные колебания малой частоты – до резонанса.

Пример 2.5.

Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки имеет вид:

$$\ddot{x} + 128\dot{x} + 10000x = 8000\, sin100t\ .$$

Определить уравнение вынужденных колебаний материальной точки, круговую частоту колебаний точки, амплитуду вынужденных колебаний, выяснить, происходят ли колебания в зоне до резонанса ($p < k$), за резонансом ($p > k$) или в режиме резонанса ($p = k$).

Решение.

Дифференциальное уравнение характеризует вынужденные колебания материальной точки с учетом сил сопротивления движению, общий вид которого имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = Q_0 sinpt\ .$$

Из условия задачи:

k^2 = c/m = 10000; k = 100 рад/с;

$2n$ = μ/m== 128, n = 64 рад/с

$Q_0 = P_0/m$= 8000 см/с^2; p = 100 рад/с,

получаем: $n < k$ и $p = k$ - резонанс.

Круговая частота колебаний k_c материальной точки при наличии силы сопротивления:

$$k_c = \sqrt{k^2 - n^2} = 76{,}84\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе, т.е. при $p=k$, имеем:

$$B = \frac{Q_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{Q_0}{2np} = 0{,}625 \text{ см.}$$

Сдвиг между фазами возмущающей силы и вызванных ею вынужденных колебаний:

$$\alpha = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2} = arctg\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Частное решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид:

$$x_2 = -\frac{Q_0}{2p}\cos pt = 0{,}625\ \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{см.}$$

При наличии силы сопротивления движению амплитуда вынужденных колебаний – величина постоянная (0,625) и при резонансе не влияет на величины круговой частоты и сдвига фаз.

Тема № 3
Динамика системы. Моменты инерции. Общие теоремы динамики

Механической системой называется такая совокупность материальных точек или тел, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Координаты центра масс:

$$x_c=\frac{\sum m_i x_i}{M};\quad y_c=\frac{\sum m_i y_i}{M};\quad z_c=\frac{\sum m_i z_i}{M}. \qquad (3.1)$$

где M – масса системы, m_i - масса i-й точки; x_i, y_i, z_i – координаты центров тяжести каждой из масс системы.

Момент инерции полярный (осевой) - мера инертности при вращательном движении тела; определяется суммой произведений масс точек на квадрат их расстояний до полюса (оси):

$$J_p=\sum m_i r_i^2=\sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2); \qquad (3.2)$$

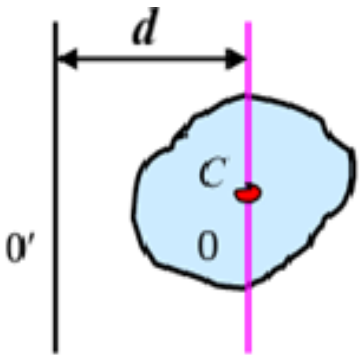
$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2);\quad J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2);\quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \qquad (3.3)$$

Иногда вместо момента инерции для тела указывается его радиус инерции, например i_x , который измеряется в метрах и имеет простой физический смысл. Если данное тело превратить в материальную точку той же массы, то для того, чтобы момент инерции остался таким же, как у исходного тела, эту точку следует поместить на расстояние от оси, равному радиусу инерции.

Радиус инерции тела относительно оси x:

$$i_x=\sqrt{J_x/M}. \qquad (3.4)$$

Теорема Штейнера: если известен момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс J_c , то относительно другой параллельной оси (рис. 3.1):



$$J = J_c + Md^2, \qquad (3.5)$$

где J_c — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс C, M — масса тела, d — расстояние между осями.

Рис. 3.1

Формулы для вычисления моментов инерции однородных тел относительно осей, проходящих через их центр масс и являющихся осями симметрии, приводятся в учебно-справочной литературе.

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел приведены на рисунке 3.2.



Рис. 3.2.

Центробежным моментом инерции тела называются величины I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, равные суммам произведений элементарных масс тела на их координаты, соответствующие индексам:

$$I_{xy} = \sum \Delta m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum \Delta m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum \Delta m_k y_k z_k . \quad (3.6)$$

Центробежные моменты инерции (в отличии от осевых, которые всегда положительны) могут быть положительными, отрицательными либо равными нулю — в зависимости от расположения тела относительно рассматриваемых осей.

Силы, действующие на механическую систему, разделяют на **внешние** - F^e и **внутренние** - F^i .

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел не входящих в состав данной системы.

Внутренними называют силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.

Во многих случаях задачи, в которых рассматривается движение системы материальных точек, могут быть решены с помощью общих теорем динамики. Так как выбор соответствующей теоремы связан с известными трудностями, то полезно иметь в виду следующие соображения.

1) Пользуясь ***теоремой о движении центра масс***, можно решать обе задачи динамики механической системы: т. е. зная закон движения центра масс, определить главный вектор внешних сил, действующих на систему, и, наоборот, зная внешние силы, найти уравнения движения центра масс. В случае, когда имеет место закон сохранения движения центра масс, эта теорема позволяет по перемещению одного их тел системы находить перемещение другого её тела.

2) Теоремами ***об изменении главного вектора количества движения механической системы*** удобно пользоваться, если действующие внешние силы являются постоянными или функциями времени, а в число данных или неизвестных величин входит промежуток времени их действия. Закон сохранения количества движения удобно применять в случаях, когда по изменению поступательной скорости одного тела надо определить скорость другого тела системы.

3) Для изучения движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, следует применить ***теорему об изменении главного момента количества движения механической системы относительно оси вращения тела***. Применение закона сохранения кинетического момента позволяет по величине или по скорости одной части механической системы определить изменение угловой скорости или угла поворота другой её части.

4) Если внешние силы постоянны или зависят от положений точек системы, а в число данных и искомых величин входят перемещения точек системы или их скорости в начале и в конце этих перемещений, то следует применить ***теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек*** в конечной форме.

3.1. Моменты инерции.

Пример 3.1.

Определить момент инерции системы 2-х точек относительно плоскости *zOy* и относительно точки *O*, если даны их массы: m_1=1 кг; m_2=2 кг, координаты x_1=*3* м; z_1=3 м, x_2=1 м; z_2=1 м. (рис. 3.3).

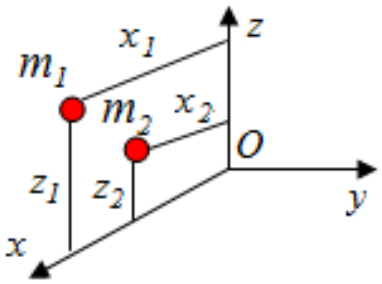


Рис. 3.3. Схема к примеру 3.1

Решение.

В соответствии с (3.2), (3.3) имеем:

$J_{xoy} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2$ =9+2=11 кг/м^2.

$$J_O = m_1\sqrt{x_1^2 + z_1^2} + m_1\sqrt{x_2^2 + z_2^2} =$$
$$= \sqrt{18} + 2\sqrt{2} = 7{,}1 \text{ кг/м}^2.$$

Пример 3.2.

Определить центробежный момент инерции 2-х материальных точек массами m_1=4 кг, m_2=1 кг относительно *x, y,* если *R*=1 м, координаты *x*=3м, *y*=2м. Точка находится в плоскости *xOy* (рис. 3.4).

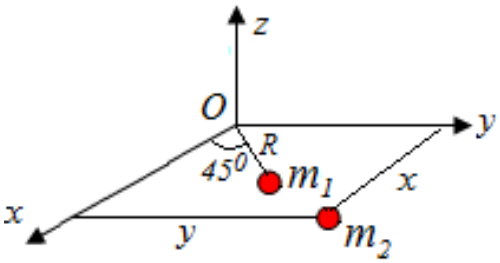


Рис. 3.4. Схема к примеру 3.2

Решение.

В соответствии с (3.6) имеем:

$$J_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 =$$
$$= m_1 (R\cos 45^0)^2 + m_2 xy =$$
$$= 2 + 6 = 8 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$$

Пример 3.3.

Определить радиус инерции тела относительно центральной оси *z*, если дан момент инерции относительно параллельной оси z': Jz'= 4 кг·м^2, расстояние между осями *l*=1 м; *m*=2 кг (рис. 3.5).

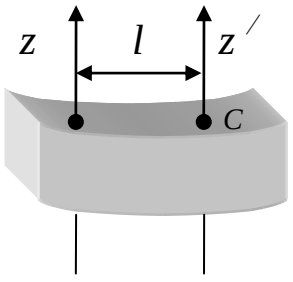


Рис. 3.5. Схема к примеру 3.3

Решение.

В соответствии с (3.4), (3.5) имеем:

$$i_z = \sqrt{J_z / M},$$

где $J_z = J_z^{/} + ml^2 = 4 + 2 = 6$ кг/м^2.

Тогда

$$i_z = \sqrt{6/2} = 1{,}73 \text{ кг/м}^2.$$

3.2. Теорема о движении центра масс механической системы.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e = \bar{R}^e. \qquad (3.7)$$

В проекциях на координатные оси:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e; \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \qquad (3.8)$$

Из теоремы вытекают следующие важные ***следствия:***

1. Пусть $\bar{F}_k^e = 0$, тогда a_c=0 или υ_c=const.

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы движется с постоянной скоростью (**закон сохранения движения центра масс**).

2. Пусть $\sum F_{kx}^e = 0$, тогда $\ddot{x}_c$=0 и υ_{cx}=const.

Если сумма проекций сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось - величина постоянная.

Примеры решения задач по теме 3.2

Пример 3.4. Звенья *OA* и *AB* кривошипно-ползунного механизма *OAB* представляют собой однородные стержни длиной *l* и массой *m* каждый. Определить наибольшее горизонтальное давление на ось шарнира *O*, если угловая скорость вращения кривошипа *OA* постоянна и равна ω, а масса ползуна *B* равна *m* (рис. 3.6).

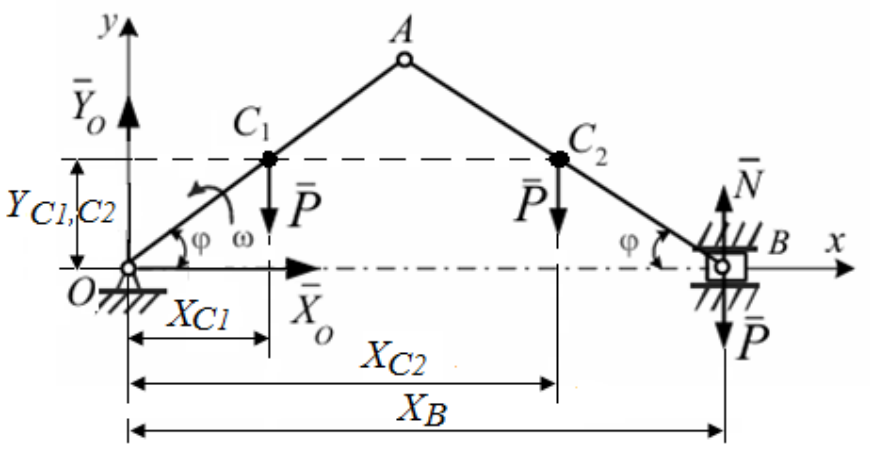


Рис.3.6. Расчетная схема

Решение:

Для решения задачи воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e$$

Чтобы исключить силы, вращающие кривошип *OA* и давление на него со стороны шатуна *AB* и ползуна *B*, сделаем их внутренними. Для этого рассмотрим движение всей системы.

Изобразим все внешние силы $\bar{F}_k^e$: $\bar{X}_0, \bar{Y}_0$ – реакции шарнира *O*, $\bar{N}$ – нормальную реакцию направляющей для ползуна *B*, силы тяжести $\bar{P}$, приложив их центры тяжести C_1, C_2 и *B* однородных тел. Выберем декартовую систему координат *Oxy* с началом в неподвижной точке *O*.

Запишем теорему (3.7) в проекции на ось *Ox*:

$$M\ddot{x}_C = X_0 ,$$

где согласно определению центра масс системы:

$$Mx_C = m_{OA}x_{C_1} + m_{AB}x_{C_2} + m_B x_B .$$

Здесь $m_{OA} = m_{AB} = m_B = m$. Из рис. 3.6 определим координаты центров масс кривошипа *OA*, шатуна *AB* и ползуна *B*:

$$x_{C_1} = \frac{OA}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}\cos(\omega\,t)\,,$$

$$x_{C_2} = OA\cos\varphi + AC_2\cos\varphi = \frac{3l}{2}\cos(\omega\,t)\,,$$

$$x_B = 2OA\cos\varphi = 2l\cos(\omega\,t)\,,$$

поскольку $AB = OA = l$, $\angle AOB = \angle ABO = \varphi$, кривошип OA вращается равномерно по закону $\varphi = \omega t$. В результате получим:

$$Mx_C = 4ml\cos(\omega\,t),$$

а
$$X_O = M\ddot{x}_C = -4ml\omega^2\cos(\omega\,t).$$

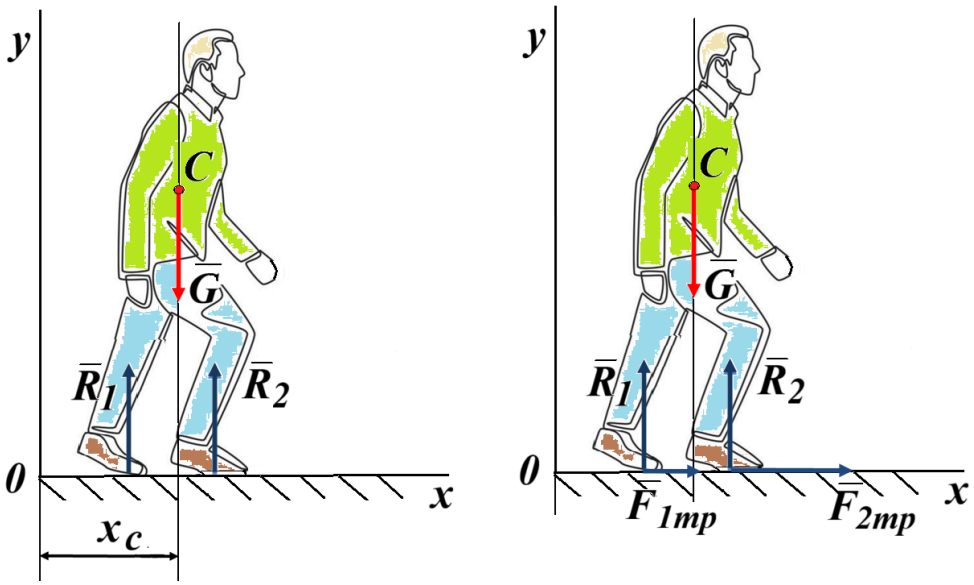
Величина силы горизонтального давления на ось O равна модулю реакции $|X_0| = -4ml\omega^2\cos(\omega\,t)$ и принимает максимальное значение, если $|(\cos\omega t)|=1$. Следовательно, наибольшее горизонтальное давление на ось шарнира O равно $|X_0|_{max} = 4ml\omega^2$.

Пример 3.5.

Может ли человек ходить по идеально гладкой горизонтальной плоскости?

Решение:

Рассмотрим расчетную схему на рисунке 3.7, *а*. Внешними силами, приложенными к человеку, являются его вес $\bar{G} = m\,\bar{g}$ и суммарная нормальная реакция земли $\bar{R}$. Горизонтальная реакция отсутствует, так как плоскость является идеально гладкой.



а) *б)*

Рис.3.7. Иллюстрация к примеру 3.5: *а* - исходная схема;

б - расчетная схема

Запишем теорему о движении центра масс C в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_{kx}^{e}.$$

Так как силы $\bar{G}$ и $\bar{R}$ перпендикулярны к оси x, то

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0\,,$$

следовательно, $m\ddot{x}_C = 0,$

откуда $m\dot{x}_C = C_1 = const.$

Так как в начальный момент времени t=0 человек находился в покое, то $C_1 = 0$ и $m\dot{x}_C = 0.$ Значит,

$$mx_C = C_2 = const,$$

т.е абсцисса центра масс C человека остаётся неизменной и человек по гладкой горизонтальной плоскости не может ходить. Человек мог бы переместиться по гладкой горизонтальной плоскости, бросив

какой-нибудь предмет вперёд (или назад); тогда бы он начал двигаться в противоположном направлении, т.е. назад или вперед.

Если бы человек, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости хотел подпрыгнуть, то он мог бы это совершить.

Теорема о движении центра масс *C* в проекции на ось *y* даёт:

$$m\ddot{y}_C = R - mg;$$

при отталкивании от земли за счет деформации мышц получим

$$R > mg, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{y}_C > 0,$$

следовательно, центр масс человека будет перемещаться по вертикали вверх.

Человек может ходить по негладкой горизонтальной плоскости, так как в этом случае к упомянутым внешним силам добавится сила трения скольжения $\bar{F}_{mp}$ подошв человека о землю, направленная в сторону движения (рис.3.7, *б*). В этом случае получим:

$$m\ddot{x}_C = F_{\text{тр}}, \text{ т.е. } \ddot{x}_C > 0,$$

и центр масс будет ускоренно перемещаться по горизонтали направо.

3.3. Теоремы об изменении количества движения

3.3.1.Теорема об изменении количества движения точки: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на точку сил за тот же промежуток времени:

$$m\bar{\upsilon}_1 - m\bar{\upsilon}_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \bar{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k \ . \qquad (3.9)$$

3.3.2. Теорема об изменении количества движения механической системы *в дифференциальной форме*: производная от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e. \qquad (3.10)$$

где $\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\upsilon}_k = M\bar{\upsilon}_C$ – количество движения механической системы

В проекциях на координатные оси:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_{kz}^e.$$

Разделяем переменные в уравнении (3.2.2)

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e dt,$$

интегрируя, получим:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_k^e dt = \sum \bar{S}_k^e,$$

где $\sum \bar{S}_k^e$ – сумма импульсов всех внешних сил.

Это уравнение выражает **теорему об изменении количества движения в интегральной форме:** изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил.

Из теоремы об изменении количества движения вытекает ***закон сохранения количества движения***:

1. Если $\bar{F}_i^e = 0$, то $\bar{Q} = const$, т.е. если главный вектор внешних сил, действующих на систему равен нулю, то количество движения системы– величина постоянная,

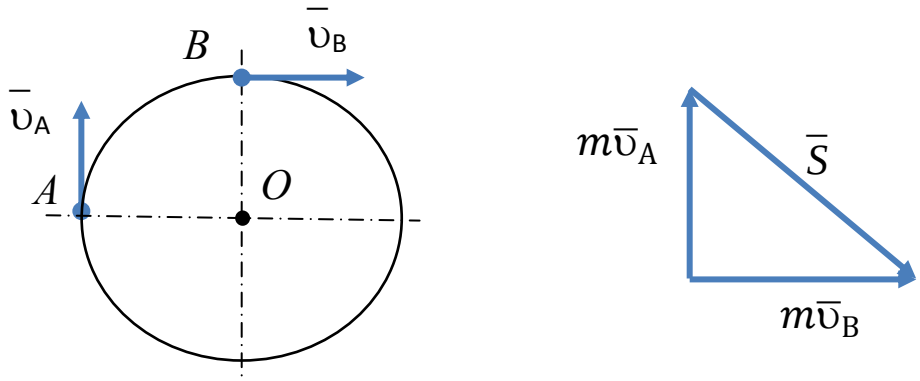
2. Если $\sum F_{ix}^e = 0, Q_x = const$, т.е. если сумма проекций всех внешних сил на ось равна нулю, то и проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная.

Примеры решения задач по теме 3.3

Пример 3.6.

Материальная точка массы m движется равномерно по окружности со скоростью υ под действием некоторой системы сил. Определить импульс равнодействующей этой системы сил при перемещении точки до дуге четверти окружности из точки A в точку B (рис. 3.8, *а*).

Решение:



а) *б*)

Рис. 3. 8. Иллюстрация к примеру 3.6

Применяем теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$m\bar{\upsilon}_2 - m\bar{\upsilon}_1 = \bar{S}\,.$$

Так как $m\bar{\upsilon}_2 = m\bar{\upsilon}_B$, $m\bar{\upsilon}_1 = m\bar{\upsilon}_A$, то

$$m\bar{\upsilon}_B - m\bar{\upsilon}_A = \bar{S}\,.$$

Построим векторы количества $m\bar{\upsilon}_B$ и $m\bar{\upsilon}_A$ из одной точки (рис. 3.8, *б*), находим их разность, равную импульсу равнодействующей силы $\bar{S}$. Так как точка движется равномерно, т.е. $|\bar{\upsilon}_B| = |\bar{\upsilon}_A| = \upsilon$, то $|S| = m\upsilon\sqrt{2}$.

Пример 3.7.

Тело массой $M+m$ двигалось относительно инерциальной системы отсчета *OXY* со скоростью V_0 (рис. 3.9). Затем в результате действия внутренних сил $\bar{F}_{Mm}, \bar{F}_{mM}$ ($\bar{F}_{Mm} = -\bar{F}_{mM}$) частица массой m отделилась с относительной скоростью $\bar{u}$. Определить скорость V_1 тела M после отделения частицы.

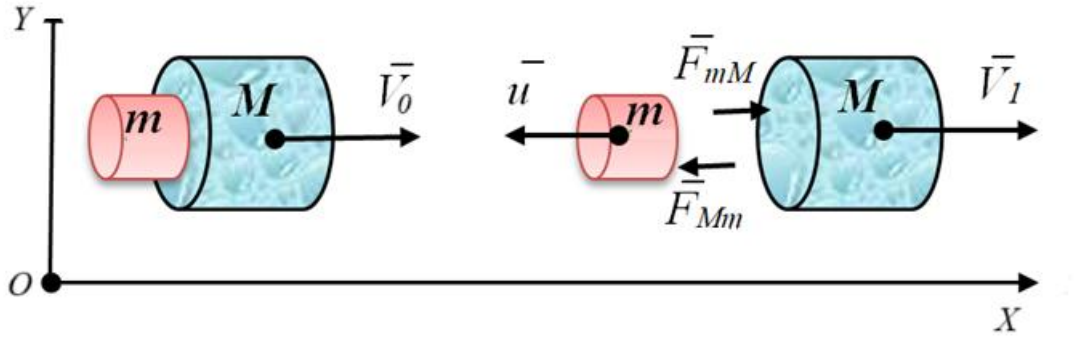


Рис.3.9. Иллюстрация к примеру 3.7

Решение.

Записываем теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме в проекции на ось *OX*:

$$\frac{dQ_X}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}^e_{kX}.$$

Так как внешние силы отсутствуют (проекция сил тяжести на ось *OX* равна нулю), получаем *закон сохранения*: количество движения системы до отделения Q_{0X} останется равным количеству движения системы Q_{1X} после отделения частицы:

$$Q_{1X} - Q_{0X} \approx 0 \quad \text{или} \quad Q_{1X} = Q_{0X},$$

До отделения количество движения системы в проекции на направление движения *OX* было:

$$Q_{0X} = (M + m)V_0 .$$

Проекция скорости тела M на ось OX равна искомой величине V_1. Проекция абсолютной скорости части m на ось Ox после отделения:

$$V_{mx} = V_1 - u\,.$$

Поэтому

$$Q_{1x} = (V_1 - u)m + V_1 M = V_0(M + m)\,.$$

Откуда $$V_1 = V_0 + u\frac{m}{m+M}\,.$$

Таким образом, основное тело массой M получило приращение скорости, равное

$$um/m+M\,.$$

Пример 3.8.

Определить главный вектор количества движения кривошипно-ползунного механизма, если массы кривошипа OA и шатуна AB равны m, длина $OA = AB = l$, а масса ползуна B – $m_B = m/2$.

Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями (рис. 3.10).

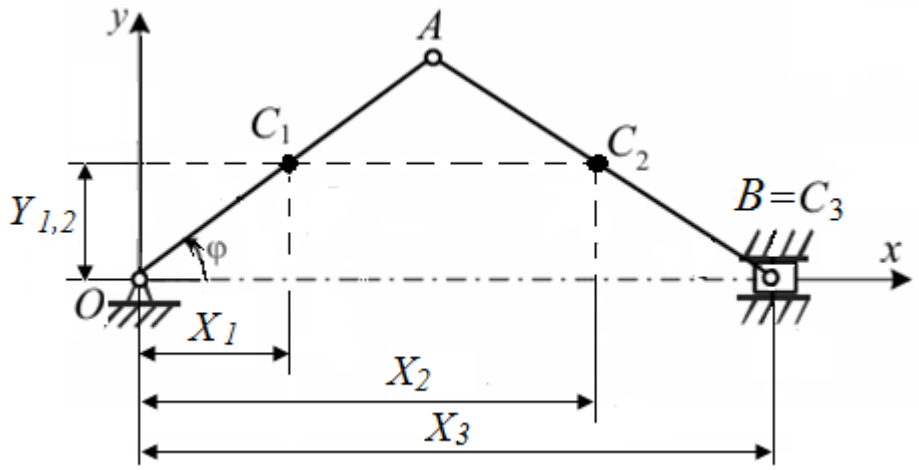


Рис.3.10. Иллюстрация к примеру 3.8

Решение.

Проекция главного вектора количества движения механизма на оси *x* и *y*:

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C, \tag{а}$$

где масса механизма $M = m + m + m_B = {}^{5}/_{2}\, m$.

Координаты центров масс C_1, C_2, C_3 соответственно кривошипа *OA*, шатуна *AB* и ползуна *B*, с учетом φ = ωt:

$$x_1 = \frac{1}{2} l\, cos\omega t; \quad y_1 = \frac{1}{2} l\, sin\, \omega t;$$
$$x_2 = \frac{3}{2} l\, cos\omega t; \quad y_2 = \frac{1}{2} l\, sin\, \omega t; \tag{б}$$
$$x_3 = 2l\, cos\omega t; \quad y_3 = 0.$$

Координаты x_C и y_C центра масс механизма:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k. \tag{с}$$

Подставляя координаты центров масс C_1, C_2, C_3 из уравнений (б) в уравнения (с) получим:

$$x_C = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) = \frac{6}{5} l \cos \omega t\,;$$
$$y_C = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) = \frac{2}{5} l \sin \omega t.$$

Проекции скоростей центра масс механизма на оси *x* и *y* – $\dot{x}_C, \dot{y}_C$ определим как производные по времени от координат x_C и y_C:

$$\dot{x}_C = -\frac{6}{5} l\omega\, sin\, \omega t\,; \quad \dot{y}_C = \frac{2}{5} l\omega \cos \omega t\,. \tag{д}$$

Подставляем (д) в (а) найдем:

$$Q_x = -3ml\omega \sin \omega t; \quad Q_y = ml\omega \cos \omega t\,.$$

Модуль главного вектора количеств движения кривошипно-ползунного механизма:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = ml\omega\sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}\ .$$

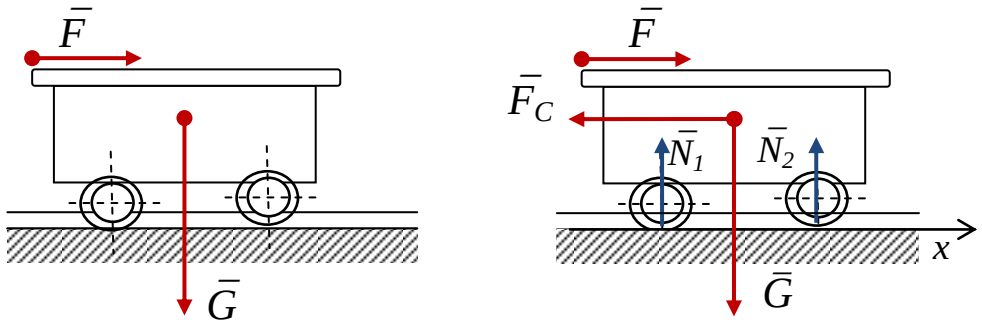
Пример 3.9.

Вагонетка, вес которой 8500 Н, при движении по горизонтальному пути испытывает сопротивление, равное 0,01 от всех вертикальных нагрузок. Рабочий толкает вагонетку с силой $\bar{F}$ = 170 Н. Определить, через сколько времени рабочий сообщит вагонетке скорость υ = 0,6 м/с (рис. 3.11, *а*).

Решение:

На вагонетку действуют: сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция рельсов $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$, горизонтальна сила $\bar{F}$ и сила сопротивления движению $\bar{F}_C = 0{,}01\ \bar{G}$ (рис. 3.11, *б*).

Пренебрегая вращательным движением колесных скатов, можно считать, что все части рассматриваемой системы (кузов, вагонетка, полезная нагрузка, колесные скаты) движутся поступательно вместе с кузовом вагонетки. Считаем, что масса вагонетки сосредоточена в центре её тяжести и в центре тяжести приложена равнодействующая всех сил. Таким образом, задача о движении системы сводится к задаче о движении материальной точки.



а) *б)*

Рис. 3.11. Иллюстрация к примеру 3.9: *а* - исходная схема; *б* - расчетная схема

Используем теорему об изменении количества движения в интегральной форме:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_o = \sum \int_0^t \overline{R}_i^e dt,$$

в проекции на ось *x* уравнение примет вид:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = \sum \int_0^t R_{ix}^e dt = \int_0^t (F - F_C) dt = \int_0^t (F - 0{,}01G) dt.$$

$$m\upsilon - m\upsilon_0 = (170 - 85)t = 85t.$$

Учитывая, что $\upsilon_0 = 0$, и что $m = G/g$, находим:

$$t = \frac{G\,\upsilon}{85\,g} = \frac{8500 \cdot 0{,}6}{9{,}8 \cdot 85} = 6{,}1\ c.$$

3.4. Теорема об изменении кинетического момента

3.4.1. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента) точки: производная по времени от кинетического момента материальной точки относительно некоторого центра *O* равна вектору-моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0(\overline{F}).$$

В проекциях на декартовы оси инерциальной системы отсчета:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x(\overline{F}), \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y(\overline{F}), \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z(\overline{F}),$$

где $\overline{K}_0 = \overline{M}_0(m\overline{V}) = \bar{r} \times \overline{Q}$ – момент количества движения (или кинетический момент) материальной точки определяется как вектор-момент некоторой «силы», роль которой играет вектор количества движения $\overline{Q} = m\overline{V}$ (рис. 3.12).

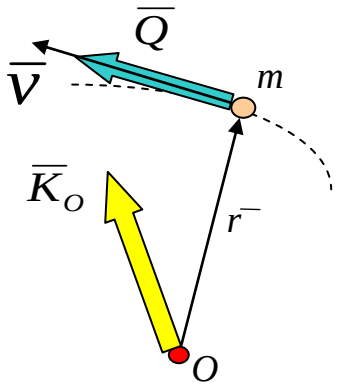


Рис. 3.12. Иллюстрация определения момента количества движения

3.4.2. Теорема об изменении кинетического момента системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра O равна геометрической сумме векторов-моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{M}_0(\bar{F}_k^e). \qquad (3.11)$$

где $\bar{K}_0 = \sum \bar{M}_0(m_k \bar{V}_k)$ – кинетический момент (момент количества движения) системы равен геометрической сумме моментов количества движения всех точек.

В проекциях на декартовы оси уравнение (3.11) примет вид:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_x(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (3.12)$$

Уравнения (3.2) являются математической записью ***теоремы об изменении кинетического момента системы в скалярной форме:*** производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторой оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси.

Проекции кинетического момента в на координатные оси определим как:

$$K_x = \sum M_x(m_k\bar{V}_k);\quad K_y = \sum M_y(m_k\bar{V}_k);\quad K_z = \sum M_z(m_k\bar{V}_k) \qquad (3.13)$$

Кинетический момент тела, вращающегося относительно оси *OZ* (рис. 3.13):

$$K_z = \sum m_z(m_i\bar{V}_i) = \sum(m_i h_i^2)\omega. \qquad (3.14)$$

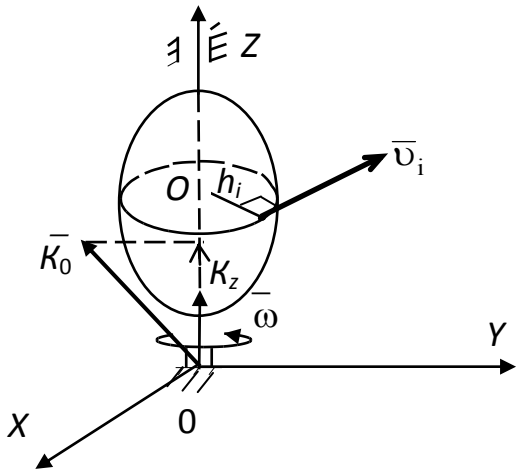


Рис. 3.13. Кинетический момент тела, относительно оси

Отсюда получаем, что **кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения** равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела

$$K_z = J_z\omega. \qquad (3.15)$$

Для нескольких тел

$$K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_n. \qquad (3.16)$$

Закон сохранения кинетического момента.

1. Если геометрическая сумма векторов-моментов всех внешних сил относительно некоторого центра O равна нулю $\sum_{k=1}^{n}\bar{M}_0(\bar{F}_k) = 0,$ то кинетический момент системы относительно этого центра не меняется $\bar{K}_0 = const$.

2. В случае вращающейся системы, если $\sum_{k=1}^{n} M_{0x}(\bar{F}_k^e) = 0$, то $K_x = J_z\omega = \text{const}$.

Теорема используется для изучения вращательного движения тел.

Пример 3.10.

Человеку с гирями в руках, стоящему на скамейке Жуковского (рис. 3.14), которая может вращаться вокруг вертикальной оси *Oz* почти без трения, сообщают начальную угловую скорость $\omega_0 = 100$ об/мин; при этом момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен $I_0 = 0{,}12$ кг м^2. С какой угловой скоростью ω_1 начнет вращаться скамейка с человеком, если, разведя руки с гирями в стороны, он увеличит момент инерции системы до $I_1 = 0{,}8$ кг м^2?

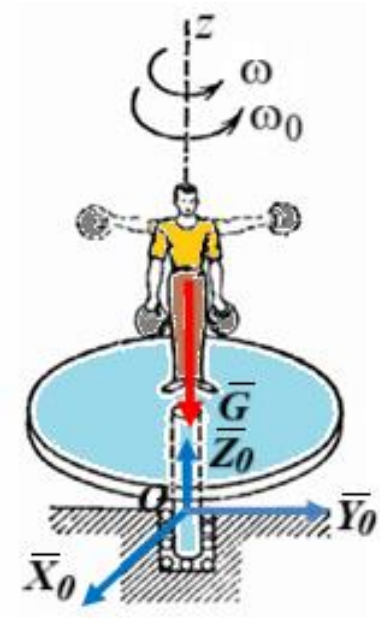


Рис. 3.14. Иллюстрация к примеру 3.10

Решение:

Теорема об изменении момента количества движения системы относительно выбранной оси z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_i^e) .$$

Так как внешние силы системы или параллельны оси *Oz* (силы тяжести $\bar{G}$), или эту ось пересекают (реакции подпятника $X_O Y_O Z_O$ и подшипника при отсутствии трения), то

$$\sum_{i=1}^{n} M_z(\bar{F}_i^e) = 0 .$$

Тогда имеет место закон сохранения кинетического момента относительно оси вращения z:

$$K_z^0 = K_z^1$$

Так как для вращающегося тела $K_z = I_z \omega$, то равенство принимает вид

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1.$$

Отсюда с учетом данных задачи

$$\omega_1 = \frac{I_0 \omega_0}{I_1} = 15 \text{ об/мин} .$$

Следовательно, если человек разведением рук с гирями в стороны увеличит момент инерции, то угловая скорость вращения уменьшиться и наоборот. Законом сохранения кинетического момента пользуются фигуристы, акробаты, танцоры, например, для увеличения угловой скорости при прыжках в воздухе, или для замедления вращения.

Пример 3.11.

Составить уравнение движения барабана *1* вместе с грузом *2*, подвешенном на гибкой нити, намотанной на барабан (рисунок 3.15). Трением в оси барабана и сопротивлением внешней среды пренебречь. Считать известными параметры: M_1 — масса барабана,

M_2 — масса груза, I_z — момент инерции барабана относительно оси вращения Oz, r — радиус, на котором намотана нить.

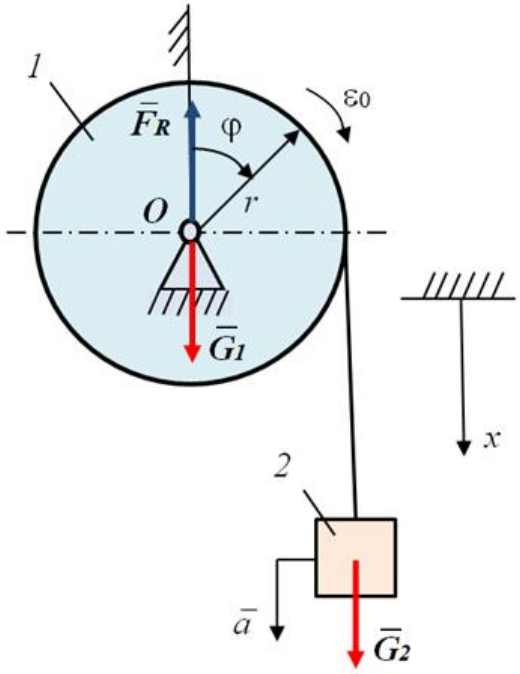


Рис. 3.15. Иллюстрация к примеру 3.11

Решение.

Система «барабан – груз» определяется одной координатой, поскольку между углом поворота барабана φ и вертикальным перемещением груза *x* имеет место кинематическая зависимость:

$$x = \varphi r.$$

Из этой зависимости непосредственно следует

$$\dot{x} = V = \dot{\varphi} r = \omega r, \qquad \text{(а)}$$

где V — скорость груза, ω — угловая скорость барабана.

Внешними силами для системы будут силы веса груза $G_2 = M_2 g$ и барабана $G_1 = M_1 g$, а так же реакция F_R оси Oz.

Кинетический момент системы относительно оси Oz вращения барабана

$$K_z = I_z \cdot \omega + M_2 V r\,. \qquad \text{(б)}$$

Уравнение теоремы об изменении кинетического момента (3.12) в данном случае записывается в виде:

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} + M_2 r \frac{dV}{dt} = M_2 gr \,. \qquad \text{(в)}$$

Учитывая соотношение (а), уравнение (в) можно представить в виде:

$$(I_z + M_2 r^2) \frac{d\omega}{dt} = M_2 gr \,. \qquad \text{(г)}$$

Уравнение (г) полностью определяет динамику системы. Из этого уравнения заключаем, что барабан будет вращаться равноускорено с угловым ускорением:

$$\varepsilon_0 = \frac{d\omega}{dt} = M_2 gr \Big/ (I_z + M_2 r^2) \,.$$

Груз будет двигаться прямолинейно и равноускорено с ускорением:

$$a = \ddot{x} = \varepsilon_0 r \,.$$

3.5. Теорема об изменении кинетической энергии

3.5.1. ***Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки*** в интегральной форме: изменение кинетической энергии точки на любом перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_i \,. \qquad (3.17)$$

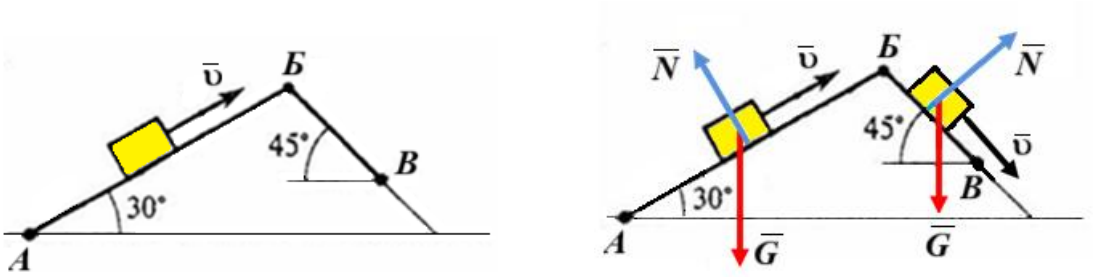
3.4.2. Теорема об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \,. \qquad (3.18)$$

Примеры решения задач по теме 3.4.

Пример 3.12.

Определить работу силы тяжести при перемещении груза из положения *А* в положение *В* по наклонной плоскости *АБВ*. Трением пренебречь. *АБ* = 2 м; *БВ* = 1 м; *G* = 100 Н.



а) *б)*

Рис. 3.16. Иллюстрация к примеру 3.12: *а* – исходная схема; *б* – расчетная схема

Решение:

1. Движение груза из положения *А* в положение *В* по наклонной плоскости *АБВ* будем рассматривать как сумму движений на участках *АБ* и *БВ*.

2. Отбрасываем связь (поверхность) и заменяем нормальной реакцией $\bar{N}$. Показываем вес груза $\bar{G}$.

3. Определяем работу сил на участке АБ:

$A(\bar{N}) = 0$, т.к. $\bar{N} \perp$ АБ; $A(\bar{G}) = -G \sin 30^0 \cdot \text{АБ} = -100$ Дж.

на участке БВ:

$A(\bar{N}) = 0$, т.к. $\bar{N} \perp$ БВ; $A(\bar{G}) = G \sin 45^0 \cdot \text{БВ} = 70{,}7$ Дж.

Тогда работа силы тяжести на участке *АБВ:*

$$A(\bar{G}) = -100 + 87 = -29{,}3 \text{ Дж.}$$

Пример 3.17.

Определить работу торможения за один оборот колеса, если коэффициент трения между тормозными колодками и колесом f = 0,1. Сила прижатия колодок Q = 100 Н.

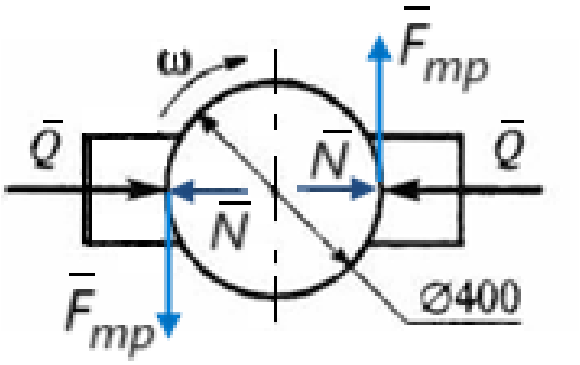


Рис. 3.17. Иллюстрация к примеру 3.13

Решение.

Покажем силу трения $\bar{F}_{mp}$ между тормозной колодкой и колесом и определим её как

$$F_{\text{тр}} = fN = fQ.$$

Работа силы трения:

$$\text{A}\left(\bar{F}_{\text{тр}}\right) = -F_{\text{тр}} \cdot S = -fQ(\varphi \cdot r)\,.$$

Здесь S – перемещение точки приложения силы трения; φ – угол поворота колеса.

По условию задачи φ=1 об = 2π рад; d=400 мм; r =200 мм=0,2м.

Тогда

$$\text{A}\left(\bar{F}_{\text{тр}}\right) = -0{,}1 \cdot 100 \cdot 2\pi \cdot 0{,}2 = -\,12{,}6 \text{ Дж}.$$

Так как к колесу приложены две тормозные колодки, то работа торможения за один оборот колеса по модулю составит $\text{A}\left(\bar{F}_{\text{тр}}\right) \approx 25$ Дж.

Пример 3.14.

Груз A удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, посредством пружины, ось которой параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости. После толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на величину l.

Найти работу сил, приложенных к грузу A на этом перемещении, если коэффициент упругости (жесткости) пружины равен c. Силой трения скольжения груза A о наклонную плоскость пренебречь.

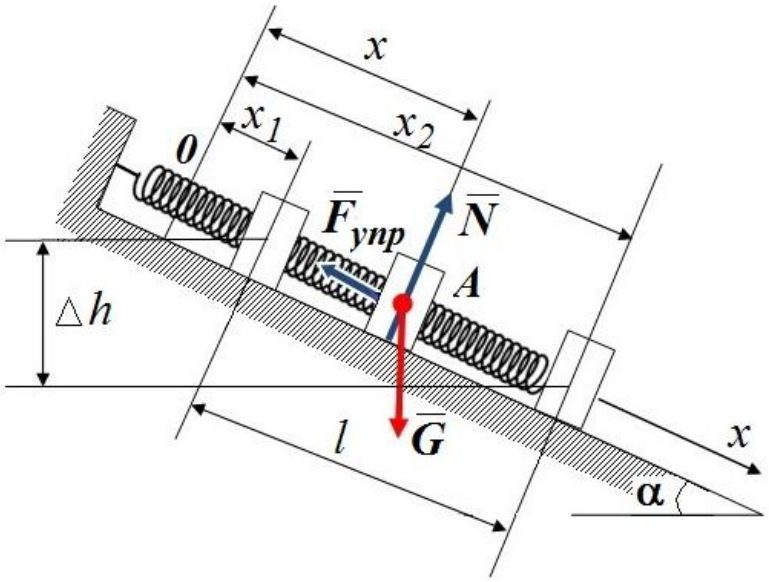


Рис. 3.18. Иллюстрация к примеру 3.14

Решение:

К грузу приложены: сила тяжести $\bar{G}$ сила упругости пружины $\bar{F}_{упр}$ и нормальная реакция наклонной плоскости $\bar{N}$.

Ось x направим вдоль наклонной плоскости, выбрав начало отсчета O в конце недеформированной пружины (рис. 3.18).

В положении равновесия груза пружина растянута на $f_{СТ}$.

Сумма проекций всех сил, приложенных к грузу, на ось x:

$$G\sin\alpha - F_{\text{упр}} = 0,$$

где $F_{\text{упр}} = cf_{\text{СТ}}$, тогда

$$G\sin\alpha - cf_{\text{СТ}} = 0,$$

$$f_{\text{СТ}} = \frac{G\sin\alpha}{c}. \qquad (a)$$

Искомая сумма работ сил имеет вид:

$$\sum A_k = A(\bar{G}) + A\left(\bar{F}_{\text{упр}}\right) + A(\bar{N}). \qquad (б)$$

Работа сила тяжести:

$$A(\bar{G}) = G\,\Delta h = G\,l\sin\alpha. \qquad (в)$$

Работа сила упругости пружины:

$$A\left(\bar{F}_{\text{упр}}\right) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

где $x_1 = f_{\text{СТ}}, \quad x_2 = x_1 + l = f_{\text{СТ}} + l,$ тогда

$$A\left(\bar{F}_{\text{упр}}\right) = -\frac{cl}{2}(2f_{\text{СТ}} + l). \qquad (г)$$

Работа нормальной реакции наклонной плоскости $\bar{N}$:

$$\text{A}(\bar{N}) = 0, \text{ т.к. } \bar{N} \perp Ox.$$

Подставляя (*в*) и (*г*) в (*б*) с учетом (*а*) получим:

$$\sum A_k = -\frac{cl^2}{2}.$$

Пример 3.15.

Стержень *OA* длиной *l* подвешен на шарнире в точке *O* (рис. 3.19). Определить, какую наименьшую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню из положения I, чтобы он отклонился до горизонтального положения II; трением в шарнире пренебречь.

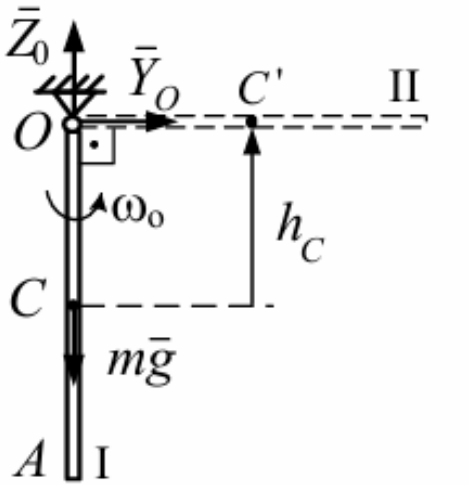


Рис. 3.19. Иллюстрация к примеру 3.15

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в конечной форме (3.8):

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i . \qquad \text{(а)}$$

Так как стержень *OA* является неизменяемой системой материальных точек, то для него сумма работ внутренних сил равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0.$$

Тогда теорема (а) принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e. \qquad \text{(б)}$$

Вычислим кинетическую энергию стержня *OA* в конечном *II* и начальном *I* положениях. Поскольку в конечном положении *II* стержень остановится, то $T_1 = 0$. Выражение для кинетической энергии стержня *OA*, вращающегося вокруг оси *O*, в начальном положении *I* определим по формуле

$$T_0 = \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = \frac{ml^2 \omega_0^2}{6}. \qquad \text{(в)}$$

Здесь m– масса стержня, а $I_0 = ml^2/3$– его момент инерции относительно оси вращения O.

На стержень действуют внешние силы: активная сила тяжести $m\bar{g}$ и $\bar{Y}_0$, $\bar{Z}_0$ – реакции шарнира O. Теперь вычислим сумму работ этих сил при перемещении стержня OA из вертикального положения I в горизонтальное положение II (рис. 3.11):

$$A(m\bar{g}) = -mgh_C = -mg\,{}^{l}/_{2};$$

а $A(\bar{Y}_0) = A(\bar{Z}_0) = 0$, так как точка O при повороте стержня остается неподвижной. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = -\,mg\,{}^{l}/_{2}. \qquad \text{(г)}$$

С учетом (в) и (г) уравнение (б) для данной задачи примет вид:

$$-\frac{ml^2\omega_0^2}{6} = -mg\,{}^{l}/_{2}.$$

Отсюда находим начальную угловую скорость стержня OA

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Пример 3.16.

Токарный станок приводится в движение электродвигателем. Диаметр обрабатываемой детали 200 мм, частота вращения n = 42 об/мин, сила резания F = 2 кН. Определить полезную мощность станка.

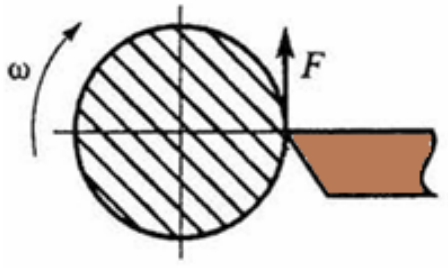


Рис. 3.20. Иллюстрация к примеру 3.16

Решение.

Полезную мощность станка определим как:

$$N = F\,\upsilon = F\,\omega\,r,$$

где связь между величинами ω и n следующая:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 42}{30} = 4{,}39\ \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

поскольку один оборот составляет 2π радиан, а минута состоит из 60 секунд.

Таким образом

$$N = 2{\cdot}10^3 \cdot 4{,}39 \cdot 0{,}1 = 0{,}87\ \text{кВт}$$

Вопросы для самоконтроля

Тема 1.

1. Что называется материальной точкой?
2. Сформулируйте законы динамики.
3. Сформулируйте две основные задачи динамики материальной точки.
4. В чем особенность решения обратной задачи динамики материальной точки?
5. Как определить постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки.
6. В чем заключается основной закон динамики для относительного движения.
7. Что такое переносная и кориолисова силы инерции.

Тема 2.

1. Какие колебания называются свободными?
2. Что называется положением равновесия материальной точки (груза)?

3. Особенность решения дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания материальной точки с учетом сил сопротивления движению.
4. Что называется амплитудой, периодом и частотой свободных колебаний материальной точки?
5. Какие колебания называются вынужденными?
6. Как влияет сила сопротивления на вынужденные колебания?
7. Что такое резонанс?
8. От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний материальной точки?

Тема 3.

1. Что называется механической системой? Какие силы называются внешними, какие внутренними?
2. Что такое момент полярный (осевой) и центробежный моменты инерции тела?
3. Какой смысл у радиуса инерции?
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Как определить центр масс системы материальных точек?
6. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы. Случай сохранения скорости центра масс системы.
7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки и системы.
8. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения точки.
9. Случаи сохранения момента количества движения материальной точки и главного момента количества движения системы.
10. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии точки и механической системы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.

2. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Directmedia, 2016.

3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. -Текст : электронный

4. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.