МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«16» 05 ________ 2024 г.

ПРАКТИКУМ. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЗАГРУЖЕННОСТИ ЛИНИЙ СВЯЗИ

Методические указания по выполнению практических работ
для студентов направления подготовки 11.03.02
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Методы прогнозирования загруженности линий связи»

Курск 2024

УДК 004.7

Составитель:А.В. Хмелевская

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры *И.Г. Бабанин*

Практикум. Методы прогнозирования загруженности линий связи: методические указания по выполнению практических работ для студентов направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»по дисциплине «Методы прогнозирования загруженности линий связи» / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост.: А.В. Хмелевская. – Курск, 2024. – 85 с.

Методические указания содержат сведения о технике безопасности на рабочем месте, порядке выполнения практических работ, рекомендации по подготовке, оформлению и защите практических работ, а также критерии оценивания защиты отчета.

Предназначены для студентов направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»по дисциплине «Методы прогнозирования загруженности линий связи»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 16.05.2024. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л.4,94. Уч.- изд. л.4,47. Тираж 100 экз. Заказ 385. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

ИНСТРУКЦИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

Общие положения

Настоящая инструкция предназначена для студентов и работников, выполняющих работы на персональном компьютере и на сетевом оборудовании (коммутаторы, маршрутизаторы, межсетевые экраны и т.д.).

К выполнению работ допускаются лица:

- не моложе 16 лет;
- прошедшие медицинский осмотр;
- прошедшие вводный инструктаж по охране труда, а также инструктаж по охране труда на рабочем месте;
- прошедшие обучение безопасным приемам труда на рабочем месте по выполняемой работе.

Работник обязан:

- выполнять правила внутреннего трудового распорядка, установленные в положениях и инструкциях, утвержденных ректором ЮЗГУ, или его заместителями;
- выполнять требования настоящей инструкции;
- сообщать руководителю работ о неисправностях, при которых невозможно безопасное производство работ;
- не допускать присутствия на рабочем месте посторонних лиц;
- уметь оказывать первую помощь и при необходимости оказывать ее пострадавшим при несчастных случаях на производстве, по возможности сохранив обстановку на месте происшествия без изменения и сообщив о случившемся руководителю;
- выполнять требования противопожарной безопасности не разводить открытый огонь без специального на то разрешения руководителя работ;
- периодически проходить медицинский осмотр в сроки, предусмотренные для данной профессии.

Работник должен знать опасные и вредные производственные факторы, присутствующие на данном рабочем месте:

- возможность травмирования электрическим током при отсутствии или неисправности заземляющих устройств;
- вредное воздействие монитора компьютера при его неправильной установке или неисправности;

- возможность возникновения заболеваний при неправильном расположении монитора, клавиатуры, стула и стола;

- вредное воздействие паров, газов и аэрозолей, выделяющихся при работе копировальной и печатающей оргтехники в непроветриваемых помещениях.

Работник при выполнении любой работы должен обладать здоровым чувством опасности и руководствоваться здравым смыслом. При отсутствии данных качеств он к самостоятельной работе не допускается.

Требования охраны труда перед началом работы

Перед началом работы работник обязан:

- получить от руководителя работ инструктаж о безопасных методах, приемах и последовательности выполнения производственного задания;
- привести в порядок одежду, застегнуть на все пуговицы, чтобы не было свисающих концов, уложить волосы, чтобы они не закрывали лицо и глаза;
- привести рабочее место в безопасное состояние;
- запрещается носить обувь на чрезмерно высоких каблуках;

Перед включением компьютера или сетевого оборудования убедиться в исправности электрических проводов, штепсельных вилок и розеток. Вилки и розетки должны соответствовать Евростандарту. Отличительной особенностью этих вилок и розеток является наличие третьего провода, обеспечивающего заземление компьютера или другого прибора. При отсутствии третьего заземляющего провода заземление должно быть выполнено обычным способом с применением заземляющего проводника и контура заземления;

Убедиться, что корпус включаемого оборудования не поврежден, что на нем не находятся предметы, бумага и т.п. Вентиляционные отверстия в корпусе включаемого оборудования не должны быть закрыты занавесками, завалены бумагой, заклеены липкой лентой или перекрыты каким-либо другим способом.

Требования охраны труда во время работы

Запрещается во время работы пить какие-либо напитки, принимать пищу;

Запрещается ставить на рабочий стол любые жидкости в любой таре (упаковке или в чашках);

Помещения для эксплуатации компьютеров, сетевого оборудования должны иметь естественное и искусственное освещение, естественную вентиляцию и соответствовать требованиям действующих норм и правил. Запрещается размещать рабочие места вблизи силовых электрических кабелей и вводов трансформаторов, технологического оборудования, создающего помехи в работе и отрицательно влияющие на здоровье операторов;

Окна в помещениях, где установлены компьютеры должны быть ориентированы на север и северо-восток. Оконные проемы оборудуются регулируемыми устройствами типа жалюзи или занавесками;

Площадь на одно рабочее место пользователей компьютера должна составлятьне менее 6 $м^2$ при рядном и центральном расположении, при расположении по периметру помещения – 4 $м^2$. При использовании компьютера без вспомогательных устройств (принтер, сканер и т.п.) с продолжительностью работы менее четырех часов в день допускается минимальная площадь на одно рабочее место 5 $м^2$;

Полимерные материалы, используемые для внутренней отделки интерьера помещений с ПК, должны подвергаться санитарно-эпидемиологической экспертизе. Поверхность пола должна обладать антистатическими свойствами, быть ровной. В помещениях ежедневно проводится влажная уборка. Запрещается использование удлинителей, фильтров, тройников и т.п., не имеющих специальных заземляющих контактов;

Экран видеомонитора должен находится от глаз оператора на расстоянии 600-700 мм, минимально допустимое расстояние 500 мм;

Продолжительность непрерывной работы с ПК должна быть не более 2 часов.

Требования охраны труда по окончании работы

По окончании работы работник обязан выполнить следующее:

- привести в порядок рабочее место;
- убрать инструмент и приспособления в специально отведенные для него места хранения;
- обо всех замеченных неисправностях и отклонениях от нормального состояния сообщить руководителю работ;
- привести рабочее место в соответствие с требованиями пожарной безопасности.

Действие при аварии, пожаре, травме

В случае возникновения аварии или ситуации, в которой возможно возникновение аварии немедленно прекратить работу, предпринять меры к собственной безопасности и безопасности других рабочих, сообщить о случившемся руководителю работ.

В случае возникновения пожара немедленно прекратить работу, сообщить в пожарную часть по телефону 01, своему руководителю работ и приступить к тушению огня имеющимися средствами.

В случае получения травмы обратиться в медпункт, сохранить по возможности место травмирования в том состоянии, в котором оно было на момент травмирования, доложить своему руководителю работ лично или через товарищей по работе.

Ответственность за нарушение инструкции

Каждый работник ЮЗГУ в зависимости от тяжести последствий несет дисциплинарную, административную или уголовную ответственность за несоблюдение настоящей инструкции, а также прочих положений и инструкций, утвержденных ректором ЮЗГУ или его заместителями.

Руководители подразделений, заведующий кафедрой, начальники отделов и служб несут ответственность за действия своих подчиненных, которые привели или могли привести к авариям и травмам согласно действующему в РФ законодательству в зависимости от тяжести последствий в дисциплинарном, административном или уголовном порядке.

Администрация ЮЗГУ вправе взыскать с виновных убытки, понесенные предприятием в результате ликвидации аварии, при возмещении ущерба работникам по временной или постоянной утрате трудоспособности в соответствии с действующим законодательством.

Практическая работа №1 «Пуассоновский поток»

Цель занятия:

изучение пуассоновского потока и методов аппроксимации теоретическим распределением данных наблюдения за входящим потоком и потоком обслуживания в системах массового обслуживания.

Задачи занятия:

1) провести анализ данных наблюдения входящего потока и потока обслуживания;

2) определить параметры потока (плотность и среднее время интервала поступления или обслуживания заявок);

3) дать заключение о возможности отнесения потока к пуассоновскому потоку;

4) для каждого потока построить диаграммы с теоретическими и экспериментальными значениями. Для входящего потока строится гистограмма вероятности появления определенного числа требований в единицу времени. Для выходящего потока (потока обслуживания) – график функции распределения длительности обслуживания.

Планируемые результаты обучения:

- формирование знаний о пуассоновском потоке, его свойствах и характеристиках;
- формирование навыков анализа данных наблюдения входящего потока и потока обслуживания;

Материально-техническое оборудование и материалы:

1) Персональный компьютер с операционной системой;
2) Табличный редактор Microsoft Excel.

План проведения лабораторного занятия

Лабораторному занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Рекомендуемая литература для подготовки к лабораторному занятию:

1. Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И.Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

2. Козликин, В. И. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентов специальности 190601.68 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направлений подготовки 190600.62 «Эксплуатация транспортнотехнологических машин и комплексов» и 190700.62 «Технология транспортных процессов»] / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

3. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон.спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос.ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с.

4. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентовтехн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ;Юго-Зап. гос. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (166 595 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2015. – 175с.

5 Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В.В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с.

6 Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] :учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.

7 Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст]/ А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

8 Кирпичников, А. П. Прикладная теория массового обслуживания [Текст] / А. П.Кирпичников. - Казань : Казанский государственный университет, 2008. - 118 с

9 Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова [Текст] / пер. с англ. С. М. Пригарина. - 2-е изд. - Новосибирск : ГЕО, 2008. -440 с.

Краткая теоретическая справка для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию:

Поток требований называют **однородным**, если:

- все требования потока обслуживаются в системе массового обслуживания одинаково;
- рассмотрение требований (событий) потока, которые по своей природе могут быть различными, ограничивается рассмотрением моментов времени их поступления.

Поток называется **регулярным**, если события в потоке следуют один за другим через интервалы времени одинаковой длительности.

Функция *f(x)* плотности распределения вероятности случайной величины *T*, обозначающей интервал времени между событиями, для регулярного потока имеет вид:

$$f(x) = \delta\left(x - \bar{t}\right)$$

где δ - дельта функция, $\bar{t}$ - математическое ожидание случайной величины *T*.

Дисперсия интервала между событиями регулярного потока (моментами поступления требований) *D[T]* равна 0, а интенсивность наступления событий в потоке (среднее число требований в единицу времени) λ равна $1/\bar{t}$.

Поток называется **случайным**, если события в потоке следуют один за другим через интервалы времени случайной длительности.

Случайный поток может быть описан как случайный вектор, который, в свою очередь, может быть задан одним из двух способов:

1) Функцией распределения моментов наступления событий $T_1, T_2, ..., T_n$

$$F\left(t_1, t_2, ..., t_n\right) = P\left(T_1 < t_1, T_2 < t_2, ..., T_n < t_n\right)$$

где t_i – значение моментов наступления $T_i (i=1,n)$,

2) Функцией распределения интервалов между наступлением последовательных событий $\tau_1, \tau_2, ... \tau_n$:

$$F(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) = P(\tau_1 < \theta_1, \tau_2 < \theta_2, ..., \tau_n < \theta_n),$$

где θ_i - значения интервалов между событиями $\tau_i (i=1,n)$,

В последнем случае моменты наступления событий могут при необходимости быть найдены из рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered} t_1 = t_0 + \theta_1, \\ t_2 = t_1 + \theta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_n = t_{n-1} + \theta_n, \end{gathered}$$

где t_0 - момент наступления первого события потока.

Поток называется **стационарным**, если вероятность попадания того или иного числа событий на элементарный участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси t расположен этот участок.

Поток событий называется потоком **без последействия**, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами - стационарностью, отсутствием последействия, ординарностью - называется **простейшим**, или **стационарнымпуассоновским** потоком.

Пуассоновский поток событий тесно связан с известным из теории вероятностей распределением Пуассона: число событий потока, попадающих на временной интервал некоторой величины, распределено по закону Пуассона.

Если на временной оси t, где наблюдается поток событий, выделить некоторый участок времени длины τ, начинающийся в момент t_0 и заканчивающийся в момент $t_0 + \tau$, то нетрудно доказать, что вероятность попадания на этот участок ровно m событий выражается формулой:

$$P_m = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

где a — среднее число событий, приходящееся на участок τ;

e — основание натуральных логарифмов (2,71828…),

$$m! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m, & m \geq 1 \\ 1, & m = 1 \end{cases}$$

Для стационарного (простейшего) пуассоновского потока величина a равна интенсивности потока λ, умноженной на длину интервала:

$$a = \lambda \cdot t$$

где **интенсивность, или плотность потока** λ есть среднее число событий, приходящихся на единичный временной интервал. В зависимости от физической природы изучаемой системы интенсивность может иметь различную размерность, например, чел/мин, руб/день, кг/час, запросов/сек, документов/сутки, отправлений/сутки и т.д.

Функция распределения

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

представляющая собой по определению вероятность того, что случайная величина T (интервал времени между событиями) не превысит значения t, имеет для пуассоновского потока следующий вид:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

Такой закон распределения называется **показательным** (или **экспоненциальным**) с плотностью λ. Величина λ называется также **параметром** показательного закона.

Математическое ожидание случайной величины T равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$

а дисперсия составляет

$$D[T]=\frac{1}{\lambda^2}$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины T находится как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_T=\sqrt{D[T]}=\frac{1}{\lambda}$$

Как нетрудно видеть, математическое ожидание величины T равно ее среднеквадратическому отклонению, что является характерной особенностью экспоненциального распределения.

Таким образом, вероятность появления m событий в заданном промежутке времени описывается **пуассоновским** распределением, а вероятность того, что временные интервалы между событиями потока не превзойдут некоторого наперед заданного значения, описывается **экспоненциальным** распределением. Это различные описания одного и того же стохастического процесса.

Пример

По шоссе мимо наблюдателя движется в одном направлении простейший поток машин. Известно, что вероятность отсутствия машин в течение 5 минут равна 0,5. Требуется найти вероятность того, что за 10 минут мимо наблюдателя пройдет не более двух машин.

Решение. Примем за единицу времени 5 мин. В задаче требуется найти

$$P(m\geq 2)=\sum_{i=0}^{2}P(m=i)=\frac{(2\lambda)^0}{0!}e^{-2\lambda}+\frac{(2\lambda)^1}{1!}e^{-2\lambda}+\frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-2\lambda}=\left(1+2\lambda+2\lambda^2\right)e^{-2\lambda}$$

По условию задачи

$$P(m=0)=\frac{(\lambda)^2}{1!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}=0{,}5$$

Откуда

$$\lambda = -\ln 0,5 = \ln 2 \approx 0,693$$

и, подставляя в выражение для $P(m \le 2)$*, получаем*

$$P(m \le 2) \approx 0,837$$

Весьма распространенными на практике являются случаи, когда нескольких простейших потоков соединяются в один или, наоборот, из одного простейшего потока образуются несколько. При **слиянии (объединении, суперпозиции)** n независимых простейших потоков с интенсивностями $\lambda 1,...,\lambda n$ образуется простейший поток, имеющий интенсивность $\lambda=\lambda 1+...+\lambda n$.

При **ветвлении (разъединении)** потока интенсивности λ на n направлений так, что вероятности перехода заявки в каждое из направлений равны $p_1, p_2, ..., p_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, образуется n простейших потоков с интенсивностями $\lambda_{p1},..., \lambda_{pn}$ соответственно.

Любое исследование системы массового обслуживания начинается с изучения того, что необходимо обслуживать, иначе говоря, с изучения характеристик входящего потока заявок. В нетривиальных случаях требуется также обследование самой системы массового обслуживания с целью нахождения характеристик обслуживания, (потока обслуживания). Решение задач анализа и проектирования систем массового обслуживания намного упрощается в случаях, когда входящий поток и поток обслуживания являются простейшими (пуассоновскими).

Алгоритм проведения эксперимента:

Часть 1.

Предположим, что проводилось наблюдение за потоком посетителей в отделении банка в течение 10 дней его работы. Результаты почасового наблюдения представлены в ниже в следующей таблице:

Часы Дни	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Определим интенсивность входящего потока покупателей за час работы отделения и, используя критерий Пирсона с уровнем значимости α=0,05, подвергнем проверке гипотезу о том, что поток описывается пуассоновским законом распределения.

1) Сгруппируем данные по числу клиентов банка *k*, посетивших отделение в течение часа, а результаты представим в виде Excel - таблицы:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1

Для автоматизированного подсчета частот *fk* по данным, представленным в исходной таблице, следует использовать функцию СЧЕТЕСЛИ приложения Excel.

2) Находим интенсивность потока λ:

$$\lambda = \bar{k} = \frac{\sum_{k=1}^{8} k \cdot f_k}{\sum_{k=1}^{8} f_k} = \frac{279}{80} = 3,49$$

В приложении Excel удобно вычислять интенсивность, предварительно подсчитав в ячейках отдельной строки входящие в числитель выражения для λ произведения $k \cdot f_k$

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$k \cdot f_k$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**

3)По формуле

$$f_k^T = N\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } N = \sum_{k=1}^{8} f_k = 80$$

находим и заносим в строку f^T теоретические значения частот:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$k \cdot f_k$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**
f^T	8.53	14.88	17.29	15.08	10.52	6.11	3.05	1.33	0.51	

4)Вычислим и занесем в строку таблицы

$$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$$

значения, стоящие в числителе выражения под знаком суммы в формуле

$$\chi^2_{набл} = \sum_{k=1}^{8}\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$$

для наблюдаемого значения критерия Пирсона:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
f_k	3	19	23	21	6	4	2	1	1	**80**
$k \cdot f_k$	3	38	69	84	30	24	14	8	9	**279**
f^T	8.53	14.88	17.29	15.08	10.52	6.11	3.05	1.33	0.51	
$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$	3.59	1.14	1.88	2.33	1.94	0.73	0.36	0.08	0.46	**12,51**

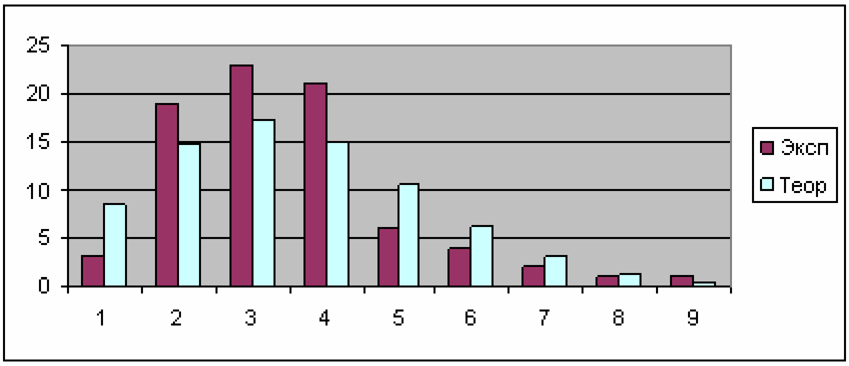
В результате получаем наблюдаемое значение $\chi^2_{набл} = 12,51$

5)По заданному уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы $v = n$-2, где n - число групп в ряду (в нашем случае n=9) по таблице значений критических точек χ^2 распределения находим

$$\chi^2_{кр}(\alpha,\upsilon) = \chi^2_{кр}(0{,}005{,}7) = 14{,}07$$

6)Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{табл}$ (12,51 < 14,07) не отвергаем гипотезу о том, что входящий поток описывается пуассоновским законом распределения с интенсивностью λ=3,49 час$^{-1}$.

Вид теоретической и экспериментальной зависимостей для рассмотренного примера показан на построенной средствами Excel диаграмме:



Часть 2.

Предположим, что проводилось наблюдение за временем обслуживания клиентов отделения банка кассиром, в результате чего получена таблица для частот интервалов следующего вида:

	tмин	*tмакс*	*f*
1	0	5	27
2	5	10	23
3	10	15	18
4	15	20	11
5	20	25	8
6	25	30	3

Определим среднее время $\bar{t}_s$ и интенсивность μ обслуживания клиентов банка, после чего обоснуем с уровнем значимости α=0,05 гипотезу о том, что время $\bar{t}_s$ распределено по показательному закону, используя для этого критерий Пирсона.

1)Находим среднее значение каждого временного интервала по формуле:

$$\overline{t_k} = \frac{t_k^{\min} + t_k^{\max}}{2}, k = 1, 2, ..., 6$$

Значения заносим в столбец, добавляемый к таблице справа:

	tмин	tмакс	f	tср
1	0	5	27	2.5
2	5	10	23	7.5
3	10	15	18	12.5
4	15	20	11	17.5
5	20	25	8	22.5
6	25	30	3	27.5

2)Находим среднее время $\bar{t}_s$

$$\bar{t}_s = \frac{\sum_{k=1}^{6} \bar{t}_k \cdot f_k}{\sum_{k=1}^{6} f_k} = 10,22 \text{ мин}$$

и интенсивность μ обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_s} = 0,10 \text{ мин}^{-1}$$

В приложении Excel среднее время удобно вычислять, предварительно подсчитав в ячейках отдельного столбца входящие в выражение для среднего времени произведения $k \cdot f_k$:

	tмин	tмакс	f	$\bar{t}_k$	$k \cdot f_k$
1	0	5	27	2.5	67.5
2	5	10	23	7.5	173
3	10	15	18	12.5	225
4	15	20	11	17.5	193
5	20	25	8	22.5	180
6	25	30	3	27.5	82.5
Σ			90		

3)По формуле

$$f_k^T = N\left(e^{-\mu \cdot t_k^{\min}} - e^{-\mu \cdot t_k^{\max}}\right), \text{ где } N = \sum_{k=1}^{6} f_k = 90$$

находим теоретические частоты:

	tмин	*tмакс*	f	$\bar{t}_k$	$k \cdot f_k$	f^T
1	0	5	27	2.5	67.5	34.82
2	5	10	23	7.5	173	21.35
3	10	15	18	12.5	225	13.09
4	15	20	11	17.5	193	8.03
5	20	25	8	22.5	180	4.92
6	25	30	3	27.5	82.5	3.02
Σ			90			

7)Вычислим и занесем в отдельный столбец таблицы значения

$$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$$

входящие в выражение под знаком суммы в формуле

$$\chi^2_{набл} = \sum_{k=1}^{6} \frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$$

для наблюдаемого значения критерия Пирсона:

	tмин	*tмакс*	f	*tср*	f^T	$\frac{\left(f_k - f_k^T\right)^2}{f_k^T}$
1	0	5	27	2.5	67.5	34.82
2	5	10	23	7.5	173	21.35
3	10	15	18	12.5	225	13.09
4	15	20	11	17.5	193	8.03
5	20	25	8	22.5	180	4.92
6	25	30	3	27.5	82.5	3.02
Σ			90			6.75

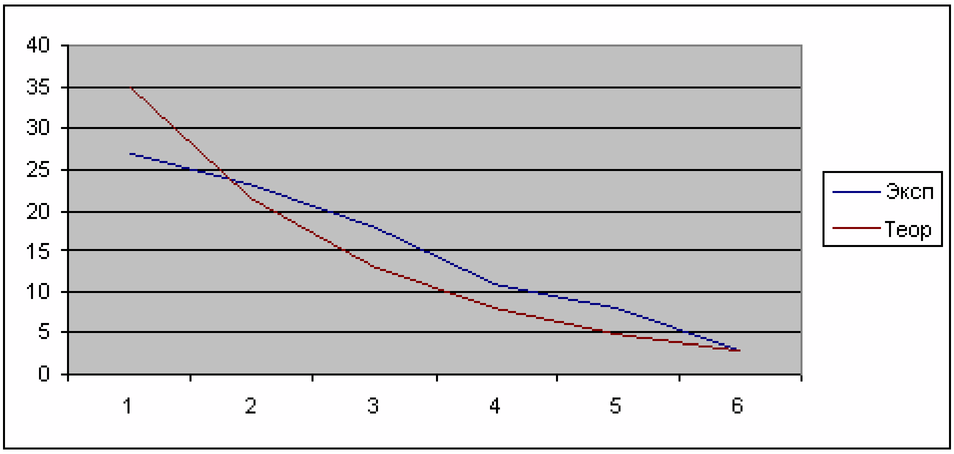
В результате получаем $\chi^2_{набл} = 6{,}75$.

4)По заданному уравнению значимости α=0,05 и числу степеней свободы $v = n\text{-}2$, где n - число групп в ряду (в нашем случае n=6) в таблице значений критических точек χ^2 распределения находим

$$\chi^2_{кр}(\alpha,\upsilon) = \chi^2_{кр}(0{,}005,7) = 9{,}49$$

5)Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{табл}$ (6,75 < 9,49) не отвергаем гипотезу о том, что время обслуживания клиентов описывается экспоненциальным законом распределения с интенсивностью $\mu = 0{,}10$ мин$^{-1}$.

Вид теоретической и экспериментальной зависимостей для рассмотренного примера показан на диаграмме:



Примерные вопросы к собеседованию, к защите отчета по выполненной лабораторной работы:

1)Что такое пуассоновский поток?

2)Как записывается и что позволяет найти формула Пуассона?

3)Как называется и что означает параметр пуассоновского закона?

4)Какому закону распределения подчиняются интервалы между поступлением отдельных заявок потока?

5)Как найти вероятность того, что в течение определенного интервала поступит не более определенного числа требований?

6)Чему равно математическое ожидание интервала времени между событиями в пуассоновском потоке?

7)Чему равно среднеквадратическое отклонение интервала времени между событиями в пуассоновском потоке?

8)В каких целях проводится аппроксимация экспериментальных данных относительно потока заявок и времени обслуживания в системе массового обслуживания теоретической зависимостью?

9)Из каких основных шагов состоит построение теоретической зависимости?

10) Зачем нужно проводить оценку статистической значимости результата?

11) Что будет являться результатом слияния двух пуассоновских потоков?

12) Какие потоки получаются при ветвлении пуассоновского потока на несколько потоков?

Варианты заданий:

Входящий поток.

Вариант №1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	5	4	3	5	5	3	7
2	7	4	3	3	2	4	5	5
3	7	3	1	5	8	5	6	3
4	2	7	4	5	6	3	2	3
5	5	2	5	2	1	3	2	4
6	4	4	2	2	4	4	2	1
7	3	4	5	4	1	5	2	4
8	5	1	5	7	3	4	5	5
9	7	4	3	4	7	4	4	3
10	3	5	5	2	4	3	3	5

Вариант №2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	6	3	5	11	6	4
2	3	4	5	4	3	8	4	2
3	2	3	4	5	4	5	6	5
4	4	5	3	10	5	3	4	2
5	3	2	9	5	4	4	5	3
6	5	3	5	12	5	3	2	7
7	2	5	8	4	7	5	6	4

Вариант №3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	7	3	5	11	6	4
2	3	5	5	4	10	8	4	2
3	2	4	4	5	4	5	6	5
4	5	5	3	10	5	3	4	2
5	3	2	8	5	4	4	5	3
6	5	3	5	11	5	4	2	7
7	2	5	8	4	7	5	6	4
8	1	4	8	9	7	10	6	5
9	3	5	2	4	8	5	6	4

Вариант №4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	8	3	3	7	5	4
2	5	3	5	4	9	5	4	2
3	4	2	3	5	4	4	6	5
4	5	5	4	10	5	3	4	2
5	2	3	4	5	4	8	5	3
6	3	5	5	11	5	5	2	7
7	5	2	10	4	7	8	6	4
8	4	1	11	9	7	8	6	5

Вариант №5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	5	1	1	2	2
2	0	1	1	1	0	0	1	1
3	1	3	1	2	0	1	1	2
4	1	0	3	1	0	1	3	4
5	1	1	2	1	2	6	1	1
6	0	1	2	1	2	0	1	1
7	0	0	4	1	0	1	3	4

Вариант №6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	1	2	2	0	5
2	1	1	1	1	0	1	2	1
3	3	1	7	2	5	1	0	1
4	1	1	1	1	0	1	2	2
5	1	3	3	1	2	2	2	2
6	4	4	2	1	3	2	2	1
7	1	1	2	1	0	0	3	5

Вариант №7

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	2	0	2	2	4	2	1
2	2	3	3	2	1	2	1	4
3	1	2	1	1	1	5	4	1
4	3	2	2	1	2	2	0	1
5	1	4	2	2	0	1	0	2
6	2	7	2	3	1	0	2	6
7	1	6	1	1	2	2	1	1
8	3	3	3	1	2	0	2	2

Вариант №8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	4	1	3	2	4	5
2	2	0	2	3	3	2	1	2
3	2	5	4	0	5	0	1	2
4	6	4	1	3	6	5	3	4
5	8	3	3	2	3	4	0	7
6	1	2	3	4	3	3	0	2
7	2	3	4	7	0	2	2	2
8	4	1	3	5	0	4	3	3

Вариант №9

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	0	1	5	2
2	3	7	3	4	2	7	3	3
3	2	2	3	6	3	4	3	5
4	5	4	4	2	6	5	6	2
5	4	2	1	6	2	3	1	5
6	3	1	3	6	6	5	3	2
7	4	3	5	2	5	3	5	1
8	7	3	8	3	4	8	4	2

Вариант №10

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	0	1	5	2
2	3	7	3	4	2	7	3	3
3	2	2	3	6	3	4	3	5
4	5	4	4	2	6	5	6	2
5	4	2	1	6	2	3	1	5
6	3	1	3	6	6	5	3	2
7	4	3	5	2	5	3	5	1
8	7	3	8	3	4	8	4	2

Вариант №11

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	2	4	4	4	5	2	6
2	1	1	3	4	3	3	3	4
3	0	1	6	2	3	3	2	3
4	4	1	5	4	2	5	2	2
5	4	1	4	4	3	4	3	4
6	4	4	3	3	2	3	3	3
7	1	3	6	2	2	1	3	2
8	3	2	2	3	1	2	2	3

Вариант №12

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	4	5	1	2	7	2
2	1	2	3	2	2	5	1	0
3	2	0	2	3	2	4	1	6
4	0	4	2	4	6	2	1	1
5	2	2	2	4	1	5	2	1
6	4	1	1	2	4	2	1	3
7	4	2	3	1	2	2	2	1
8	0	1	1	2	1	0	2	1

Вариант №13

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	4	5	2	3	5	1
2	2	5	7	1	1	3	1	5
3	2	1	6	1	4	1	4	1
4	3	2	4	1	1	1	3	2
5	5	2	5	4	1	1	2	3
6	2	3	5	3	2	2	6	2
7	1	5	1	2	0	3	1	0
8	1	3	1	3	3	2	2	2

Вариант №14

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	4	3	1	2	2
2	2	3	1	1	3	1	2	3
3	2	2	3	3	4	2	1	2
4	2	5	1	0	1	1	5	1
5	2	2	0	2	2	2	2	2
6	1	3	3	1	0	0	0	1
7	1	1	3	1	0	0	4	4
8	1	2	2	2	3	3	2	2

Вариант №15

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	3	2	2	2	0
2	2	2	3	1	3	0	1	3
3	3	1	5	3	0	1	0	5
4	1	2	1	2	1	3	3	1
5	2	3	1	5	3	5	3	0
6	1	4	1	1	3	3	2	1
7	2	1	3	2	1	4	2	3
8	3	2	2	1	1	0	3	2

Вариант №16

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	3	5	4	2	5	2
2	2	0	2	2	2	1	2	1
3	1	3	1	0	1	2	5	2
4	2	2	0	4	1	1	1	2
5	1	0	3	1	3	2	1	0
6	1	3	2	4	4	2	2	0
7	2	3	2	3	5	4	0	3
8	5	2	1	2	3	6	5	1

Вариант №17

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	1	2	2	4	3	2
2	0	3	2	2	1	3	3	1
3	3	2	1	0	2	0	3	1
4	6	0	1	2	2	0	0	1
5	0	1	2	1	2	3	0	2
6	0	1	2	1	2	2	2	0
7	1	4	1	1	0	1	1	1
8	6	3	3	3	2	3	2	0

Вариант №18

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	6	3	3	1	3	2	1
2	3	1	5	4	1	4	2	1
3	1	4	1	2	2	4	1	0
4	1	2	3	2	0	2	1	2
5	0	2	2	1	3	4	2	2
6	2	3	3	2	2	2	7	4
7	2	1	3	2	4	2	5	1
8	1	1	1	8	6	1	3	2

Вариант №19

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	0	3	3	2	4	4
2	3	2	2	6	6	0	2	1
3	2	2	6	3	0	2	0	4
4	2	3	4	1	4	1	2	2
5	3	2	1	3	2	0	5	4
6	3	2	2	3	2	0	5	1
7	2	4	3	2	4	4	7	3
8	2	3	0	2	8	3	2	1

Вариант №20

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3	5	3	5	3	3	3
2	3	4	3	2	4	1	5	2
3	1	4	4	2	2	4	4	4
4	2	2	4	2	2	1	3	2
5	1	4	3	1	2	3	2	3
6	2	3	4	3	4	4	3	4
7	2	2	2	3	0	5	3	4
8	6	3	6	4	5	3	4	3

Вариант №21

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	3	5	3	5	3	4	1
2	2	3	4	3	4	3	2	5
3	6	5	2	2	2	1	5	7
4	5	7	5	3	2	5	5	3
5	0	3	9	4	6	3	1	7
6	1	2	5	7	2	3	4	3
7	5	5	3	3	3	4	4	8
8	5	4	6	3	1	9	5	9

Вариант №22

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	2	5	4	3	1	6
2	1	2	2	0	1	1	2	2
3	4	2	1	5	3	1	0	3
4	7	6	2	4	2	1	4	0
5	3	2	4	5	2	4	4	5
6	2	6	1	2	1	3	2	4
7	4	7	3	1	6	3	2	6
8	4	1	2	2	1	3	0	4

Вариант №23

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	2	2	1	1	2	0
2	1	6	3	1	7	2	1	1
3	5	3	4	3	3	2	1	3
4	2	1	3	2	1	4	3	4
5	3	4	4	1	1	5	0	4
6	3	1	3	3	2	0	5	3
7	5	4	5	1	3	0	1	1
8	6	4	2	4	5	5	1	4

Вариант №24

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	0	1	3	1	0	0
2	1	2	1	1	1	4	0	1
3	5	4	7	1	6	0	2	5
4	3	1	2	2	1	3	3	2
5	2	4	5	2	1	0	2	4
6	2	1	5	2	3	1	0	5
7	0	2	2	1	4	2	3	2
8	0	2	6	1	8	1	2	3

Вариант №25

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	2	3	1	4	3	1
2	4	5	5	2	2	2	2	0
3	2	2	5	2	3	0	2	3
4	5	4	2	1	2	0	3	2
5	2	5	3	2	1	2	0	0
6	4	2	1	3	2	2	4	2
7	2	5	1	3	4	4	3	4
8	3	0	0	3	2	1	4	2

Поток обслуживания.

Вариант №1

	tмин	tмакс	f
1	0,00	1,87	50
2	1,87	3,74	17
3	3,74	5,60	20
4	5,60	7,46	8
5	7,46	9,32	3
6	9,32	11,18	1

Вариант №2

	tмин	tмакс	f
1	0,00	8,60	98
2	8,60	17,20	43
3	17,20	25,80	5
4	25,80	34,40	3
5	34,40	43,00	1
6	43,00	51,60	1

Вариант №3

	tмин	tмакс	f
1	0,00	9,52	94
2	9,52	19,05	38
3	19,05	28,57	10
4	28,57	38,09	3
5	38,09	47,62	2
6	47,62	57,14	3

Вариант №4

	tмин	tмакс	f
1	0,00	5,29	170
2	5,29	10,58	64
3	10,58	15,87	20
4	15,87	21,16	6
5	21,16	26,45	3
6	26,45	31,75	3

Вариант №5

	tмин	tмакс	f
1	0,00	6,35	144
2	6,35	12,70	49
3	12,70	19,05	14
4	19,05	25,40	4
5	25,40	31,75	2
6	31,75	38,09	3

Вариант №6

	tмин	tмакс	f
1	0,00	11,64	142
2	11,64	23,28	44
3	23,28	34,92	16
4	34,92	46,56	5
5	46,56	58,20	3
6	58,20	69,84	3

Вариант №7

	tмин	tмакс	f
1	0,00	12,70	224
2	12,70	25,40	76
3	25,40	38,09	43
4	38,09	50,79	8
5	50,79	63,49	4
6	63,49	76,19	3

Вариант №8

	tмин	tмакс	f
1	0,00	15,87	212
2	15,87	31,75	56
3	31,75	47,62	29
4	47,62	63,49	9
5	63,49	79,36	4
6	79,36	95,24	3

Вариант №9

	tмин	tмакс	f
1	0,00	8,47	124
2	8,47	16,93	70
3	16,93	25,40	33
4	25,40	33,86	7
5	33,86	42,33	3
6	42,33	50,79	3

Вариант №10

	tмин	tмакс	f
1	0,00	4,65	39
2	4,65	9,31	16
3	9,31	13,96	7
4	13,96	18,62	1
5	18,62	23,27	0
6	23,27	27,93	1

Вариант №11

	tмин	tмакс	f
1	0,00	7,94	89
2	7,94	15,87	38
3	15,87	23,81	10
4	23,81	31,75	3
5	31,75	39,68	2
6	39,68	47,62	3

Вариант №12

	tмин	tмакс	f
1	0,00	5,82	137
2	5,82	11,64	49
3	11,64	17,46	17
4	17,46	23,28	6
5	23,28	29,10	3
6	29,10	34,92	3

Вариант №13

	tмин	tмакс	f
1	0,00	6,24	142
2	6,24	12,49	48
3	12,49	18,73	16
4	18,73	24,97	4
5	24,97	31,22	3
6	31,22	37,46	3

Вариант №14

	tмин	tмакс	f
1	0,00	16,72	131
2	16,72	33,44	54
3	33,44	50,16	31
4	50,16	66,88	4
5	66,88	83,60	3
6	83,60	100,32	3

Вариант №15

	tмин	tмакс	f
1	0,00	4,97	172
2	4,97	9,95	51
3	9,95	14,92	18
4	14,92	19,89	6
5	19,89	24,87	4
6	24,87	29,84	3

Вариант №16

	tмин	tмакс	f
1	0,00	14,83	42
2	14,83	29,66	18
3	29,66	44,49	1
4	44,49	59,32	1
5	59,32	74,15	1
6	74,15	88,98	1

Вариант №17

	tмин	tмакс	f
1	0,00	7,93	30
2	7,93	15,86	17
3	15,86	23,78	10
4	23,78	31,71	6
5	31,71	39,64	0
6	39,64	47,57	1

Вариант №18

	tмин	tмакс	f
1	0,00	4,06	36
2	4,06	8,11	16
3	8,11	12,17	4
4	12,17	16,23	6
5	16,23	20,28	1
6	20,28	24,34	1

Вариант №19

	tмин	tмакс	f
1	0,00	8,74	34
2	8,74	17,47	17
3	17,47	26,21	5
4	26,21	34,95	4
5	34,95	43,69	2
6	43,69	52,42	2

Вариант №20

	tмин	tмакс	f
1	0,00	10,14	49
2	10,14	20,28	9
3	20,28	30,41	6
4	30,41	40,55	2
5	40,55	50,69	0
6	50,69	60,83	1

Вариант №21

	tмин	tмакс	f
1	0,00	7,76	33
2	7,76	15,52	12
3	15,52	23,28	11
4	23,28	31,04	5
5	31,04	38,80	2
6	38,80	46,56	1

Вариант №22

	tмин	tмакс	f
1	0,00	9,44	37
2	9,44	18,89	20
3	18,89	28,33	5
4	28,33	37,78	0
5	37,78	47,22	1
6	47,22	56,67	1

Вариант №23

	tмин	tмакс	f
1	0,00	3,55	22
2	3,55	7,09	20
3	7,09	10,64	12
4	10,64	14,18	6
5	14,18	17,73	2
6	17,73	21,27	2

Вариант №24

	tмин	tмакс	f
1	0,00	7,75	42
2	7,75	15,50	12
3	15,50	23,25	4
4	23,25	31,01	2
5	31,01	38,76	0
6	38,76	46,51	1

Вариант №25

	tмин	tмакс	f
1	0,00	2,72	28
2	2,72	5,44	17
3	5,44	8,15	5
4	8,15	10,87	6
5	10,87	13,59	6
6	13,59	16,31	2

Алгоритм обработки полученных экспериментальных данных:

1) Описать процесс согласно установленному заданию;
2) Предоставить скриншоты выполнения каждого этапа работы.

Практическая работа №2 «Марковские процессы»

Цель занятия:

изучение аналитических методов описания марковских случайных процессов.Исследование процессов гибели и размножения на аналитической и имитационной модели.

Задачи занятия:

1) Провестирасчет на аналитической модели;
2) Провестиэксперимент на имитационной модели;
3) Проанализировать результаты.

Планируемые результаты обучения:

- формирование знаний о марковских процессах и процессах гибели и размножения;
- формирование навыковработы с марковскими процессами.

Материально-техническое оборудование и материалы:

1) Персональный компьютер с операционной системой;
2) Табличный редактор Microsoft Excel.

План проведения лабораторного занятия

Лабораторному занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Рекомендуемая литература для подготовки к лабораторному занятию:

1. Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И.Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

2. Козликин, В. И. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентов специальности 190601.68 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направлений подготовки 190600.62 «Эксплуатация

транспортнотехнологических машин и комплексов» и 190700.62 «Технология транспортных процессов»] / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

3. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон.спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос.ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с.

4. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентовтехн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ;Юго-Зап. гос. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (166 595 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2015. – 175с.

5 Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В.В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с.

6 Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] :учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.

7 Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст]/ А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

8 Кирпичников, А. П. Прикладная теория массового обслуживания [Текст] / А. П.Кирпичников. - Казань : Казанский государственный университет, 2008. - 118 с

9 Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова [Текст] / пер. с англ. С. М. Пригарина. - 2-е изд. - Новосибирск : ГЕО, 2008. -440 с.

Краткая теоретическая справка для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию:

Пусть имеется некоторая система *S*, состояние которой меняется с течением времени (под системой *S* может пониматься техническое устройство, производственный процесс, вычислительная машина, информационная сеть и т. д.). Если состояние системы S меняется во времени случайным, заранее непредсказуемым образом, говорят, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется **марковским** (или "процессом без последействия"), если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t>t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t= t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Марковский случайный процесс (цепь Маркова) можно определить также как последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s – ом испытании наступит событие A_j при условии, что в $(s - 1)$ – ом испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предшествующих испытаний. Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются**состояниями системы**, а испытания – **изменениями состояний системы**.

Марковские случайные процессы делятся на классы. Основными классифицирующими признаками являются:

– множество состояний, в которых может находиться система,

– моменты времени, в которых происходит изменение состояния системы.

Случайный процесс называется процессом с **дискретными состояниями**, если возможные состояния системы $S_1, S_2, S_3, \ldots$ можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система S скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Кроме процессов с дискретными состояниями существуют случайные процессы с **непрерывными состояниями**: для этих процессов характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние. Например, процесс изменения напряжения в осветительной сети представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots,$ то марковский процесс относится к процессам с **дискретным временем**. В противном случае имеет место процесс с **непрерывным временем**.

Анализ случайных процессов с дискретными состояниями обычно проводится с помощью **графа состояний и переходов (ГСП).**

Пусть имеется система S с n дискретными состояниями:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_n.$$

Каждое состояние изображается прямоугольником, а возможные переходы ("перескоки") из состояния в состояние — стрелками, соединяющими эти прямоугольники. Удобно также пользоваться **размеченным графом,** который графически изображает не только возможные состояния системы и возможные переходы из состояния в состояние, но также и значения вероятностей перехода.

Примеры ГСП показаны на рисунке 1.

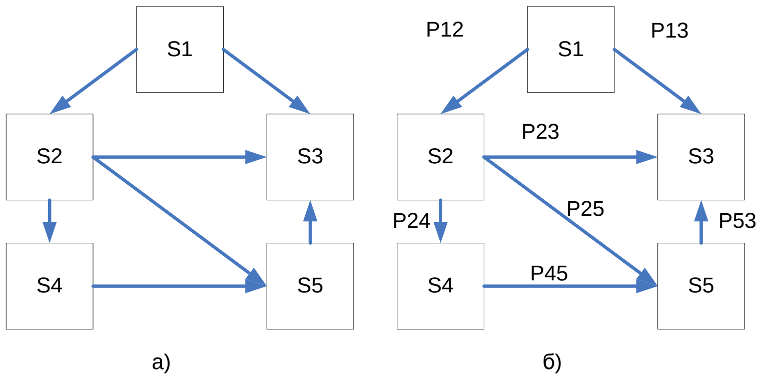


Рисунок 1 - Примеры графа состояний и переходов

Графу системы, содержащему n вершин, можно поставить в соответствие матрицу $n \times n$, элементами которой являются вероятности переходов p_{ij} между вершинами графа, называемую **матрицей вероятностей переходов**. Элементы матрицы p_{ij} удовлетворяют условиям:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \qquad (2)$$

Условие (1) - обычное свойство вероятностей, а условие (2) означает, что система S обязательно либо переходит из какого-то состояния S_i в другое состояние, либо остается в состоянии S_i. Элементы p_{ij} матрицы P обозначают вероятности переходов в системе за один шаг.

Обычно на графе вероятности перехода системы из одного состояния в то же самое не отмечаются. При рассмотрении конкретных систем удобно сначала построить граф состояний, затем определить вероятность переходов системы из одного состояния в то же самое (исходя из требования равенства единице суммы элементов строк матрицы), а потом составить матрицу переходов системы.

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Пусть система S может находиться в состояниях:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n,$$

и изменения состояния системы возможны только в моменты:

$$t_1, t_2, t_3, \dots t_n.$$

Будем называть эти моменты **шагами**, или **этапами** процесса и рассматривать протекающий в системе S случайный процесс как функцию целочисленного аргумента $m = 1, 2, \dots k, \dots$, обозначающего номер шага.

Указанный случайный процесс состоит в том, что в последовательные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ система S оказывается в тех или иных состояниях. Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность (цепочку) событий, например, $S_1^{(1)}, S_2^{(2)}, \dots, S_i^{(i)}, \dots, S_n^{(n)}$, называемую **марковской цепью**, где для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i .

Марковскую цепь можно описать с помощью вероятностей состояний, в которых находится система на каком-то шаге. Пусть в любой момент времени (после любого шага) система может пребывать в одном из состояний:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n,$$

т. е., в результате шага k осуществится одно из полной группы несовместных событий:

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \ldots, S_i^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}.$$

Обозначив вероятности этих событий для k -го шага через

$$p_1(k) = p\left(S_1^{(k)}\right), p_2(k) = p\left(S_2^{(k)}\right), \ldots, p_i(k) = p\left(S_i^{(k)}\right), \ldots, p_n(k) = p\left(S_n^{(k)}\right),$$

легко видеть, что для каждого шага k

$$p_1(k) + p_2(k) + \ldots + p_i(k) + \ldots + p_n(k) = 1,$$

поскольку $p_i(k), i = \overline{1,n}$ представляют собой вероятности появления полной группы событий.

Вероятности $p_i(k), i = \overline{1,n}$ называются **вероятностями состояния**.

Для любого шага (момента времени $t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots$ или номера $1, 2, \ldots, k, \ldots$) существуют некоторые вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое (некоторые из них равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен), а также вероятность задержки системы в данном состоянии. Эти вероятностиназываются **переходными вероятностями марковской цепи**.

Если значения переходных вероятностей не зависят от номера шага, то марковская цепь называется **однородной, или стационарной**. В противном случае марковская цепь является **неоднородной, или нестационарной**.

Для графа (рисунок 1) значения переходных вероятностей p_{ij} будут равны:

$$p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13})$$
$$p_{22} = 1 - (p_{23} + p_{24} + p_{25})$$
$$p_{33} = 1$$
$$p_{44} = 1 - p_{45}$$
$$p_{55} = 1 - p_{53}$$

Если из состояния S_i не исходит ни одной стрелки (переход из него ни в какое другое состояние невозможен), соответствующая вероятность задержки P_{ii} равна единице.

Имея в распоряжении размеченный ГСП (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и зная начальное состояние системы, можно найти вероятности состояний $p_1(k)$, $p_2(k)$, ... $p_n(k)$ после любого (k-го) шага. Они находятся с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\, p_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

или в матричной форме

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} \times P$$

Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

На практике встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно — переход может осуществиться в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восстановление) этого элемента также может произойти в заранее неизвестный момент и т. д.

Для описания таких процессов может быть применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Такого типа процессы известны как непрерывные цепи Маркова. **Непрерывной цепью Маркова (марковским процессом)** называют процесс, для которого при

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots t_n + 1$$

выполняется:

$$P\left\{S\left(t_{n+1}\right)=S_{n+1}\middle|S\left(t_1\right)=S_1,...,S\left(t_n\right)=S_n\right\}=P\left\{S\left(t_{n+1}\right)=S_{n+1}\middle|S\left(t_n\right)=S_n\right\}$$

Здесь так же, как и в случае процесса с дискретным временем, рассматривается ряд дискретных состояний: $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$, однако переход системы $\boldsymbol{S}$ из состояния в состояние может происходить в произвольный момент времени.

Обозначим $p_i(t)$ — вероятность того, что в момент tсистема $\boldsymbol{S}$будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, ..., n$). Очевидно, для любого момента t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(t\right)=1,$$

так как события, состоящие в том, что в момент t система находится в состояниях $S_1, S_2,, ..., S_n$, несовместны.

Необходимо определить для любого t вероятности состояний:

$$\overline{p(t)}=\left(p_1\left(t\right),p_2\left(t\right),...,p_n\left(t\right)\right)$$

Для того чтобы найти эти вероятности, необходимо знать характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для Марковской цепи. В случае процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотностивероятностей (или интенсивности) перехода λ_{ij} (поскольку вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в моментt будет равна нулю, так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Пусть система $\boldsymbol{S}$ в момент t находится в состоянии S_r. Рассмотрим элементарный промежуток времениΔt,примыкающийк моменту t. Назовем **плотностью вероятности перехода** λ_{ij} из состояния i в состояние j предел (**или инфинитезимальными коэффициентами**) отношение вероятности перехода системы за время Δtиз состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}\left(t+\Delta t\right)-p_{ij}\left(t\right)}{\Delta t}=\lambda_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}\left(\Delta t\right)}{\Delta t}$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j (плотность вероятностей перехода определяется только для $j\neq i$). Отсюда следует, что при малом Δt вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна:

$$P_{ij}(\Delta t)=\lambda_{ij}\times\Delta t$$

Если все плотности вероятностей перехода λ_{ij} не зависят от t, т.е. (от того, в какой момент начинается элементарный участок Δt

$$P\left\{S\left(t+\Delta t\right)=S_i \middle| S\left(t\right)=j\right\}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n},$$

то марковский процесс называется **однородным**, а если эти плотности зависят от времени, то он является **неоднородным**.

Анализ случайных процессов с непрерывным временем так же как марковских процессов с дискретным временем удобно производить с помощью **графа состояний и переходов** (рисунок 2), на основании которого можно определить вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени.

Распределение вероятностей состояний системы, которое можно характеризовать вектором $\vec{p}(t)=\left(p_1(t),p_2(t),\ldots,p_n(t)\right)$, называется **стационарным**, если оно не зависит от времени, т.е. все компоненты вектора $\vec{p}(t)$ являются константами.

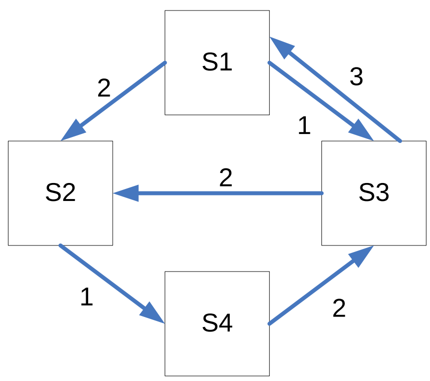


Рисунок 2 -Пример размеченного графа непрерывной цепи Маркова

Выходными характеристиками марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем являются:

– нестационарное распределение вероятностей

$$p_i(t) = P\{S(t) = i\};$$

– стационарное распределение вероятностей $p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t)$;

– среднее время пребывания в фиксированном множестве состояний;

– интенсивности перехода из одного множества состояний в другое.

Весьма важным является вопрос о поведении функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$ при $t \to \infty$, а именно, будут ли они стремиться к каким-то пределам. Если эти пределы существуют, они называются **предельными (финальными)** вероятностями состояний.

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Очевидно, предельные вероятности состояний в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Доказано, что если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

Таким образом, при $t \to \infty$ в системе S устанавливается некоторый предельный стационарный режим: хотя система случайным образом и меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени и каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, которая представляет собой **среднее относительное время** пребывания системы в данном состоянии. Это свойство позволяет обходиться при нахождении параметров системы на основе моделирования одной достаточно длинной реализацией.

Для вероятностей $p_1(t)$, $p_2(t)$,…, $p_n(t)$ можно составить систему линейных дифференциальных уравнений, называемых

уравнениями Колмогорова, которые в случае нахождения предельных вероятностей превращаются в систему **линейных алгебраических уравнений (уравнений глобального баланса)** для каждого состояния. Совместно с нормировочным условием эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности.

Общее правило составления уравнений Колмогорова для предельных вероятностей $p_i(t)$ можно сформулировать следующим образом:

– в левой части уравнения стоит сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в i-ое состояние, на интенсивности соответствующих потоков минус сумма интенсивностей всех потоков, выводящих систему из данного (j-го) состояния, умноженная на вероятность данного (j-го) состояния;

– в правой части уравнения стоит 0.

Пример:

Уравнения для ГСП на рисунке 2 будут иметь вид:

$$\begin{cases} -5p_1 + p_3 = 0 \\ -5p_2 + 2p_1 + 2p_3 = 0 \\ -3p_3 + 3p_1 + 2p_4 = 0 \\ -2p_4 + p_2 = 0 \end{cases}$$

Для получения системы независимых уравнений одно из уравнений следует заменить на условие нормировки:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Процессы гибели и размножения

Примером составления уравнений для нахождения предельных вероятностей могут служить процессы **гибели и размножения,** ГСП для которых имеет вид:

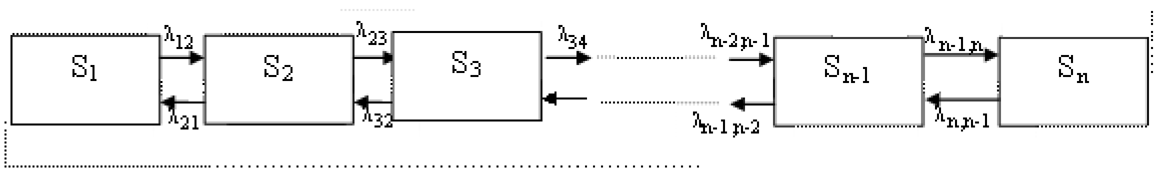


Рисунок 3 - ГСП для процесса размножения и гибели

Запишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. В стационарных условиях для каждого состояния интенсивность потока, втекающего в данное состояние, должна равняться интенсивность потока, вытекающего из данного состояния.

Для первого состояния S_1 имеем:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

Для второго состояния S_2 суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3$$

Но можно сократить справа и слева равные друг другу члены и тогда получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3$$

и далее, совершенно аналогично,

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4$$

и т. д.

Очевидно, для этого случая члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

$$\lambda_{k-1.k} p_{k-1} = \lambda_{k.k-1} p_k$$

где k принимает все значения от *2* до *n*.

Итак, предельные вероятности состояний

$$p = (p_1, p_2. \ldots, p_n)$$

в любой схеме размножения и гибели удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}
\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \\
\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3 \\
\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4 \\
\lambda_{k-1.k} p_{k-1} = \lambda_{k.k-1} p_k \\
\lambda_{n-1.k} p_{n-1} = \lambda_{n.n-1} p_n
\end{gathered}$$

и нормировочному условию:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Решение этой системы имеет вид

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1.k}\lambda_{k-2.k-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k.k-1}\lambda_{k-1.k-2}\ldots\lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1.n}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n.n-1}\ldots\lambda_{21}}}$$

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1.k}}{\lambda_{k.k-1}} \cdot \frac{\lambda_{k-2.k-1}}{\lambda_{k-1.k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, k = 2, 3, \ldots$$

Пример

Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов, каждый из которых может выходить из строя (отказывать). Отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Требуется найти вероятности числа отказавших узлов.

Решение.

Состояния системы:

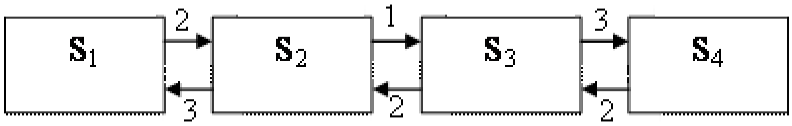
S_1 — все три узла исправны:

S_2 — один узел отказал (восстанавливается), два исправны;

S_3 — два узла восстанавливаются, один исправен;

S_4 — все три узла восстанавливаются.

ГСП имеет вид:



Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс размножения и гибели.

$$p_1 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3}} = \frac{2}{5}$$

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15} = \frac{2}{15}$$

$$p_4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

Примерные вопросы к собеседованию, к защите отчета по выполненной лабораторной работы:

1)Дайте определение марковского процесса.

2)Как классифицируются марковские процессы?

3)Что такое граф состояний и переходов (ГСП) Марковской цепи? Какие бывают ГСП?

4)Что понимается под матрицей переходных вероятностей?

5)Как можно найти вероятность нахождения процесса в определенном состоянии после определенного числа шагов?

6)Что такое нестационарная марковская цепь?

7)Дайте определение марковского процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями.

8)Что такое предельные вероятности марковского процесса? Каков физический смысл предельных вероятностей?

9)Как найти предельные вероятности системы, имеющей стационарный режим?

10) Что называется процессами гибели и размножения? Поясните на ГСП.

11) Запишите выражения для предельных вероятностей процесса гибели и размножения.

Алгоритм проведения эксперимента:

Часть 1

1) Откройте приложение Microsoft Excel и создайте книгу для промежуточных и итоговых данных по работе.

2) Внесите в таблицу исходные данные для своего варианта, например:

Исходные данные		
n	**λ**	**μ**
6	0.1	0.2

Число устройств и значения интенсивностей λ и μ приведены в разделе Варианты исходных данных.

3) Постройте размеченный ГСП процесса.

Очевидно, что размеченный ГСП системы представляет собой размеченный ГСП процесса гибели и размножения.

В случае, когда используются однотипные узлы, удобнее пронумеровать состояния системы номерами, соответствующими числу неисправных узлов, т.е., 0,1, 2,…n, где *n* - число узлов. Тогда значения $\lambda_{k-1.k}$ и $\lambda_{k.k-1}$ будут определяться выражениями:

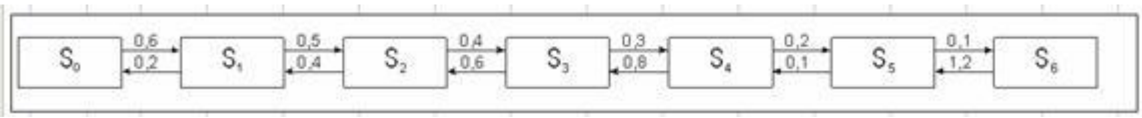
$$\lambda_{k-1.k} = (n-k)\cdot\lambda,\ k = 0,1,...,n-1$$

и

$$\lambda_{k.k-1} = k\cdot\mu,\ k = 1,2,...,n$$

где λ и μ есть значения интенсивностей выхода из строя и восстановления узла соответственно.

Используя любой известный графический редактор нарисуйте граф в виде рисунка на Excel – листе (в примере число узлов равно 6):



В случае затруднений с электронным изображением допускается построение ГСП в рукописном виде.

4) Проведите расчет вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний с помощью аналитических выражений аппарата марковских процессов.

Для проведения расчетов создайте таблицу со структурой

k	λк.к+1	λк+1.к	П	Pk	
				Аналитич. модель	Имитац. модель

в которой столбцы 1, 2,…6 используются следующим образом:

1- номер состояния,

2- интенсивность перехода из данного состояния в состояние с номером на 1 большим,

3- интенсивность перехода из состояния с номером на 1 большим в данное состояние,

4- значения каждого слагаемого, стоящего в выражении для вычисления P_0 (без 1),

5- аналитически вычисленные значения $P_к$,

6- найденные с помощью имитационной модели значения $P_к$.

Таблица должна содержать по одной строке для каждого состояния и одну строку для сумм по столбцам 4,5,6.

Точность для первого столбца таблицы установите равной одному десятичному знаку, для второго и третьего – двум десятичным знакам, для четвертого, пятого и шестого – четырем десятичным знакам.

Часть 2

1) Установите режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1.

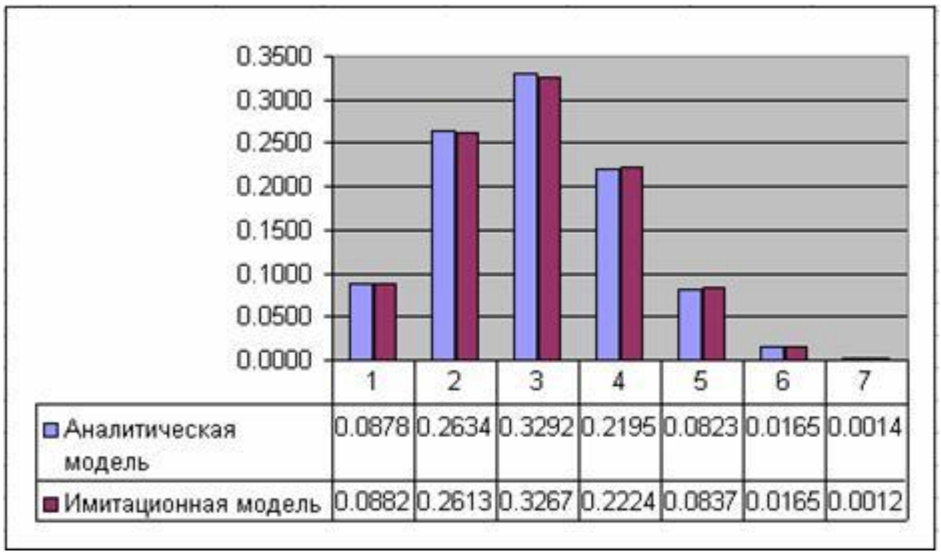
2) Найдите значения вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний с помощью имитационной модели. Результаты прогонов занесите в столбец 6.

Расчеты и эксперимент					
k	$\lambda_{к.к+1}$	$\lambda_{к+1.к}$	П	Pk	
				Аналитич. модель	Имитац. модель
0	0.6	0.0	3.0000	0.0878	0.0882
1	0.5	0.2	3.7500	0.2634	0.2613
2	0.4	0.4	2.5000	0.3292	0.3267
3	0.3	0.6	0.9375	0.2195	0.2224
4	0.2	0.8	0.1875	0.0823	0.0837
5	0.1	1.0	0.0156	0.0165	0.0165
6	0.0	1.2		0.0014	0.0012
Σ			*10.3906*	*1.0000*	*1.0000*

Часть 3

1) Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами. Сравните результаты между собой.

2) Постройте гистограммы для вероятностей состояний системы.



Варианты заданий

Число узлов n=4.

Интенсивности отказов и восстановлений:

№	λ	μ
1	0.5	0.3
2	0.5	0.4
3	0.5	0.5
4	0.5	0.6
5	0.5	0.7

6	0.5	0.8
7	0.5	0.9
8	0.5	1.0
9	0.6	0.3
10	0.6	0.4
11	0.6	0.5
12	0.6	0.6
13	0.6	0.7
14	0.6	0.8
15	0.6	0.9
16	0.6	1.0
17	0.6	1.1
18	0.7	0.5
19	0.7	0.6
20	0.7	0.7
21	0.7	0.8
22	0.7	0.9
23	0.7	1.0
24	0.7	1.1
25	0.7	1.2

Алгоритм обработки полученных экспериментальных данных:

1) Описать процесс согласно установленному заданию;
2) Предоставить скриншоты выполнения каждого этапа работы.

Практическая работа №3 «Одноканальные СМО с отказами»

Цель занятия:

овладение аналитическими методами и методами имитационного моделирования исследования одноканальных систем массового обслуживания.

Задачи занятия:

1) Провестирасчет на аналитической модели;
2) Провестиэксперимент на имитационной модели;
3) Проанализировать результаты.

Планируемые результаты обучения:

- формирование знаний о одноканальных системах массового обслуживания с отказами и их характеристик;
- формирование навыков работы с одноканальными СМО.

Материально-техническое оборудование и материалы:

1) Персональный компьютер с операционной системой;
2) Табличный редактор Microsoft Excel.

План проведения лабораторного занятия

Лабораторному занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Рекомендуемая литература для подготовки к лабораторному занятию:

1. Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И.Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

2. Козликин, В. И. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентов специальности 190601.68 «Автомобили и автомобильное

хозяйство», направлений подготовки 190600.62 «Эксплуатация транспортнотехнологических машин и комплексов» и 190700.62 «Технология транспортных процессов»] / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

3. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон.спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос.ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с.

4. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентовтехн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ;Юго-Зап. гос. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (166 595 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2015. – 175с.

5 Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В.В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с.

6 Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] :учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.

7 Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст]/ А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

8 Кирпичников, А. П. Прикладная теория массового обслуживания [Текст] / А. П.Кирпичников. - Казань : Казанский государственный университет, 2008. - 118 с

9 Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова [Текст] / пер. с англ. С. М. Пригарина. - 2-е изд. - Новосибирск : ГЕО, 2008. -440 с.

Краткая теоретическая справка для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию:

Модель одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с отказами (потерями) является простейшей из всех моделей, используемых для решения задач теории массового обслуживания.

Система массового обслуживания в этом случае состоит только из одного канала (n = 1) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, которую будем считать не зависящей от времени.

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему необслуженной.

Заявка, заставшая канал свободным, поступает на обслуживание, которое продолжается в течение случайного времени T_s, распределенного по показательному закону с параметром μ:

$$f(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \left(t > 0\right)$$

Поток обслуживания представляет собой, таким образом, простейший (пуассоновский) поток с интенсивностью μ. Чтобы представить себе этот поток, можно вообразить один непрерывно занятый канал, который будет формировать поток обслуженных заявок интенсивности μ.

СМО с отказами характеризуются следующими величинами.

Относительная пропускная способность – отношение среднего числа обслуженных заявок за единицу времени к среднему числу всех поступивших заявок за тоже время, т.е. средняя доля обслуженных заявок среди всех поступивших.

Абсолютная пропускная **способность** – среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени.

Вероятность отказа – средняя доля не обслуженных заявок среди всех поступивших.

Нахождение предельных вероятностей состояний системы p_0 (вероятность того, что в системе находится 0 заявок) и p_1 (вероятность того, что в системе находится 1 заявка) несложно отыскивается на основании решений уравнений Колмогорова для стационарного режима:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$
$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Для одноканальной СМО с отказами вероятность p_0 есть не что иное, как относительная пропускная способность q.

Действительно, p_0 есть вероятность того, что в момент t канал свободен, или вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет обслужена. Следовательно, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно p_0 $(q = p_0)$.

В установившемся режиме обслуживания предельное значение относительной пропускной способности будет равно

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Зная относительную пропускную способность q, легко найти абсолютную пропускную способность A. Они связаны очевидным соотношением:

$$A = \lambda \cdot q$$

В установившемся режиме обслуживания предельное значение относительной пропускной способности будет равно

$$A = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Зная относительную пропускную способность системы q (вероятность того, что пришедшая в момент t заявка будет обслужена), легко найти вероятность отказа, или долю необслуженных заявок среди пришедших:

$$p_{OTK} = 1 - q$$

В установившемся режиме

$$p_{OTK} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Примерные вопросы к собеседованию, к защите отчета по выполненной лабораторной работы:

1)Дайте краткое описание модели СМО с отказами.

2)Какими показателями характеризуется функционирование СМО с отказами?

3)Как рассчитывается вероятность р0?

4)Как рассчитывается вероятность р1?

5)Что такое относительная пропускная способность?

6)Что такое абсолютная пропускная способность?

7)Чему равна вероятность отказа обслуживания заявки?

8)Приведите примеры СМО с отказами.

Алгоритм проведения эксперимента:

Часть 1

1) В приложении Microsoft Excel подготовьте таблицу следующего вида.

Аналитическая модель					Имитационная модель					
Экспоненциальное обслуживание					Экспоненц. обслуживание			Регулярное обслуживание		
Ta	Ts	Ротк	q	A	Ротк	q	A	Ротк	q	A

2) В двух первых столбцах таблицы запишите свои исходные данные (средний интервал между заявками входного потока T_a и среднее время обслуживания в канале T_S соответственно), которые определяются по правилу

T_a= "последние две цифры номера зачетки"

$T_S = (0{,}1 \cdot T_a \cdot i), i = 1,...,9$

3) В столбцы с третьего по пятый впишите формулы для расчета показателей *Ротк*, *q* и *A*.

Часть 2

1) Задайте режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1.

2) Для каждой комбинации T_a и T_S осуществите запуск модели.

3) Результаты запусков внесите в таблицу.

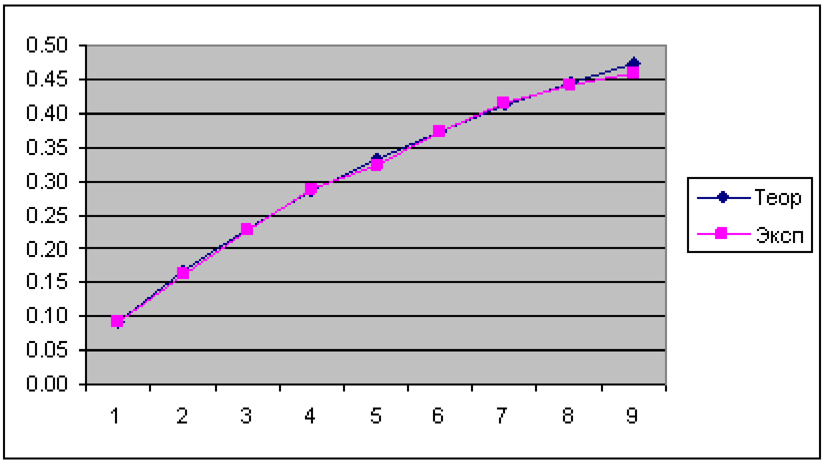
4) Внесите в соответствующие столбцы таблицы формулы для расчета среднего значения показателя P_{OTK}, q и A.

5) Повторите пп.1-3 для детерминированного закона времени обслуживания заявок, задав значение соответствующего параметра равным 2.

Часть 3

1)Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами, сравнив результаты между собой.

2)Постройте на одной диаграмме графики зависимости P_{OTK} от T_S на теоретически и экспериментально полученных данных для случая экспоненциально распределенного времени обслуживания.



3)Выполните предыдущий пункт на экспериментально полученных данных для случаев экспоненциально распределенного и детерминированного времени обслуживания.

Алгоритм обработки полученных экспериментальных данных:

1) Описать процесс согласно установленному заданию;

2) Предоставить скриншоты выполнения каждого этапа работы.

Практическая работа №4 «Многоканальные СМО с отказами»

Цель занятия:

овладение аналитическими методами и методами имитационного моделирования исследования одноканальных систем массового обслуживания.Решение задач оптимизации параметров систем массового обслуживания

Задачи занятия:

1) Провестирасчет на аналитической модели;
2) Провестиэксперимент на имитационной модели;
3) Проанализировать результаты;
4) Оптимизация параметров СМО.

Планируемые результаты обучения:

- формирование знаний о многоканальных системах массового обслуживания с отказами и их вероятностных характеристик;
- формирование навыков работы с многоканальными СМО.

Материально-техническое оборудование и материалы:

1) Персональный компьютер с операционной системой;
2) Табличный редактор Microsoft Excel.

План проведения лабораторного занятия

Лабораторному занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Рекомендуемая литература для подготовки к лабораторному занятию:

1. Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И.Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

2. Козликин, В. И. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентов специальности 190601.68 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направлений подготовки 190600.62 «Эксплуатация транспортнотехнологических машин и комплексов» и 190700.62 «Технология транспортных процессов»] / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

3. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон.спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос.ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с.

4. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентовтехн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ;Юго-Зап. гос. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (166 595 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2015. – 175с.

5 Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В.В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с.

6 Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] :учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.

7 Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст]/ А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

8 Кирпичников, А. П. Прикладная теория массового обслуживания [Текст] / А. П.Кирпичников. - Казань : Казанский государственный университет, 2008. - 118 с

9 Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова [Текст] / пер. с англ. С. М. Пригарина. - 2-е изд. - Новосибирск : ГЕО, 2008. -440 с.

Краткая теоретическая справка для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию:

В отличие от модели одноканальной СМО с отказами (потерями) в модели многоканальной СМО используется $n>1$ обслуживающих приборов с одинаковой интенсивностью обслуживания μ. Входной поток заявок и поток обслуживания заявок являются пуассоновскими. Как и в случае одноканальной СМО на ее вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая хотя бы один канал свободным, поступает на обслуживание, которое продолжается в течение случайного времени *Ts*, распределенного по показательному закону с параметром μ. Заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной.

Предельные вероятности состояний, под которыми подразумевается число занятых обслуживанием каналов, имеют вид:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n}\right)^{-1} \approx e^{-\rho},$$

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{k!}, k = 1, \ldots, n,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (последнее равенство в выражении для p_0 справедливо только при достаточно большом n).

Эти соотношения называют *формулами Эрланга.* Они выражают предельные состояния в зависимости от значений параметров λ и μ.

Вероятностные характеристики многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме можно получить, используя следующие выражения.

Вероятность отказа

Заявка получает отказ, если все каналы заняты. Вероятность этого равна:

$$p_{OTK} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

Относительная пропускная способность

Вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию **(**относительная пропускная способность q**)** есть дополнение p_{OTK} до 1:

$$q = 1 - p_{OTK}$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda q = \lambda \cdot (1 - p_n)$$

Среднее число заявок в системе (среднее число занятых каналов)

Среднее число заявок в **системе** можно подсчитать через вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots p_n$, по формуле

$$\overline{n}_\Sigma = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \ldots + n \cdot p_n$$

как математическое ожидание дискретной случайной величины.

Однако, проще выразить среднее число занятых каналов через абсолютную пропускную способность A, которая уже известна. Так как A есть среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, а один занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то среднее число занятых каналов получается делением A на μ

$$\overline{n}_s = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda \cdot (1 - p_n)}{\mu}$$

или переходя к обозначению $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$:

$$\overline{n}_s = \rho \cdot (1 - p_n)$$

Примерные вопросы к собеседованию, к защите отчета по выполненной лабораторной работы:

1)Дайте краткое описание многоканальной модели СМО с отказами

2)Какими показателями характеризуется функционирование многоканальной СМО с отказами?

3)Как рассчитывается вероятность *p0*?

4)Как рассчитываются вероятности *pi*?

5)Как найти вероятность отказа обслуживания заявки?

6)Как найти относительную пропускную способность?

7)Чему равна абсолютная пропускная способность?

8)Как подсчитывается среднее число заявок в системе?

9)Приведите примеры СМО с отказами.

Алгоритм проведения эксперимента:

Часть 1

1) В приложение Microsoft Excel подготовьте таблицу следующего вида.

Параметры СМО			Аналитическая модель					Имитационная модель			
$\boldsymbol{n}$	T_a	T_s	$\boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_{отк}}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{P_{отк}}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{S}$

2) В столбцах для параметров СМО таблицы запишите свои исходные данные, которые определяются по правилу:

$$n=1,2,3$$

По каждому *n* необходимо найти теоретические и экспериментальные значения показателей СМО для пяти пар значений:

$$T_a = \text{<порядковый номер в списке группы>}$$
$$T_s = (0{,}5 \cdot T_a + 0{,}25 \cdot T_a \cdot i), \quad i = 0,1,2,3,4$$

3) В столбцы с показателями аналитической модели впишите соответствующие формулы.

Часть 2

1) Установите режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1.

2) Для каждой комбинации n, T_a и T_s осуществите запуск модели.

3) Результат запуска внесите в таблицу.

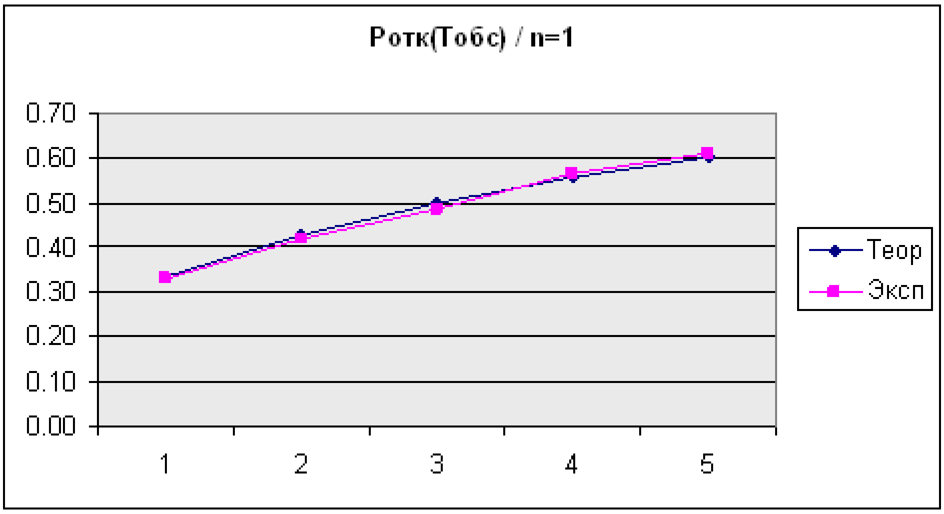
4) Внесите в соответствующие столбцы таблицы формулы для расчета среднего значения показателя $P_{отк}$, q и A.

Параметры СМО			Аналитическая модель						Имитационная модель			
n	Ta	Ts	ρ	P0	Ротк	q	A	S	Ротк	q	A	S
1	30.00	15.00	0.50	0.67	0.33	0.67	0.02	0.33	0.33	0.67	0.02	0.33
1	30.00	22.50	0.75	0.57	0.43	0.57	0.02	0.43	0.42	0.58	0.02	0.43
1	30.00	30.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.02	0.50	0.49	0.51	0.02	0.51
1	30.00	37.50	1.25	0.44	0.56	0.44	0.01	0.56	0.56	0.44	0.01	0.54
1	30.00	45.00	1.50	0.40	0.60	0.40	0.01	0.60	0.61	0.39	0.01	0.58
2	30.00	15.00	0.50	0.62	0.08	0.92	0.03	0.46	0.08	0.92	0.03	0.46
2	30.00	22.50	0.75	0.49	0.14	0.86	0.03	0.65	0.14	0.86	0.03	0.65
2	30.00	30.00	1.00	0.40	0.20	0.80	0.03	0.80	0.20	0.80	0.03	0.80
2	30.00	37.50	1.25	0.33	0.26	0.74	0.02	0.93	0.27	0.73	0.02	0.91
2	30.00	45.00	1.50	0.28	0.31	0.69	0.02	1.03	0.30	0.70	0.02	1.04
3	30.00	15.00	0.50	0.61	0.01	0.99	0.03	0.49	0.01	0.99	0.03	0.49
3	30.00	22.50	0.75	0.48	0.03	0.97	0.03	0.72	0.03	0.97	0.03	0.72
3	30.00	30.00	1.00	0.38	0.06	0.94	0.03	0.94	0.06	0.94	0.03	0.94
3	30.00	37.50	1.25	0.30	0.10	0.90	0.03	1.13	0.10	0.90	0.03	1.13
3	30.00	45.00	1.50	0.24	0.13	0.87	0.03	1.30	0.14	0.86	0.03	1.29

Часть 3

1) Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами, сравнив результаты между собой.

2) Для каждого n постройте на одной диаграмме графики зависимости Ротк от T_s на теоретически и экспериментально полученных данных.



Часть 4

Решите задачу нахождения количество приборов *n* со средним временем обслуживания T_a = T_s оптимальное с точки зрения получения максимальной прибыли. В качестве условий задачи возьмите:

– доход от обслуживания одной заявки равным 80 у.е./час,
– стоимость содержания одного прибора равным 1у.е./час.

1) Для расчетов целесообразно создать таблицу:

Параметры СМО			Аналитическая модель						Доход в единицу времени			Расход в единицу времени			Прибыль в единицу времени
n	Ta	Ts	ρ	P0	Ротк	q	A	S	Доход от одной заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на один прибор	Число приборов	Общий расход	

Первый столбец заполняется значениями чисел натурального ряда (1,2,3…).

Все клетки второго и третьего столбцов заполняются значениями T_a.

В клетки столбцов с четвертого по восьмой переносятся формулы для столбцов таблицы раздела 0.

В столбцы с исходными данными разделов *Доход, Расход, Прибыль* внесите значения.

В столбцах с вычисляемыми значениями разделов *Доход, Расход, Прибыль* запишите расчетные формулы:

– число заявок в единицу времени

$$N_r = A$$

– суммарный доход в единицу времени

$$I_\Sigma = I_r \cdot N_r$$

– суммарный расход в единицу времени

$$E_\Sigma = E_d \cdot n$$

– прибыль в единицу времени

$$P = I_\Sigma - E_\Sigma$$

где

– I_r - доход от одной заявки,

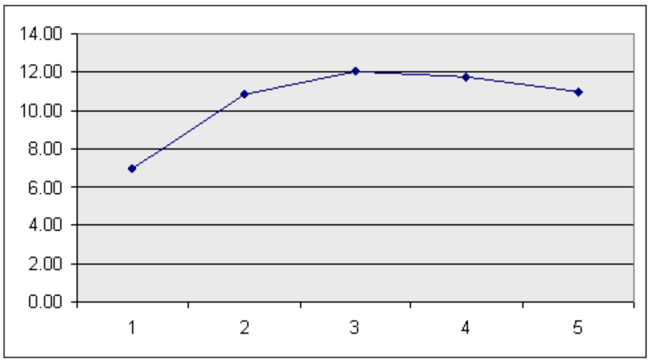
– E_d - расход на один прибор.

2) Среди нескольких значений n определите такое $n_{опт}$, при котором достигается максимум целевой функции:

Параметры СМО			Аналитическая модель						Доход в единицу времени			Расход в единицу времени			Прибыль в единицу времени
n	Ta	Ts	ρ	P0	Pотк	q	A	S	Доход от одной заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на один прибор	Число приборов	Общий расход	
1	5.00	5.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.10	0.50	80.00	0.10	8.00	1.00	1.00	1	**7.00**
2	5.00	5.00	1.00	0.40	0.20	0.80	0.16	0.80	80.00	0.16	12.80	1.00	2.00	2	**10.80**
3	5.00	5.00	1.00	0.38	0.06	0.94	0.19	0.94	80.00	0.19	15.00	1.00	3.00	3	**12.00**
4	5.00	5.00	1.00	0.37	0.02	0.98	0.20	0.98	80.00	0.20	15.75	1.00	4.00	4	**11.75**
5	5.00	5.00	1.00	0.37	0.00	1.00	0.20	1.00	80.00	0.20	15.95	1.00	5.00	5	**10.95**

$n_{опт} = 3$

3) Постройте график зависимости прибыли в единицу времени от числа обслуживающих приборов:



Алгоритм обработки полученных экспериментальных данных:

1) Описать процесс согласно установленному заданию;
2) Предоставить скриншоты выполнения каждого этапа работы.

Практическая работа №5 «Одноканальные СМО с ограниченной очередью»

Цель занятия:

Овладение аналитическими методами и методами имитационного моделирования исследования одноканальных систем массового обслуживания с ограниченной очередью заявок.

Задачи занятия:

1) Провестирасчет на аналитической модели;
2) Провестиэксперимент на имитационной модели;
3) Проанализировать результаты;
4) Оптимизация параметров СМО.

Планируемые результаты обучения:

- формирование знаний о одноканальных системах массового обслуживания с ограниченной очередью и их характеристик;
- формирование навыков работы с одноканальными СМО с ограниченной очередью.

Материально-техническое оборудование и материалы:

1) Персональный компьютер с операционной системой;
2) Табличный редактор Microsoft Excel.

План проведения лабораторного занятия

Лабораторному занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Рекомендуемая литература для подготовки к лабораторному занятию:

1. Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И.Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

2. Козликин, В. И. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентов специальности 190601.68 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направлений подготовки 190600.62 «Эксплуатация транспортнотехнологических машин и комплексов» и 190700.62 «Технология транспортных процессов»] / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с.

3. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон.спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос.ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с.

4. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студентовтехн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ;Юго-Зап. гос. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (166 595 КБ). - Курск : ЮЗГУ, 2015. – 175с.

5 Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В.В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с.

6 Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] :учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.

7 Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст]/ А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

8 Кирпичников, А. П. Прикладная теория массового обслуживания [Текст] / А. П.Кирпичников. - Казань : Казанский государственный университет, 2008. - 118 с

9 Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова [Текст] / пер. с англ. С. М. Пригарина. - 2-е изд. - Новосибирск : ГЕО, 2008. -440 с.

Краткая теоретическая справка для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию:

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием.

Будем предполагать, что входящий поток заявок на обслуживание есть простейший поток с интенсивностью λ.

Интенсивность потока обслуживания равна μ. Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживаний является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Будем считать, что размер очереди ограничен и не может вместить более m заявок, т.е. заявка, заставшая в момент своего прихода в СМО m+1 заявок (mожидающих в очереди и одну, находящуюся на обслуживании), покидает СМО.

Система уравнений, описывающих процесс в этой системе, имеет решение:

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}},$$

(1)

$$P_k = \rho^k P_0.$$

Знаменатель первого выражения представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем ρ, откуда получаем

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},$$

(2)

$$P_k = \rho^k P_0,$$

и предельные вероятности приобретают вид:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

$$P_1 = \rho\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

(3)

$$P_2 = \rho^2\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

....

$$P_k = \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

Выполнение условия стационарности $\rho < 1$ необязательно, поскольку число заявок в СМО контролируется путем введения ограничения на длину очереди. Однако выражение справедливо только при $\rho<1$ (поскольку для $\rho =1$ получается неопределенность вида 0/0). Сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\rho=1$ равна в этом случае $m +2$ и $P_0 = \frac{1}{m+2}$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной m.

Вероятность отказа в обслуживании заявки (отказ произойдет в случае, если канал занят и в очереди находятся m заявок):

$$P_{OTK} = P_{m+1} = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \quad (4)$$

Относительная пропускная способность.

$$q = 1 - P_{OTK} \quad (5)$$

Абсолютная пропускная способность.

$$A = q \cdot \lambda$$

(6)

Среднее число находящихся в очереди заявок.

В случае, когда ρ отлично от 1, можно воспользоваться формулой

$$\bar{n}_w = \frac{\rho^2 \left(1-\left(m+1-m\rho\right)\rho^m\right)}{\left(1-\rho\right)\left(1-\rho^{m+2}\right)} \quad (7)$$

При $\rho = 1$ можно прибегнуть к прямому подсчету

$$\bar{n}_w = \sum_{i=1}^{m} i \cdot p_{i+1} \quad (8)$$

Среднее число находящихся в системе заявок.

Поскольку среднее число находящихся в системе заявок $\bar{k}$

$$\bar{n}_\Sigma = \bar{n}_w + \bar{n}_s \quad (9)$$

где $\bar{n}_s$ - среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, то зная $\bar{n}_w$ остается найти $\bar{n}_s$. Т.к. канал один, то число обслуживаемых заявок может равняться либо 0, либо 1 с вероятностями P_0 и $P_1=1- P_0$ соответственно, откуда

$$\bar{n}_s = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_0) = \frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho^{n+1}} \quad (10)$$

и среднее число находящихся в системе заявок равно

$$\bar{n}_\Sigma = \bar{n}_w + \frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho^{n+1}} \quad (11)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди.

$$\bar{t}_w = \frac{1}{\rho\mu} \bar{n}_w = \frac{\bar{n}_w}{\lambda}$$

т.е., среднее время ожидания заявки в очереди равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность потока заявок.

Среднее время пребывания заявки в системе.

Время пребывания заявки в системе $\bar{t}_k$ складывается из времени ожидания заявки в очереди $\bar{t}_w$ и времени обслуживания $\bar{t}_s$. Если загрузка системы составляет 100%, то $\bar{t}_s = \frac{1}{\mu}$, в противном случае $\bar{t}_s = \frac{q}{\mu}$. Отсюда

$$\bar{t}_{\Sigma} = \bar{t}_w + \bar{t}_s = \frac{\bar{n}_w}{\mu} + \frac{q}{\mu} \qquad (13)$$

Примерные вопросы к собеседованию, к защите отчета по выполненной лабораторной работы:

1)Дайте краткое описание одноканальной модели СМО с ограниченной очередью.

2)Какими показателями характеризуется функционирование одноканальной СМО с отказами?

3)Как рассчитывается вероятность p_0?

4)Как рассчитываются вероятности p_i?

5)Как найти вероятность отказа обслуживания заявки?

6)Как найти относительную пропускную способность?

7)Чему равна абсолютная пропускная способность?

8)Как подсчитывается среднее число заявок в системе?

9)Приведите примеры СМО с ограниченной очередью.

Алгоритм проведения эксперимента:

Часть 1

1) В приложение Microsoft Excel подготовьте таблицу следующего вида.

Параметры СМО			Аналитическая модель						Имитационная модель			
m	Ta	Ts	ρ	Pотк	q	A	w	Tw	Pотк	q	A	w

2) В столбцах для параметров СМО таблицы запишите исходные данные, которые определяются по правилу:*m=1,2,3* (максимальная длина очереди).

Для каждого значения *m* необходимо найти теоретические и экспериментальные значения показателей СМО для таких пар значений:

T_a = <порядковый номер в списке группы>

$$T_s = (0.5 \cdot T_a + 0,25 \cdot T_a \cdot i),\ i = 0,1,2,3,4$$

3) В столбцы с показателями аналитической модели впишите соответствующие формулы.

Часть 2

1) Установите режим запусков с экспоненциально распределенным временем обслуживания, задав значение соответствующего параметра равным 1.

2) Для каждой комбинации m, T_a, иT_s и осуществите запуск модели.

3) Результаты запусков внесите в таблицу.

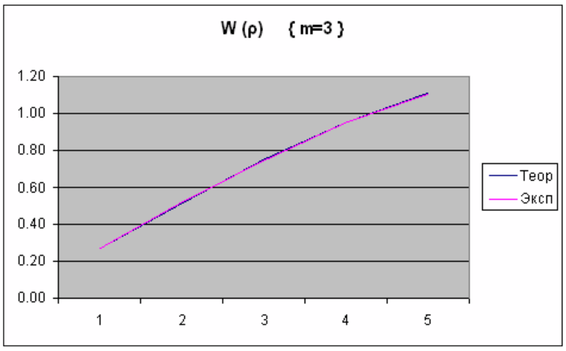
4) Внесите в соответствующие столбцы таблицы формулы для расчета среднего значения показателя $P_{отк}$, q и A.

Параметры СМО			Аналитическая модель						Имитационная модель			
m	Ta	Ts	ρ	Ротк	q	A	w	Tw	Ротк	q	A	w
1	9	4.5	0.50	0.14	0.86	0.10	0.14	0.02	0.14	0.86	0.10	0.14
1	9	6.75	0.75	0.24	0.76	0.08	0.24	0.03	0.24	0.76	0.08	0.24
1	9	9	1.00	0.33	0.67	0.07	0.33	0.04	0.33	0.67	0.07	0.33
1	9	11.25	1.25	0.41	0.59	0.07	0.41	0.05	0.41	0.59	0.07	0.41
1	9	13.5	1.50	0.47	0.53	0.06	0.47	0.05	0.47	0.53	0.06	0.47
2	9	4.5	0.50	0.07	0.93	0.10	0.27	0.03	0.07	0.93	0.10	0.27
2	9	6.75	0.75	0.15	0.85	0.09	0.51	0.06	0.16	0.84	0.09	0.52
2	9	9	1.00	0.25	0.75	0.08	0.75	0.08	0.25	0.75	0.08	0.74
2	9	11.25	1.25	0.34	0.66	0.07	0.95	0.11	0.34	0.66	0.07	0.95
2	9	13.5	1.50	0.42	0.58	0.06	1.11	0.12	0.41	0.59	0.07	1.10
3	9	4.5	0.50	0.03	0.97	0.11	0.35	0.04	0.03	0.97	0.11	0.34
3	9	6.75	0.75	0.10	0.90	0.10	0.77	0.09	0.11	0.89	0.10	0.77
3	9	9	1.00	0.20	0.80	0.09	1.20	0.13	0.20	0.80	0.09	1.21
3	9	11.25	1.25	0.30	0.70	0.08	1.56	0.17	0.29	0.71	0.08	1.57
3	9	13.5	1.50	0.38	0.62	0.07	1.83	0.20	0.38	0.62	0.07	1.82

Часть 3

1) Проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальным способами, сравнив результаты между собой.

2) Для $m=3$ постройте на одной диаграмме графики зависимости $P_{отк}$ от T_s на теоретически и экспериментально полученных данных.



Часть 4

Решите задачу оптимизации размера числа мест в очереди m для прибора со средним временем обслуживания $T_s = T_a$ с точки зрения получения максимальной прибыли. В качестве условий задачи возьмите:

- доход от обслуживания одной заявки равным 80 у.е./час,
- стоимость содержания одного прибора равным 1 у.е./час.

1) Для расчетов целесообразно создать таблицу:

Параметры СМО			Аналитическая модель						Доход в единицу времени			Расход в единицу времени				Прибыль в единицу времени
m	Ta	Ts	ρ	Pотк	q	A	w	Tw	Доход от заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на прибор	Расход на место в очереди	Число мест в очереди	Общий расход	

Первый столбец заполняется значениями чисел натурального ряда (1,2,3…).

Все клетки второго и третьего столбцов заполняются значениями T_a и T_s.

В клетки столбцов с четвертого по девятый переносятся формулы для столбцов таблицы раздела 0.

В столбцы с исходными данными разделов *Доход, Расход, Прибыль* внесите значения (см. выше).

В столбцах с вычисляемыми значениями разделов *Доход, Расход, Прибыль* запишите расчетные формулы:

- число заявок в единицу времени

$$N_r = A$$

- суммарный доход в единицу времени

$$I_{\Sigma}= I_r \cdot N_r$$

- суммарный расход в единицу времени

$$E_{\Sigma}=E_s + E_q \cdot (n\text{-}1)$$

- прибыль в единицу времени

$$P= I_{\Sigma}- E_{\Sigma}$$

где

- I_r - доход от одной заявки,
- E_s - расход на эксплуатацию одного прибора,
- E_q - расход на эксплуатацию одного места в очереди.

Параметры СМО			Аналитическая модель						Доход в единицу времени			Расход в единицу времени				Прибыль в единицу времени
m	Ta	Ts	ρ	Pотк	q	A	w	Tw	Доход от заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на прибор	Расход на место в очереди	Число мест в очереди	Общий расход	
1	9	9	1.00	0.33	0.67	0.07	0.33	0.04	80.00	0.07	5.93	1.00	0.20	1	1.2	**4.73**
2	9	9	1.00	0.25	0.75	0.08	0.25	0.03	80.00	0.08	6.67	1.00	0.20	2	1.4	**5.27**
3	9	9	1.00	0.20	0.80	0.09	0.20	0.02	80.00	0.09	7.11	1.00	0.20	3	1.6	**5.51**
4	9	9	1.00	0.17	0.83	0.09	0.17	0.02	80.00	0.09	7.41	1.00	0.20	4	1.8	**5.61**
5	9	9	1.00	0.14	0.86	0.10	0.14	0.02	80.00	0.10	7.62	1.00	0.20	5	2	**5.62**
6	9	9	1.00	0.13	0.88	0.10	0.13	0.01	80.00	0.10	7.78	1.00	0.20	6	2.2	**5.58**
7	9	9	1.00	0.11	0.89	0.10	0.11	0.01	80.00	0.10	7.90	1.00	0.20	7	2.4	**5.50**
8	9	9	1.00	0.10	0.90	0.10	0.10	0.01	80.00	0.10	8.00	1.00	0.20	8	2.6	**5.40**
9	9	9	1.00	0.09	0.91	0.10	0.09	0.01	80.00	0.10	8.08	1.00	0.20	9	2.8	**5.28**

$m_{опт}$=5

2) Постройте график зависимости C(m).

Алгоритм обработки полученных экспериментальных данных:

1) Описать процесс согласно установленному заданию;
2) Предоставить скриншоты выполнения каждого этапа работы.

ФОРМА ОТЧЕТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ О ВЫПОЛНЯЕМОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчёт должен быть оформлен с помощью редактора MS Word, версии 97 и выше или LibreOffice(.doc, .rtf).

Параметры страницы:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 2 см;
- правое поле –1 см;
- переплет – 0 см;
- размер бумаги – А4;
- различать колонтитулы первой страницы.

Шрифт текста Times New Roman, 14 пунктов, через 1,5 интервала, выравнивание по ширине, первая строка с отступом 1,5 см. Номер страницы внизу, по центру, 14 пунктов.

Несложные формулы должны быть набраны с клавиатуры и с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе «MathType 6.0 Equation».

Отчёт обучающегося о выполненной лабораторной работе должен содержать:

- название дисциплины, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- дату выполнения и личную подпись;
- цель занятия;
- материально-техническое оборудование и материалы;
- последовательность действий проведения исследований;
- вывод о проделанной работе.

Форма титульного листа отчета представлена в приложении А.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц и графиков. Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответственную численную подстановку и произвести вычисления.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Оценка «отлично» выставляется студенту, если лабораторная работа выполнена правильно, в установленное преподавателем время или с опережением времени, при этом студентом выбран наиболее эффективный способ выполнения задания.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если лабораторная работа выполнена правильно, в установленное преподавателем время, типовым способом и допущено наличие несущественных недочетов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если при выполнении лабораторной работы допущены ошибки некритического характера и (или) превышено установленное преподавателем время.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если лабораторная работа не выполнена или при его выполнении допущены грубые ошибки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам выполнения лабораторных работ студент профессиональной программы переподготовки формирует следующие компетенции:

Код компетенции (или её части)	Показатели оценивания компетенций	Уровни сформированности компетенции		
		Пороговый (удовлетворительный)	Продвинутый (хорошо)	Высокий (отлично)
1	2	3	4	5
ОПК-2	1. Доля освоенных обучающимся знаний, умений, навыков от общего объема ЗУН, установленных в п.1.3РПД 2.Качество освоенных обучающимся знаний, умений, навыков 3.Умение применять знания, умения, навыки в типовых и нестандартных ситуациях	Знать: Типовые методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Уметь: Находить методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Владеть: базовыми методами решения стандартных задач профессиональной	Знать: Современные методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Уметь: Использовать основные методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Владеть: основными	Знать: Эффективные и современные методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Уметь: Использовать эффективные методы решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности Владеть: эффективными методами решения

		деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности	методами решения стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности	стандартных задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности
ПК-2	1.Доля освоенных обучающимся знаний, умений, навыков от общего объема ЗУН, установленных в п.1.3РПД 2.Качество освоенных обучающимся знаний, умений, навыков 3.Умение применять знания, умения, навыки в типовых и нестандартных ситуациях	Знать: Типовой порядок планирования и проведения исследований Уметь: планировать и проводить исследования.Владеть: Типовыми навыками планирования и проведения экспериментов	Знать: Порядок планирования и проведения исследований, Уметь: формулировать задачи, планировать ипроводить исследования Владеть: Основными навыками планирования и проведения исследований	Знать: Порядок планирования и проведения исследований, в том числе эксперименты и математическое моделирование Способы оценки достоверности результатов исследований Уметь: формулировать задачи, планировать и проводить исследования осуществлять обработку и оценку достоверности результатов исследований Владеть: Основными навыками планирования и проведения исследований, в том числе эксперименты и математическое моделирование

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
Форма титульного листа отчета обучающегося о выполненной практической работе

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Юго-Западный государственный университет»

Кафедра космического приборостроения и систем связи

ОТЧЕТ
о выполненной практической работе
по дисциплине «Теория телетрафика»
на тему «____»

Выполнил _____________ /Фамилия, инициалы/
(подпись)

Проверил _____________ /Фамилия, инициалы/
(подпись)

Курск 20___