МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«_11_» _03_ ________ 2019 г.

Геометрия и топология:
методические указания к практическим занятиям для бакалавров направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Курск 2019

УДК 514.12
Составители:П.С. Зыков, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, с.н.с. В.И. Дмитриев

Геометрия и топология: методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. П.С. Зыков, Ю.А. Халин. Курск, 2019. 89 с. Библиогр.: с. 89.

В методических указаниях описываются основные экономико-математические методы и модели. Изложены краткие теоретические сведения, приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 3,18 п.л . Уч.-изд. л. 2,56 . Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Практическая работа № 1.

(темы 1, 2: “Векторная алгебра”, “Уравнения прямой на плоскости”)

Вариант № 1.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-2, 4, 7}, **p** = {0, 1, 2}, **q** = {1, 0, 1}, **r** = {-1, 2, 4}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, -2, 3}, **b** = {3, 0, -1}, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (1, -2, 3), *B* (0, -1, 2), *C* (3, -4, 5).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

a = **p** + 2**q**, **b** = **p** + 2**q**, |**p**| = 1, |**q**| = 2, (**p**^**q**) = $\pi/6$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {2, 3, 1}, **b** ={-1, 0, -1}, **c** = {2, 2, 2}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (1, 3, 6), A_2 (2, 2, 1), A_3 (-1, 0, 1), A_4 (-4, 6, -3).

7. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку с координатами M_0 (1,2), параллельной данной прямой.

8. Установить, лежат ли точка M (1; -3) и начало координат по одну или по разные стороны прямой $2x - y + 5 = 0$.

Вариант № 2.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {6, 12, - 1}, **p** = {1, 3, 0}, **q** = {2, -1, 1}, **r** = {0, -1, 2}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, 0, 1}, **b** = {3, -2, 6}, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (0, -3, 6), *B* (-12, -3, -3), *C* (-9, -3, -6).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p}\hat{}\mathbf{q}) = \pi/4$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 2, 1}, **b** ={-1, 1, 1}, **c** = {3, 1, -1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (-4, 2, 6), A_2 (2, -3, 0), A_3 (-10, 5, 8), A_4 (-5, 2, -4).
7. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через точку $M_0(2,3)$.
8. Даны вершины треугольника: A (-10; -13), B(-2; 3) и C(2; 1). Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

Вариант № 3.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {1, -4, 4}, **p** = {2, 1, -1}, **q** = {0, 3, 2}, **r** = {1, -1, 1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {-2, 4, 1}, **b** = {1, -2, 7}, $\mathbf{c_1} = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (3, 3, -1), *B* (5, 5, -2), *C* (4, 1, 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

a = **p** - 3**q**, **b** = **p** + 2**q**, |**p**| = 1/5, |**q**| = 1, (**p**^**q**) = $\pi/2$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {1, 5, 2}, b ={-1, 1, -1}, c = {1, 1, 1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (7, 2, 4), A_2 (7, -1, -2), A_3 (3, 3, 1), A_4 (-4, 2, 1).
7. Дана прямая 2x + 3y + 4 = 0 . Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2; 1) параллельно данной прямой.
8. Привести общее уравнение прямой 4x − 3y −10 = 0 к нормальному виду.

Вариант № 4.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-9, 5, 5}, **p** = {4, 1, 1}, **q** = {2, 0, -3}, **r** = {-1, 2, 1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, 2, -3}, **b** = {2, -1, -1}, $\mathbf{c_1}$ = 4**a** + 3**b**, $\mathbf{c_2}$ = 8**a** – **b**.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (-1, 2, -3), *B* (3, 4, -6), *C* (1, 1, - 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   a = 3**p** - 2**q**, **b** = **p** + 5**q**, |**p**| = 4, |**q**| = 1/2, (**p**^**q**) = 5$\pi/6$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?

a = {1, -1, -3}, b ={3, -2, 1}, c = {2, 3, 4}.

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (2, 1, 4), A_2 (-1, 5, -2), A_3 (-7, -3, 2), A_4 (-6, -3, 6).

7. Дана прямая 2x + 3y + 4 = 0 . Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2; 1) перпендикулярно к данной прямой.

8. Установить, лежат ли точка M(1; -3) и начало координат по одну или по разные стороны прямой 10x + 24y +15 = 0 .

Вариант № 5.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-5, -5, 5}, **p** = {-2, 0, 1}, **q** = {1, 3, -1}, **r** = {0, 4, 1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {3, 5, 4}, **b** = {5, 9, 7}, $\mathbf{c_1}$ = - 2**a** + **b**, $\mathbf{c_2}$ = 3**a** – 2**b**.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (-4, -2, 0), *B* (-1, -2, 4), *C* (3, -2, 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   a = **p** - 2**q**, **b** = 2**p** + **q**, |**p**| = 2, |**q**| = 3, (**p**^**q**) = $3^{\pi/4}$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 3, 1}, b ={1, -2, 1}, c = {1, 1, 1}.

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (-1, -5, 2), A_2 (-6, 0, -3), A_3 (3, 6, -3), A_4 (-10, 6, 7).

7. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин A(2; -3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

8. Привести общее уравнение прямой $x + 2 = 0$ к нормальному виду.

Вариант № 6.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {13, 2, 7}, **p** = {5, 1, 0}, **q** = {2, -1, 3}, **r** = {1, 0, -1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, 4, -2}, **b** = {1, 1, -1}, $\mathbf{c_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (5, 3, -1), *B* (5, 2, 0), *C* (6, 4, -1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) = \pi/3$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 1, -1}, b ={-2, -1, 0}, c = {5, 2, -1}.

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (0, -1, -1), A_2 (-2, 3, 5), A_3 (1, -5, -9), A_4 (-1, -6, 3).

7. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

8. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми $3x - 4y - 10 = 0$ и $6x - 8y + 5 = 0$.

Вариант № 7.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-19, -1, 7}, **p** = {0, 1, 1}, **q** = {-2, 0, 1}, **r** = {3, 1, 0}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, -2, 5}, **b** = {3, -1, 0}, $\mathbf{c_1} = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (-3, -7, -5), *B* (0, -1, -2), *C* (2, 3, 0).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) = \pi/2$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {4, 3, 1}, b ={1, -2, 1}, c = {2, 2, 2}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где

A_1 (5, 2, 0), A_2 (2, 5, 0), A_3 (1, 2, 4), A_4 (-1, 1, 1).

7. Найти проекцию точки P(-6; 4) на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

8. Привести общее уравнение прямой $2x - y - \sqrt{5} = 0$ к нормальному виду.

Вариант № 8.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {3, -3, 4}, **p** = {1, 0, 2}, **q** = {0, 1, 1}, **r** = {2, -1, 4}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {3, 4, -1}, **b** = {2, -1, 1}, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (2, -4, 6), *B* (0, -2, 4), *C* (6, -8, 10).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \pi/4$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {4, 3, 1}, b ={6, 7, 4}, c = {2, 0, -1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где

A_1 (2, -1, -2), A_2 (1, 2, 1), A_3 (5, 0, -6), A_4 (-10, 9, -7).

7. Найти точку Q, симметричную точке P(-5; 13) относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

8. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d точки A(2; -1) от прямой $4x + 3y + 10 = 0$.

Вариант № 9.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {3, 3, - 1}, **p** = {3, 1, 0}, **q** = {-1, 2, 1}, **r** = {-1, 0, 2}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {-2, -3, - 2}, **b** = {1, 0, 5}, $\mathbf{c_1} = 3\mathbf{a} + 9\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (0, 1, -2), *B* (3, 1, 2), *C* (4, 1, 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/6$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 2, 1}, b ={1, -3, -7}, c = {1, 2, 3}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (-2, 0, -4), A_2 (-1, 7, 1), A_3 (4, -8, -4), A_4 (1, -4, 6).

7. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение его диагонали $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

8. Отклонение точки M от прямых $5x - 12y - 13 = 0$ и $3x - 4y - 19 = 0$ равны соответственно –3 и –5. Определить координаты точки M.

Вариант № 10.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-1, 7, - 4}, **p** = {-1, 2, 1}, **q** = {2, 0, 3}, **r** = {1, 1, -1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {-1, 4, 2}, **b** = {3, -2, 6}, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (3, 3, -1), *B* (1, 5, -2), *C* (4, 1, 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \pi/3$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 7, 2}, b ={-2, 0, -1}, c = {2, 2, 1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (14, 4, 5), A_2 (-5, -3, 2), A_3 (-2, -6, -3), A_4 (-2, 2, 1).

7. Составить уравнение прямой, параллельной двум прямым $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$ и проходящей посередине между ними.

8. Вычислить величину отклонения δ и расстояние *d* точки A(-2; 3) от прямой $3x - 4y - 2 = 0$.

Вариант № 11.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :

$\mathbf{x} = \{6, 5, -14\}$, $\mathbf{p} = \{1, 1, 4\}$, $\mathbf{q} = \{0, -3, 2\}$, $\mathbf{r} = \{2, 1, -1\}$.

2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?

$\mathbf{a} = \{5, 0, -1\}$, $\mathbf{b} = \{7, 2, 3\}$, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.

3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

$A\ (2, 1, -1)$, $B\ (6, -1, -4)$, $C\ (4, 2, 1)$.

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

$\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 10$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \pi/2$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?

$a = \{1, -2, 6\}$, $b = \{1, 0, 1\}$, $c = \{2, -6, 17\}$.

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где

$A_1\ (1, 2, 0)$, $A_2\ (3, 0, -3)$, $A_3\ (5, 2, 6)$, $A_4\ (8, 4, -9)$.

7. Даны вершины сторон треугольника A(2; -2), B(3; -5) и C(5; 7). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

8. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми $4x - 3y + 15 = 0$ и $8x - 6y + 25 = 0$.

Вариант № 12.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {6, -1, 7}, **p** = {1, -2, 0}, **q** = {-1, 1, 3}, **r** = {1, 0, 4}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {0, 3, -2}, **b** = {1, -2, 1}, $\mathbf{c_1} = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (-1, -2, 1), *B* (-4, -2, 5), *C* (-8, -2, 2).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 5$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p}\hat{}\mathbf{q}) = \pi/4$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {6, 3, 4}, b ={-1, -2, -1}, c = {2, 1, 2}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (2, -1, 2), A_2 (1, 2, -1), A_3 (3, 2, 1), A_4 (-4, 2, 5).

7. Составить уравнение прямой, параллельной двум прямым $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$ и проходящей посередине между ними.

8. Даны две смежные вершины квадрата A(2; 0) и B(-1; 4). Составить уравнение его сторон.

Вариант № 13.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {5, 15, 0}, **p** = {1, 0, 5}, **q** = {-1, 3, 2}, **r** = {0, -1, 1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {-2, 7, -1}, **b** = {-3, 5, 2}, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (6, 2, -3), *B* (6, 3, -2), *C* (7, 3, -3).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   a = 2**p** + 3**q**, **b** = **p** – 2**q**, |**p**| = 6, |**q**| = 7, (**p**^**q**) = $\pi/3$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {7, 3, 4}, b = {-1, -2, -1}, c = {4, 2, 4}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его

   высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (1, 1, 2), A_2 (-1, 1, 3), A_3 (2, -2, 4), A_4 (-1, 0, -2).

7. Составить уравнение прямой, параллельной двум прямым $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$ и проходящей посередине между ними.

8. Составить геометрическое место точек, равноудаленных от параллельных прямых $3x - y + 7 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$.

Вариант № 14.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {2, -1, 11}, **p** = {1, 1, 0}, **q** = {0, 1, -2}, **r** = {1, 0, 3}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {3, 7, 0}, **b** = {1, -3, 4}, $\mathbf{c_1} = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (0, 0, 4), *B* (-3, -6, 1), *C* (-5, -10, -1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p}\hat{}\mathbf{q}) = \pi/3$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {2, 3, 2}, b ={4, 7, 5}, c = {2, 0, -1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (2, 3, 1), A_2 (4, 1, -2), A_3 (6, 3, 7), A_4 (7, 5, -3).

7. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две точки $M_1(2; -5)$ и $M_2(3; 2)$.

8. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку P(2; 3) и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая каждый отрезок от начала координат.

Вариант № 15.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {11, 5, - 3}, **p** = {1, 0, 2}, **q** = {-1, 0, 1}, **r** = {2, 5, -3}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {-1, 2, -1}, **b** = {2, -7, 1}, $\mathbf{c_1} = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (2, -8, -1), *B* (4, -6, 0), *C* (-2, -5, -1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p}$^$\mathbf{q}) = \pi/4$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {5, 3, 4}, b ={-1, 0, -1}, c = {4, 2, 4}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где
   A_1 (1, 1, -1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (3, 2, 1), A_4 (5, 9, -8).

7. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две точки $M_1(5; -3)$ и $M_2(-1; 6)$.

8. Составить геометрическое место точек, равноудаленных от параллельных прямых $5x - 2y - 6 = 0$ и $10x - 4y + 3 = 0$.

Вариант № 16.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {8, 0, 5}, **p** = {2, 0, 1}, **q** = {1, 1, 0}, **r** = {4, 1, 2}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {7, 9, -2}, **b** = {5, 4, 3}, $\mathbf{c_1}$ = 4**a – b**, $\mathbf{c_2}$ = 4**b** – **a** .
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (3, -6, 9), *B* (0, -3, 6), *C* (9, -12, 15).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   a = 2**p** – 3**q**, **b** = 3**p** + **q**, |**p**| = 4, |**q**| = 1, (**p**^**q**) = $\pi/6$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 10, 5}, b ={-2, -2, -3}, c = {2, 4, 3}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (1, 5, -7), A_2 (-3, 6, 3), A_3 (-2, 7, 3), A_4 (-4, 8, -12).

7. Составить уравнение прямых, проходящих через вершины треугольника А(5; -4), В(-1; 3), С(-3; -2) параллельно противоположным сторонам.

8. Установить, лежат ли точка М(1; -3) и начало координат по одну или по разные стороны прямой $x - 3y - 5 = 0$.

Вариант № 17.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {3, 1, 8}, **p** = {0, 1, 3}, **q** = {1, 2, -1}, **r** = {2, 0, -1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {5, 0, -2}, **b** = {6, 4, 3}, $\mathbf{c_1} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 6\mathbf{b} - 10\mathbf{a}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (0, 2, -4), *B* (8, 2, 2), *C* (6, 2, 4).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}\hat{}\mathbf{q}) = \pi/3$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {-2, -4, -3}, b ={4, 3, 1}, c = {6, 7, 4}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где

A_1 (-3, 4, -7), A_2 (1, 5, -4), A_3 (-5, -2, -3), A_4 (2, 5, 4).

7. Даны середины сторон треугольника: $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ и $M_3(3; -4)$. Составить уравнение его сторон.

8. Составить геометрическое место точек, равноудаленных от параллельных прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $x - 2y + 7 = 0$.

Вариант № 18.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {8, 1, 2}, **p** = {1, 2, - 1}, **q** = {3, 0, 2}, **r** = {-1, 1, 1}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {8, 3, -1}, **b** = {4, 1, 3}, $\mathbf{c_1} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (3, 3, -1), *B* (5, 1, -2), *C* (4, 1, 1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 1/2$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/2$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {3, 1, -1}, b ={1, 0, -1}, c = {8, 3, -2}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где
   A_1 (-1, 2, -3), A_2 (4, -1, 0), A_3 (2, 1, -2), A_4 (3, 4, 5).

7. Составить уравнение прямой, если точка P(2; 3) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

8. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d точки A(1; -2) от прямой $x - 2y - 5 = 0$.

Вариант № 19.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-9, -8, - 3}, **p** = {1, 4, 1}, **q** = {-3, 2, 0}, **r** = {1, -1, 2}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_2}$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {3, -1, 6}, **b** = {5, 7, 10}, $\mathbf{c_1} = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c_2} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, где

A (-4, 3, 0), *B* (0, 1, 3), *C* (-2, 4, -2).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) = \pi/4$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {4, 2, 2}, b ={-3, -3, -3}, c = {2, 1, 2}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3, где

A_1 (4, -1, 3), A_2 (-2, 1, 0), A_3 (0, -5, 1), A_4 (3, 2, -6).

7. Даны две точки: P(2; 3) и Q(-1; 0). Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

8. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку A(1; 1) и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв. ед.

Вариант № 20.

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p, q, r** :
   x = {-5, 9, - 13}, **p** = {0, 1, -2}, **q** = {3, -1, 1}, **r** = {4, 1, 0}.
2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам **a** и **b** ?
   a = {1, -2, 4}, **b** = {7, 3, 5}, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, где

A (1, -1, 0), *B* (-2, -1, -4), *C* (8, -1, -1).

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**:

   $\mathbf{a} = 10\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p}\hat{}\mathbf{q}) = \pi/6$.

5. Компланарны ли векторы **a**, **b** и **c** ?
   a = {4, 1, 2}, b ={9, 2, 5}, c = {1, 1, -1}.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, где

A_1 (1, -1, 1), A_2 (-2, 0, 3), A_3 (2, 1, -1), A_4 (2, -2, -4).

7. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами A(3; 2), B(5; -2), C(1; 0).

8. Вычислить расстояние δ между параллельными прямыми $5x - 12y + 26 = 0$ и $5x - 12y - 13 = 0$.

Практическая работа № 2

(Темы 3, 4, 5: “Плоскость”, “Прямая в пространстве”, “Прямая и плоскость в пространстве”)

Вариант № 1.

1. Найти точку, симметричную точке (1, 1, 1) относительно прямой

$x = 2y = z$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (1, 1, 1)

параллельно прямым $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$ и $2x= 3y=4z$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (5, 4, 1),

(4, -2, -1), (0, 6, 5).

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (-3, 4, -7), M_2 (1, 5, -4), M_3 (-5, -2, 0), M_0 (-12, 7, -1).

5. Найти угол между плоскостями $x – 3y + 5 = 0$, $2x – y + 5z – 16 = 0$.

Вариант № 2.

1. Найти проекцию точки P(1, 2, 3) на прямую $x = 3t$, $y=5t – 7$, $z = 2t +2$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$,

$y = 2t + 3$, $S = R$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки M(1, 1, 1) на прямую, проходящую через точки M_1(2, 5, -3) и M_2 (3, -2, 2).

4. Написать канонические уравнения прямой $2x + y + z – 2 = 0$,

$2x – y – 3z + 6 =0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$, $x + 2y + 3z – 14 = 0$.

Вариант № 3.

1. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\begin{cases} x = 3t+7 \\ y = 2t+2 \\ z = -2t+1 \end{cases}$ лежат в одной плоскости и составить ее уравнение.

2. Написать канонические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ с плоскостью Oyz.

3. Найти проекцию точки P(5, 2, -1) на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

4. Найти точку M′, симметричную точке M относительно прямой: M(0, -3, -2), $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(1, 0, -2), B(2, -1, 3), C(0,-3, 2).

Вариант № 4.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую x = 2 - t, y = 3 – t, z = 3 – t и точку (0, 0, 0).

2. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

3. Будут ли прямые $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = 2t$ *и* $x = 1 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 4 - t$ скрещивающимися, параллельными, совпадающими или пересекающимися в единственной точке? В последнем случае найти точку пересечения.

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (-1, 2, -3), M_2 (4, -1, 0), M_3 (2, 1, -2), M_0 (1, -6, -5).

5. Найти угол между плоскостями $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

Вариант № 5.

1. При каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает ось OZ?

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки M(5, 2, -1) на плоскость $x + y + z = 1$.

4. Написать канонические уравнения прямой $x - 3y + 2z + 2 = 0$,

$x + 3y + z + 14 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$, $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

Вариант № 6.

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M (-4,-5,3) и пересекающей две прямые: $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

2. При каких значениях p и q прямая $\frac{x-2}{p} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна

плоскости $3x - 2y + qz + 1 = 0$.

3. Найти расстояние от точки P(2, 3, -1) до прямой $\begin{cases} x = t + 11 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 13 \end{cases}$.

4. Найти точку M′, симметричную точке M относительно прямой:

M(2, -1, 1), $\frac{x-4{,}5}{1} = \frac{y+3}{-0{,}5} = \frac{z-2}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(-1, 3, 4), B(-1, 5, 0), C(2,6, 1).

Вариант № 7.

1. Найти проекцию точки P(2, -1, 3) на прямую $x = 3t$, $y=5t - 7$, $z = 2t + 2$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = - t - 2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки M (1, 1, 1) на прямую, проходящую через точки M_1(2, 5, -3) и M_2 (3, -2, 2).

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (-3, -1, 1), M_2 (-9, 1, -2), M_3 (3, -5, 4), M_0 (-7, 0, -1).

5. Найти угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $x - 4y - z + 9 = 0$.

Вариант № 8.

1. Найти проекцию точки P(0, 2, -3) на прямую $x = 3t$, $y=5t - 7$,

$z = 2t + 2$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$,

$y = 2t + 3$, $z = - t - 2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки М (1, 1, 1) на прямую, проходящую через точки $M_1(2, 5, -3)$ и $M_2(3, -2, 2)$.

4. Написать канонические уравнения прямой $x - 2y + z - 4 = 0$,

$2x + 2y - z - 8 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$, $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

Вариант № 9.

1. Найти проекцию точки Р(1, 1, 1) на прямую $x = 3t$, $y=5t - 7$,

$z = 2t + 2$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$,

$y = 2t + 3$, $z = - t - 2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки М (1, 1, 1) на прямую, проходящую через точки $M_1(2, 5, -3)$ и $M_2(3, -2, 2)$.

4. Найти точку М′, симметричную точке М относительно прямой:

М(1, 1, 1), $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(4, -2, 0), B(1, -1, -5), C(-2,1, -3).

Вариант № 10.

1. Найти проекцию точки P(1, 1, 1) на прямую $x = 3t$, $y=5t - 7$,

$z = 2t +2$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$,

$y = 2t + 3$, $z = - t - 2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки M (1, 1, 1) на прямую, проходящую через точки $M_1(2, 5, -3)$ и M_2 (3, -2, 2).

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (1, -1, 1), M_2 (-2, 0, 3), M_3 (2, 1, -1), M_0 (-2, 4, 2).

5. Найти угол между плоскостями $3x - y + 2z + 15= 0$,

$5x + 9y - 3z + 1 = 0$.

Вариант № 11.

1. При каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает ось OZ ?

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат

перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

3. Найти проекцию точки M(1, 1, 1) на плоскость $x + y + z = 1$.

4. Написать канонические уравнения прямой $x + y + z - 2 = 0$,

$x - y - 2z + 2 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2},\ 2x - y + 4z = 0.$$

Вариант № 12.

1. Вычислить расстояние от точки (-1, 1, -2) до плоскости, проходящей через точки M_1 (1, -1, 1), M_2 (-2, 1, 3), M_3 (4, -5, -2).

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$.

3. Даны прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Найти расстояние между ними и написать уравнение плоскости через них проходящей.

4. Найти точку M′, симметричную точке M относительно прямой:

M(1, 2, 3), $\frac{x-0{,}5}{0} = \frac{y+1{,}5}{-1} = \frac{z-1{,}5}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(-8, 0, 7), B(-3, 2, 4), C(-1, 4, 5).

Вариант № 13.

1. Составить уравнение геометрического места точек равноудаленных от двух параллельных плоскостей $5x - 3y + z + 3 = 0$ и

$10x - 6y + 2z + + 7 = 0.$

2. Даны координаты вершин треугольника A(1, -2, -4), B(3, 1, -3) и C(5, 1, 7). Составить уравнения высоты, проведенной из вершины B.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, 2, -3) параллельно прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (1, 2, 0), M_2 (1, -1, 2), M_3 (0, 1, -1), M_0 (2, -1, 4).

5. Найти угол между плоскостями $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

Вариант № 14.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

2. Найти проекцию точки M (2, 3, 1) на плоскость $3x - y = 0$.

3. Найти расстояние от точки (2, 3, -1) до прямой $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$.

4. Написать канонические уравнения прямой $2x + 3y + z + 6 = 0$, $x - 3y - 2z + 3 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \ 3x + y - 5z = 0.$$

Вариант № 15.

1. Составить уравнения плоскостей параллельных плоскости

$2x-2y-z-3=0$ и отстоящих от нее на расстояние d = 5.

2. Найти проекцию точки (-1, -2, 3) на прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$.

3. Найти уравнения прямой, которая проходит через точку (3, -2, 4)

параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую

$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{2}$.

4. Найти точку M′, симметричную точке M относительно прямой:

M(1, 0, -1), $\frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A

перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(7, -5, 1), B(5, -1, -3), C(3, 0, -4).

Вариант № 16.

1. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} x=6+2t \\ y=-2+4t \\ z=-5t \end{cases}$ с плоскостями

и ее направляющие косинусы этой прямой.

2. Найти проекцию точки (3, -4, -2) на плоскость, проходящую через прямые

$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

3. Найти расстояние между прямыми $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-\ y+z+1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+\ y-z+1=0 \end{cases}$.

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (1, 0, 2), M_2 (1, 2, -1), M_3 (2, -2, 1), M_0 (-5, -9, 1).

5. Найти угол между плоскостями $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$,

$x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$

Вариант № 17.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку (2, -5, 3) и параллельной прямой $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-\ 2y+z+3=0 \end{cases}$.

2. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases}$

лежат в одной плоскости и составить ее уравнение.

3. Найти точку А симметричную точке В(2, -5, 7) относительно прямой, проходящей через точки M_1 (5, 4, 6) и M_2 (-2, -17, -8).

4. Написать канонические уравнения прямой Написать канонические уравнения прямой $3x + y - z - 6 = 0,\ 3x - y + 2z = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $x + 3y - 5z + 9 = 0.$

Вариант № 18.

1. Через прямую $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y-z+15=0$.

2. Найти точку Q симметричную точке P(2, -5, 7) относительно прямой, проходящей через точки M_1 (5, 4, 6) и M_2 (-2, -17, -8).

3. Из точки P(-1, -1, 4) опущен на плоскость перпендикуляр, его основание Q(2, 1, 3). Найти уравнение плоскости.

4. Найти точку M′, симметричную точке M относительно прямой:

M(2, 1, 0), $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z+0{,}5}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$: A(-3, 5, -2), B(-4, 0, 3), C(-3, 2, 5).

Вариант № 19.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки: A(-6, 1, 0) и B(3, -1, 6) перпендикулярно плоскости $3x-2y+5z-7=0$.

2. Через точки A(-1, 2, 5) и B(0, -6, 8) проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

3. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$ лежат в одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.

4. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 : M_1 (1, 2, -3), M_2 (1, 0, 1), M_3 (-2, -1, 6), M_0 (3, -2, -9).

5. Найти угол между плоскостями $3y-z=0$, $2y+z=0$.

Вариант № 20.

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку М(1, 2, 3) и перпендикулярной двум прямым: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

2. Найти точку пересечения прямой $2x-y+5z-3=0.$ с плоскостью XOY.

3. Через прямую: $\begin{cases}4x-y+3z-1=0\\ x+5y-z+2=0\end{cases}$.провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $2x-y+5z-3=0.$

4. Написать канонические уравнения прямой $x+5y+2z+11=0,$

$x-y-z-1=0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$,

$x-2y+5z+17=0.$

Практическая работа № 3.
(темы 6, 7: “Кривые второго порядка”, “Поверхности второго порядка”, часть 1)

Вариант № 1.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $x - 5 = 0$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Оуи проходит через точку А(4; -8).

4. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y$.

Вариант № 2.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его большая ось равна 20, а эксцентриситет ε = $\frac{3}{5}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет ε = $\frac{3}{2}$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр p=3.

4. Привести уравнение $16x^2 - 4y^2 + 16x + 12y - 9 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 5y + 3 = 0$.

Вариант № 3.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны 5 и 2.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами 2c = 26.

3. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус F (0; -3) и проходит через начало координат, зная, что ее осью служит ось Oy.

4. Привести уравнение $4x^2 + 35y^2 - 8x + 36y + 9 = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + 2y^2 + 5x - 18y - 8z + 49 = 0$.

Вариант № 4.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно координат, зная, что его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что ее полуоси

a =6, b=18 (буквой a обозначена полуось гиперболы, расположенная на оси абсцисс).

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки A(3; 1) и

B(1; -1), центр которой лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

4. Привести уравнение $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y + 108 = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 8x + 12y + 1 = 0$.

Вариант № 5.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны соответственно 7 и 2.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами 2c = 10 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси *Ox* и ее параметр p = 0,5.

4. Привести уравнение $4x^2 - 25y^2 + 16x - 50y - 109 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + y^2 - 2z = -1$.

Вариант № 6.

1. Составить уравнение эллипса, большая ось которого равна 26 и фокусы $F_1(-14;\ 0)$, $F_2(14;\ 0)$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки A(1; 1), B(1; -1) и C(2; 0).

4. Привести уравнение $16x^2 + y^2 + 48x + 32 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0$.

Вариант № 7.

1. Составить уравнение эллипса, малая ось которого равна 2 и фокусы F1(-1; -1), F2(1; 1).

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c = 20.

3. Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат и прямая $3x = 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности.

4. Привести уравнение $4x^2 - 9y^2 - 90y - 261 = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $z^2 + 4z + 6y - 20 = 0$.

Вариант № 8.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2с = 8.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси *Oy* и ее параметр р = $\frac{1}{4}$.

4. Привести уравнение $4x^2 + 9y^2 - 4x = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $y^2 + z^2 = -2z$.

Вариант № 9.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2c=4.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что ось 2a = 16 и эксцентриситет ε = $\frac{5}{4}$.

3. Составить уравнение окружности, если точки A(3; 2) и B(-1; 6) являются концами одного из диаметров окружности.

4. Привести уравнение $y^2 - 6x - 2y - 17 = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$.

Вариант № 10.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между директрисами равно $7\frac{1}{7}$ и эксцентриситет ε = $\frac{7}{5}$.

3. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых: $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$, причем одной из них – в точке A(2; 1).

4. Привести уравнение $4x^2 - 4x - 12y - 5 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $y^2 + x - 4 = 0$.

Вариант № 11.

1. Составить уравнение эллипса, зная, что его фокусы $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $6\frac{2}{5}$.

3. Составить уравнение параболы, если дан фокус F(-7; 0) и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

4. Привести уравнение $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$ к каноническому виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 0$.

Вариант № 12.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно координат, зная, что его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы.

3. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус F(2; -1) и директриса $x - y - 1 = 0$.

4. Привести уравнение $4x^2 + 20x - 12y + 43 = 0$ к простейшему виду путем параллельного переноса осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно старых и новых осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $3z^2 + 9y^2 - x^2 = 0$.

Вариант № 13.

1. Составить уравнение эллипса, зная, что его фокусы F_1 (-2; $\frac{3}{2}$), F_2(2; -$\frac{2}{3}$) и эксцентриситет ε = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами 2c = 6 и эксцентриситет ε = $\frac{3}{2}$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр p = 3.

4. Привести уравнение $2x^2 + 3y^2 + 20x + 6y + 29 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 38z - 99 = 0$.

Вариант № 14.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

3. Составить уравнения окружностей, которые, имея центры на прямой $4x - 5y - 3 = 0$, касаются прямых $2x - 3y - 10 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$.

4. Привести уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ к простейшему виду путем параллельного переноса осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно старых и новых осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $2x^2 - 4x + y^2 + 2z^2 + 4z + 7 = 0$.

Вариант № 15.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между его фокусами 2c = 6 и эксцентриситет ε = $\frac{3}{5}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами 2c = 10 и ось 2b = 8.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$, $M_3(5; 5)$.

4. Привести уравнение $4x^2 - y - 8x + 7 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + 2x + 2y^2 + 4y + 4z^2 + 1 = 0$.

Вариант № 16.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 10, а эксцентриситет ε = $\frac{12}{13}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку A(9; 6).

4. Привести уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ к простейшему виду путем параллельного переноса осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно старых и новых осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0$.

Вариант № 17.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 16, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm\frac{16}{5}x$.

3. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус F(4; 3) и директриса $y + 1 = 0$.

4. Привести уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ к простейшему виду путем параллельного переноса осей координат; определить его тип;

установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно старых и новых осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + z^2 = 0$.

Вариант № 18.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами 2c = 24 и эксцентриситет ε = $\frac{12}{13}$.

2. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 24 и фокусы F_1(-10; 2), F_2(16; 2).

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку A(-1; 3).

4. Привести уравнение $4x^2 + 3y^2 + 18y + 15 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

Вариант № 19.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между его директрисами равно $10\frac{2}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

2. Составить уравнение гиперболы, зная ее фокусы $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ и расстояние между директрисами 3,6.

3. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус F(7; 2) и директриса $x - 5 = 0$.

4. Привести уравнение $2x^2 - 3y^2 + 20x + 6y + 22 = 0$ к простейшему виду; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $8x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 48 = 0$.

Вариант № 20.

1. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет ε = $\frac{2}{3}$, фокус F(2; 1) и уравнение соответствующей директрисы $x - 5 = 0$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что ее оси 2a =10 и 2b = 8.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку A(1; 1).

4. Привести уравнение $7x^2 - 5y^2 - 14x - 20y + 22 = 0$ к простейшему виду путем параллельного переноса осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно старых и новых осей координат.

5. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат Ox, Oy, Oz: $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 73z - 65 = 0$.

Практическая работа № 4
(тема 6, 7: “Общая теория кривых и поверхностей второго порядка”, часть 2)

Вариант № 1.

1. Определить вид кривой $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 8yz + 12zx + 14x - 10y + 7 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 2.

1. Определить вид кривой $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 3.

1. Определить вид кривой $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 2zx - 4y - 4z + 4 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 4.

1. Определить вид кривой $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 - 2y^2 + z^2 + 6zy - 4zx - 8x + 10y = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 5.

1. Определить вид кривой $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 6zy + 12zx + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 6.

1. Определить вид кривой $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 3 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $3x^2 - 2xy + 4 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 7.

1. Определить вид кривой $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$3x^2 + 2y^2 + z^2 4yz - 2zx - 4x - 8z - 8 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $7x - 3 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 8.

1. Определить вид кривой $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy - 30yz + 6zx - 2x - 2y = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей

координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 9.

1. Определить вид кривой $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $3x^2 - 2xy + 4 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 10.

1. Определить вид кривой $5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$2y^2 + 3xy + 2yz + zx + 3x + 2y = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 11.

1. Определить вид кривой $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$9x^2 - 4y^2 - 91z^2 - 40yz + 18zx - 36 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 12.

1. Определить вид кривой $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$2x^2-3z^2+4xy+2yz-5zx-8x-12y+17z+6=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0$ методом инвариантов.

Вариант № 13.

1. Определить вид кривой $3x^2-2xy+4=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $7xy-3=0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2-4xy+4y^2+10x-20y+25=0$ методом инвариантов.

Вариант № 14.

1. Определить вид кривой $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 2x - 2y - 4 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 15.

1. Определить вид кривой $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 + 3y^2 + 8z^2 + 2xy + 8yz - 4x + 8z + 6 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 6 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 16.

1. Определить вид кривой $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4zx + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $5x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 17.

1. Определить вид кривой $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8zx - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей

координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$ методом инвариантов.

Вариант № 18.

1. Определить вид кривой $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$x^2+y^2+5z^2-6xy-2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ методом инвариантов.

Вариант № 19.

1. Определить вид кривой $4x^2-xy+y^2+4x-2y+1=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x-6y+3=0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ методом инвариантов.

Вариант № 20.

1. Определить вид кривой $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

2. Определить вид поверхности

$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4zx + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$ приведением ее уравнения к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Привести уравнение $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ к простейшему виду, используя преобразования параллельного переноса и поворота осей координат; определить его тип; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже образ относительно осей координат.

4. Определить тип кривой $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$ методом инвариантов.

Практическая работа № 5

(Темы 8–13: “Множества”, “Линейные пространства”, “Метрические пространства”, “Нормированные пространства”, “Евклидовы пространства”, “Топологические пространства”)

Вариант № 1.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве E^m столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$, $(x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = [\sum_{k=1}^m |x_k|^2]^{1/2}$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Будет ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если расстояние между x и y определить так: $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$?

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке O.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых кубов является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

$e_1=(1,1,1)$; $e_2 = (1,1,2)$; $e_3 = (1,2,3)$; $x=(6,9,14)$.

Вариант № 2.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве C[a,b] непрерывных на [a,b] функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Доказать, что множество M(E) всех ограниченных функций на множестве E образует метрическое пространство, если за расстояние между функциями φ и ψ принять число $\rho(\varphi, \psi) = sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)|$

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на данной прямой.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсоидами, является базой этой топологии.

5. Даны векторы e_1, e_2,...,e_n и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2,...,e_n сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

e_1=(2,1,-3); e_2 = (3,2,-5); e_3 = (1,-1,1); x=(6, 2,1-7).

Вариант № 3.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве E^m столбцов с^m столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$, $(x_k \in R)$ с нормой

$\|x\| = \max_{1 \le k \le m} |x_k|$?

2. Доказать, что замыкание каждого множества замкнуто.

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы плоскости с началом O, концы которых не лежат на данной прямой.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых параллелепипедов является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

$e_1=(1, 2,-1, -2)$; $e_2 = (2, 3, 0, -1)$; $e_3 = (1, 2, 1, 4)$; $e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x=(7, 14, -1, 2)$.

Вариант № 4.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве $C^k[a,b]$ непрерывных на [a,b] функций с нормой $\|x\| = \sum_{i=1}^{k} \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(i)}(t)\right|$?

Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых квадратов является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2,...,e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2,...,e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

$e_1=(3, 1, 4)$; $e_2 = (5, 2, 1)$; $e_3 = (1, 1, -6)$; $x=(3, 7, 1)$.

Вариант № 5.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве l^m столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$, $(x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = [\sum_{k=1}^m |x_k|]$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Доказать, что внутренность любого множества есть открытое множество.
3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы пространства R^n , координаты которых – целые числа.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсами, является базой этой топологии.

5. Даны векторы e_1, e_2,...,e_n и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2,...,e_n сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

e_1=(1, 0, 3, 3); e_2 = (-2, -3, -5, -4); e_3 = (2, 2, 5, 4); e_4 = (-2, -3, -4, -4);

x=(1, 2, 1, 1).

Вариант № 6.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве M[a,b] непрерывных на [a,b] функций с нормой $\|x\| = sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Пусть X – множество всех точек окружности C; примем в качестве расстояния между точками $x\in X$, $y\in Y$, длину кратчайшей дуги окружности C, соединяющей x и y. Удовлетворяет ли это расстояние аксиомам метрики?

3. Образуют ли подпространство векторного пространства решения данной системы линейных уравнений?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых прямоугольников является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

e_1=(1, 1, 1, 1); e_2 = (1, 1, -1, -1); e_3 = (1, -1, 1, -1); e_4 = (1, -1, -1, 1);

x = (1, 2, 1, 1).

Вариант № 7.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве $l_p^m (p > 1)$ столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$, $(x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = [\sum_{k=1}^m |x_k|^p]^{1/p}$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Является ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если под расстоянием между x и y понимать $\sin(x-y)^2$?

3. Образуют ли подпространство пространства последовательностей все последовательности вещественных чисел, имеющие предел.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсоидами вращения, является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

$e_1=(1, 1, 0, 1)$; $e_2 = (2, 1, 3, 1)$; $e_3 = (1, 1, 0, 0)$; $e_4 = (0, 1, -1, -1)$;

$x = (0, 0, 0, 1)$.

Вариант № 8.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве K непрерывных на вещественной прямой финитных функций (равных нулю вне некоторого интервала, своего для каждой функции) с нормой $\|x\| = \max_t |x(t)|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Будет ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если расстояние между множествами $E \subset X$, $F \subset X$ определить равенством $\rho(E,F) = inf_{x\in E, y\in F}\,\rho(x,y)$?

3. Образуют ли подпространство векторного пространства все последовательности вещественных чисел, имеющие предел a.

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых кубов с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. .

e_1=(1, 1, 0, 0); e_2 = (1, 0, 1, 0); e_3 = (1, 0, 0, 1); e_4 = (1, 1, 1, 1);

x = (0, 1, 1, 0).

Вариант № 9.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве l_1 последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $(x_k \in R)$ удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < \infty$, с нормой $\|x\|$= $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Показать, что $p_{1(x,y)}$ = arctg $|x - y|$ является метрикой в множестве всех чисел. Эквивалентна ли она метрике p(x,y) = $|x - y|$? Является ли полным пространством числовая прямая с метрикой p_1 ?

3. Образуют ли подпространство пространства многочленов все многочлены четной степени с коэффициентами из поля F?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсоидами, с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ и х, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора х в этом базисе.

e_1=(2, 1, 0, 1); $e_2 = (0, 1, 2, 2)$;e_3 = (-2, 1, 1, 2); e_4 = (1, 3, 1, 2); x = (1, 2, -1, 0)

Вариант 10

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве $L_p[a,b]$, непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\| = \left[\int_a^b |\, x(t) \,|^p \, dt\right]^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Пусть X – множество всех пар чисел (a,b). Для любых двух его элементов $x(a_1,b_1)$, $y(a_2,b_2)$ положим: $\rho_3(x,y) = \sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2}$. Доказать, что это метрика.

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы, у которых совпадают первая и последняя координаты?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых параллелепипедов с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Даны векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ и x, которые заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе.
e_1=(1, 0, 0, 0); $e_2 = (1,1,0,0)$;e_3 = (1, 1, 1, 0); e_4 = (1, 1, 1, 1); x = (1, 2, 3, 4).

Вариант № 11.

1. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на [a,b] функций принять за норму элемента x(t) $|x(a)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$?

2. Пусть X – множество всех пар чисел (a,b). Для любых двух его элементов $x(a_1, b_1)$, $y(a_2, b_2)$ положим: $\rho_1(x,y) = \max\{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\}$. Доказать, что это метрика.

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы, у которых координаты с четными номерами равны нулю?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых квадратов с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти нормированный вектор, ортогональный к векторам $f_1 = (1, 1, 1, 1)$; $f_2 = (1, -1, -1, 1)$; $f_3 = (2, 1, 1, 3)$.

Вариант № 12.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве l_2 последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $(x_k \in R)$, удовлетворяющих условию

$\sum_{k=1}^{\infty}|x_2|^2 < \infty$, с нормой ? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Пусть X – множество всех пар чисел (a,b). Для любых двух его элементов $x(a_1, b_1)$, $y(a_2, b_2)$ положим: $\rho_2(x,y) = |a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|$. Доказать, что это метрика.

3. Образуют ли подпространство векторного пространства векторы вида ($\alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots$)?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсами с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Построить ортонормированный базис пространства E^4 , приняв за два вектора этого базиса векторы f_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2); f_2 = (1/3, 1/3, 1/2, -5/3).

Вариант № 13.

1. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на [a,b] функций принять за норму элемента x(t)

$|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C'[a,b]}$?

2. Доказать, что множество всех непрерывных функций на [a,b] образует метрическое пространство C'[a,b], если за расстояние между $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принять число $\rho(\varphi,\psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|dx.$ Эквивалентны ли метрики пространства C[a,b] и C'[a,b]?

3. Образуют ли подпространство пространства матриц $M_n(F)$ симметрические матрицы порядка n?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых прямоугольников с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти ортогональный базис пространства, порожденного векторами $f_1 = (1, 2, 1, 3)$; $f_2 = (4, 1, 1, 1)$; $f_3 = (3, 1, 1, 0)$.

Вариант № 14.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве l_p(p>1) последовательностей последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $(x_k \in R)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой $\|x\| = [\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p]^{-1/p}$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Покажите, что функция $d(x,y)=\max[x_i - y_i]$ определяет метрику на множестве наборов из n вещественных чисел.

3. Образуют ли подпространство пространства матриц невырожденные $M_n(F)$ матрицы порядка n?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсоидами вращения с центрами, имеющими рациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти два вектора, ортогональные между собой и ортогональные векторам $f_1 = (1, 1, 1, 2, 1)$; $f_2 = (1, 0, 0, 1, -2)$; $f_3 = (2, 1, - 1, 0, 2)$.

Вариант № 15.

1. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на [a,b] функций принять за норму элемента x(t)

$|x(a)| + |x'(b)| + \|x''\|_{C'[a,b]}$?

2. Покажите, что функция $d(x,y) = \max_{0\le t\le 1} x(t) - y(t)$

определяет метрику на множестве X всех непрерывных вещественных функций на замкнутом интервале [0,1].

3. Образуют ли подпространство пространства матриц $M_n(F)$ вырожденные матрицы порядка n?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых кубов с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти два ортогональных и нормированных решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 16.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве m ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $(x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = sup_k |x_k|$? ? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Покажите, что функция $d(x, y) = 1$ при $x \neq y, d(x, y) = 0$ определяет метрику на произвольном множестве X.

3. Образуют ли подпространство пространства матриц $M_n(F)$ матрицы порядка nсо следом, равным нулю?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсоидами, с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Проверить, что векторы $f_1 = (1, -2, 2, -3)$; $f_2 = (2, -3, 2, 4)$ ортогональны и дополнить их до ортогонального базиса.

Вариант № 17.

1. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на [a,b] функций принять за норму элемента x(t) $\max_{t \in [a,b]} |x(t)|$?

2. Дано пространство C [-1, 1] непрерывных на [-1, 1] функций с нормой

$\|x\| = \max_{t\in[-1,1]}|x(t)|$. Образует ли множество четных функций

подпространство в пространстве C[-1, 1]?

3. Пусть R^S - пространство всех функций, определенных на множестве S и принимающих вещественные значения. Образуют ли подпространство пространства R^S функции $f(x)\in R^S$, принимающие значение a в данной точке $s\in S$?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^3 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых параллелепипедов с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Проверить, что векторы $f_1 = (1, 1, 1, 2)$; $f_2 = (1, 2, 3, -3)$ ортогональны и дополнить их до ортогонального базиса.

Вариант № 18.

1. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на [a,b] функций принять за норму элемента x(t)

$\max_{t\in[a,b]}|x'(t)|?$?

2. Дано пространство C[-1, 1] непрерывных на [-1, 1] функций с нормой

$\|x\| = \max_{t\in[-1,1]}|x(t)|$. Образует ли множество многочленов

подпространство в пространстве C[-1, 1] ?

3. Пусть R^S - пространство всех функций, определенных на множестве S и принимающих вещественные значения. Образуют ли подпространство

пространства R^S функции $f(x) \in R^s$, обращающиеся в нуль хотя бы в одной точке множества S?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых квадратов с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти векторы, дополняющие векторы $f_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$ и $f_2 = (1/3, 2/3, -2/3)$ до ортонормированного базиса.

Список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1987.-320с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г Линейная алгебра.- М.: Физматлит, 1984.-296с.

3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учеб. пособие.–М.:Физматлит, 2004. -224с.

4. Гусятников П. Б. Векторная алгебра в примерах и задачах : Учеб.пос. для студ.инж.-техн.спец.вузов / П. Б. Гусятников, С. В. Резниченко. - М. : Высшая школа, 1985.-232 с.

5. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. Учебник / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. - М. : Физматлит, 2004.-304с.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.Т.2.–М: Высшая школа, 1981.-584с.

7. Новиков С.П. Топология. - М. : Институт компьютерных исследований, 2002.-335с.

13. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология.- М.: Наука, 1983.-160с.

14. Прасолов В.В. Наглядная топология. – М.: МЦНМО, 2006.-112с.

15. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.- М.: Наука, 1974.-176с.

Вариант № 19.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве c_0 стремящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $(x_k \in R)$, с нормой $\|x\| = \max_k |x_k|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Дано пространство C[-1, 1] непрерывных на [-1, 1] функций с нормой $\|x\| = \max_{t\in[-1,1]} |x(t)|$. Образует ли множество непрерывно дифференцируемых функций подпространство в пространстве C[-1, 1]?

3. Пусть R^S - пространство всех функций, определенных на множестве S и принимающих вещественные значения. Образуют ли подпространство пространства R^S функции $f(x) \in R^s$, имеющие предел a при $x\to\infty$ (при S =R)?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых множеств, ограниченных эллипсами с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Найти векторы, дополняющие векторы $f_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ и $f_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ до ортонормированного базиса.

Вариант № 20.

1. Что означает сходимость последовательности в пространстве l стремящихся к нулю последовательностей с нормой $\|x\| = \max_k |x_k|$? Убедиться, что выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно.

2. Дано пространство C[-1, 1] непрерывных на [-1, 1] функций с нормой $\|x\| = \max_{t\in[-1,1]} |x(t)|$. Образует ли множество многочленов степени ≤ k подпространство в пространстве C[-1, 1]?

3. Пусть R^∞ - пространство бесконечных последовательностей с действительными элементами. Образуют ли подпространство в R^∞ последовательности, в которых все элементы отличны от 1?

4. Рассмотрим метрическое пространство R^2 и соответствующую метрическую топологию. Доказать, что множество открытых прямоугольников с центрами, имеющими иррациональные координаты, является базой этой топологии.

5. Проверить ортогональность векторов $f_1 = (1, -2, 1, 3)$ и $f_2 = (2, 1, -3, 1)$ и в евклидовом пространстве и дополнить их до ортогонального базиса.