МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра электроэнергетики и электротехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____ Т.Ю. Ткачева
«2» ____ 2026 г.

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания по проведению практических
занятий студентов направления подготовки 13.03.02
«Электроэнергетика и электротехника»

Курск 2026

УДК 510

Составители: А.В. Филонович, И.В. Ворначева, В.О. Поданов.

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Электроэнергетики и электротехники»
В.И. Бирюлин

Теория автоматического управления : методические указания по проведению практических занятий студентов направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» / Юго-зап. гос. ун-т; сост.: А.В. Филонович, И.В. Ворначева, В.О. Поданов. – Курск, 2026. – 45 с. – Библиогр.: с. 45.

Методические указания содержат рекомендации по проведению практических занятий по дисциплине основы научных исследований. Рекомендации могут использоваться при выполнении заданий на практических занятиях, максимально облегчают подготовку к зачету.

Предназначены преподавателям и студентам направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 2.11.25 Формат 60х84 1/16.
Усл. печ.л. 2,67. Уч.-изд.л. 2,42. Тираж 100 экз. Заказ 452
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

ВВЕДЕНИЕ

Изучение наиболее важных тем или разделов дисциплины завершают практические занятия, которые обеспечивают: контроль подготовленности студента; закрепление учебного материала; приобретение опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, в том числе аргументации и защиты выдвигаемых положений и тезисов. Все практические занятия проводятся в виде индивидуальных кейсовых задач, представляющих собой проблемные задания, в которых обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально- ориентированную ситуацию, необходимую для решения данной проблемы. Все задачи являются задачами творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей. Во всех задачах особенно ценятся умения выбрать лучший из возможных вариантов решения, сделать выводы и аргументировать собственную точку зрения.

Практическое занятие №1

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы

Приобрести навыки составления дифференциальных уравнений типовых звеньев систем автоматического управления (САУ).

1. Общие положения

Состояние системы автоматического управления характеризуется неустановившимися и установившимися значениями всех воздействий и всех переменных. Неустановившееся состояние САУ описывается уравнением переходного процесса или уравнением динамики.

Уравнения динамики системы содержат некоторые производные и интегралы от входящих в него переменных или воздействий. Эти уравнения для краткости называют дифференциальными.

Дифференциальные уравнения описывают все звенья САУ, а также все происходящие в них физические процессы: механические, электромагнитные и др.

Так как в настоящее время широко применяется электронное моделирование всех типов звеньев, а также автоматизированный анализ и

синтез САУ на ЦВМ и АВМ, то в работе рассматриваются электрические типовые звенья САУ для обеспечения моделирования.

1.1.Апериодическое звено

Принципиальная схема апериодического звена приведена на рис.1.1.1.

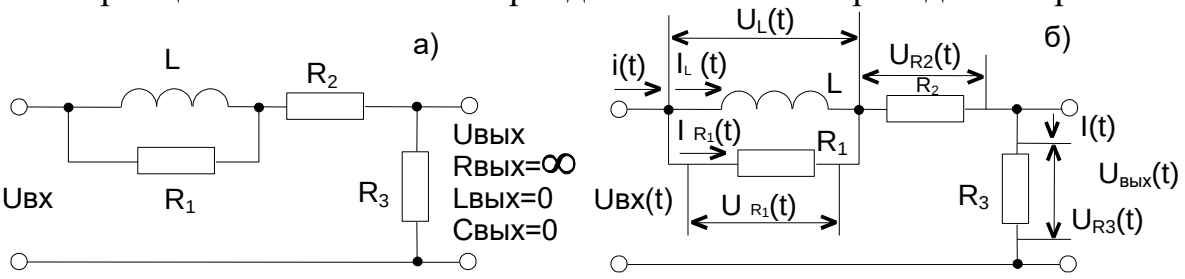


Рис. 1.1.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах апериодического звена (б)

При протекании токов через элементы звена имеем:

$$UR1(t)=iR1(t)R1;UL(t)=\frac{di_L(t)}{dt}L;\ UR2(t)=i(t)R2;\ UR3(t)=i(t)R3. \quad (1.1.1)$$

В этом случае: Uвых (t)=UR3 (t), UL (t)=UR1 (t),

$$Uвх(t)=UL(t)+UR2(t)+UR3(t)=\frac{di_L(t)}{dt}L+i(t)R2+i(t)R3 \quad (1.1.2)$$

или

$$Uвх(t)=UR1(t)+UR2(t)+UR3(t)=iR1(t)R1+i(t)R2+i(t)R3 \quad (1.1.3)$$

при

$$i(t) = iL(t) + iR1(t). \quad (1.1.4)$$

Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} U_{вх}(t)=\frac{di_L(t)}{dt}L + i(t)R_2 + U_{вых}(t), \\ \frac{di_L(t)}{dt}L = i_{R1}(t)R_1, \\ U_{вых}(t)= i(t)R_3, \\ i(t) = i_L(t) + i_{R1}(t). \end{cases} \quad (1.1.5.)$$

1.2. Дифференцирующее звено

Принципиальная схема дифференцирующего звена приведена на рис.1.2.1.

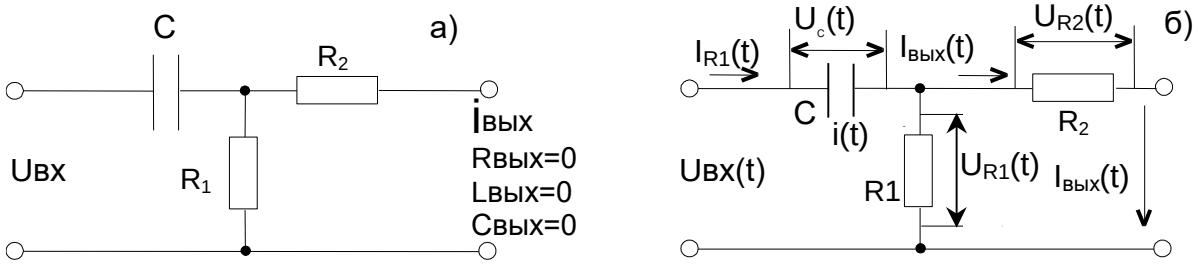


Рис. .1.2.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах дифференцирующего звена (б).

При протекании токов через элементы звена имеем :

$$U_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt;\ U_{R1}(t)=i_{R1}(t)R_1;\ U_{R2}(t)=i_{R2}(t)R_2\ . \qquad (1.2.1)$$

В этом случае:

$$i_{вых}(t)=i_{R2}(t),\ U_{R1}(t)=U_{R2}(t),$$

$$U_{вх}(t)=U_C(t)+U_{R2}(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+i_{вых}(t)R_2\ . \qquad (1.2.2)$$

Или

$$U_{вх}(t=U_C(t)+U_{R1}(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+i_{R1}(t)R_1. \qquad (1.2.3.)$$

при $i(t)=i_{R1}(t)+i_{вых}(t)$. (1.2.4.)

Отсюда получаем систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} U_{вх}(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+i_{вых}(t)R_2, \\ i_{вых}(t)=i(t)-i_{R1}(t), \\ i_{вых}(t)R_2=i_{R1}(t)R_1. \end{cases} \qquad (1.2.5.)$$

1.3. Интегрирующее звено

Принципиальная схема интегрирующего звена приведена на рис.1.3.1.

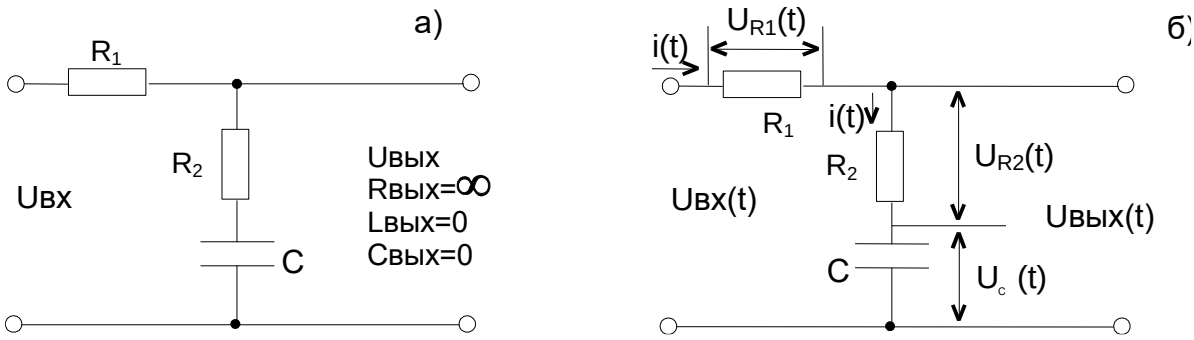


Рис. 1.3.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах интегрирующего звена (б)

При протекании тока через элементы звена имеем:

$$U_{R1}(t)=i(t)R_1\ ;\ U_{R2}(t)=i(t)R_2\ ;\ U_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt. \qquad (1.3.1)$$

В этом случае:

$$U_{вх}(t)=U_{R1}(t)+U_{R2}(t)+U_C(t)=i(t)R_1+i(t)R_2+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt,$$

$$U_{вых}(t)=U_{R2}(t)+U_C(t)=i(t)R_2+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt. \qquad (1.3.2)$$

Получаем систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} U_{вх}(t)=i(t)R_1+U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t)=i(t)R_2+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt. \end{cases} \qquad (1.3.3.)$$

1.4.Колебательное звено

Принципиальная схема колебательного звена приведена на рис.1.4.1.

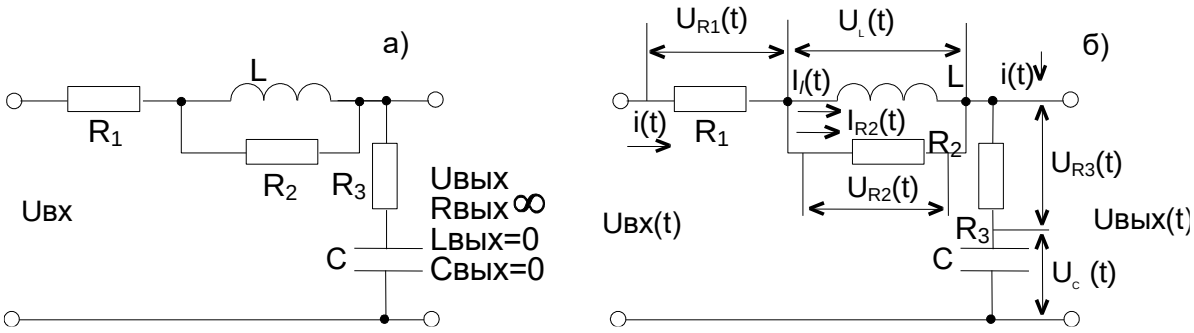


Рис. 1.4.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений (б) на элементах колебательного звена

При протекании тока через элементы звена имеем

$U_{R1}(t)=i(t)R_1$; $U_{R2}(t)=i_{R2}(t)R_2$; $U_L(t)=\frac{di_L(t)}{dt}L$; (1.4.1)

$U_{R3}(t)=i(t)R_3$; $U(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$.

В этом случае:

$U_{вх}(t)=U_{R1}(t)+U_{R2}(t)+U_{R3}(t)+U_C(t)$, (1.4.2)

$U_{вых}(t)=U_{R3}(t)+U_C(t)$. (1.4.3.)

Отсюда получаем систему интегрально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} U_{вх}(t)=i(t)R_1+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)+i_{R2}(t)R_2+U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t)=i(t)R_3+i(t)dt, \\ i(t)=i_{R2}(t)+i_L(t), \\ i_{R2}(t)R_2=\frac{di_L(t)}{dt}L. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

2. Порядок и методика выполнения работы

2.1. Получить у преподавателя вариант выполнения работы.

Варианты работы приведены на рис.2.1.

2.2. Начертить принципиальную схему типового звена САУ заданного варианта.

2.3. Изобразить на принципиальной схеме распределение падений напряжений на элементах типового звена.

2.4. Записать математические выражения падения напряжения на каждом элементе звена.

2.5. По математическим выражениям падений напряжений составить дифференциальные (интегральные) уравнения входной и

выходной управляемой величины Uвх (t) и Uвых (t).

2.6. Записать систему дифференциальных (интегральных) уравнений в общем виде.

3.Содержание отчёта

Отчёт должен содержать:

цель работы, вариант задания, принципиальную схему звена САУ, схему распределения падений напряжений на элементах звена при протекании токов, математические выражения падений напряжений на каждом элементе звена, дифференциальные

(интегральные) уравнения входной и выходной управляемой величины и систему дифференциальных (интегральных) уравнений звена.

4. Вопросы для контроля

4.1. Что называется звеном САУ?

4.2. Какие бывают типовые звенья САУ?

4.3. Записать дифференциальное (интегральное) уравнения простого типового звена.

4.4. Области применения типовых звеньев.

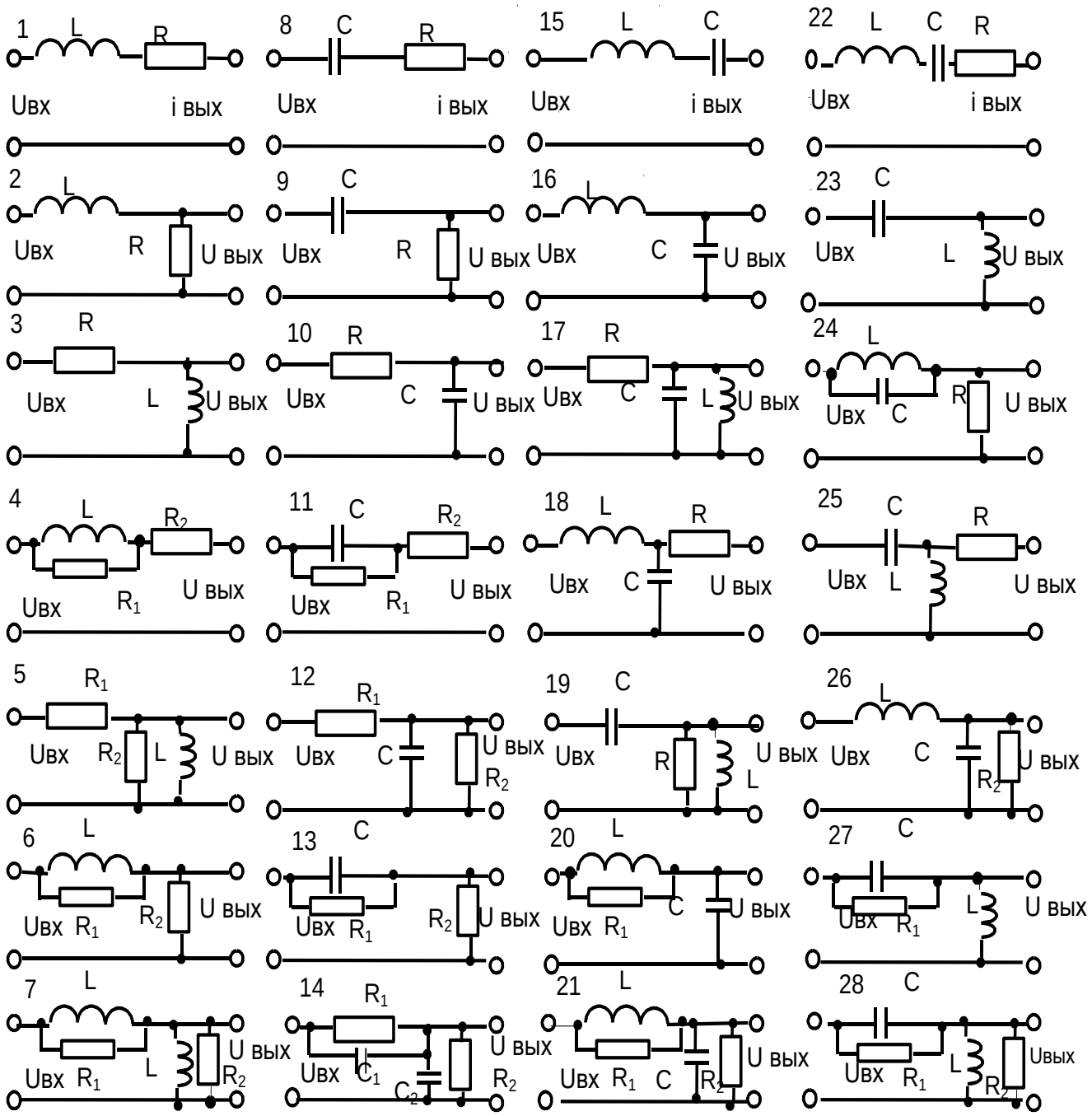


Рис 2.1 Варианты работы

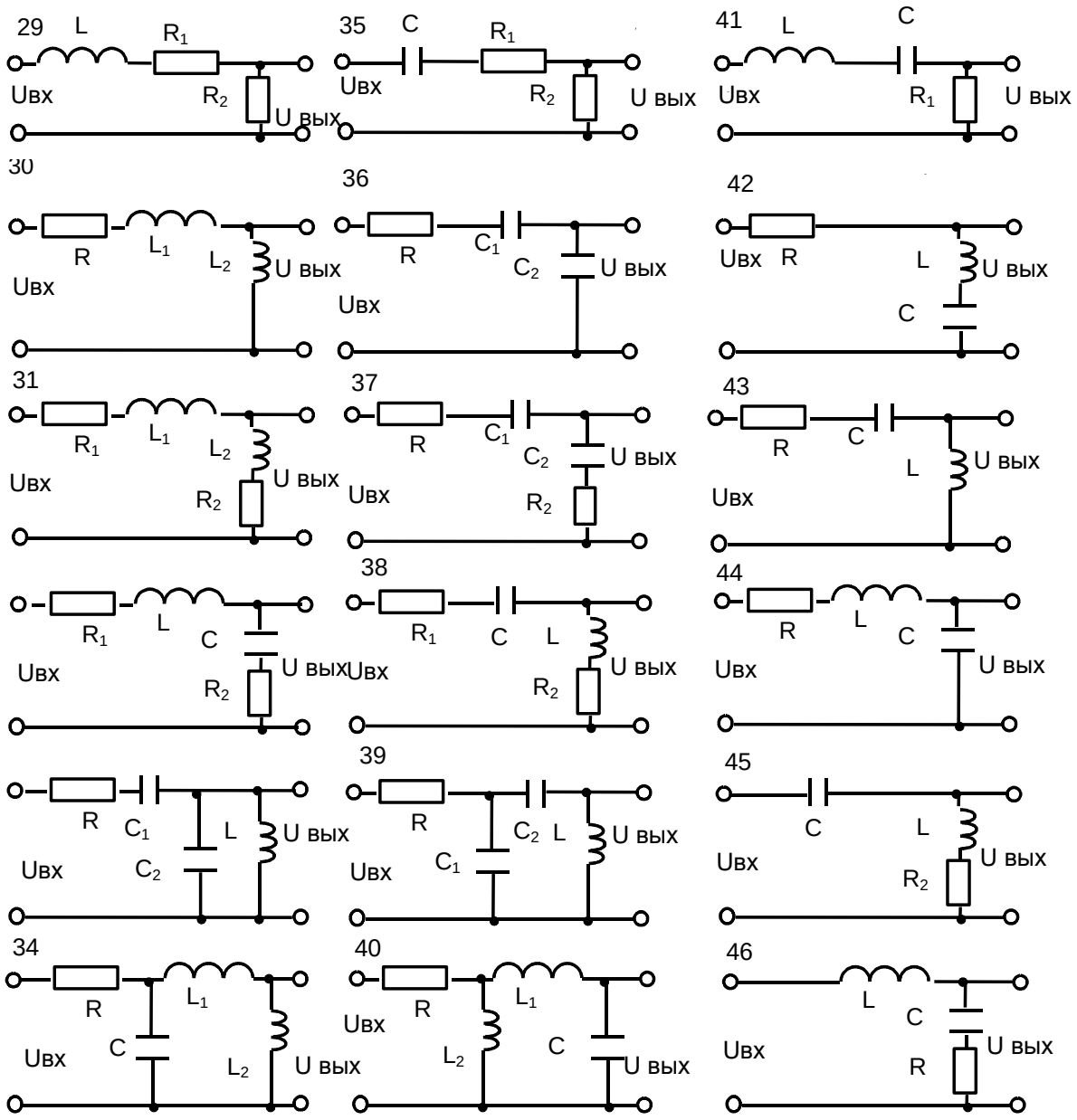


Рис.2.1 Варианты работы

Рис. 2.1. Варианты заданий:

Если $Y(t)=U_{вых}(t)$, то $R_{вых}=\infty$, $C_{вых}=0$ и $L_{вых}=0$

Если $Y(t)=i_{вых}(t)$, то $R_{вых}=0$, $C_{вых}=0$ и $L_{вых}=0$

Практическое занятие №2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВИД ПО ЛАПЛАСУ

Цель работы

Научиться проводить преобразования дифференциальных уравнений звеньев САУ в параметрический вид по Лапласу для более простого решения системы дифференциальных уравнений, получения передаточных функций, анализа частотных характеристик и оценки устойчивости.

1. Общие положения

Для решения дифференциальных линейных уравнений удобно использовать операторный метод, при котором функции времени по определенным правилам заменяются соответствующими им операторными изображениями. По этим изображениям в алгебраической форме проводят решение, а затем переходят от изображения к самим значениям оригинала. При этом значительно упрощается это решение.

Операторным изображением какой-либо функции времени *f(t)*, которую называют оригиналом, является функция *F(p)* комплексной $p = c \pm j\omega$ переменной, связанная с ней преобразованием Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \lambda f(t), \qquad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p)e^{pt}\,\mathrm{dp}, \qquad (2)$$

где *P* – оператор Лапласа, λ – знак изображения по Лапласу, *C* – реальная часть, ω – мнимая часть:

$$f(t) \rightleftharpoons F(p) \quad \text{или} \quad f(t) \dot{\rightleftharpoons} F(p) \qquad (3)$$

Соответствующие преобразования Лапласа для различных функций времени вычислены и сведены в таблицы [1]:

$$\frac{d}{dt} \rightleftarrows p;\ \frac{d^n}{dt^n} \rightleftarrows p^n;\ \int_0^t dt \rightleftarrows \frac{1}{p};\ Sin(\omega t) \rightleftarrows \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \text{и т. д.} \quad (4)$$

Апериодическое звено

Принципиальная схема апериодического звена приведена на рис. 1.1.1.

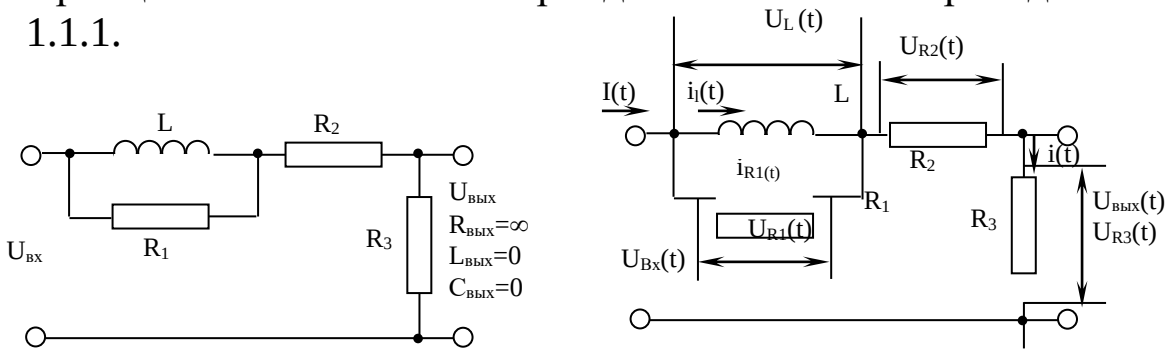


Рис. 1.1.1. Принципиальная схема и схема распределения падений напряжений на элементах апериодического звена

Система дифференциальных уравнений апериодического звена рис. 1.1.1а. записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = \dfrac{di_L(t)}{dt} L + i(t)R_2 + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R_3, \\ i(t) = i_L(t) + i_{R_1}(t), \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} L = i_{R_1}(p)R_1. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Количество дифференциальных уравнений в системе уравнений (1.1.1) должно быть равно количеству неизвестных токов и падений напряжений в типовом звене. В данном случае количество неизвестных параметров равно 4.

Проведем преобразования Лапласа дифференциальных уравнений (1.1.1):

1.2 Дифференцирующее звено

Принципиальная схема дифференцирующего звена приведена на рис. 1.2.1. [2].

$$\begin{cases} U_{вх}(p) = i_L(p)pL + i(p)R_2 + U_{вых}(p), \\ U_{вых}(p) = i(p)R_3, \\ i(p) = i_L(p) + i_{R_1}(p), \\ i_L(p)pL = i_{R_1}(p)R_1. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

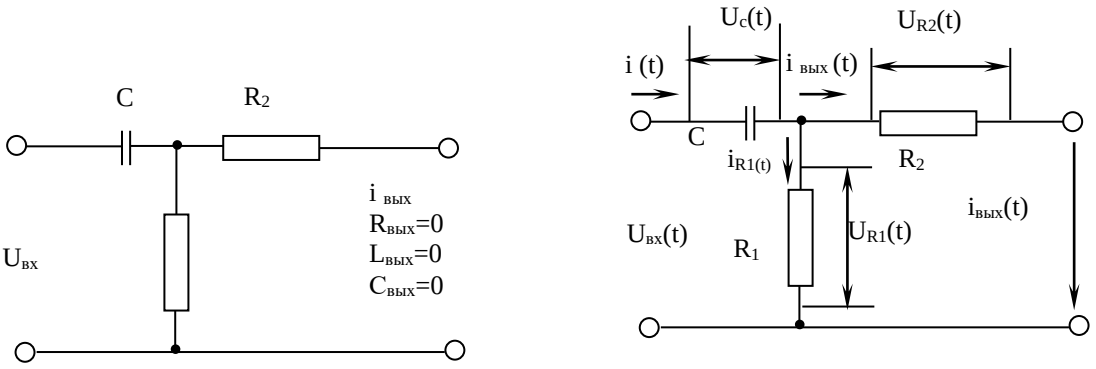


Рис. 1.2.1. Принципиальная схема и схема распределения падений напряжений на элементах дифференцирующего звена

Система дифференциальных уравнений дифференцирующего звена рис. 1.2.1а. записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = \dfrac{1}{c}\int_0^t i(t)dt + i_{вых}(t)R_2, \\ i_{вых}(t)R_2 = i_{R_1}(t)R_1, \\ i(t) = i_{R_1}(t) + i_{вых}(t). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Количество дифференциальных уравнений в системе уравнений (1.2.1) будет равно 3. После преобразования по Лапласу получим:

$$\begin{cases} U_{вх}(p) = i(p)\dfrac{1}{pc} + i_{вых}(p)R_2, \\ i_{вых}(p)R_2 = i_{R_1}(p)R_1, \\ i(p) = i_{R_1}(p) + i_{вых}(p). \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Интегрирующее звено

Принципиальная схема интегрирующего звена приведена на рис. 1.3.1. [2].

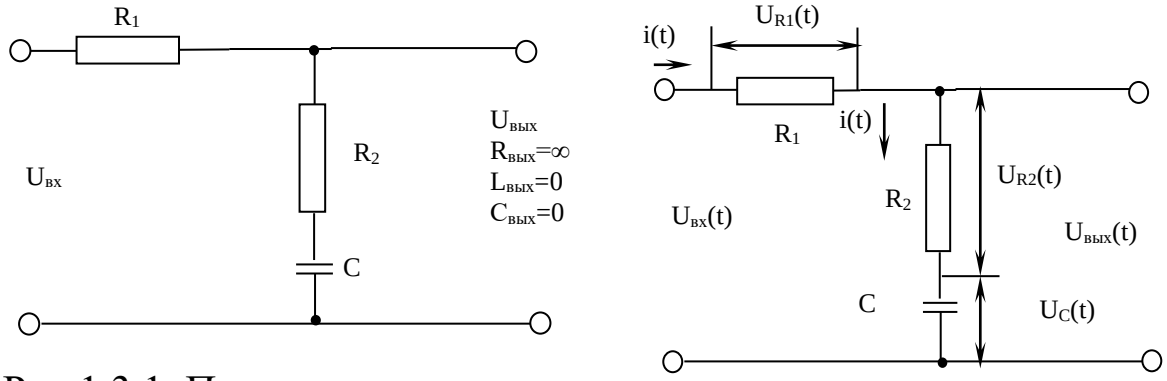


Рис.1.3.1. Принципиальная схема и схема распределения падений напряжений на элементах интегрирующего звена

Система дифференциальных уравнений интегрирующего звена рис. 1.3.1. записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = i(t)R_1 + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R_2 + \dfrac{1}{}\int_0^t i(t)dt. \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Количество дифференциальных уравнений в системе уравнений (1.3.1) будет равно 2 по количеству неизвестных параметров *i(t) и* $U_{вых}(t)$. При преобразовании по Лапласу получим:

$$\begin{cases} U_{вх}(p) = i(p)R_1 + U_{вых}(p), \\ U_{вых}(p) = i(p)R_2 + i(p)\dfrac{1}{pc}. \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Колебательное звено

Принципиальная схема колебательного звена приведена на рис.1.4.1. [2].

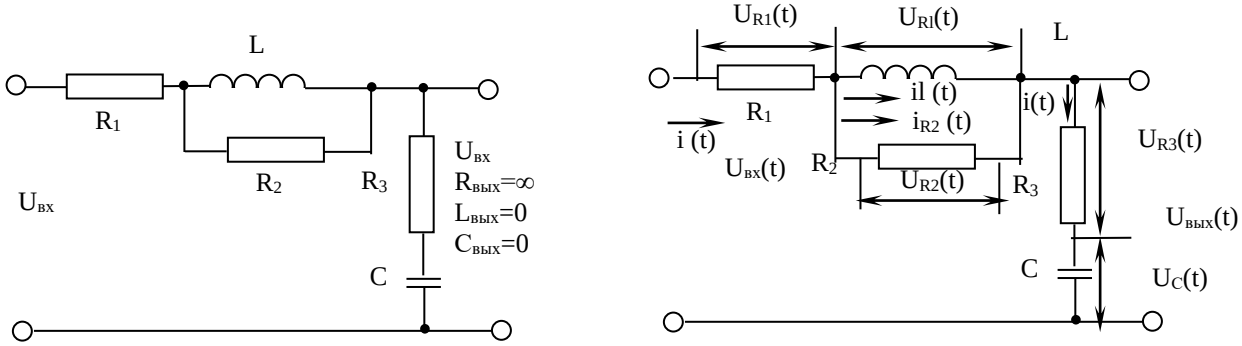


Рис. 1.4.1. Принципиальная схема и схема распределения падений напряжений на элементах колебательного звена

Система дифференциальных уравнений колебательного звена рис.1.4.1.а. имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = i(t)R_1 + i_{R_2}(t)R_2 + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R_3 + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt, \\ i(t) = i_{R_2}(t) + i_L(t), \\ i_{R_2}(t)R_2 = \frac{di_L(t)}{dt}L. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Изображение по Лапласу уравнений (1.4.1) представляется следующим:

$$\begin{cases} U_{вх}(p) = i(p)R_1 + i_{R_2}(p)R_2 + U_{вых}(p), \\ U_{вых}(p) = i(p)R_3 + i(p)\frac{1}{cp}, \\ i(p) = i_{R_2}(p) + i_L(p), \\ i_{R_2}(p)R_2 = i_L(p)pL. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Количество неизвестных параметров равно 4, поэтому и количество уравнений в (1.4.1.) и (1.4.2.) тоже 4.

Порядок и методика выполнения работы

2.1. Получить у преподавателя вариант выполнения работы. Варианты выполнения работы приведены на рис. 2.1.

2.2. Начертить принципиальную схему типового звена САУ заданного варианта.

2.3. Изобразить на принципиальной схеме распределение падений напряжений на элементах типового звена.

1.4. Записать систему дифференциальных (интегральных) уравнений в обобщенном виде.

1.5. Провести преобразование уравнений в параметрический вид по Лапласу.

1.6. Записать систему уравнений в изображениях по Лапласу.

2. Содержание отчета

Отчет должен содержать: цель работы, вариант задания, принципиальную схему звена САУ, схему звена САУ, схему распределения падения напряжений на элементах звена при протекании токов, систему дифференциальных уравнений звена, систему уравнений в изображениях по Лапласу.

3. Вопросы для контроля

3.1. Записать в общем виде уравнения преобразования по Лапласу.

3.2. Записать операцию дифференцирования в операторном виде.

3.3. Как будет выглядеть изображение по Лапласу интегрирования функции X^{2t}?

3.4. Записать оригинал функции изображения по Лапласу P^{-3}.

Практическое занятие №3

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЗВЕНА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель занятия:

1. Приобрести навыки получения передаточной функции типового звена системы автоматического управления (САУ).
2. Научиться вычислять передаточную функцию САУ по передаточным функциям типовых звеньев, включениях последовательно, параллельно и комбинированно.

1. Общие положения

Система автоматического управления полностью описывается передаточными функциями САУ или звеньев (элементов).

Передаточной функцией системы или звена называют отношение изображения Лапласа для выходной и входной величины при их начальных нулевых условиях и при отсутствии других воздействий. Она полностью определяет динамические свойства звена и системы.

Передаточная функция представляет собой комплексное выражение [1]

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}, \qquad (1)$$

где Y*(p)* - изображение по Лапласу выходной величины;
X(p) - изображение по Лапласу входной величины;
$P=C\pm j\omega$ - параметр Лапласа.

Передаточная функция может быть легко найдена, если известны дифференциальные уравнения, описывающие состояние САУ или звеньев (элементов).

1.1. Апериодическое звено

Принципиальная схема апериодического звена приведена на рис. 1.1.1. [2]

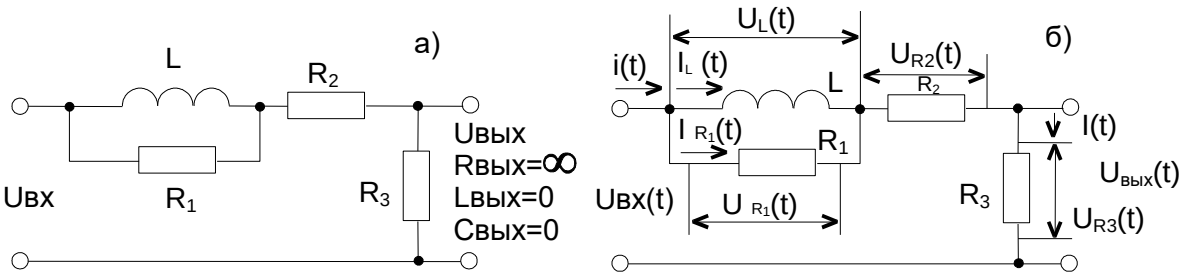


Рис. 1.1.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах апериодического звена (б)

Система уравнений апериодического звена рис.1.1.1а в изображениях по Лапласу записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} U_{вх}(p) &= i_L(p)pL + i(p)R_2 + U_{вых}(p), \\ U_{вых}(p) &= i(p)R_3, \\ i(p) &= i_L(p) + i_{R1}(p), \\ i_L(p)pL &= i_{R1}(p)R_1. \end{aligned} \qquad (1.1.1)$$

Так как выходное напряжение Uвых(p) выражается во втором уравнении (1.1.1) через неизвестный ток *i(p)*, то выразим через этот параметр значение тока $i_L(p)$ для того, чтобы подставить первое уравнение (1.1.1) и только бы там остался неизвестный ток i*(p).*

Предварительно решим третье и четвертое уравнение (1.1.1) относительно тока $i_L(p)$:

$$i(p)=i_L(p)+i_L(p)\frac{pL}{R_1}=i_L(p)\left(1+\frac{PL}{R_1}\right)=i_L(p)\frac{R_1+PL}{R_1} \qquad (1.1.2)$$

или

$$i_L=i(p)\frac{R_1}{R_1+PL}. \qquad (1.1.3)$$

Далее, подставляя выражение (1.1.3) для $i_L(p)$ в первое уравнение (1.1.1), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} U_{вх}(p) &= i(p)\left(\frac{R_1 * PL}{R_1+PL}+R_2+R_3\right), \\ U_{вых}(p) &= i(p)R_3. \end{aligned} \qquad (1.1.4)$$

Из системы уравнений (1.1.4) получаем передаточную функцию звена по выражению (1):

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_3}{\frac{R_1PL}{R_1+PL}+R_2+R_3}=\frac{K(T_1P+1)}{TP+1}, \qquad (1.1.5)$$

где $K=\frac{R_3}{R_2+R_3}$ — коэффициент ослабления информационного сигнала;

$T_1=\frac{L}{R_1}$; $T=\frac{L}{\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}$ - постоянные времени звена.

При $R_1>>PL$ и $R_2<<R_3$

$$K=1;\ T=\frac{L}{R_3}\ , \qquad (1.1.6)$$

а при $R_1>>PL$

$$K=\frac{R_3}{R_2+R_3};\ T=\frac{L}{R_2+R_3}. \qquad (1.1.7)$$

1.2. Дифференцирующее звено

Принципиальная схема дифференцирующего звена приведена на рис. 1.2.1 [2]:

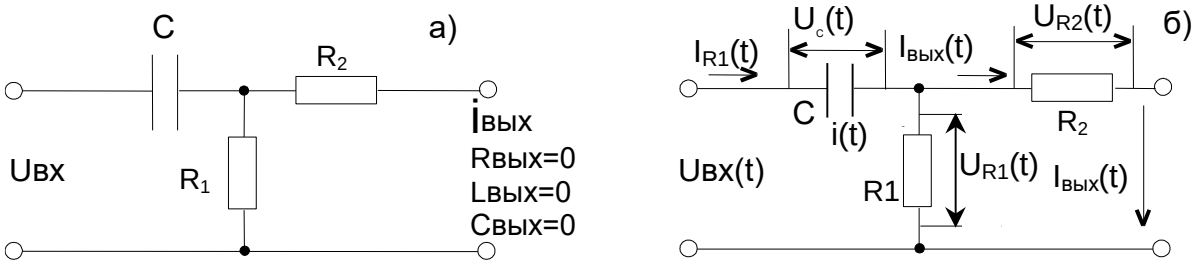


Рис. .1.2.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах дифференцирующего звена (б).

Система уравнений дифференцирующего звена рис. 1.2.1 а в изображениях по Лапласу представляется следующим [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(p)=i(p)\frac{1}{PC}+i_{вых}(p)R_2, \\ i_{вых}(p)R_2=i_{R1}(p)R_1, \\ i_{вых}(p)=i(p)-i_{R1}(p). \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Так как в первом уравнении (1.2.1) неизвестными являются токи i(p) и $i_{вых}(p)$, то решая второе и третье уравнения (1.2.2) относительно $i_{вых}(p)$, освобождаемся от одного неизвестного тока i(p):

$$i(p)=i_{вых}(p)+i_{вых}(p)\frac{R_2}{R_1}. \quad (1.2.2)$$

Подставляя (1.2.2) в первое уравнение (1.2.1), получаем:

$$U_{вх}(p)=i_{вых}(p)\frac{1}{PC}(1+\frac{R_2}{R_1})+i_{вых}(p)R_2 \quad (1.2.3)$$

или

$$U_{вх}(p)=i_{вых}(p)(\frac{1}{PC}(1+\frac{R_2}{R_1})+R_2). \quad (1.2.4)$$

Отсюда получаем выражение для передаточной функции

$$W(p)=\frac{iвых(p)}{Uвх(p)}=\frac{1}{\frac{1}{PC}(1+\frac{R_2}{R_1})+R_2}=\frac{KPT}{PT+1} \quad (1.2.5)$$

где $K=\frac{1}{R_2}$ - коэффициент ослабления информационного сигнала,

$T=C\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ - постоянная времени звена.

при $R_1>>R_2$

$$K=\frac{1}{R_2};\ T=CR_2. \quad (1.2.6)$$

1.3. Интегрирующее звено

Принципиальная схема интегрирующего звена приведена на рис. 1.3.1 [2]:

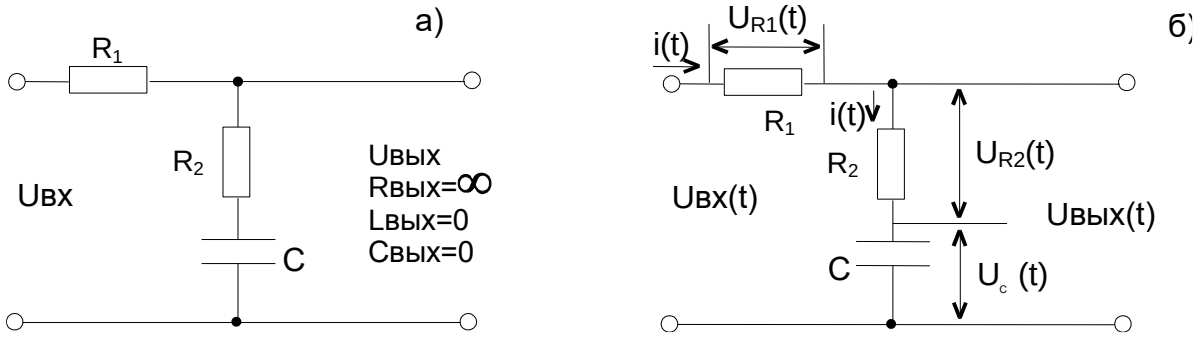


Рис. 1.3.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах интегрирующего звена (б).

Система уравнений интегрирующего звена рис. 1.3.1а а изображениях по Лапласу записывается в следующем виде [2]:

$$U_{вх}(p)=i(p)R_1+U_{вых}(p),$$
$$U_{вых}(p)=i(p)R_2+i(p)\frac{1}{PC}. \qquad (1.3.1)$$

Подставляя в первое уравнение (1.3.1) второе, получим систему уравнений

$$U_{вх}(p)=i(p)R_1+i(p)R_2+i(p)\frac{1}{PC},$$
$$U_{вых}(p)=i(p)R_2+i(p)\frac{1}{PC}. \qquad (1.3.2)$$

Отсюда получаем выражение для передаточной функции

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_2+\frac{1}{PC}}{R_1+R_2+\frac{1}{PC}}. \qquad (1.3.3)$$

При $R_1>>\frac{1}{PC}$ и $R_2\leq\frac{1}{PC}$ из выражения (1.3.3) получаем

$$W(p)=\frac{PR_2C+1}{PR_1C}=\frac{PT_2+1}{PT_1}, \qquad (1.3.4)$$

где $T_2=R_2C$ – постоянная времени форсирования;
$T=R_1C$ – постоянная времени интегрирования.

1.4. Колебательное звено

Принципиальная схема колебательного звена приведена на рис. 1.4.1 [2].

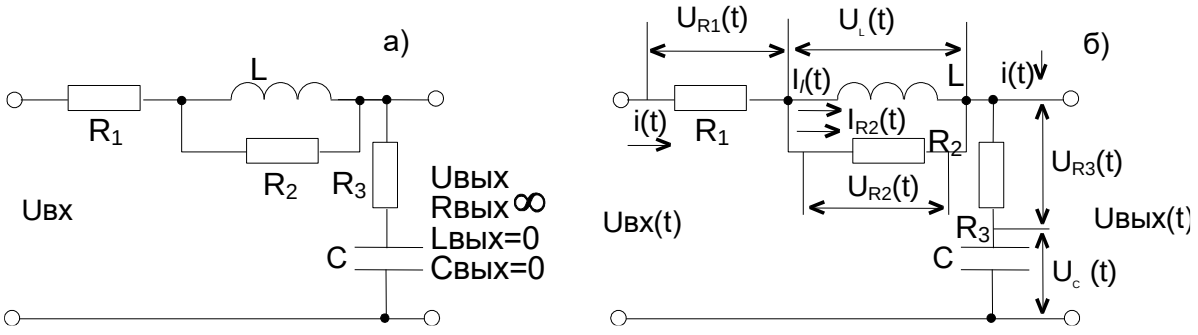


Рис. 1.4.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений (б) на элементах колебательного звена.

Система уравнений колебательного звена рис. 1.4.1 в изображениях по Лапласу записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{cases} U_{вх}(p)=i(p)R_1+i_L(p)PL+U_{вых}(p), \\ U_{вых}(p)=i(p)R_3+i(p)\frac{1}{CP}, \\ i(p)=i_{R2}(p)+i_L(p), \\ i_{R2}(p)R_2=i_L(p)PL. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Так как во втором уравнении (1.4.1) Uвых(p) выражается через неизвестный ток i(p), то выразим через этот параметр значение тока $i_L(p)$ для того, чтобы подставить в первое уравнение(1.4.1) и только бы там остался неизвестный ток i(p). Предварительно решим третье и четвертое уравнение (1.4.1) относительно тока $i_L(p)$:

$$i(p)=i_L(p)\frac{PL}{R_2}+i_L(p)=i_L(p)\frac{PL+R_2}{R_2} \quad (1.4.2)$$

или

$$i_L(p)=i(p)\frac{R_2}{PL+R_2}. \quad (1.4.3)$$

Далее подставляя выражение (1.4.3) для $i_L(p)$ в первое уравнение (1.4.1), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} U_{вх}(p)=i(p)(R_1+\frac{PLR_2}{PL+R_2}+R_3+\frac{1}{CP}), \\ U_{вых}(p)=i(p)(R_3+\frac{1}{CP}). \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Из системы уравнений (1.4.4) получаем выражение для передаточной функции колебательного звена по соотношению (1):

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_3+\frac{1}{CP}}{R1+\frac{PLR_2}{PL+R_2}+R_3+\frac{1}{CP}}, \qquad (1.4.5)$$

при $R_3<<\frac{1}{CP}$, $R_1 \approx R_3$ и $R_2>>PL$

$$W(p)=\frac{1}{T^2P^2+1}, \qquad (1.4.6)$$

где $T=\sqrt{LC}$ - постоянная времени колебательного звена.

при $R_2>>PL$ и $R_1 \approx R_3$

$$W(p)=\frac{T_3P+1}{T^2P^2+(T_1+T_3)P+1}=\frac{TaP+1}{T^2P^2+2aPT+1}, \qquad (1.4.7)$$

где $T_1=R_1C$; $T_3=R_3C$; $a=\frac{T_1}{T}$ -коэффициент затухания.

2. Порядок и методика выполнения работы

2.1. Получить у преподавателя вариант выполнения работы. Варианты работы приведены на рис. 2.1.

2.2. Начертить принципиальную схему типового звена САУ заданного варианта.

2.3.Изобразить на принципиальной схеме распределение падений напряжений на элементах типового звена.

2.4. Записать систему дифференциальных (интегральных) уравнений в изображениях по Лапласу.

2.5. Решить систему алгебраических (изображений по Лапласу) уравнений относительно изображений выходной величины $Y(p)$ и входной величины X(p).

2.6. Найти передаточную функцию звена в общем виде.

2.7. Привести передаточную функцию звена к типовому виду с использованием упрощений и допущений.

3. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

Цель работы, вариант задания, принципиальную схему звена *САУ,* схему распределения падений напряжений на элементах звена, систему дифференциальных (интегральных) уравнений в изображениях по Лапласу, передаточную функцию звена в общем виде и передаточную функцию в типовом виде.

4. Вопросы для контроля

4.1. Записать передаточные функции типового апериодического, дифференцирующего, интегрирующего, колебательного, форсирующего и изодромного звена.

4.2. Дать определение передаточной функции.

4.3 Что называется постоянной времени ?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.А.Бессекерский и др. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. - М.: Наука,.1972.

2. Составление дифференциальных уравнений типовых звеньев систем автоматического управления: методические указания к практической (самостоятельной) работе / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.:А.В. Филонович. Курск, 2017.

Практическое занятие №4
ПОСТРОЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель занятия

Приобрести навыки аналитического представления временных характеристик звеньев системы автоматического управления (САУ) и их графического построения.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Временные характеристики звена САУ подразделяются на переходную и импульсную (весовую) характеристики.

Переходной характеристикой (функцией) называется реакция на выходе звена (системы) *У(t)* при подаче на вход воздействия единичного скачка.

$$X_1=\mathbf{1}(t). \qquad (1)$$

По Лапласу изображение единичного скачка, представляется

$$X(P)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty 1(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{P}. \qquad (2)$$

Так как *У(t)=W(p)X(p),* то определяем изображение по Лапласу переходной характеристики[1]:

$$h(p)=Y(p)=\frac{1}{p}W(p) \qquad (3)$$

при 1(t).

Отсюда переходная характеристика определяется по ее изображению:

$$h(t)=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{p}W(p)\right\}, \qquad (4)$$

где λ^{-1} - знак преобразования из изображения по Лапласу в оригинал.

Импульсной (весовой) характеристикой (функцией) называется реакция на выходе звена (системы) *У(t)* при подаче на вход импульсного воздействия δ(t) с бесконечно большой амплитудой A(t) и бесконечно малой длительностью τ

$$X_2(t)=\delta(t), \qquad (5)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция при $A\cdot\tau=1$.

Так как дельта-функция является производной от единичного воздействия δ(t)=d1(t)/dt, то импульсная (весовая) функция тоже является производной от переходной функции:

$$K(t)=\frac{dh(t)}{dt}. \qquad (6)$$

1.1 Апериодическое звено

Принципиальная схема апериодического звена приведена на рис. 1.1.1

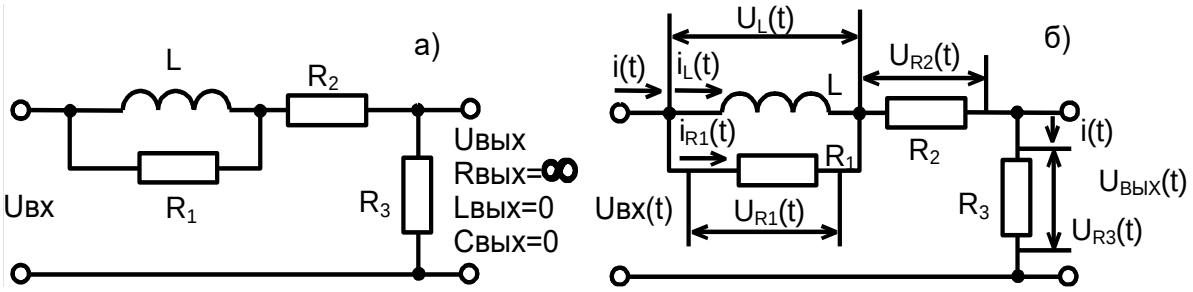


Рис. 1.1.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах апериодического звена (б)

Передаточная функция звена представляется следующим выражением[2]:

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_3}{\frac{PLR_1}{PL+R_1}+R_2+R_3}=\frac{K(T_1P+1)}{Tp+1}, \qquad (1.1.1)$$

$K=\frac{R_3}{R_2+R_3}$ - коэффициент ослабления информационного сигнала;

$T=\frac{L}{\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}$ - постоянная времена звена;

$T_1=\frac{L}{R_1}$ - постоянная времени.

Определяем изображение по Лапласу переходной характеристики (3):

$$h(p)=\frac{1}{p}\,\frac{K(T_1p+1)}{Tp+1}. \qquad (1.1.2)$$

Преобразуем изображение переходной характеристики (1.1.2) в оригинал с разложением знаменателя изображения (1.1.2) на простые множители и используя приложение I [l]:

$$h(p)=\frac{KT_1}{T(p+\frac{1}{T})}+\frac{K}{Tp(p+\frac{1}{T})}\rightarrow h(t)=K(1-(1-\frac{T_1}{T})e^{-\frac{t}{T}})\,. \qquad (1.1.3)$$

Определяем импульсную (весовую) характеристику по (6) и (1.1.3)

$$K(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{K}{T}(1-\frac{T_1}{T})e^{-\frac{t}{T}}\,. \qquad (1.1.4)$$

Графики переходной и импульсной функций, построенных по их аналитическим выражениям (1.1.3) и (1.1.4), приведены на рис.1.1.2

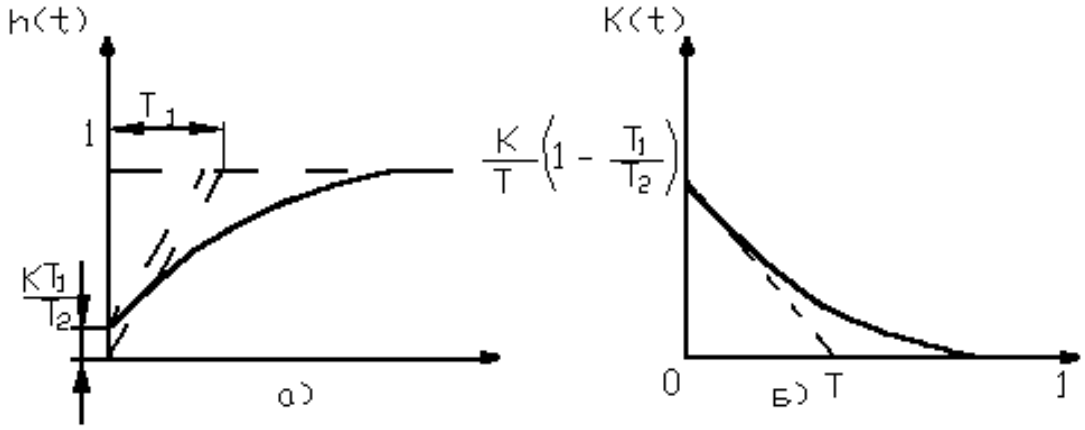


Рис. 1.1.2. Временные характеристики апериодического звена: а - переходная функция; б - импульсная (весовая) функция

1.2 Дифференцирующее звено

Принципиальная схема дифференцирующего звена приведена на рис. 1.2.1.[2]

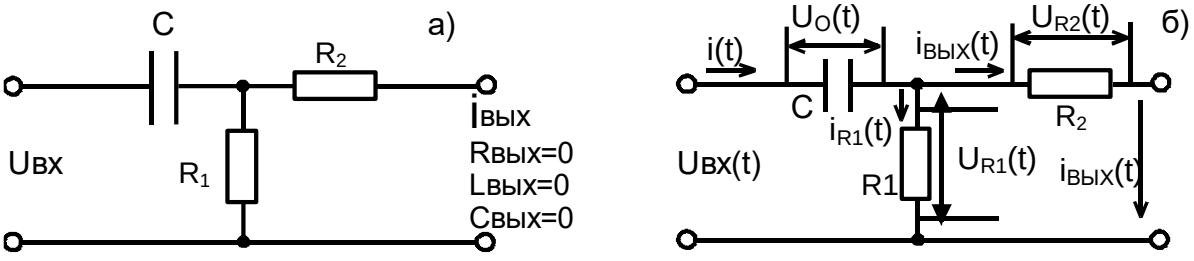


Рис. 1.2.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах дифференцирующего звена (б)

Передаточная функция дифференцирующего звена представляется следующим выражением[2]:

$$W(p)=\frac{i_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{1}{\frac{1}{pc}(1+\frac{R_2}{R_1})+R_2}=\frac{kpT}{pt+1}, \qquad (1.2.1)$$

где К = $\frac{1}{R_2}$ коэффициент ослабления сигнала;

$T = c\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ - постоянная времени звена.

Определяем изображение по Лапласу переходной характеристики по (3):

$$h(p)=\frac{k}{p+\frac{1}{T}} \rightarrow h(t)=ke^{-\frac{t}{T}}. \qquad (1.2.2)$$

Преобразуем изображение переходной характеристики (1.2.2) в оригинал, используя приложение А:

$$h(p)=\frac{k}{p+\frac{1}{T}} \rightarrow h(t)=ke^{-\frac{t}{T}}. \qquad (1.2.3)$$

Определяем импульсную (весовую) характеристику по (6) и (1.2.3)

$$k(t)=\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}} \ . \qquad (1.2.4)$$

Графики переходной и импульсной функций, построенных по их аналитическим выражениям (1.2.3) и (1. 2.4), приведены на рис. 1.2.2.



Рис. 1.2.2. Временные характеристики
дифференцирующего звена:
а - переходная функция; б - импульсная (весовая) функция

1.3. Интегрирующее звено

Принципиальная схема интегрирующего звена приведена на рис. 1.3.1 [2].

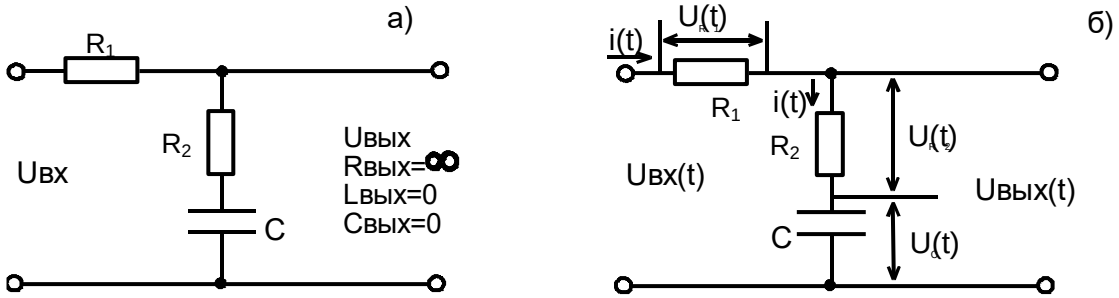


Рис. 1.3.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах интегрирующего звена (б)

Передаточная функция интегрирующего звена представлена следующим выражением [2]:

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_3}{\frac{PLR_1}{PL+R_1}+R_2+R_3}=\frac{K(T_1P+1)}{Tp+1}, \qquad (1.3.1)$$

где $T_1=(R_1+R_2)C$ - постоянная времени интегрирования;

$T_2=R_2C$ - постоянная времени форсирования.

При $R_1>>\frac{1}{pc}$ и $R_2 \le R_1$ имеем

$$W(p)\approx\frac{pR_2c+1}{p(R_1+R_2)c}=\frac{pT_2+1}{pT_1}. \qquad (1.3.2)$$

Определяем переходную характеристику в изображении по Лапласу, используя выражение (3):

$$h(p)=\frac{1}{p}\,\frac{pT_2+1}{pT_1+1}=\frac{T_2}{T_1}\frac{p+\frac{1}{T_2}}{p(p+\frac{1}{T_1})}=\frac{T_2}{T_1}\frac{1}{p+\frac{1}{T_1}}+\frac{1}{pT_1(p+\frac{1}{T_1})}. \qquad (1.3.4)$$

Преобразуем изображение (1.3.4) в оригинал по приложению1 [1]:

$$h(p)=\frac{T_2}{T_1}\,\frac{1}{p+\frac{1}{T_1}}+\frac{1}{pT_1(p+\frac{1}{T_1})}\rightarrow h(t)=\frac{T_2}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+(1-e^{-\frac{t}{T_1}})=(1-(1-\frac{T_2}{T_1})e^{-\frac{t}{T_1}}). \qquad (1.3.5)$$

Определяем импульсную (весовую) характеристику по (6) и (1.3.5):

$$k(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{T_2}{T_1}(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1})e^{-\frac{t}{T_1}}. \qquad (1.3.6)$$

Графики переходной и импульсной функций, построенных по их аналитическим выражениям (1.3.5) и (1.3.6), приведены на рис. 1.3.2..

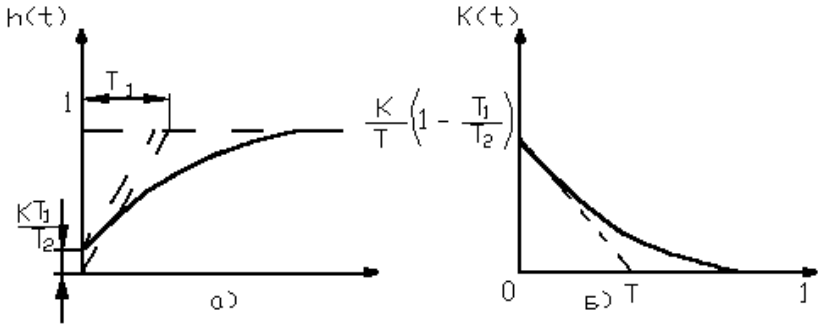


Рис. 1.3.2. Временные характеристики интегрирующего звена: а - переходная функция; б - импульсная (весовая) функция

1.4. Колебательное звено

Принципиальная схема колебательного звена приведена на рис. 1.4.1[2].

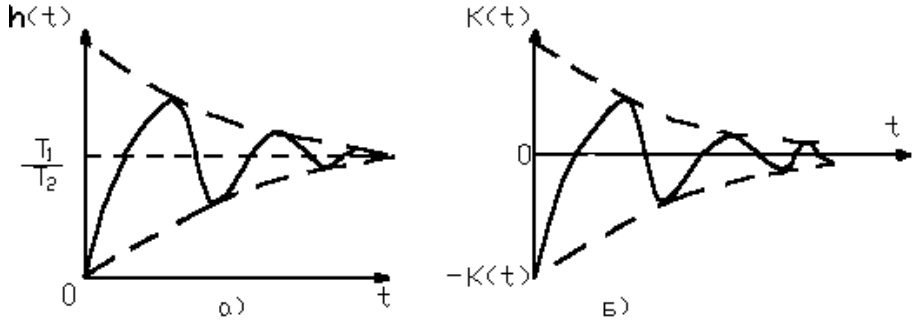


Рис. 1.4.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах колебательного звена (б)

Передаточная функция колебательного звена представляется следующим выражением [2]:

$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{R_3+\frac{1}{pc}}{R_1+\frac{plR_2}{pl+R_2}+R_3+\frac{1}{pc}}\approx\frac{T_3p+1}{T^2p^2+(T_1+T_3)p+1}=$$

$$=\frac{Tap+1}{T^2p^2+2aTp+1}, \qquad (1.4.1)$$

при $R_2>>pl$ и $R_1\approx R_3$,

где $T_1=R_1c$; $T_3=R_3c$; $T=\sqrt{lc}$ и $a=\frac{T_1}{T}$.

Определяем переходную характеристику в изображении по Лапласу, используя выражение (3)

$$h(p)=\frac{1}{p}\,\frac{Tap+1}{T^2p^2+2aTp+1}\ . \qquad (1.4.2)$$

Разложим знаменатель изображения (1.4.2) на множители. Для этого приравняем его к нулю [1]**:**

$$T_2p^2+2aTp+1=0. \qquad (1.4.3)$$

Найдем корни уравнения(1.4.3):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{a}{T}+j\frac{1}{T}\sqrt{1-a^2} = -\gamma+j\lambda \\ p_2 &= -\frac{a}{T}- j\frac{1}{T}\sqrt{1-a^2} = \gamma-j\lambda \end{aligned}\right\}$$

Отсюда знаменатель можно записать

$$T^2(p^2+2a\frac{1}{T}p+\frac{1}{T^2})=T^2(p-p_1)(p-p_2)=T^2[p-(-\gamma+j\lambda)][p-(-\gamma-j\lambda)]=$$

$$=T^2[(p-\frac{a}{T})^2+\frac{1}{T^2}(1-a^2)]\ . \qquad (1.4.5)$$

Преобразуем изображение переходной функции (1.4.2) в оригинал, используя приложение1[1]:

$$h(p)=\frac{Tap+1}{pT^2[(p-\frac{a}{T})^2+\frac{1}{T^2}(1-a^2)]}=\frac{a(p+\frac{1}{T})}{pT[(p-\frac{a}{T^2})^2+\frac{1}{T^2}(1-a^2)]}\rightarrow$$

$$\rightarrow h(t)=a+\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1-a}}e^{-\frac{at}{T}}\sin(\frac{\sqrt{1-a^2}}{T}t-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}). \qquad (1.4.6)$$

Определяем импульсную (весовую) характеристику, дифференцируя выражение (1.4.6).

$$K(t)=\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{\sqrt{2}a^2\sqrt{1+a}}{T^2}e^{-\frac{at}{T}}\cos(\frac{\sqrt{1-a^2}}{T}t-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})\ . \qquad (1.4.7)$$

Графики переходной и импульсной функций, построенных по их аналитическим выражениям (1.4.6) и (1.4.7), приведены на рис. 1.4.2.

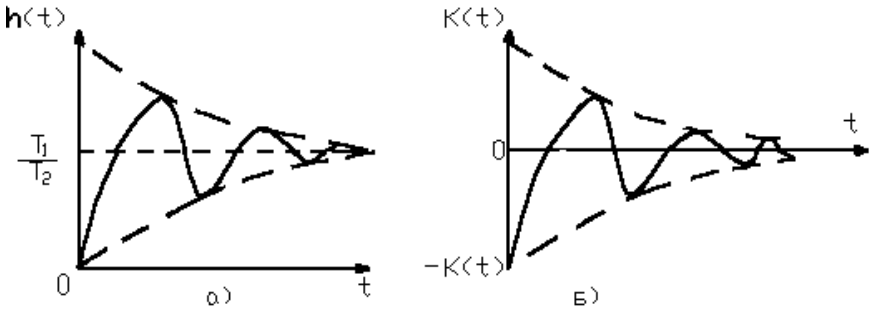


Рис.1.4.2. Временные характеристики колебательного звена: а - переходная функция; б - импульсная функция.

2. Порядок и методика выполнения работы

2.1. Получить у преподавателя вариант выполнения работы. Варианты работы приведены на рис. 2.1.

2.2. Начертить принципиальную схему типового звена САУ заданного варианта.

2.3. Изображать на принципиальной схеме распределение падений напряжений на элементах типового звена.

2.4.Записать выражение для передаточной функции звена в общем виде.

2.5. Определить переходную характеристику в изображении по Лапласу.

2.6. Разложить знаменатель изображения переходной характеристики на множители.

2.7. Преобразовать изображение переходной характеристики в оригинал.

2.8. Определить импульсную (весовую) характеристику.

2.9. Построить графики временных характеристик.

3. Содержание отчета

Отчет должен содержать: Цель работы, варианты задания, принципиальную схему звена САУ, схему распределения падений напряжений на элементах звена, передаточную функцию звена, аналитические выражения для временных функций звена, графики временных функций звена.

4. Вопросы для контроля

4.1. Что называется временными характеристиками?

4.2. Изобразить на рисунке временные характеристики типовых звеньев.

4.3. Пояснить на графиках влияние постоянных времени на временные характеристики.

4.4. Как влияет коэффициент усиления (ослабления) на временные характеристики?

Практическое занятие №5

ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы

Приобрести навыки построения частотных характеристик звеньев систем автоматического управления (САУ) по передаточным функциям.

I. Общие положения

Частотными характеристиками звена (системы) называют зависимость от частоты входного сигнала амплитуды и фазы выходного гармонического (синусоидального) сигнала при прохождении через звено (систему).

Частотные характеристики получают по передаточной функции при замене оператора Р в операторных полиномах её числителя С (Р) и знаменателя В (Р) на оператор Фурье iω [I] :

$$W(P) = \frac{C(P)}{} \rightarrow W(i\omega) = \frac{C(i\omega)}{} = U(\omega) + iV(\omega), \quad (I)$$

где W (iω) – амплитудно-фазовая частотная характеристика АФЧХ (годограф);

U (ω) – вещественная (активная) составляющая;

V (ω) – мнимая (реактивная) составляющая.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) представляет зависимость амплитуды гармонического сигнала от частоты при прохождении его через звено (систему):

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (2)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) представляет зависимость амплитуды гармонического сигнала от частоты при прохождении его через звено (систему):

$$\Phi(\Omega) = \text{ARG}\, W(I\Omega) = \text{ARCTG}\, \frac{V(\Omega)}{} \quad (3)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) представляет следующую зависимость:

$$L(\Omega) = 20\, \ell G\, A(\Omega), \text{ ДБ}. \quad (4)$$

Апериодическое звено

Принципиальная схема апериодического звена приведена на рис. 1.1.1. [2]

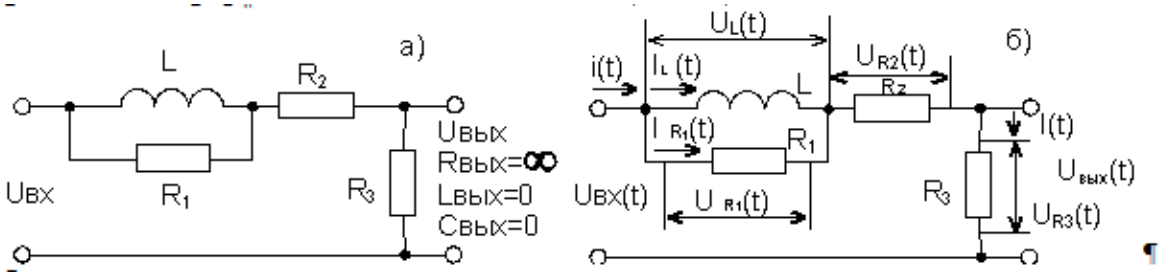


Рис. 1.1.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения падений напряжений на элементах апериодического звена (б)

Передаточная функция звена представляется следующим выражением [2]:

$$W(P) = \frac{U_{ВЫХ}(P)}{U_{ВХ}(P)} = \frac{R_3}{PL\frac{R_1}{PL+R_1} + R_2 + R_3} = \frac{K(T_1 P + 1)}{TP + 1}, \quad (1.1.1.)$$

Где $K = \frac{R}{\quad}$ - коэффициент ослабления информационного анализа;

$T = L$ - постоянная времени звена;

$$\frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$T = \frac{L}{\quad}$ - постоянная времени.

При $R_1 >> R_2$ и $R_2 << R_3$

$K = 1;\ T = \frac{L}{\quad};\ T = 0,$

А при $R_1 >> R_2$ и $R_2 \approx R_3$

$$K = \frac{R_3}{R_2 + R_3};\quad T = \frac{L}{R_2 + R_3}.$$

Заменяем оператор P в передаточной функции (I.I.I) на оператор Фурье iω:

$$W(i\Omega) = \frac{K(iT_1\Omega + 1)}{iT\Omega + 1} \quad (1.1.2)$$

Далее, разделяем W (iω) на реальную и мнимую части, умножая числитель и зраменатель на комплексно-сопряжённое значение (iTω + 1), т.е. на (- iTω + 1).

$$W(i\Omega) = \frac{K(iT_1\Omega + 1)(-iT_1\Omega + 1)}{(iT\Omega + 1)(-iT\Omega + 1)} = \frac{K(T_1 T\Omega^2 + 1 - i(T - T\partial\Omega)}{T^2\Omega^2 + 1} =$$

$$= \frac{K(T_1 T\Omega^2 + 1)}{T^2\Omega^2 + 1} - i\frac{K(T - T_1)\Omega}{T^2\Omega^2 + 1} = U(\Omega) + iV(\Omega) \quad (1.1.3.)$$

При $T_1 << T$ получаем АФЧХ

$$W(i\Omega) = \frac{K}{\quad} - i\frac{K T\Omega}{\quad}. \quad (1.1.4.)$$

$$T^2\Omega^2 + 1 \qquad T^2\Omega^2 + 1$$

АЧХ получаем по выражению (2) из (1.1.4.)

$$A(\Omega) = \sqrt{U^2(\Omega) + V^2(\Omega)} = \frac{K\sqrt{1 + T^2\Omega^2}}{T^2\Omega^2 + 1} = \frac{K}{\sqrt{T^2\Omega^2 + 1}}. \quad (1.1.5.)$$

ФЧХ определяем по выражению (3) из (1.1.4.)

$$\Phi(\Omega) = \text{ARG } W(I\Omega) = \text{ARCTG } \frac{V(\Omega)}{U(\Omega)} = -\text{ARCTG } (T\Omega) \qquad (1.1.6.)$$

ЛАЧХ представляем по выражению (4) из (1.1.5.).

$$L(\Omega) = 20\,\ell G\, A(\Omega) = 20\,\ell G\, K - 20\,\ell G\,\sqrt{T^2\Omega^2 + 1} \qquad (1.1.7.)$$

Графики АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ приведены на рисунке 1.1.2.

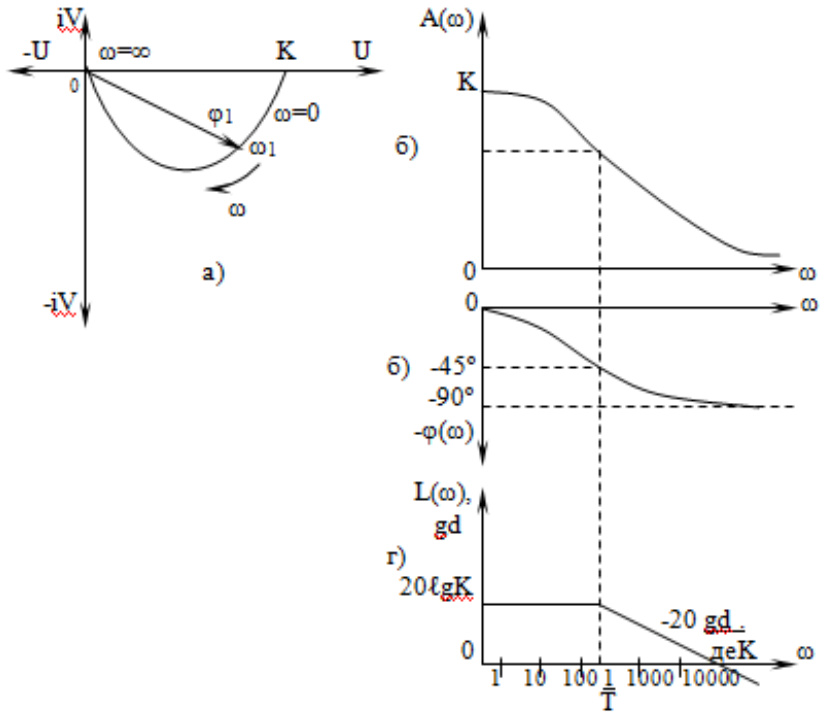


Рис. 1.1.2. Частотные характеристики апериодического звена:
а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ

Дифференцирующее звено

Принципиальная схема дифференцирующего звена приведена на рис. 1.2.1. [2]:

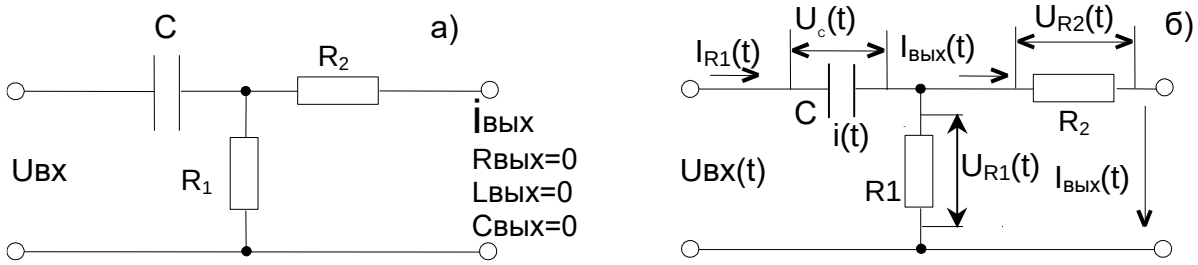


Рис. 1.2.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах дифференцирующего звена (б)

Передаточная функция дифференцирующего звена представляется следующим выражением [2]:

$$W(P) = \frac{I_{ВЫХ}(P)}{U_{ВХ}(P)} = \frac{1}{\frac{1}{PC}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_3} = \frac{PKT}{PT+1}, \quad (1.2.1.)$$

где $K = \frac{1}{R_2}$ - коэффициент ослабления сигнала;

$T = C\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ - постоянная времени-звена.

При $R_1 >> R_2$; $K=\frac{1}{R_2}$; $T=CR_2$. (1.2.2.)

Заменяем оператор P в передаточной функции (1.2.1.) на оператор фурье iω и разделяем вещественную и мнимые части:

$$W(i\omega) = \frac{i\omega KT}{iT\omega+1} = \frac{i\omega KT(1 - i\omega T)}{(iT\omega+1)(1-i\omega T)} = \frac{KT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} +$$

$$+ iK\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} = U(\omega) + iV(\omega) \quad (1.2.3.)$$

Выражение (1.2.3.) представляет АФЧХ. АЧХ получаем по выражению (2) из (1.2.3.):

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{KT\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}{T^2\omega^2+1} = \frac{KT\omega}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \qquad (1.2.4.)$$

ФЧХ определяем по выражению (3) из (1.2.3.):

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{T\omega}. \qquad (1.2.5.)$$

ЛАЧХ представляем по выражению (4) из (1.2.4.):

$$L(\omega) = 20\,\ell g\,A(\omega) = 20\,\ell g\,K + 20\,\ell g\,T\omega - 20\,\ell g\sqrt{T^2\omega^2+1} \qquad (1.2.6.)$$

Графики АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ построены по аналитическим выражениям (1.2.3.), (1.2.6.) и приведены на рис. 1.2.2.

Интегрирующее звено

Принципиальная схема интегрирующего звена приведена на рис. 1.3.1. [2].

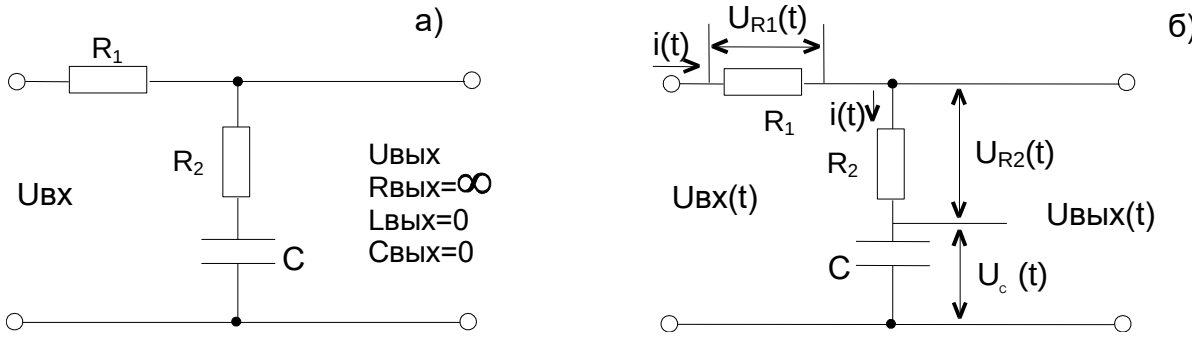


Рис. 1.3.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах интегрирующего звена (б)

Передаточная функция интегрирующего звена представлена следующим выражением [2]:

$$W(P) = \frac{U_{ВЫХ}(P)}{U_{ВХ}(P)} = \frac{R_2 + CP}{R_1 + R_2 + \frac{1}{CP}} = \frac{PT_2 + 1}{PT_1 + 1}, \qquad (1.3.1.)$$

ГДЕ $T_1 = (R_1 + R_2)\,C$ – постоянная времени интегрирования;

$T = R_2\,C$ – постоянная времени форсирования.

ПРИ $R_1 >> \frac{1}{CP}$ И $R_2 \le R_1$ ИМЕЕМ

$$W(P) = \frac{PR_2C + 1}{P(R_1 + R_2)C} \approx \frac{PT_2 + 1}{PT_1} \qquad (1.3.2.)$$

Заменяем оператор P в передаточной функции (1.3.1.) на оператор фурье iω и разделяем вещественную и мнимые части:

$$W(I\Omega) = \frac{IT_2\Omega + 1}{IT_1\Omega + 1} = \frac{T_1T_2\Omega^2 + 1}{T_1^2\Omega^2 + 1} -$$

$$- I\frac{\Omega(T_1 - T_2)}{T_1^2\Omega^2 + 1} = U(\Omega) + IV(\Omega) \qquad (1.3.3.)$$

Выражение (1.3.3.) представляет АФЧХ звена. АЧХ получаем по выражению (2) из (1.3.3.):

$$A(\Omega) = \sqrt{U^2(\Omega) + V^2(\Omega)} = \sqrt{\frac{(\Omega^2T_1T_2+1)^2}{(T_1^2\Omega^2+1)^2} + \frac{(\Omega(T_1-T_2))^2}{(T_1^2\Omega^2+1)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\Omega^2T_1T_2+1)^2+(\Omega(T_1-T_2))^2}}{T_1^2\Omega^2 + 1}$$

ФЧХ определяем по выражению (3) из (1.3.3.):

$$\Phi(\Omega) = \text{ARG } W(I\Omega) = \text{ARCTG}\frac{V(\Omega)}{U(\Omega)} = -\text{ARCTG}\frac{\Omega(T_1-T_2)}{T_1^2\Omega^2+1} \qquad (1.3.5.)$$

ЛАЧХ представляем по выражению (4) из (1.3.4.):

$$L(\Omega) = 20\,\ell G\,A(\Omega) = 20\,\ell G\sqrt{(T_1T_2\,\Omega^2+1)^2+(\Omega(T_1-T_2))^2} - 20\,\ell G\,(T_1^2\Omega^2+1) \qquad (1.3.6.)$$

Графики АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ построены по аналитическим выражениям (1.3.3.), (1.3.6.) с учётом допущений (1.3.2.) и приведены на рис. 1.3.2.

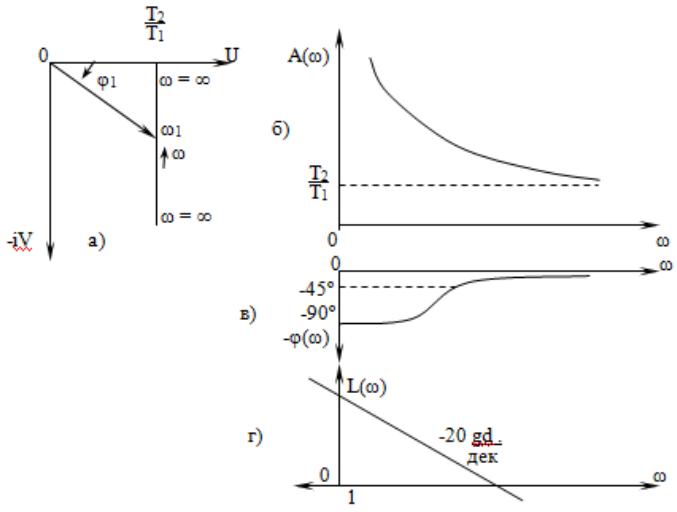


Рис. 1.3.2. Частотные характеристики интегрирующего звена:
а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ

Колебательное звено

Принципиальная схема колебательного звена приведена на рис. 1.4.1. [2].

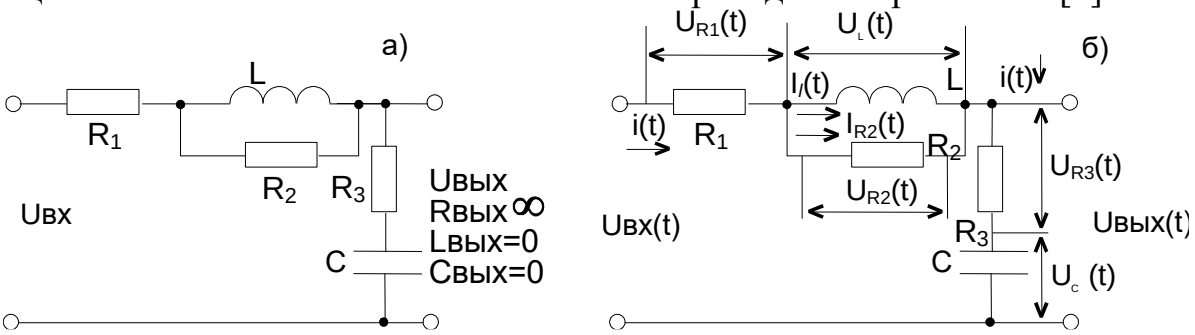


Рис. 1.4.1. Принципиальная схема (а) и схема распределения токов и падений напряжений на элементах колебательного звена (б)

2. Порядок и методика выполнения работы

2.1. Получить у преподавателя вариант выполнения работы. Варианты работы приведены на рис. 2.1.

2.2. Начертить принципиальную схему типового звена САУ заданного варианта.

2.3. Изобразить на принципиальной схеме распределение падений напряжений на элементах типового звена.

2.4. Записать систему уравнений для изображений по Лапласу входной и выходной величины.

2.5. Найти передаточную функцию звена в общем виде.

2.6. Заменить оператор Лапласа P в передаточной функции звена на оператор фурье iω и определить аналитическое выражение амплитудно-фазовой характеристики звена при разделении реальной и мнимой части.

2.7. Построить АФЧХ звена.

2.8. Получить аналитическое выражение амплитудно-частотной характеристики звена.

2.9. Построить АЧХ звена.

2.10. Представить аналитическое выражение фазо-частотной характеристики звена.

2.11. Построить ФЧХ звена.

2.12. Определить аналитическое выражение логарифмической амплитудно-частотной характеристики звена.

2.13. Построить ЛАЧХ звена.

3. Содержание отчёта

Отчёт должен содержать:

цель работы, вариант задания, принципиальную схему звена САУ, схему распределения падений напряжений на элементах звена, систему уравнений для изображений по Лапласу входной и выходной величины звена, передаточную функцию звена, АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ.

4. Вопросы для контроля

4.1. Что называют АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ?

4.2. Изобразить на рисунке АФЧХ,АЧХ,ФЧХ и ЛАЧХ типовых звеньев.

4.3. Как влияют постоянные времени на частотные характеристики типовых звеньев?

Практическое занятие №6

МЕТОДИКА СИНТЕЗА САУ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНО МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Задача 1. Линеаризовать уравнение характеристики элемента умножения $y=x_1x_2$ в точке $y_0=x_{01}x_{02}$.

Р е ш е н и е. В соответствии с малыми приращениями

$y_0+\Delta y=(x_{01}+x_1)(x_{02}+x_2)= x_{01}x_{02}+x_{01}\Delta x_2+x_{02}\Delta x_1+\Delta x_1\Delta x_2=$

$=y_0+x_{01}\Delta x_2+x_{02}\Delta x_1+ \Delta x_1\Delta x_2=y_0+x_{01}\Delta x_2+x_{02}\Delta x_1$, пренебрегая малыми высшего порядка.

Тогда вычитая значение y_0 из левой и правой частей, получим

$y= x_{01}\Delta x_2+x_{02}\Delta x_1= k_1\Delta x_1+k_2\Delta x_2$, где $k_1= x_{02}$; $k_2 =x_{01}$,

т.е. элемент умножения может быть приближенно представлен в виде сумматора и двух усилителей (линейных звеньев).

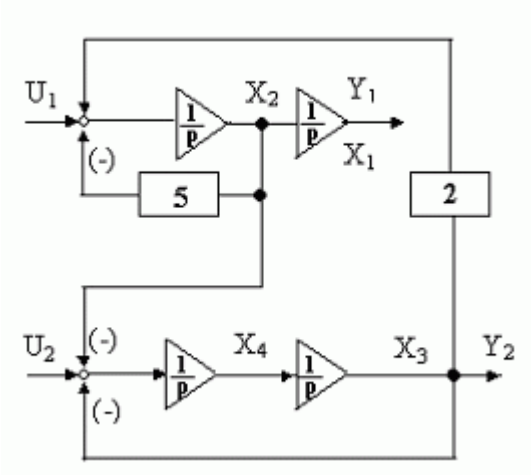
Задача 2. Написать уравнения состояния и построить электронную модель САУ, имеющей матрицы состояния:

$$A=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix};\quad B=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix};\quad C=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с матрицами A,B и C уравнения состояния запишем в виде:

$$\begin{aligned}&\dot{X}_1 = X_2;\\ &\dot{X}_2 = -5X_2 - 2X_3 + U_1;\\ &\dot{X}_3 = X_4;\\ &\dot{X}_4 = -X_2 - X_3 + U_2.\end{aligned}\qquad \begin{aligned}&Y_1 = X_1;\\ &Y_2 = X_3.\end{aligned}$$

Тогда электронная модель с использованием идеальных интеграторов и усилителей будет иметь вид:



Задача 3. Начертить блок-схему и написать уравнения состояния системы, описываемой дифференциальным уравнением $\ddot{y} + a\dot{y} + by = g$, где g - входная величина; y - выходная величина.

Р е ш е н и е. Разрешим уравнение относительно старшей производной $\ddot{y} = g - a\dot{y} - by$ и составим блок- схему ее получения рис.1

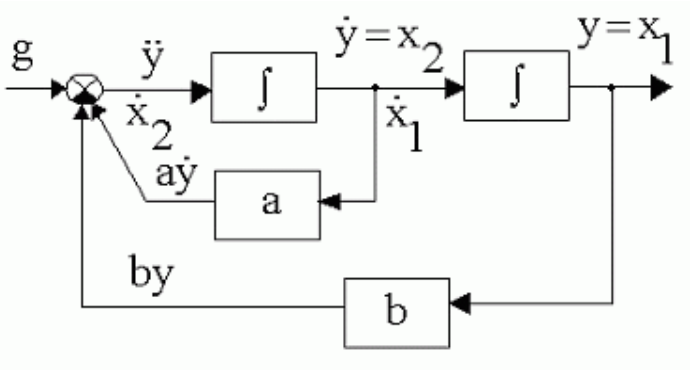


Рис.1 Блок-схема системы

В соответствии с выбранными переменными состояния на рис.2.8 запишем уравнения в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = g - bx_1 - ax_2. \end{cases}$$ или в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix},$$

где: $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$.

Практическое занятие №7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ САУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

Общая теория устойчивости разработана А.М. Ляпуновым. Линейная система называется устойчивой, если ее выходная координата остается ограниченной при любых ограниченных по абсолютной величине входных воздействиях. Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих воздействий.

Задача 1. Определить критический коэффициент усиления Ккр системы, разомкнутая передаточная функция которой $W_{раз}(p) = \frac{k}{p \cdot (p^2 + p + 2)}$.

Р е ш е н и е. Найдем характеристическое уравнение замкнутой системы D(p) = p*(p^2 + p + 2) + k = p^3 + p^2 + 2p + k = 0. Для системы третьего порядка граница устойчивости из определителя (минора) определятся правилом: произведение средних членов характеристического уравнения равно произведению крайних при положительном первом члене, т.е. 2*1=1*$К_{кр}$. Откуда $К_{кр}$=2.

Задача 2. Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией разомкнутой системы (рис.1.).

$$W(P) = \frac{K}{P(1+T_1P)(1+T_2P)}.$$

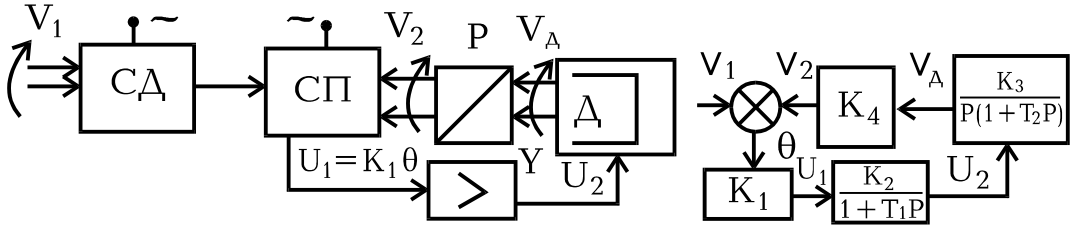


Рис.1. Система дистанционного слежения:
СД - сельсин-датчик; СП - сельсин-приемник;
Р - редуктор; Д - двигатель; У - усилитель

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет третий порядок

$$1+W(P)=0,\ T_1T_2P^3+(T_1+T_2)P^2+P+K=a_0P^3+a_1P^2+a_2P+a_3=0. \quad (1)$$

Определитель Гурвица будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} T_1+T_2 & K \\ T_1T_2 & 1 \end{vmatrix} = (T_1+T_2) - T_1T_2K > 0 \quad (2)$$

или

$$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \qquad (3)$$

Для K=80, T_1=0,12с, T_2=0,05с условие (3) не выполняется - система неустойчива. Для данных T_1 и T_2 система устойчива при $K=K_{кр}=28$.

Задача 3.Оценим устойчивость системы третьего порядка с передаточной функцией $W(P) = \frac{K}{P(1+T_1P)(1+T_2P)}$ и характеристическим уравнением

$1+W(P)=0$, $T_1T_2P^3+(T_1+T_2)P^2+P+K=a_0P^3+a_1P^2+a_2P+a_3=0$.

$$D(j\omega)=(K-(T_1+T_2)\omega^2)+j(\omega(1-T_1T_2\omega^2)). \qquad (4)$$

Построим кривую Михайлова (рис.2).

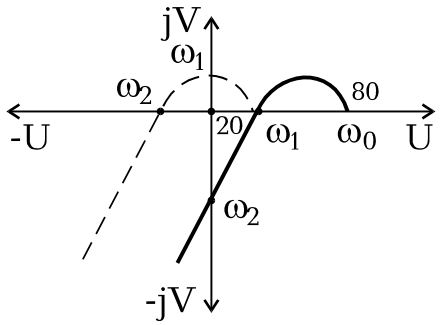


Рис.2. Кривые Михайлова системы третьего порядка

При V=0 получим $1-T_1T_2\square^2=0$

$$\text{или } \omega^2 = \frac{1}{T_1T_2}. \qquad (5.)$$

При U=0 получим $K-(T_1+T_2)\square^2=0$ (6.)

$$\text{или } K - \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} = 0. \qquad (7.)$$

Отсюда $K = \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$, что аналогично и критерию Гурвица.

Другая форма критерия Михайлова состоит в использовании свойства перемежаемости корней многочленов U(ω) и V(ω), т.е. корни U(ω)=0 и V(ω)=0 должны поочередно следовать друг за другом. На рис. 2. $\omega_0=0$; $\omega_1>\omega_2$ или из (7) имеем:

$$\frac{1}{T_1T_2} > \frac{K}{T_1 + T_2}.$$

Решим эту хадачу с использованием критерия Найквиста. Замкнутая система устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не охватывает на вещественной оси точку с координатой - 1.

Для примера САУ (рис.1.) годограф Найквиста указывает область устойчивости САУ (рис.3.).

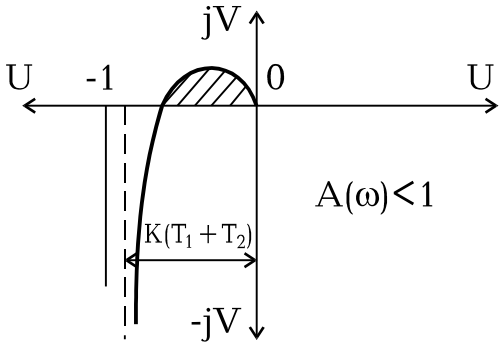


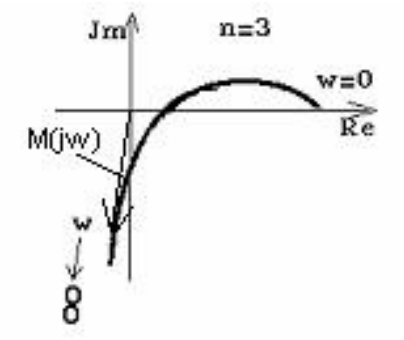
Рис.3. Область устойчивости САУ

Задача4. Дать заключение об устойчивости импульсной системы, характеристическое уравнение которой $D(z)=10z^3+4z^2+6z+2+0$.
Р е ш е н и е. Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся билинейным преобразованием, т.е. сделаем подстановку в характеристическое уравнение (8.11)

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

Тогда получим характеристическое уравнение от w
$D(w)=5w^3 + 13w^2 + 11w + 11=0$.
Используя критерий Гурвица на основании линейной ТАУ для системы третьего порядка необходимым и достаточным условием устойчивости является произведение средних членов характеристического уравнения должно быть больше произведения крайних, т.е. 11*13 - 5*11 = 88>0. Таким образом импульсная система устойчива.

Задача 5. Определить количество правых корней m системы третьего порядка, годограф Михайлова которой имеет вид



Р е ш е н и е. Из рисунка видно, что при изменении частоты от 0 до +ω суммарный угол поворота годографа Михайлова равен - $\frac{\pi}{2}$. Тогда в соответствии с формулой (4.3)

$\Delta \arg M(j\omega) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - m \cdot \pi = -\frac{\pi}{2}$. Откуда число положительных корней m = 2.

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Цветкова, О. Л. Теория автоматического управления [Электронный ресурс] : учебник / О. Л. Цветкова. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2016. - 207 с. : ил., схем., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-8334-7 // Режим доступа - http://biblioclub.ru/
2. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования [Текст]: учебник / Бесекерский В. А., Попов Е. П. - СПб.: Профессия, 2004.– 752 с.
3. Ерофеев, А. А. Теория автоматического управления [Текст] : учебник для студентов вузов / А. А. Ерофеев. - 2-е изд., перераб. и доп. - СПб. : Политехника, 2005. - 302 с. : ил. - (Учебник для вузов). - ISBN 5-7325-0529-6