МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«__9__» __10______ 2024 г.

Математическая экономика

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Математическая экономика» для студентов направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Курск 2024

УДК 004

Составитель: Халин Ю.А.

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор В.П. Добрица

Математическая экономика: методические указания к лабораторным работам / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Ю.А. Халин. – Курск, 2024. – 7 с.: Библиогр.: с. 7.

Содержат сведения по вопросам математической экономики. Указывается порядок выполнения лабораторных работ, правила оформления, содержание отчета.

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математическая экономика» предназначены для студентов направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Текст печатается в авторской редакции
Подписано в печать 9.10.24. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ.л. 0,7. Уч. –изд.л. 0,47. Тираж 50 экз. Заказ 1126.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Лабораторная работа №1

Модель поведения потребителей

Рассмотрим рынок, на котором продаются товары n видов. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — цены этих товаров, вектор

$$p = (p_1 \;\; p_2 \;\; \dots \;\; p_n)$$

естественно назвать вектором цен.

Пусть некоторый потребитель обладает богатством М ден. ед., и x_i — это количество единиц i-го товара, которые данный потребитель приобретает на рынке ($i = 1,2, \dots, n$). Вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

координаты которого неотрицательны и соответствуют приобретаемым количествам товаров каждого вида, называется набором товаров, а множество всех наборов товаров

$$C = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \middle| \, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \right\}$$

называется пространством товаров (поскольку на наборы товаров не налагается ограничений целочисленности, здесь предполагается, что можно приобрести произвольное — целое или дробное — количество любого товара, т.е. что все товары являются безгранично делимыми).

Стоимость набора товаров x равна, очевидно,

$$px = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Бюджетное множество B — это множество наборов товаров $x \in C$, которые может себе позволить приобрести при данных ценах $p_1, p_2, \dots, p_n$ потребитель, обладающий богатством I (при этом предполагается, что тратить все деньги необязательно).

С алгебраической точки зрения бюджетное множество описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq I, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Можно показать, что для любого товара обязательно найдется другой товар, составляющий с первым взаимозаменяемую пару. В частности, если рассматривать рынок двух товаров, то эти два товара обязательно должны быть взаимозаменяемыми.

ПРИМЕР 1.1. В пространстве трех товаров известен вектор цен $p = (2\ 5\ 6)$, богатство потребителя I = 30 ден. ед. и его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I векторе цен p. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

Решение. В рассматриваемом примере система неравенств (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения (рис. 1.1) данное бюджетное множество

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^n \middle| 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 30, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \right\}$$

представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках $I/p_1 = 30/2 = 15, I/p_2 = 30/5 = 6$ и $I/p_2 = 30/6 = 5$ на осях $Ox_1, Ox_2,$ и Ox_3,

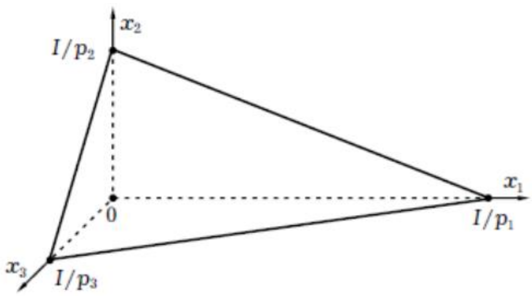

Рис. 1.1. Бюджетное множество

Предельные полезности товаров в данном примере равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}}, \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}}$$

поэтому условия (1.6) для определения функции спроса принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_1x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1}, \\ \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2x_3}{4\lambda^2 {p_1}^2}, \\ \dfrac{x_3}{4\lambda p_1} = \lambda p_2, \\ \dfrac{x_2}{4\lambda p_1} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1p_3, \\ 12\lambda^2 p_1p_2p_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_1}, \\ {x_2}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_2}, \\ {x_3}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_3}, \\ \lambda^* = \sqrt{\dfrac{I}{12p_1p_2p_3}}. \end{cases}$$

Таким образом, функция спроса данного потребителя

$$x^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I/(3p_1) \\ I/(3p_2) \\ I/(3p_3) \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

а предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}}.$$

При данном векторе цен p = (2 5 6) и богатстве I = 30 получаем:

$${x_1}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5, \quad {x_2}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2,$$

$${x_3}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3 \cdot 6} = \frac{5}{3}, \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Итак, вектор спроса при данных ценах и данном богатстве таков:

$$x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Убедимся теперь, что для данного потребителя действительно выполняется уравнение Слуцкого. Рассмотрим, например, что произойдет со спросом при изменении цены первого товара. Пусть цена первого товара изменилась с p_1 до $p_1+\Delta p_1$. Если произошло соответствующее компенсирующее изменение богатства на величину

$$\Delta I = x_1^* \Delta p_1 = \frac{I\Delta p_1}{3p_1}$$

[определенную по формуле (14.1.8}], то новая точка спроса

$$x^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) = \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix},$$

т.е. изменение спроса составляет

$$\Delta x^* = x^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) - x^*(p_1, p_2, p_3, I) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} - \dfrac{I}{3p_1} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} - \dfrac{I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} - \dfrac{I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(I+\Delta I)p_1 - I(p_1+\Delta p_1)}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1\Delta I - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}.$$

Подставим сюда $\Delta I = I\Delta p_1/(3p_1)$, получим

$$\Delta x^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 I\Delta p_1/(3p_1) - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим изменение спроса при бесконечно малом изменении цены первого товара и компенсирующем изменении дохода:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0, \\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0, \\ u(x')=u(x^*)}} \frac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0, \\ u(x')=u(x^*)}} \frac{-2I}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} = -\frac{2I}{9p_1^2},$$

$$(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1})_{комп} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\frac{I\Delta p_1}{9p_1p_2}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{I}{9p_1p_2} = \frac{I}{9p_1p_2},$$

$$(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1})_{комп} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\Delta x_3^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\frac{I\Delta p_1}{9p_1p_3}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{I}{9p_1p_3} = \frac{I}{9p_1p_3}.$$

Найдем теперь $\partial x_i^*/\partial p_1, \partial x_i^*/\partial I$ (i =1,2, 3):

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial p_1} = -\frac{I}{3p_1^2},\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial p_1} = 0,\ \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_1},\ \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_2},\ \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_3}.$$

Замечаем, что

$$(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1})_{комп} - \frac{\partial x_1^*}{\partial I}x_1^* = -\frac{2I}{9p_1^2} - \frac{1}{3p_1}\frac{I}{3p_1} = -\frac{I}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1},$$

$$(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1})_{комп} - \frac{\partial x_2^*}{\partial I}x_1^* = \frac{I}{9p_1p_2} - \frac{1}{3p_2}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1},$$

$$(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1})_{комп} - \frac{\partial x_3^*}{\partial I}x_1^* = \frac{I}{9p_1p_3} - \frac{1}{3p_3}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1},$$

т.е. уравнение Слуцкого (14.1.9) для данного потребителя действительно выполняется.

Поскольку

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_1} > 0, \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_2} > 0, \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_3} > 0$$

все три товара ценные (так как ценные товары не могут быть товарами Гиффина, все три товара являются нормальными). Первый и второй товары являются взаимозаменяемыми, так как

$$(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1})_{комп} = \frac{I}{9p_1p_2} > 0.$$

Точно так же можно показать, что первый и третий, а также второй и третий товары образуют взаимозаменяемые пары, а взаимодополняющие товары для данного потребителя отсутствуют.

Индивидуальные задания

В пространстве трех товаров известен вектор цен $p = (p_1, p_2, p_3)$, богатство потребителя I его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3)$ [они приведены для каждого варианта в табл. 14.2.1]. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен p. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

№ вар.	Исходные данные			№ вар.	Исходные данные		
	p	I	$u(x_1, x_2, x_3)$		p	I	$u(x_1, x_2, x_3)$
1	(7 3 2)	42	$x_1\sqrt{x_2x_3}$	19	(5 8 4)	60	$2x_1x_2x_3$
2	(1 3 4)	24	$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$	20	(4 9 6)	72	$\frac{x_1x_2}{3} + x_3$
3	(5 2 4)	60	$x_1 + \frac{x_2x_3}{2}$	21	(7 5 2)	35	$4x_1x_2 + x_3^2$
4	(2 3 4)	60	$x_1^2 + 2x_2x_3$	22	(3 8 5)	60	$3\sqrt{x_1x_2}x_3$
5	(5 8 4)	120	$\ln(x_1x_2x_3)$	23	(1 7 2)	56	$2x_1\sqrt{x_2}x_3$
6	(4 9 6)	36	$x_1x_2\sqrt{x_3}$	24	(4 7 3)	42	$3\sqrt{x_1}x_2x_3$
7	(7 5 2)	70	$\sqrt{x_1}x_2x_3$	25	(2 5 6)	60	$2x_1x_2\sqrt{x_3}$
8	(3 8 5)	120	$x_1\sqrt{x_2}x_3$	26	(3 6 9)	72	$2\ln(x_1x_2x_3)$
9	(1 7 2)	28	$\sqrt{x_1x_2}x_3$	27	(2 7 6)	21	$3x_1^2 + 2x_2x_3$
10	(4 7 3)	84	$2x_1x_2 + x_3^2$	28	(2 3 6)	36	$3x_1 + \frac{x_2x_3}{2}$
11	(2 5 6)	30	$\frac{x_1x_2}{3} + x_3$	29	(3 2 8)	48	$\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$
12	(3 6 9)	36	$x_1x_2x_3$	30	(3 8 5)	30	$2x_1\sqrt{x_2x_3}$
13	(2 7 6)	42	$2x_1x_3 + x_2^2$	31	(5 2 4)	30	$\sqrt{2x_1x_2}x_3$
14	(2 3 6)	18	$2\ln(x_1x_2x_3)$	32	(2 3 4)	30	$3x_1\sqrt{x_2}x_3$
15	(3 2 8)	24	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$	33	(4 7 3)	21	$\sqrt{2x_1}x_2x_3$
16	(1 3 4)	48	$x_1^3 + 2x_2^3 + x_3^3$	34	(3 6 9)	18	$x_1x_2\sqrt{2x_3}$
17	(5 2 4)	120	$3\ln(x_1x_2x_3)$	35	(7 3 2)	84	$4x_1x_2 + 3x_3^2$
18	(2 3 4)	120	$3x_1x_3 + x_2^2$				

Лабораторная работа №2

Производственные функции

Производственная функция выражает зависимость результата производства (объема выпускаемой продукции) от факторов производства (затраченных ресурсов). При описании экономической системы с помощью производственной функции эта система рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы, а на выходе получается произведенный за некоторый период времени продукт.

Если рассматривать два ресурса:

- капитал, т.е. прошлый (накопленный) труд K в форме основных производственных фондов;
- настоящий (живой) труд L, описываемый количеством занятых, и результатом деятельности экономической системы считать объем выпуска X, то экономика замещается своей моделью в форме наиболее распространенной двухфакторной производственной функции

$$X = F(K, L).$$

Поскольку обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, удобнее всего объем выпуска исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать национальную экономику, то объемом выпуска можно считать валовый внутренний продукт, а если в качестве экономической системы рассматривать фирму — то просто выпуск продукции в денежном выражении, т.е. суммарную стоимость произведенной продукции всех видов.

Производственная функция называется неоклассической, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов K и L, является непрерывной и дважды дифференцируемой по обоим аргументам при всех $K \geq 0, L \geq 0$ и обладает следующими свойствами, имеющими естественную экономическую интерпретацию:

- при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно:
$$F(K, 0) = 0 \text{ для всех } K \geq 0, \qquad F(0, L) = 0 \text{ для всех } L \geq 0;$$
- при увеличении затрат ресурсов выпуск продукции возрастает:
$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0 \text{ для всех } K \geq 0, \ L \geq 0;$$
- при увеличении количества одного из используемых ресурсов при постоянном количестве другого ресурса скорость роста выпуска продукции замедляется:
$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} > 0 \text{ для всех } K \geq 0, L \geq 0;$$

- при неограниченном увеличении количества хотя бы одного из используемых ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает: $F(K, +\infty) = +\infty$ для всех $K > 0$, $\quad F(+\infty, L) = +\infty$ для всех $L > 0$.

Производственная функция называется линейно однородной, если

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0, \lambda \geq 0.$$

На практике чаще всего используются следующие конкретные производственные функции:

- Кобба — Дугласа:

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

где $A > 0, \alpha \in (0,1)$; эта производственная функция была предложена в 1899г. Ф. Уикстидом и впервые использована в 1929г. Ч. Коббом и П. Дугласом для моделирования реальной экономики (США);

- мультипликативная:

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K}L^{a_L}$$

где $A, \alpha_K, a_L > 0, a_K + a_L \leq 1$;

- Леонтьева:

$$F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{\alpha_K}, \frac{L}{a_L}\right\},$$

где $\alpha_K, a_L > 0$;

- линейная:

$$F(K, L) = c_K K + c_L L,$$

где $c_K, c_L > 0$;

- с постоянной эластичностью замены:

$$F(K, L) = A(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-p})^{-\text{ך}/\rho},$$

где $A > 0, \alpha \in (0,1), \text{ך} \in (0,1]\ \rho > -1$.

Несложно проверить, что данные функции удовлетворяет всем свойствам неоклассических производственных функций, а производственная функция Кобба — Дугласа является, кроме того, линейно-однородной. Предлагаем читателю самостоятельно провести необходимые выкладки.

В мультипликативной производственной функции параметр А называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при неизменных ресурсах К и L. и неизменных α_K, a_L, выпуск тем больше, чем больше А), параметр $\alpha_K \in (0,1)$ имеет смысл коэффициента эластичности выпуска по фондам (коэффициент эластичности выпуска по фондам показывает, на сколько процентов вырастет выпуск Х при увеличении фондов К на 1%:

$$e_X^K=\lim_{\Delta K\to 0}\frac{\Delta X/X}{\Delta K/K}=\frac{K}{X}\frac{\partial X}{\partial K}=\frac{K}{AK^{\alpha_K}L^{a_L}}\frac{\partial(AK^{\alpha_K}L^{a_L})}{\partial K}=\frac{\alpha AK^{\alpha_K-1}L^{a_L}}{AK^{\alpha_K-1}L^{a_L}}=\alpha_K;$$

аналогично определяется коэффициент эластичности выпуска по труду

$$e_X^L=\frac{L}{X}\frac{\partial X}{\partial L}=\alpha_L.$$

В производственной функции Кобба — Дугласа (которая является частным случаем мультипликативной производственной функции при $\alpha_K=\alpha,\ \ \alpha_L=1-\alpha$) параметр A также представляет собой коэффициент нейтрального технического прогресса, коэффициент эластичности выпуска по фондам равен α, а коэффициент эластичности выпуска по труду равен $1-\alpha$.

В случае двухфакторной производственной функции средние эффективности ресурсов — это средняя фондоотдача X/K и средняя производительность труда X/L, а предельные эффективности ресурсов — это предельная фондоотдача $\partial X/\partial K$ и предельная производительность труда $\partial X/\partial L$.

В случае мультипликативной производственной функции выпуск зависит от затрат фондов и труда как $X=AK^{\alpha_K}L^{a_L}$, средняя фондоотдача

$$\frac{X}{K}=\frac{AK^{\alpha_K}L^{a_L}}{K}=A\frac{L^{a_L}}{K^{1-\alpha_K}}$$

средняя производительность труда

$$\frac{X}{L}=\frac{AK^{\alpha_K}L^{a_L}}{L}=A\frac{K^{a_K}}{L^{1-\alpha_L}},$$

предельная фондоотдача

$$\frac{\partial X}{\partial K}=\frac{\partial(AK^{\alpha_K}L^{a_L})}{\partial K}=A\alpha_K K^{\alpha_K-1}L^{a_L}=\alpha_K A\frac{L^{a_L}}{K^{1-\alpha_K}}=\alpha_K\frac{X}{K},$$

предельная производительность труда

$$\frac{\partial X}{\partial L}=\frac{\partial(AK^{\alpha_K}L^{a_L})}{\partial L}=A\alpha_L K^{\alpha_K}L^{a_L-1}=\alpha_L A\frac{K^{a_K}}{L^{1-\alpha_L}}=\alpha_K\frac{X}{L},$$

т.е. предельные эффективности факторов производства пропорциональны средним эффективностям этих факторов.

Пусть затраты труда и капитала равны K и L, объем выпуска (в денежном выражении) определяется производственной функцией $X=F(K,L)$, а цены факторов производства (труда и капитала) составляют соответственно p_K, и p_L, тогда прибыль производителя будет равна

$$\Pi(K,L)=X-p_K K-p_L L=F(K,L)-p_K K-p_L L. \qquad (15.1.1)$$

Цены ресурсов определяются очевидным образом: цена труда — это просто заработная плата работника, а цена капитала равна такой денежной сумме, которую необходимо в единицу времени тратить на содержание единицы капитала (т.е. одной денежной единицы), т.е. цена капитала равна норме амортизации — величине амортизационных отчислений на 1 ден.ед. производственных фондов.

Если считать аксиомой производителя, что он стремится получить наибольшую прибыль, то математическая формулировка задачи производителя такова: требуется определить такую технологию (т.е. такие объемы затрат ресурсов), которые приносят максимальную прибыль:

$$\Pi(K,L) \to max, \quad K \geq 0, L \geq 0. \qquad (15.1.2)$$

(На самом деле, указанная аксиома может быть справедливой только для фирм, которые находятся в единоличном владении; если же у фирмы несколько собственников, то совершенно не обязательно, чтобы собственники ставили менеджерам задачу максимизации прибыли — скорее они захотят максимизировать не прибыль, а стоимость фирмы, но решение этой задачи выходит за рамки настоящей книги.)

Подставим в задаче (15.1.2) вместо прибыли $\Pi(K,L)$ ее выражение по формуле (15.1.1):

$$\Pi(K,L) = F(K,L) - p_K K - p_L L \to max, K \geq 0, L \geq 0.$$

Приравняем нулю частные производные прибыли по ресурсам:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(K,L)}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(K,L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial [F(K,L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial [F(K,L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - p_K = 0, \\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - p_L = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = p_K, \\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = p_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial K} = p_K, \\ \frac{\partial X}{\partial L} = p_L. \end{cases} \qquad (15.1.3)$$

Можно показать, что любая точка (K^*, L^*), удовлетворяющая условиям (15.1.3), обязательно будет точкой максимума прибыли, и при этом оптимальные затраты ресурсов K^* и L^* будут неотрицательными, т.е. условия (15.1.3) определяют оптимальное решение задачи производителя.

Приведем экономическую интерпретацию условий максимума прибыли производителя. В левых частях этих условий стоят предельные эффективности ресурсов, а в правых частях — цены ресурсов, поэтому можно интерпретировать условия (15.1.3) следующим образом: производитель достигает максимальной прибыли при таких затратах ресурсов K^* и L^*, что предельные эффективности ресурсов равны их ценам.

ПРИМЕР 1.2. Рассматривается фирма с мультипликативной производственной функцией. Известно, что для увеличения выпуска на a = 3% необходимо увеличить основные производственные фонды на b = 6% или увеличить численность работников на c = 9%. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в $K = 10^8$ ден. ед., всего в фирме занято $L = 10^8$ сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на $M = 10^4$ ден.ед. в мес. при средней заработной плате $\omega = 10^3$ ден. ед. в мес. Период амортизации основных производственных фондов составляет n = 12 мес. Требуется найти производственную функцию, рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

Решение. Мультипликативная производственная функция имеет вид

$$F(K,L) = AK^{\alpha_K}L^{a_L},$$

где параметры α_K и a_L, имеют смысл эластичностей выпуска соответственно по фондам и по труду. Учитывая это, можем найти

$$\alpha_K = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \alpha_L = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

т.е. выпуск фирмы определяется производственной функцией

$$X = AK^{1/2}L^{1/3}.$$

Параметр A найдем, подставив в эту формулу значения выпуска предприятия в денежном выражении $X = LM = 10^3 10^4 = 10^7$ ден. ед., капитала $K = 10^8$ ден. ед. и труда $L = 10^3$ чел.:

$$10^7 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3} \Leftrightarrow A = 100.$$

Таким образом, окончательно получаем производственную функцию

$$F(K,L) = 100K^{1/2}L^{1/3}.$$

Цена труда $p_L = \omega = 10^3$ ден. ед— это заработная плата, а цена капитала $p_K = 1/n = 1/12$ ден.ед. равна ежемесячным амортизационным отчислениям на содержание одной денежной единицы производственных фондов, поэтому прибыль фирмы при таких затратах труда и капитала равна [согласно (15.1.1)]

$$\Pi(K,L) = X - p_K K - p_L L = 10^7 - \frac{1}{12}10^8 - 10^3 10^3 = \frac{2}{3}\text{млн. ден. ед.}$$

Оптимальный размер фирмы задается условиями (15.1.3), состоящими в том, что предельные эффективности ресурсов должны быть в оптимальной точке равны ценам ресурсов. В данном случае предельная фондоотдача и предельная производительность труда равны соответственно

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 50K^{-1/2}L^{1/3}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3},$$

поэтому условия оптимального размера фирмы (15.1.3) принимают вид

$$\begin{cases} 50K^{-1/2}L^{1/3} = 1/12, \\ \dfrac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3} = 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = K^{1/2}, \\ K^{1/2} = 30L^{2/3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = 30L^{2/3}, \\ K = 900L^{4/3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K^* = 144000000, \\ L^* = 8000. \end{cases}$$

При этом выпуск фирмы составит

$$X^* = 100(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/3} = 100(144000000)^{1/2}(8000)^{1/3} = 24000000 \text{ ден. ед.},$$

а прибыль

$$\Pi(K,L) = X^* - p_K K^* - p_L L^* = 24 \cdot 10^6 - \frac{1}{12}144 \cdot 10^6 - 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3 = 4 \text{ млн. ден. ед.}$$

Замечаем, что оптимальный выбор затрат труда и капитала позволил увеличить прибыль в шесть раз!

Индивидуальные задания

Рассматривается фирма с мультипликативной производственной функцией. Известно, что для увеличения выпуска на a% необходимо увеличить основные производственные фонды на b% или увеличить численность работников на c%. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в K ден. ед., всего в фирме занято L сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на M ден. ед. в мес. при средней заработной плате ω ден. ед. в мес. Период амортизации основных производственных фондов составляет n мес. (параметры a, b, c, K, L, M, ω и n приведены для каждого варианта в табл. 2.1)

Требуется найти производственную функцию, рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

Таблица 2.1

№	Исходные данные								№	Исходные данные							
вар.	a	b	c	K	L	M	ω	n	вар.	a	b	c	K	L	M	ω	n
1	1	3	3	10^6	10^3	10^4	10^3	5	11	2	4	6	10^4	10^3	10^{11}	10^2	18
2	1	3	2	10^6	25	10^3	10^2	5	12	1	2	3	10^2	10^3	10^7	10	6
3	1	3	3	10^6	10^6	10^4	10	3	13	2	4	6	10^2	10^3	10^3	10^3	12
4	1	2	4	10^4	256	10^5	10^3	2	14	2	6	6	10^3	10^3	10^6	10^2	6
5	2	6	3	10^6	64	10^3	10^2	2	15	1	3	2	10^3	10^2	10^5	10	6
6	2	6	4	10^6	10^4	10^3	10	4	16	1	2	3	10^2	30^3	10^6	10^3	4
7	3	6	9	10^4	10^3	10^3	10^3	12	17	4	8	8	10^4	10^2	10^5	10^2	12
8	2	4	6	10^4	20^3	10^3	10	8	18	6	12	6	10^3	10^3	10^6	10^2	6
9	1	1	3	10^3	10^3	10^5	10^3	5	19	3	12	12	10^4	10^4	10^5	10	6
10	1	1	2	10^4	25	10^6	10^2	5	20	2	12	3	10^6	27	10^6	10^3	4
№	Исходные данные								№	Исходные данные							
вар.	a	b	c	K	L	M	ω	n	вар.	a	b	c	K	L	M	ω	n
21	1	1	3	10^4	10^3	10^6	10	3	29	8	12	8	10^3	10^2	10^5	10^2	12
22	2	2	4	10^4	25	10^4	10^3	2	30	6	12	24	10^4	10^4	10^5	10	8
23	2	2	5	10^4	2^5	10^7	10^2	2	31	6	18	12	10^3	10^4	10^6	10^2	6
24	5	5	10	10^2	10^4	10^7	10	4	32	6	18	12	10^3	10^2	10^5	10	6
25	6	6	9	10^3	10^3	10^9	10^3	12	33	2	6	3	10^3	10^3	10^6	10^3	4
26	4	4	6	10^6	10^3	10^5	10^2	18	34	8	16	12	10^4	10^3	10^5	10^2	12
27	2	2	3	10^3	10^3	10^7	10	6	35	5	10	20	10^4	10^4	10^5	10	8
28	4	8	6	10^4	10^3	10^4	10^3	12									

Лабораторная работа №3

Модель взаимодействия потребителей и производителей. Рыночное равновесие

Рассмотрим рынок n товаров с k участниками. Пусть вектор

$$x^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_3^j \end{pmatrix}$$

определяет начальные запасы товаров у j-го участника, а $u^j(x) = u^j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция полезности j-го участника ($j = 1,2, \dots, k$).

Предположим, что участники рынка согласны обмениваться товарами. Для этого они должны ввести некоторую денежную единицу и определить вектор рыночных цен $p = (p_1\, p_2\, \dots\, p_n)$.

Если на рынке будут установлены некоторые цены товаров: $p_1, p_2, \dots, p_n$ то начальное богатство каждого участника (до обмена) в денежном выражении определяется как

$$I_j = px^j = \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j, \;\; j = 1,2, \dots, k.$$

При этом суммарное предложение i-го товара на рынке будет равно суммарным запасам этого товара у всех участников:

$$Q_i^S = \sum_{j=1}^{n} x_i^j, \;\; i = 1,2, \dots, n.$$

Теперь можно для каждого участника поставить задачу потребителя и определить функции спроса участников рынка:

$$\tilde{x}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \widetilde{x_2}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \widetilde{x_3}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j) \\ \widetilde{x_2}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j) \\ \vdots \\ \widetilde{x_n}^j(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j) \end{pmatrix}, j = 1,2, \dots, k. \qquad (16.1.1)$$

Таким образом, суммарный спрос всех участников на 1-й товар будет равен

$$Q_i^D = \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^{\,j}\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right), \; i = 1,2,\dots,n.$$

Согласно закону Вальраса рыночное равновесие определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару:

$$Q_i^D = Q_i^S, i = 1,2,\dots,n$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^{\,j}\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \; i = 1,2,\dots,n.$$

Можно показать, что одно из уравнений данной системы обязательно является следствием остальных, поэтому цены $p_1, p_2, \dots, p_n$ определяются из этой системы с точностью до коэффициента пропорциональности. Это очевидно: ведь цены зависят от выбора денежной единицы.

Таким образом, можно определить равновесное конечное распределение товаров между участниками рынка, подставив в функции спроса (16.1.1) равновесные цены, определенные из системы (16.1.2).

ПРИМЕР 16.1.1. Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$, а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Решение. Пусть цены товаров на рынке определяются вектором $p = (p_1\, p_2\;\, p_3)$., тогда начальное богатство первого участника составит

$$I_1 = px^1 = p_1 x_1^1 + p_2\, x_2^1 + p_3\, x_3^1 = p_1 \; + 2p_2 \; + 3p_3\,.$$

Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четвертого участников рынка:

$$I_2 = px^2 = 2p_1 + 2p_2 \; + 2p_3\,, I_3 = px^3 = 3p_1 + 4p_2 \; + 5p_3\,, I_4 = px^4 = p_1 + p_2 \; + 6p_3$$

Функции спроса участников одинаковы, так как функция полезности у них одна и та же. Для данной функции полезности функция спроса (14.1.12):

$$\tilde{x}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} I_j/(3p_1) \\ I_j/(3p_2) \\ I_j/(3p_3) \end{pmatrix}, j = 1,2,3,4,$$

была определена в примере 1.

Суммарный спрос на первый товар составляет

$$Q_1^D = \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} =$$

$$= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} =$$

$$= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1}$$

аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары:

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}$$

Суммарное предложение первого товара равно

$$Q_1^S = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$$

$$Q_2^S = x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2 + 2 + 4 + 1 = 9$$

$$Q_3^S = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3 + 2 + 5 + 6 = 16$$

Запишем условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара:

$$\begin{cases} Q_1^D = Q_1^S \\ Q_2^D = Q_2^S \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1} = 7 \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2} = 9 \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 21p_1 \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 27p_2 \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 48p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 0 \\ 7p_1 - 18p_2 + 16p_3 = 0 \\ 7p_1 + 9p_2 - 32p_3 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 16.1.1.

Таким образом, общее решение системы для определения равновесных цен таково:

$$p_1 = \frac{16}{9}\alpha, p_2 = \frac{16}{7}\alpha, p_3 = \alpha$$

где, очевидно, цена третьего товара $\alpha > 0$. Ясно, что цены определяются относительно, поэтому для удобства положим $p_3 = \alpha$ =63 ден. ед., тогда

$$p_1 = \frac{16}{9} \cdot 63 = 112 \text{ ден. ед.} \qquad p_2 = \frac{16}{7} \cdot 63 = 144 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 2

-14	**9**	**16**	**0**
7	**-18**	**16**	**0**
-14	**9**	**-32**	**0**
0	**-27**	**48**	**0**
1	**-18/7**	**16/7**	**0**
0	**27**	**-48**	**0**
0	**1**	**-16/9**	**0**
1	**0**	**-16/7**	**0**
0	**0**	**16**	**0**

При таких ценах начальные запасы участников рынка определяют их богатство:

$I_1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3$=112+2*144+3*63=589,

$I_2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$=2*112+2*144+2*63=638,

$I_3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3$=3*112+4*144+5*63=1227,

$I_4 = p_1 + p_2 + 6p_3$=112+144+6*63=634.

Теперь можно определить равновесное распределение товаров:

$$x^{-1}(p_1, p_3 p3, I_1) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{589}{3*112} \\ \frac{589}{3*144} \\ \frac{589}{3*63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{589}{336} \\ \frac{589}{432} \\ \frac{589}{189} \end{pmatrix}$$

$$x^{-2}(p_1, p_{2,}, p_{3,} I_2) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{638}{336} \\ \frac{638}{432} \\ \frac{638}{189} \end{pmatrix}$$

$$x^{-3}(p_1, p_{2,}, p_{3,} I_3) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1227}{336} \\ \frac{1227}{432} \\ \frac{1227}{189} \end{pmatrix}$$

$$x^{-4}(p_1, p_{2,}, p_{3,} I_4) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{634}{336} \\ \frac{634}{432} \\ \frac{634}{189} \end{pmatrix}$$

Индивидуальные задания

Рассматривается рынок трех товаров. Четыре участника рынка обладают одинаковыми функциями полезности и (х,, х,, х,) (такими же, как в модели поведения потребителя, они приведены для каждого варианта в табл. 1), начальные запасы товаров у участников рынка составляют соответственно

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix},$$

(векторы х' — х‘ приведены для каждого варианта в табл. 3).

Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка.

Таблица 3

№ вар.	Исходные данные				№ вар.	Исходные данные				№ вар.	Исходные данные			
	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$		$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$		$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
1	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\4\\6\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$					