МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«_4_» 03 ____________ 2019 г.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ БИСЕКЦИИ, НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ, ХОРД, СЕКУЩИЙ), ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Методические указания к лабораторной работе №7
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Решение нелинейных уравнений методами бисекции, Ньютона (касательных, хорд, секущих): методические указания к лабораторной работе №7 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 12 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 147. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ БИСЕКЦИИ, НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ, ХОРД, СЕКУЩИХ), ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории численного решения нелинейных уравнений.
2. Изучение основных методов численного решения нелинейных уравнений.
3. Разработка программ и решение на ЭВМ нелинейных уравнений.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные определения. Под решением нелинейного уравнения:

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

понимают нахождение корней этого уравнения, то есть определения значений $\bar{x}$, при которых выполняется условие: $f(\bar{x})=0$.

Корень $\bar{x}$ называется простым, если $f'(\bar{x})\neq 0$. Корень $\bar{x}$ называется кратным, если $f'(\bar{x})=0$. Целое число m называется кратностью корня $\bar{x}$, если $f^{(k)}(\bar{x})=0$ для всех k=1,2,...,m-1, а $f^{(m)}(\bar{x})\neq 0$.

Решение уравнения (2.1) проводится в два этапа: этапа локализации корней и этапа итерационного уточнения корней. На этапе локализации выделяется отрезок [a,b], внутри которого находится только один корень.

На этапе итерационного уточнения корней задается точность вычислений ε и используется итерационный процесс (итерационная формула), в результате которого вычисляются значения последовательности: $x_0, x_1, \ldots, x_n \to \bar{x}$. При выполнении условия $|x_n-\bar{x}|\leq\varepsilon$ итерационный процесс заканчивается.

Если в итерационной формуле для вычисления приближения x_n используется только значение x_{n-1}, то метод называют одношаговым, и k-шаговым, если используется k предыдущих приближений: $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}$.

Скорость сходимости итерационного процесса определяют с помощью следующего выражения, которое называется **критерием сходимости** итерационного процесса:

$$|x_{n+1}-\bar{x}|\leq c\cdot|x_n-\bar{x}|^p,\quad \begin{cases} p=1, & 1>c>0; \\ p>1, & c>0. \end{cases} \tag{2.2}$$

где число p называют порядком сходимости метода. Если p=1- сходимость линейная, p>1- сверх линейная сходимость, p=2- сходимость квадратичная. **Критерий окончания.** Точное значение корня мы не знаем. Когда же закончить итерационный процесс, чтобы утверждать, что $|x_{n+1} - \bar{x}| \le \varepsilon$?

Для каждого итерационного процесса существует свой критерий окончания в виде неравенства: $|x_{n+1} - x_n| \le \delta(\varepsilon)$, при выполнении которого всегда имеет место неравенство: $|x_{n+1} - \bar{x}| \le \varepsilon$.

Интервалом неопределенности корня называется интервал $\left[\bar{x} - \tilde{\varepsilon}, \bar{x} + \tilde{\varepsilon}\right]$, в котором любое значение может являться корнем уравнения. Появление такого интервала связано с погрешностью вычислений. Величина $\tilde{\varepsilon}$ определяется из условия:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\bar{\Delta}y}{|f'(\bar{x})|}, \tag{2.3}$$

где $\bar{\Delta}y$ - абсолютная предельная погрешность при вычислении значения функции y=f(x).

Так как значение $\tilde{\varepsilon}$ определяет абсолютную предельную погрешность вычисления значения корня $\bar{\Delta}\bar{x} = |\bar{x} \pm \tilde{\varepsilon} - \bar{x}| = \tilde{\varepsilon}$ (результата), которая возникла из-за погрешности вычисления значений функции $\bar{\Delta}y$ (.входных данных для задачи поиска корня), то величина $\nu_\Delta = \frac{\bar{\Delta}\bar{x}}{\bar{\Delta}y} = \frac{1}{|f'(\bar{x})|}$ называется абсолютным числом обусловленности задачи нахождения корня.

2. Методы решения нелинейных уравнений. Приведем основные методы решения нелинейных уравнений:

а) метод бисекции. Выбирается отрезок [a,b], на концах которого функция имеет разные знаки, следовательно, корень находится внутри этого отрезка. Этот отрезок делится пополам и вновь выбирается отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки и т.д. Таким образом, после n итераций имеем отрезок локализации $[a_n,b_n]$ длина которого в 2^n раз меньше первоначального отрезка [a,b]. Полагая $x_n=(b_n+a_n)/2$ имеем:

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Данный метод обладает невысокой скоростью сходимости, но не требует чтобы функция была непрерывной. Однако этот метод нельзя использовать для поиска кратных корней.

б) метод простой итерации. Уравнение f(x)=0 преобразуют к виду удобному для организации итерации: x=φ(x), при этом функция φ(x) называется итерационной функцией. На отрезке локализации [a,b] выбирается начальное приближение $x=x_0$ и вычисляется $x_1=\varphi(x_0)$. Продолжая этот процесс имеем:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, то получаем равенство: $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, где $\bar{x}$ - корень. Метод сходится при $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in [a,b]$, а при $|\varphi'(x)| > 1,\ x \in [a,b]$ - расходится.

Критерий окончания:

$$(x_{n+1} - x_n) < \frac{q}{1-q}\varepsilon,\ \ q = |\varphi'(\bar{x})|. \qquad (2.4)$$

в) модифицированный метод простой итерации. Итерационная функция имеет вид

$$\varphi(x) = x - \lambda\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Итерационная формула модифицированного метода простой итерации и критерий окончания записываются следующим образом:

$$x_{n+1} = x - \lambda\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \qquad (2.5)$$

г) метод касательных (метод Ньютона). Выбирается точка $x_0 \in [a,b]$ и в ней проводится касательная к графику функции $y=f(x)$ и за новое приближение x_1 принимается точка, в которой касательная пересекает ось OX и т.д. В итоге получаем итерационную формулу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.6)$$

Необходимым и достаточным условием сходимости метода Ньютона на отрезке локализации $x \in [a,b]$ являются:

$f'(x)\neq 0$, - (необходимое условие); (2.7)

$f''(x)\neq 0$ - (достаточное условие);

т.е. знако постоянство первой и второй производной на отрезке локализации.

д) метод хорд (модификация метода Ньютона). На отрезке [a,b] производную касательную в формуле (2.6) заменяют приближенным равенством:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n},$$

т.е. хордой. В итоге получаем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n). \tag{2.8}$$

е) метод секущих (модификация метода Ньютона). Если теперь точку b в формуле (2.8) заменить на точку x_{n-1}, то получим формулу метода секущих:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot f(x_n). \tag{2.9}$$

Метод секущих является двух этапным.

Все методы Ньютона (**касательных, хорд и секущих**) имеют **квадратичную** сходимость.

Критерий окончания методов Ньютона:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, \tag{2.10}$$

III. ЗАДАНИЕ

1. Численно решить нелинейное уравнение из таблицы заданий для указанного в ней метода решения и указанной точности.
2. Оценить интервал неопределенности поиска корня, считая, что погрешность округления $\Delta \sim 10^{-10}$ и сравнить его с задаваемой точностью решения.
3. Проверить сходимость указанного метода на отрезке локализации.
4. Для указанного численного метода записать все соотношения, которые необходимы для разработки алгоритма программы.
5. Написать программу и рассчитать на ЭВМ значение корня указанного уравнения.
6. Разработать программу для решения данного уравнения методом бисекции. Рассчитать на ЭВМ значение корня. Сравнить результаты двух методов.

IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Решить методами секущих и модифицированным методом простой итерации нелинейное уравнение: e^x-3-cos(x)=0, с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. Предельная абсолютная погрешность вычислений значений функции y=e^x-3-cos(x) равна 10^{-10}.

1. Проводим этап локализации. Так как $|\cos(x)| \le 1$, то при x>2 имеем f(x)>0, а при x=0 имеем f(x)<0. Следовательно, корень находится на отрезке [0,2].

2. Оцениваем интервал неопределенности $\widetilde{\varepsilon}$ на отрезке [0,2]. Согласно (2.3) имеем:

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\overline{\Delta}}{|f'(\bar{x})|} \le \frac{\overline{\Delta}}{\underbrace{\min}_{x \in [0,2]} |f'(x)|}, \tag{4.1}$$

где $f'(x)=e^x+\sin(x)$.

Получаем $f'(0)=1$; $f'(2)=4$. Следовательно, $\underbrace{\min}_{x \in [0,2]} f(x)=1$ и $\widetilde{\varepsilon} \approx 10^{-10}$.

Так как интервал неопределенности $\widetilde{\varepsilon} \approx 10^{-10}$ меньше погрешности поиска корня $\varepsilon=10^{-4}$, то мы можем найти этот корень с заданной точностью.

3. Для приближенного решения уравнения используем формулу секущих (2.9):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \tag{4.2}$$

где $f(x)=e^x-3-\cos(x)$.

Проверяем условия сходимости (2.7):

$f'(x) = e^x + \sin\ x > 0,\ x \in [0,2];$

$f''(x) = e^x + \cos\ x > 0,\ x \in [0,2].$

Так как необходимое и достаточное условия сходимости методов Ньютона выполнены на всем отрезке локализации, то для решения уравнения можем использовать метод секущих.

4. Выбираем начальные значения $x_0=0.1$, $x_1=0.3$ и производим вычисления по итерационной формуле (4.2). Итерационный процесс завершаем при выполнении условия окончания для методов Ньютона (2.10):

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$

5. Решаем ту же задачу модифицированным методом простой итерации. Так же как и в методе секущих вначале задаем начальное приближение $x_0=0.1$, $x_1=0.3$, а далее используем формулы (2.5)

$$x_{n+1} = x - \lambda \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

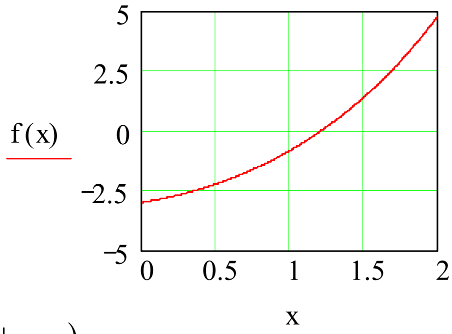
$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$

6. Пример текста программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для нахождения корня уравнения методом секущих и модифицированным методом простой итерации:

Поиск корня уравнения методом секущих

$$f(x) := e^{x} - 3 - \cos(x)$$

$$\varepsilon := 10^{-7}$$



$a := 0 \qquad b := 2$

$x0 := 0.1 \qquad x1 := 0.3$

$$R(f,a,b,x0,x1,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ \text{while } \left(|x1 - x0| > \varepsilon\right) \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x1 - \dfrac{(x0 - x1)\cdot f(x1)}{f(x0) - f(x1)} \\ x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\ y_0 \leftarrow k \\ y_1 \leftarrow x1 \\ y \end{array} \right.$$

$$R(f,a,b,x0,x1,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1.2098915 \end{pmatrix}$$

y_0 - количество итераций
y_1 - значение корня

$$\text{root}(f(x), x, a, b) = 1.2098915$$

Проверка встроенной
программой MATHCAD

Поиск корня уравнения модифицированным методом простой итерации

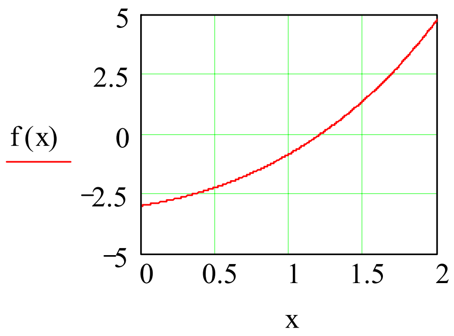
$f(x) := e^x - 3 - \cos(x)$ $\qquad f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \to \exp(x) + \sin(x)$

$\lambda := 0.9$

$ff(x) := x - \lambda \left(\frac{f(x)}{f1(x)} \right)$

$a := 0 \qquad b := 2$

$x0 := 0.1 \qquad \varepsilon := 10^{-9}$



$$R(ff, a, b, x0, e) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ x1 \leftarrow x0 + 0.2 \\ \text{while } (|x1 - x0| > \varepsilon) \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow ff(x0) \\ x0 \leftarrow x \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\ y_0 \leftarrow k \\ y_1 \leftarrow x1 \\ y \end{array} \right.$$

Задаем точку x1, чтобы использовать оператор while

$$R(ff, a, b, x0, e) = \begin{pmatrix} 22 \\ 1.2098915 \end{pmatrix}$$

y_0 - количество итераций

y_1 - значение корня

$root(f(x), x, a, b) = 1.2098915$

Проверка встроенной программой MATHCAD

```
program lab7;
    {Решение линейных уравнений методом секущих}
    {a,b - отрезок локализации}
    {x0 ,x1 - нулевое и первое приближения значения корня}
    {e - точность решения}
    {x - новое приближение корня}
var a,b,x0,x1,e,x of real;
var i: integer;
        function f(y : real) : real;
        {функция для заданного нелинейного уравнения}
```

```
            begin
              f:=exp(y)-3-cos(y);
            end;      {f}
      begin
        writeln('Введите отрезок локализации a,b');
      readln (a,b);
        writeln('Введите задаваемую точность e');
      readln (e);
        writeln('Введите нулевое x0 и первое приближения x1');
      readln (x0,x1);
         i:=0;
         while abs(x1-x0)>=e do
           begin
            x:=x1-((x0-x1)*f(x1)/(f(x0)-f(x1));
            if x>=b then x:=b;
            if x<=a then x:=a;
            x0:=x1;
            x1:=x;
            i:=i+1;
           end;
        writeln('Решение нелинейного уравнения методом секущих');
      writeln('корень x=',x,'     точность e=',e,'      число итераций i=',i);
end.
```

6. Заполняем таблицу:

Метод	Корень	Точность	Число итераций
секущих	1,2098915	10^{-7}	9
итераций	1,2098915	10^{-7}	22

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Пункты 1-4, а также таблица должны, быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI.КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется корнем уравнения?
2. Определение простого и кратного корня.
3. Основные этапы поиска корня.
4. Определение скорости и порядка сходимости численного метода поиска корня.
5. Определение интервала неопределенности корня.
6. Число обусловленности задачи поиска корня нелинейного уравнения.
7. Метод бисекции.
8. Метод простой операции.
9. Методы Ньютона и его модификации.
10. Критерий окончания метода простой итерации для задачи поиска корня.
11. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.
12. Определение якобиана.
13. Критерий окончания методов Ньютона.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№	f(x)	Метод	Точность
1	$\ln(x)-1/(1+x^2)$	хорд	10^{-5}
2	$\ln(\ln(x))-x^2$	касательных	10^{-6}
3	$x-1/\sqrt{e^x}$	простой итерации	10^{-4}
4	$x^4-13x^2+36-(1/x)$	секущих	10^{-5}
5	$2x^2-x^4-1-\ln(x)$	хорд	10^{-6}
6	$x^3-3x-2e^{-x}$	касательных	10^{-4}
7	$\sin(x^2)-6x+1$	простой итерации	10^{-5}
8	$\cos(x^2)-10x$	секущих	10^{-5}
9	$\ln^2 x-(1/x)$	хорд	10^{-4}

№	f(x)	Метод	Точность
10	$\operatorname{arctg}(x) - \ln(x)$	простой итерации	10^{-6}
11	$\ln(1+x)/(1-x) - \cos(x^2)$	касательных	10^{-4}
12	$e^x - 3 - \cos(x)$	секущих	10^{-5}
13	$e^x - \operatorname{arctg}(x)$	хорд	10^{-5}
14	$x - \operatorname{arctg}(1/x)$	касательных	10^{-4}
15	$x - 1/(x^4 - 13x^2 + 36)$	простой итерации	10^{-6}
16	$x^3 - 3x^2 - 2$	касательных	10^{-4}
17	$\sin^2(x) - x^3 + 1$	простой итерации	10^{-5}
18	$\cos^2(x-1) + x^5$	секущих	10^{-5}
19	$\ln(x+1)^2 - (1/(x+1)^2)$	хорд	10^{-4}
20	$\operatorname{arctg}(x) - \ln((x+1)^2 + 1)$	простой итерации	10^{-6}
21	$\ln(1+x^2)/(1+x^4) - \cos(x^2)$	касательных	10^{-4}
22	$e^{x^2} - 3x^3 - \cos^2(x)$	секущих	10^{-5}
23	$e^{x+1} - \operatorname{arctg}(x^3 + x - 2)$	хорд	10^{-5}
24	$x^3 - 2\operatorname{arctg}(1/x)$	касательных	10^{-4}
25	$x^5 - 5/(x^4 + x^2 + 1)$	простой итерации	10^{-6}