

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 08.12.2025 06:11:19
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426019e5f1e44ca1bf73e843dfc4d851fd156d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова

« 14 » 11



Устойчивость

Методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения»

УДК 519.6, 519.7

Составитель: Е.Н. Иванова

Рецензент
к.т.н., доцент Т.Н. Конаныхина

Устойчивость: методические указания по подготовке к практическим и лабораторным занятиям по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для обучающихся, осваивающих ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемые по модели «перевернутого обучения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2025. – 25 с.:– Библиогр.: с. 24.

Методические указания структурированы по этапам выполнения заданий на лабораторных и практических занятиях по теме Устойчивость, применяемым при реализации ОПОП ВО по модели «перевернутого обучения».

Предназначены для обучающихся по очной форме обучения по ОПОП ВО 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, направленность (профиль, специализация) «Элементы и устройства вычислительной техники и информационных систем», реализуемым по модели «перевернутого обучения», осваивающих дисциплину «Математическое моделирование нелинейных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *14.11.25* Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,3.

Тираж *100* экз. Заказ *4255* Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практические занятия
по теме № 4 «Устойчивость»

Цель занятий – приобретение обучающимися практического опыта в применении знаний, полученных при самостоятельном освоении темы № 4 «Устойчивость», в производственных ситуациях.

Планируемые результаты обучения:

Знать:	Уметь:	Иметь опыт деятельности:
обязанности и ответственность студентов при реализации дисциплины по технологии «перевернутого обучения» (УК-6.1) роль технологии «перевернутого обучения» в формировании у студентов компетенций, необходимых для будущего профессионального роста (УК-6.2) преимущества технологии «перевернутого обучения» для самообразования и непрерывного образования в	рационально распределять собственное время и эффективно использовать свои ресурсы при освоении нового учебного контента (УК-6.1) проводить самоконтроль в пределах самостоятельно изученного учебного контента (УК-6.2) использовать различные инструменты самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) разрабатывать математические модели объектов различной природы;	в самоорганизации и саморазвитии при решении учебных задач большого объема (УК-6.1) в проведении самооценки по критериям, установленным преподавателем (УК-6.2) в применении эффективных технологий самообразования и непрерывного образования (УК-6.3) по разработке математических моделей объектов различной природы; по проведению экспериментальных исследований на основе

<p>течение жизни (УК-6.3) технологии разработки математических моделей объектов различной природы (ОПК-1.3) программно-технические платформы моделирования (ОПК-2.1) научные принципы и методы исследований (ОПК-4.1) основные методы исследований (ОПК-4.2) новые научные принципы для решения профессиональных задач (ОПК-4.3)</p>	<p>составлять планы экспериментальных исследований на основе математических моделей (ОПК-1.3) использовать различные инструменты для проведения экспериментов на основе математических моделей (ОПК-2.1) аргументированно выбрать метод научного познания (ОПК-4.1) использовать методы исследования на основе моделирования (ОПК-4.2) выбирать методы моделирования с учетом специфики решаемой задачи (ОПК-4.3)</p>	<p>математических моделей (ОПК-1.3) по моделированию функционирования объектов различной природы (ОПК-2.1) по проведению научных исследований для решения практических задач (ОПК-4.1) по использованию методов математического моделирования (ОПК-4.2) по применению принципов и методов математического моделирования (ОПК-4.3)</p>
---	---	---

Необходимое материально–техническое оборудование:
мультимедийная доска, компьютеры, мобильные устройства преподавателя и обучающихся.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 1

Анализ локальной устойчивости

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 2 (входной контроль знаний).

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 2.

3. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1. Входной контроль качества освоения обучающимися основных положений темы № 4 (входной контроль знаний)

1.1 Проверка опорных конспектов по теме № 4

Проверка опорных конспектов по теме организуется преподавателем различными способами: демонстрация всеми обучающимися своих опорных конспектов; зачитывание вслух одним обучающимся записей, внесенных в опорный конспект; работа в парах (студенты обмениваются друг с другом своими опорными конспектами и помогают друг другу дописать пропущенное) и т.д.

1.2 Тестирование по теме № 4

Ответьте на вопросы и выполните задания в тестовой форме по теме № 4.

2. Уточнение и (или) углубление отдельных вопросов по теме № 4

Консультация преподавателя

Студенты методом мозгового штурма формируют перечень вопросов, которые при самостоятельном освоении темы дома или при тестировании остались для них непонятными или показались сложными и (или) спорными. Преподаватель по результатам тестирования при необходимости добавляет в сформированный обучающимися список вопросы, которые, с его точки зрения, требуется уточнить или углубить.

Определяя с помощью поднятых рук количество студентов, считающих сложным конкретный вопрос из сформированного списка, преподаватель устанавливает вопросы, по которым сразу же проводит групповую консультацию.

Если в пояснениях нуждаются 1-2 человека, преподаватель индивидуально консультирует их в ходе практического занятия.

3. Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 4, изученному дома самостоятельно)

1. Вставьте на местах пропуска нужные термины и определения.

Решение $\bar{x}(t)$ системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| < \varepsilon,$$

иначе решение $\bar{x}(t)$ называется _____.

Решение $\bar{x}(t)$ системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____, если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 : \forall x^{(0)} \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| = 0$$

Решение $\bar{x}(t)$ системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____, если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| \leq Ke^{-\alpha t} \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\|$$

Множество $M \subset X$ называется _____ системы $\dot{x} = f(x)$,
если

$$\forall x^{(0)} \in M \quad \forall t \geq 0 \quad \varphi(t, x^{(0)}) \in M$$

Простейшим примером инвариантного множества является _____.

Точка $\bar{x} \in X$ называется _____ системы $\dot{x} = f(x)$, если

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}$$

Если \bar{x} — _____, то $f(\bar{x}) = 0$. Все _____ системы $\bar{x} \in X$
находятся из решения системы $f(x) = 0$

Пусть $\xi(t)$ является T -периодическим решением системы $\dot{x} = f(x)$:
 $\xi(t+T) = \xi(t)$. Множество $\Gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$
называется _____.

В фазовом пространстве цикл изображается в виде _____.

Инвариантное множество M системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____,
если справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) < \varepsilon.$$

Инвариантное множество M системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____,
если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 : \forall x^{(0)} \quad \rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) = 0$$

Множество $U = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) = 0 \right\}$ называется _____
инвариантного множества M .

Инвариантное множество M системы $\dot{x} = f(x)$ называется _____,
если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) \leq Ke^{-\alpha t} \rho(x^{(0)}, M)$$

Практическое задание для станции № 2 (общее)

Для модели популяции

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(-1 + x(t)) \end{cases}$$

определить положения равновесия и идентифицировать их тип, найти якобиан системы,

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Для модели «хищник-жертва»

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x}{x+1}y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y \end{cases}$$

найти точки покоя и определить их тип и устойчивость

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Дана нелинейная система

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - x^3 - 2y, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -x - 2y - \frac{y}{|y|+1} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = x - 4y - \arctg 2y \end{cases}$$

Найти ее положение равновесия; исследовать систему на устойчивость.

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 2

Текущий контроль успеваемости по теме № 4.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме лабораторной работы.

Шкала и критерии оценивания приведены в оценочных средствах по дисциплине «Математическое моделирование нелинейных систем» для данной ОПОП ВО, которые размещены на официальном сайте университета по ссылке <https://swsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Лабораторная работа № 1

Анализ устойчивости нелинейных систем

Теоретическое обоснование

Рассмотрим нелинейную динамическую систему:

$$\dot{x} = f(x)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$. Следовательно, $x \equiv 0$ является положением равновесия данной системы. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
2. $V(0) = 0$.

Функция $V(x)$, удовлетворяющая приведенным условиям, называется *функцией Ляпунова*. Производной функции $V(x)$ будем называть функцию $\dot{V}(x)$. Градиент $grad(V(x))$ – вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания функции $V(x)$. Если скалярное произведение отрицательно, значит, угол между двумя векторами $\varphi > \pi / 2$.

Рассмотрим скалярный случай $x \in \mathbb{R}$ и выберем в качестве $V(x) = x^2$. Данная функция является функцией Ляпунова, график которой изображен на рис. 1. Предположим, что $\text{grad}(V(x), \dot{x}) < 0$.

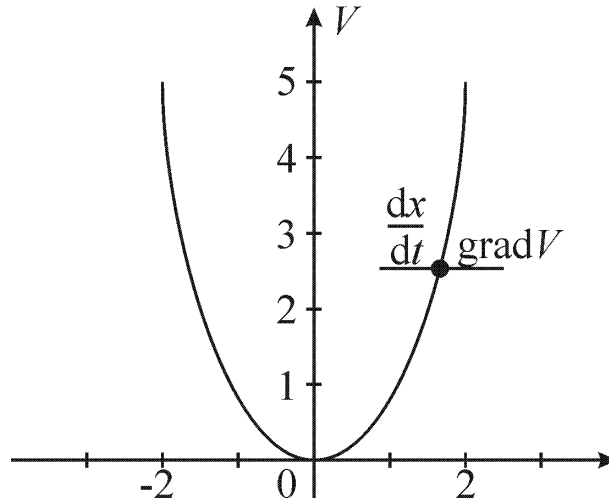


Рисунок 1 – Функция Ляпунова

Для $x > 0$, $\text{grad}(V(x)) > 0$, т.е. градиент функции Ляпунова направлен вправо. Следовательно, вектор \dot{x} направлен влево, т.е. $\dot{x} < 0$, а, значит, функция $x(t)$ убывает.

Для $x < 0$, $\text{grad}(V(x)) < 0$, т.е. градиент функции Ляпунова направлен влево. Следовательно, вектор \dot{x} направлен вправо, т.е. $\dot{x} > 0$, а, значит, функция $x(t)$ возрастает.

Таким образом, требование $\text{grad}(V(x), \dot{x}) < 0$ приводит к тому, что x со временем достигнет нуля, то есть положения равновесия заданной системы. Если удастся найти такую функцию Ляпунова, что $V(x) < 0$ для всех x , кроме нуля, это будет означать, что любое решение системы стремится к нулю, а значит, $x \equiv 0$ глобально асимптотически устойчиво. По аналогии работает и общий случай $x \in \mathbb{R}^n$.

Имеет место следующая теорема. Если существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то положение равновесия $x^* \equiv 0$ нелинейной системы является глобально асимптотически устойчивым.

Если существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что $\dot{V}(x) \leq 0$ $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, то положение равновесия $x^* \equiv 0$ нелинейной системы является локально устойчивым в области Ω .

Помимо метода функций Ляпунова, существуют также другие методы исследования глобальной устойчивости нелинейных систем.

Для определения устойчивости нулевого решения в системах типа

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = c^T x, \quad \xi = \varphi(\sigma)$$

часто используют два критерия: *круговой критерий* и *критерий Попова*. Причем первый критерий (круговой критерий) устанавливает так называемую экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Определение экспоненциальной устойчивости следующее.

Если $\exists c > 0, \varepsilon > 0$ такие, что $\forall x(t)$ указанной выше системы и $\forall t \geq t_0$ выполнено $\|x(t)\| \leq c \|x(t_0)\| e^{-\varepsilon(t-t_0)}$, то нулевое решение системы является *экспоненциально устойчивым*.

Это определение означает, что любое решение системы стремится к нулю с экспоненциальной скоростью.

Круговой критерий

Пусть выполнены условия:

– нелинейность $\varphi(\sigma)$ в системе удовлетворяет при $\sigma \neq 0$ следующим неравенствам:

$$\mu_1 \leq \varphi(\sigma) / \sigma \leq \mu_2, \quad \forall t \in (0, \infty)$$

т.е. является секторной;

– матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений;
– для некоторого $\mu_0 \in [\mu_1; \mu_2]$ линейная система, $\xi = \mu_0 \sigma$ асимптотически устойчива;

– выполнено «частотное условие»

$$\operatorname{Re} \left\{ [1 + \mu_1 W(i\omega)] [1 + \mu_2 W(i\omega)] \right\} > 0, \quad \omega \in [-\infty; +\infty].$$

Функция $W(i\omega)$ определяется формулой:

$$W(i\omega) = c^T (A - i\omega I)^{-1} b$$

Тогда система глобально экспоненциально устойчива.

Критерий Попова

Пусть выполнены условия:

– нелинейность $\varphi(\sigma)$ в системе удовлетворяет при $\sigma \neq 0$ следующим неравенствам:

$$0 \leq \varphi(\sigma) / \sigma \leq \mu_0 \leq \infty, \quad \forall t \in (0, \infty);$$

– матрица A является устойчивой;

– для некоторого ν и $\forall \omega \in [0; +\infty]$ выполнено «частотное условие»

$\mu_0^{-1} + \operatorname{Re}\{[1 + i\omega\nu]W(i\omega)\} > 0$, где функция $W(i\omega)$ определяется формулой:

$$W(i\omega) = c^T (A - i\omega I)^{-1} b$$

Тогда система глобально асимптотически устойчива.

Задание 1

Дана нелинейная система.

Найти ее положение равновесия. Линеаризовать систему около одного из положений равновесия, исследовать полученную систему на устойчивость. Доказать устойчивость исходной системы с помощью метода функций Ляпунова. Построить графики исходной и линеаризованной систем.

Вариант 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - x^3 - 2y, \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -x - 3y - \frac{y}{|y|+1} \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = x - 2y - \operatorname{arctgy} \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 2y - \frac{y}{|y|+3} \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - x^5 + y, \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - \frac{2x}{|x|+4}, \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y - \arctg x, \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - \frac{x}{|x|+2}, \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - \frac{x}{|x|+2}, \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - \frac{2y}{|y|+4}, \\ \dot{y} = -4x - y \end{cases}$$

Пример выполнения работы

Дана нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Решение

Найдем положения равновесия системы из условия $f(x^*) = 0$:

$$\begin{cases} -x^3 - 2y = 0, \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^* = \pm 2 \begin{bmatrix} i \\ 2i \end{bmatrix}$$

Линеаризуем исследуемую систему в окрестности положения равновесия:

$$J(x) = \begin{bmatrix} -3x^2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \dot{x} = J|_{x=x^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x$$

Определим тип положения равновесия x^* . для этого найдем собственные числа матрицы A и исследуем их:

$$\det\{\lambda I - A\} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 4 = 0.$$

Получаем:

$$\lambda_{1,2} = -0,5 \pm 0,5\sqrt{5}i$$

Следовательно, положение равновесия – устойчивый фокус.

Введем функцию Ляпунова $V(x) = x^2 + y^2$ для исследования глобальной устойчивости заданной системы.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-x^3 - 2y) + 2y(2x - y) = \\ &= -2x^4 - 4xy + 4xy - 2y^2 = -2x^4 - 2y^2 < 0 \end{aligned}$$

Из этого следует, что для введенной функции $V(x) = x^2 + y^2$ и заданной системы выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости, значит, нулевое решение системы глобально асимптотически устойчиво.

Графики исходной и линеаризованной систем изображены на рис. 2.

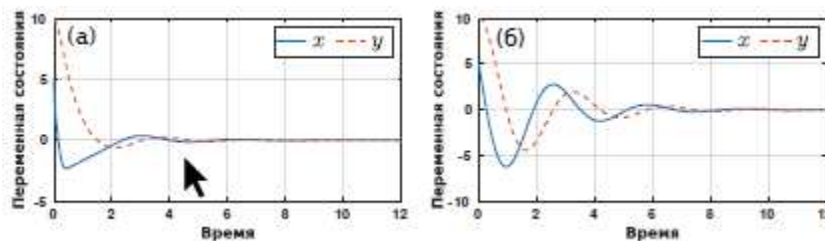


Рисунок 2 – Динамика заданной динамической системы: линеаризованная (а), исходная (б)

Задание 2

Дана нелинейная система.

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = cx, \quad \xi = \varphi(\sigma, t)$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость заданной системы.

Вариант 1

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sin \sigma$$

Вариант 2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{1 + e^{-\sigma}} + \frac{1}{2}$$

Вариант 3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}$$

Вариант 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 2}$$

Вариант 5

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \arctg \sigma$$

Вариант 6

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sin 0,5\sigma$$

Вариант 7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{1 + e^{-\sigma}} - \frac{1}{2}$$

Вариант 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^{0,5\sigma} - e^{-0,5\sigma}}{e^{0,5\sigma} + e^{-0,5\sigma}}$$

Вариант 9

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 3}$$

Вариант 10

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \arctg 2\sigma$$

Пример выполнения работы

Дана нелинейная система

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \sigma = c^T x, \xi = \varphi(\sigma, t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \arctg \sigma$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость заданной системы.

Решение

Проверим выполнение «секторного условия»:

$$\mu_1 \leq \varphi(\sigma) / \sigma \leq \mu_2, \sigma \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$$

$$\mu_1 \sigma \leq \arctg(\sigma) \leq \mu_2 \sigma.$$

Производная по σ :

$$\mu_1 \leq \frac{1}{1 + \sigma^2} \leq \mu_2$$

Отсюда получаем, что $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$.

«Секторное условие» выполнено.

Найдем собственные значения матрицы A :

$$\det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3}$$

Матрица не имеет чисто мнимых собственных значений, значит, условие выполнено.

Асимптотическая устойчивость заданной системы при $\xi = \mu_0 \sigma$. Так как значение μ_0 выбирается из интервала $[\mu_1; \mu_2]$, то можно выбрать $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Тогда заданная система будет иметь вид $\dot{x} = Ax$. Собственные значения матрицы A $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3}$. $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -3 < 0$, следовательно, матрица A устойчива, следовательно, линейная система асимптотически устойчива.

Проверим «частное условие».

Найдем передаточную функцию $W(\lambda)$. По определению:

$$W(\lambda) = c^T (A - \lambda I)^{-1} b$$

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 + 6\lambda + 12} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -2 \\ 2 & -\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$W(\lambda) = \underset{c^T}{[1 \quad 0]} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + 6\lambda + 12} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -2 \\ 2 & -\lambda - 4 \end{bmatrix} \cdot \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{-\lambda - 2}{\lambda^2 + 6\lambda + 12}$$

Возьмем $\lambda = i\omega$ и проверим выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}\{[1 + \mu_1 W(i\omega)][1 + \mu_2 W(i\omega)]\} > 0, \quad \omega \in [-\infty; +\infty].$$

Так как $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 1$, то должно быть выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re}\{[1 + W(i\omega)]\} > 0, \quad \omega \in [-\infty; +\infty] \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\{[1 + W(i\omega)]\} = \operatorname{Re}\left\{\left[1 + \frac{-2 - i\omega}{-\omega^2 + 6i\omega + 12}\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{-\omega^2 + 5i\omega + 10}{-\omega^2 + 6i\omega + 12}\right]\right\} = \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{(-\omega^2 + 5i\omega + 10)(-\omega^2 - 6i\omega + 12)}{(-\omega^2 + 12)^2 - (6i\omega)^2}\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{\omega^4 + 8\omega^2 + 120 + i\omega^3}{(-\omega^2 + 12)^2 + 36\omega^2}\right]\right\} = \frac{\omega^4 + 8\omega^2 + 120}{(-\omega^2 + 12)^2 + 36\omega^2} > 0.$$

Числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall \omega$. Все условия теоремы выполнены, следовательно, заданная система экспоненциально устойчива.

Задание 3

Дана нелинейная система.

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = cx, \quad \xi = \varphi(\sigma)$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость заданной системы.

Вариант 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \arctg 2\sigma$$

Вариант 2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{\sigma^3}{3}$$

Вариант 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \begin{cases} 2\sigma, & \text{при } |\sigma| < 1; \\ 2\text{sign}\sigma, & \text{при } |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 3}$$

Вариант 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{e^{0,5\sigma} - e^{-0,5\sigma}}{e^{0,5\sigma} + e^{-0,5\sigma}}$$

Вариант 6

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \text{arctg}\sigma$$

Вариант 7

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{\sigma^5}{5}$$

Вариант 8

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \begin{cases} \sigma, & \text{при } |\sigma| < 1; \\ \text{sign}\sigma, & \text{при } |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 9

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 2}$$

Вариант 10

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}}$$

Пример выполнения задания

Дана нелинейная система.

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = cx, \quad \xi = \varphi(\sigma)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma)$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость заданной системы.

Решение

Проверим выполнение «секторного условия»:

$$0 \leq \varphi(\sigma) / \sigma \leq \mu_0 \leq +\infty, \sigma \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$$

$$0 \leq \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma) \leq \mu_0 \sigma \leq \infty.$$

Производной в точке $\sigma = 0$ не существует, поэтому рассмотрим предел в нуле справа:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \left(\sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma) \right)'_{\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \left(\sqrt{|\sigma|} \right)'_{\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} = \infty \Rightarrow \mu_0 = \infty$$

Сектор бесконечен, значит, «секторное условие» выполнено.

Определим устойчивость матрицы A :

Найдем собственные значения матрицы A :

$$\det \{ \lambda I - A \} = \lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0.$$

Получаем:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$$

Значит, матрица A устойчива.

Проверим «частотное условие». Найдем передаточную функцию $W(\lambda)$. По определению:

$$W(\lambda) = c^T (A - \lambda I)^{-1} b$$

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 7} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \\ 1 & -\lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$W(\lambda) = \underset{c^T}{[0 \quad 1]} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 7} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \\ 1 & -\lambda - 3 \end{bmatrix} \cdot \underset{b}{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{\lambda + 3}{\lambda^2 + 5\lambda + 7}$$

Возьмем $\lambda = i\omega$ и проверим выполнение неравенства

$$\mu_0^{-1} + \operatorname{Re} \left[(1 + i\omega\nu) W(i\omega) \right] > 0, \forall \omega \in [0; +\infty].$$

Так как $\mu_0^{-1} \Big|_{\mu_0 = \infty} = 0$, то должно быть выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} \left[(1 + i\omega\nu) W(i\omega) \right] > 0, \omega \in [0; +\infty] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[(1+i\omega v)W(i\omega)] &= \operatorname{Re}\left[(1+i\omega v)\frac{i\omega+3}{-\omega^2+5i\omega+7}\right]= \\
&= \operatorname{Re}\left[\frac{-v\omega^2+(1+3v)i\omega+3}{-\omega^2+5i\omega+7}\right]= \\
&= \operatorname{Re}\left[\frac{-v\omega^4+(2+8v)\omega^2+21-(1-2v)i\omega^3-(8-21v)i\omega}{(7-\omega^2)^2+25\omega^2}\right]= \\
&= \frac{v\omega^4+(2+8v)\omega^2+21}{(\omega^2-7)^2+25\omega^2} > 0
\end{aligned}$$

При $v \geq 0$ числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall \omega$. Все условия теоремы выполнены, следовательно, заданная система асимптотически устойчива

ПЛАН ЗАНЯТИЯ № 3

Устойчивость периодических решений - циклов

1. Выполнение обучающимися практических заданий по технологии ротации станций.
2. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися.

1 Выполнение обучающимися практических заданий

Аудитория разделена на 4 станций.

Учебная группа делится на 4 малые группы, в каждой группе – 3-5 человек.

На станции № 1 группа работает с преподавателем (ответы обучающихся на вопросы преподавателя по изучаемой теме и групповая и (или) индивидуальная консультация).

На станциях № 2-3 группы самостоятельно выполняют одно общее практическое задание.

На станции № 4 все члены группы выполняют индивидуальные, но однотипные задания.

Задания на станциях разные. На данном практическом занятии все задания направлены на понимание основных положений темы; применение знаний в производственной ситуации; анализ информации; оценку объектов.

Время работы группы на одной станции – 15 минут.

По истечении указанного времени группы переходят по часовой стрелке на следующую станцию для выполнения другого практического задания.

В течение практического занятия каждая группа проходит все станции и выполняет все практические задания.

Вопросы для работы на станции № 1 с преподавателем (по содержанию темы № 4, изученному дома самостоятельно)

Заполните пропуски

Графиком T -периодического решения будет _____ фазовая кривая – цикл Γ .

Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же _____ кривой. Цикл Γ – инвариантное множество системы $\dot{x} = f(x)$.

Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом.

Здесь возможны следующие варианты:

а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к _____; другими словами, фазовая траектория _____;

б) решение движется вдоль цикла и формирует _____ фазовую кривую – новый цикл, расположенный рядом с исходным;

в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая _____ по спирали.

Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла обычно выделяют следующие:

а) _____ цикл;

б) _____ цикл;

в) _____ цикл.

Решение $\xi(t)$ называется _____, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-\alpha t} \|\Delta x_0\|$$

для любого решения $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Матрица $Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)]$, составленная из линейно независимых решений системы $\dot{z} = A(t)z$, где $A(t)$ – произвольная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, с начальными условиями $z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^T$, $z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^T$, ..., $z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^T$, называется _____ матрицей.

Для _____ матрицы справедливо тождество $Z(t+T) = Z(t) \cdot Z(T)$.

Матрица $B = Z(T)$, задающая отображение за период T системы $\dot{z} = A(t)z$, называется *матрицей* _____.

Любое решение системы $\dot{z} = A(t)z$ в моменты времени, кратные периоду, выражается с помощью матрицы _____ через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT) \cdot z(0) = Z((k-1)T) \cdot Z(T) \cdot z(0) = \dots = B^k z(0)$$

Собственные значения ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы _____ $B = Z(T)$ называют *мультипликаторами* системы $\dot{z} = A(t)z$.

Собственные числа λ_i матрицы $\Lambda = \frac{1}{T} \ln B$ – _____ – связаны с мультипликаторами соотношениями:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i T}.$$

Критерием _____ устойчивости решения системы $\dot{z} = A(t)z$ является условие $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, что эквивалентно условию $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = \dots$.

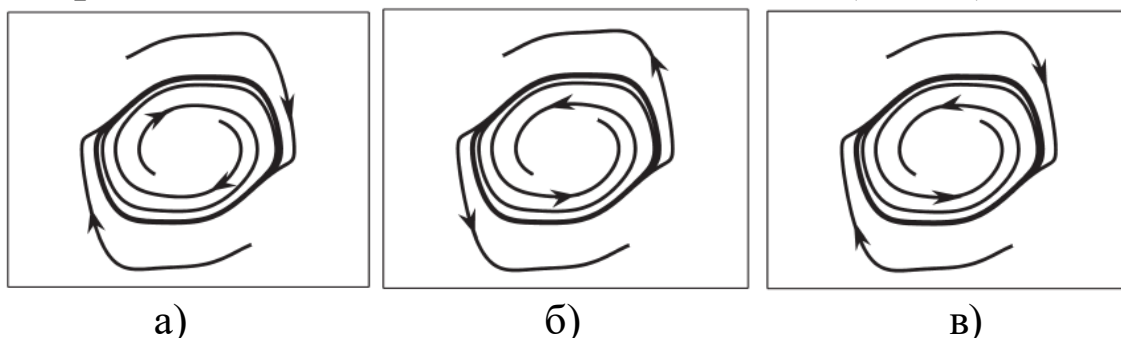
Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости _____.

Сформулируйте теорему Андронова-Витта.

Геометрический смысл мультипликатора ρ_2 для случая, когда цикл на плоскости.

Малость ρ_2 означает высокую степень _____. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл _____. При $\rho_2 > 1$ цикл _____. Случай $\rho_2 = 1$ – _____.

Практическое задание для станции № 2 (общее)



а)

б)

в)

Рисунок 2 – Циклы

На рисунке представлены фазовые кривые трех случаев динамики снаружи и внутри цикла. Идентифицируйте их.

Практическое задание для станции № 3 (общее)

Определите по собственным числам матрицы линеаризации A в окрестности особых точек тип этих точек:

- 1) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и отрицательны;
- 2) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и положительны;
- 3) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и разных знаков;
- 4) ρ_1, ρ_2 – комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью;
- 5) ρ_1, ρ_2 – комплексно сопряженные с положительной вещественной частью;
- б) ρ_1, ρ_2 – чисто мнимые.

Практическое задание для станции № 4 (индивидуальные)

Построить матрицы линеаризации для всех имеющихся положений равновесия непрерывных динамических систем и определить тип положений равновесия:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = -2 + y^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$4) \ddot{x} + 10x = 0$$

$$5) \ddot{x} - 4\dot{x} + 100x = 0$$

$$6) \ddot{x} - 10x = 0$$

$$7) \ddot{x} + 4\dot{x} - 100x = 0$$

$$8) \ddot{x} = -25 \sin x$$

$$9) \ddot{x} - \dot{x}^2 = -100x^2$$

4. Проверка практических заданий, выполненных обучающимися

Защита решений

Каждая группа озвучивает свое решение практического задания той станции, на которой она находится в конце занятия. Другие группы могут внести необходимые дополнения, задать вопросы на уточнение или оспорить предлагаемое решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башкирцева, И. А. Компьютерное моделирование нелинейной динамики : Непрерывные модели : учеб. пособие / И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 84 с.

2. Дорошин, А. В. Математическое моделирование в нелинейной динамике: учеб. пособие / А. В. Дорошин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 192 с.

3. Плотников, С. А. Математическое моделирование систем управления / С. А. Плотников, Д.М. Семенов, А.Л. Фрадков. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 193 с.