

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 09.07.2026 09:08:15

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11e20bf75e745d4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

«31» 08 2026 г.



ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

Методические указания
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Общая теория связи»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Курск 2026

УДК 621.391

Составитель: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой информационной безопасности
М.О. Таныгин

Общая теория связи: методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Общая теория связи» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2026. – 183 с.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат все необходимые теоретические сведения о изучаемых разделах дисциплины, подробное описание лабораторных установок, перечень используемого оборудования и материалов, задания для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Общая теория связи», требования к оформлению отчёта и списки контрольных вопросов и заданий для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, а также рабочей программе дисциплины «Общая теория связи».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 31.07.2026. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 10,64. Уч.-изд. л. 9,63. Тираж 100 экз. Заказ 569. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Инструкция по технике безопасности при проведении лабораторных работ в компьютерных классах	8
2 Краткое описание используемых лабораторных стендов.....	10
3 Инструкция по использованию специального программного обеспечения «Теория электрической связи» (TES).....	15
3.1 Работа с компонентами.....	15
3.2 Работа в режиме «Осциллограф».....	16
3.3 Работа в режиме «Спектроанализатор».....	17
3.4 Работа в режиме «Оценка плотности вероятности».....	18
3.5 Работа в режиме «Подсчет ошибок».....	19
4 Правила выполнения лабораторных работ по курсу «Общая теория связи».....	10
Лабораторная работа №1	
ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННОГО И СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ.....	22
Лабораторная работа №2	
ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ (ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА).....	40
Лабораторная работа №3	
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ...	57
Лабораторная работа №4	
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМЫ И СПЕКТРА СИГНАЛОВ БЕЗИНЕРЦИОННЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ.....	86

Лабораторная работа №5

ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙ-
НЫЕ ЦЕПИ.....108

Лабораторная работа №6

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ И ДЕТЕКТИРОВАНИЯ МОДУЛИ-
РОВАННЫХ СИГНАЛОВ.....128

Лабораторная работа №7

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ АМ, ЧМ, ФМ И ОФМ
ДЕМОДУЛЯТОРОВ.....151

Лабораторная работа №8

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО И ЦИФРО-АНАЛОГОВОГО ПРЕОБ-
РАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ.....169

Приложение А

Пример оформления отчёта по выполнению лабораторной работы.....181

Введение

Целью освоения дисциплины «Общая теория связи» является формирование у студентов целостного представления об основных закономерностях обмена информацией на расстоянии, её обработки, эффективной передачи и помехоустойчивого приёма в системах связи различного назначения, а также способствование развитию способностей и умений в формулировании и решении задач оптимизации систем связи, повышения своих знаний в области инфокоммуникационных технологий и систем связи.

В результате выполнения представленных лабораторных работ ожидается совершенствование следующих компетенций путем достижения планируемых результатов обучения:

- способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений (УК-2);
- способен самостоятельно проводить экспериментальные исследования и использовать основные приемы обработки и представления полученных данных (ОПК-2);
- способен применять методы поиска, хранения, обработки, анализа и представления в требуемом формате информации из различных источников и баз данных, соблюдая при этом основные требования информационной безопасности (ОПК-3)

Планируемые результаты обучения по дисциплине «Общая теория связи», соотнесенные с индикаторами достижения *компетенции УК-2*:

Знает:

- основные научные проблемы в области инфокоммуникационных технологий и систем связи;
- область основных задач в рамках своей профессиональной деятельности.

Умеет:

- выявить и сформулировать проблему в рамках своей профессиональной деятельности в области инфокоммуникационных технологий и систем связи;
- решать поставленные задачи в рамках своей профессиональной деятельности и достигать запланированного результата;
- корректировать способы решения поставленных задач для достижения запланированного результата.

Владеет:

- навыками выбора оптимальных способов решения проблем для достижения поставленных целей проекта в области инфокоммуникационных технологий и систем связи.

- навыками критической оценки собственного решения поставленных задач в рамках своей профессиональной деятельности;

- навыками решения поставленных задач профессиональной деятельности различными способами и достижения запланированных результатов контроля.

Планируемые результаты обучения по дисциплине «Общая теория связи», соотнесенные с индикаторами достижения **компетенции ОПК-2:**

Знает:

- основные методы и средства проведения экспериментальных исследований, связанных с изучением процессов формирования, передачи и обработки сигналов в системах связи;

- основные понятия системы стандартизации и сертификации;

- способы обработки и представления результатов проведенных измерений временных и частотных параметров сигналов;

- методы оценки погрешности полученных результатов измерений.

Умеет:

- проводить экспериментальные исследования по изучению процессов формирования, передачи и обработки сигналов в системах связи;

- обрабатывать результаты многократных измерений временных и частотных параметров сигналов;

- рассчитывать абсолютную и относительную погрешности проведенных измерений;

- оценивать достоверность полученных результатов измерений.

Владеет:

- практическими навыками использования инструментальных средств проведения экспериментальных исследований (генераторы, осциллографы, вольтметры, мультиметры и др.) для изучения процессов формирования, передачи и обработки сигналов в системах связи;

- навыками обработки и представления полученных результатов измерений временных и частотных параметров сигналов с заданной достоверностью.

Планируемые результаты обучения по дисциплине «Общая теория связи», соотнесенные с индикаторами достижения **компетенции ОПК-3:**

Знает:

- физические свойства сообщений, сигналов, помех и каналов связи, их основные виды и информационные характеристики;
- основы спектрального анализа сигналов;
- принципы и основные закономерности обработки, передачи и приёма детерминированных и случайных сигналов в телекоммуникационных системах;
- методы модуляции и демодуляции сигналов;
- методы кодирования и шифрования дискретных сигналов;
- методы многоканальной передачи и распределения информации;
- методы оптимизации сигналов и устройств их обработки;
- параметры и конструкции электрических элементов систем связи, пассивных и активных компонентов линейных и нелинейных трактов систем связи.

Умеет:

- разрабатывать математические модели сигналов и каналов связи, а также определять их параметры по статическим данным;
- рассчитывать пропускную способность, энергетическую, спектральную и информационную эффективность телекоммуникационных систем;
- оценивать помехоустойчивость телекоммуникационных систем;
- на физическом уровне объяснять процессы, происходящие с различными сигналами, в аналоговых и цифровых устройствах формирования, преобразования и обработки сигналов.

Владеет:

- навыками определения и расчета параметров конструкций электрических элементов телекоммуникационного оборудования;
- методами компьютерного моделирования сигналов и их преобразований при передаче информации по каналам связи;
- навыками экспериментального исследования методов кодирования и декодирования сообщений, их модуляции и детектирования, нелинейного преобразования, аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования, оценки помехоустойчивости систем связи;
- навыками решения задач, касающихся оптимизации сигналов и систем связи в целом.

На выполнение лабораторных работ по дисциплине «Общая теория связи» в соответствии с учебным планом направления подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи отводится 32 часа.

1 Инструкция по технике безопасности при проведении лабораторных работ в компьютерных классах

В компьютерные классы допускаются студенты, ознакомленные с правилами техники безопасности. Студенты, допустившие невыполнение или нарушение настоящих правил, привлекаются к дисциплинарной ответственности в соответствии с правилами внутреннего трудового распорядка университета и подвергаются внеочередной проверке знаний правил техники безопасности.

При работе в компьютерном классе все пользователи обязаны строго соблюдать настоящие правила, правила поведения, расписание учебных занятий, установленные режимы труда и отдыха, и следить за их соблюдением другими пользователями.

При работе в компьютерном классе студенты обязаны выполнять требования преподавателя.

Использовать ПК разрешается только для работ, относящихся к учебному процессу.

В компьютерном классе запрещается:

1. Включать, отключать, работать за компьютером без разрешения преподавателя.
2. Подключать и отключать любые периферийные устройства, за исключением флеш-накопителей; прикасаться к соединительным кабелям и их разъемам.
3. Самостоятельно устранять какие-либо неисправности.
4. Модернизировать или изменять параметры (настройки) операционной системы.
5. Прикасаться к экрану и корпусу монитора, а также изменять местоположение системного блока и монитора.
6. Открывать корпус системного блока, монитора, периферийных устройств.
7. Размещать какие-либо предметы (тетради, дискеты, книги и др.) на элементах оборудования ПК.
8. Употреблять еду и напитки, а также ставить на столы различную посуду, продукты, сумки, рюкзаки, шарфы и т.д.
9. Продолжать работу при наличии сбоев и неполадок функционирования, нехарактерного шума компьютера или признаков возникновения пожара (запаха гари).

Требования безопасности перед началом работ:

1. Получив разрешение на проведение лабораторных работ, **ПРО-ВЕРЬТЕ** состояние и исправность ПК и периферийных устройств, а также наличие и исправность защитного заземления.
2. Подготовьте необходимые для работы материалы, уберите с рабочего стола все лишнее.

Требования безопасности во время работы:

1. **ПОМНИТЕ!** Электрический ток величиной 0,1 А и напряжением свыше 42 В опасен для жизни человека.
2. Лабораторные работы студенты проводят только в присутствии преподавателя или ответственного за лабораторию.
3. Включение ПК осуществлять кнопкой включения на системном блоке.
4. Не допускать попадания влаги на ПК и периферийные устройства.
5. Не оставлять без надзора работающий ПК.

Требования безопасности по окончании работы:

1. Выключить ПК с помощью кнопки «Завершение работы» в операционной системе. Запрещается выключать компьютер посредством извлечения сетевого шнура из розетки или нажатия на кнопку включения на корпусе устройства.
2. Привести в порядок рабочее место.
3. Сообщить преподавателю или ответственному за лабораторию об окончании работы и получить разрешение на уход из лаборатории.

2 Краткое описание используемых лабораторных стендов

Лабораторный стенд представляет собой прямоугольный блок с габаритами (1200x370x280мм), установленный на полке рабочего стола (рисунок 1).

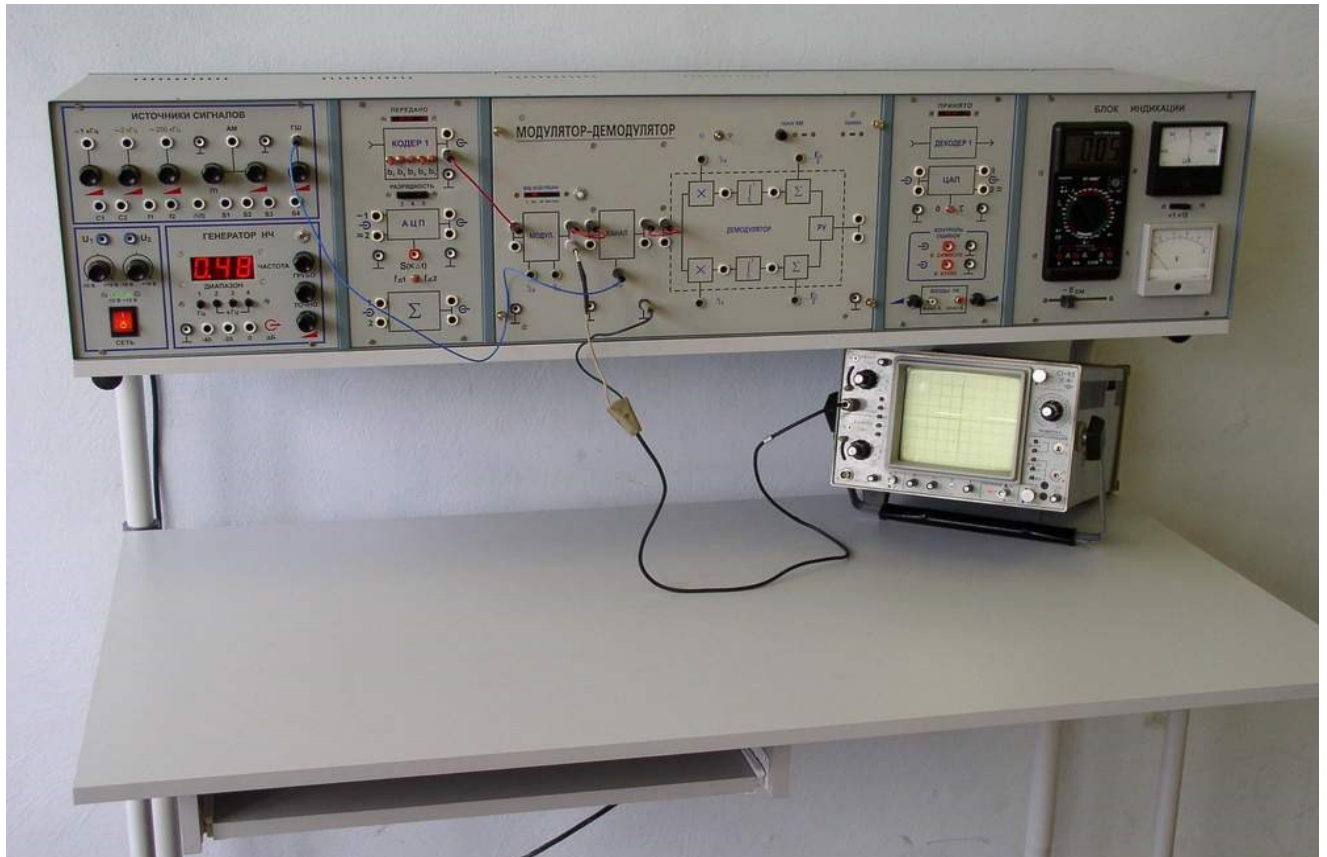


Рисунок 1 – Общий вид лабораторной установки

Стенд содержит ряд функциональных узлов, моделирующих функциональную схему систем связи, а также все необходимые источники сигналов и измерительные приборы, а именно (слева направо):

- источники сигналов;
- блоки КОДЕР-1, АЦП и сумматор;
- сменные блоки (в середине стенда), содержащие исследуемые функциональные узлы, гнезда контрольных точек, необходимые органы управления и индикации;
- светодиодные табло переданного и принятого сообщения, ЦАП и блок контроля ошибок;
- блок индикации, в котором расположены измерительные приборы постоянного и переменного напряжения, а также движковый потенциометр напряжения смещения.

В блоке **ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ** находятся:

- генераторы гармонических сигналов с частотами 1 кГц, 2 кГц и 110 кГц с регуляторами выходного напряжения от 0 до 1,5 В (точные значения частот зависят от номинала кварцевого резонатора, используемого в данной модификации стенда);
- амплитудный модулятор с несущей частотой 110 кГц и частотой модулирующего сигнала 1 кГц. Уровень несущей и глубина модуляции (m) регулируются в пределах от 0 до 1,5 В и от 0 до 1 В соответственно;
- генератор шума (ГШ) с регулируемым выходным уровнем (квази-белый шум в полосе частот от 10 Гц до 100 кГц);
- генераторы импульсных сигналов тактовой (C_1) и цикловой (C_2) синхронизации. Для C_1 период равен $T = 450$ мкс (такты́ый интервал). Для $C_2 - T_{\text{ц}} = 17T$. Сигналы используются для внешней синхронизации осциллографа;
- генераторы гармонических сигналов f_1 и f_2 , используемые для получения дискретных видов модуляции: $f_1 = 27$ кГц, $f_2 = 18$ кГц;
- генератор сигнала « δ -функции» – сигнала прямоугольной формы длительностью $t_{\text{и}} = 5$ мкс и периодом 17 Т; амплитуда импульсов не менее 5 В;
- генераторы сигналов сложной формы $S_1 - S_3$, состоящих из двух гармоник основной частоты 2 кГц;
- генератор сигнала S_4 , состоящего из суммы сигналов с частотами первой (23 Гц) и третьей (69 Гц) гармоник (для исследования АЦП);
- регулируемые источники постоянных напряжений U_1 и U_2 (пределы регулировки от минус 10 до плюс 10 В);
- диапазонный низкочастотный генератор с плавной и ступенчатой регулировкой уровня выходного сигнала в диапазоне от 0 до 5 В. Индикация частоты (в пределах от 20 Гц до 160 кГц) производится по встроенному цифровому частотомеру.

Сигналы всех источников стенда (кроме ГШ и диапазонного низкочастотного генератора) получены от одного кварцевого генератора путем деления частоты и фильтрации. Это существенно упрощает наблюдение изучаемых сигналов на осциллографе.

В блоке КОДЕР-1 с помощью микротумблеров производится ручное формирование любой пятисимвольной комбинации. Набранная комбинация индицируется на светодиодном табло с надписью ПЕРЕДАНО. (Такое же табло, но с надписью ПРИНЯТО, расположено над обозначением ДЕКОДЕР-1).

Блок АЦП является КОДЕРОМ-1 для аналоговых сигналов. На вход

1 блока АЦП подается входной аналоговый сигнал, вход 2 («открытый вход») служит для снятия статической характеристики АЦП. Нижнее гнездо $s(k\Delta t)$ служит для наблюдения отсчетов преобразуемого сигнала, причем могут быть использованы две частоты дискретизации $f_{\delta 1} = 125$ Гц или $f_{\delta 2} = 2,3$ кГц, переключаемые тумблером. Кнопочный переключатель РАЗРЯДНОСТЬ позволяет получить число разрядов АЦП 3, 4 и 5. При отжатых кнопках происходит восьмиразрядное кодирование.

Блок ЦАП имеет один вход и два выхода. На выходе 1 формируется ступенчатый сигнал в соответствии с выбранной в АЦП разрядностью и частотой дискретизации. На выходе 2 после сглаживающего фильтра формируется выходной сигнал. Тумблер «0 $\vee$ т», расположенный ниже ЦАП, служит для компенсации задержки на τ , вносимой демодулятором. При непосредственном соединении блоков АЦП и ЦАП тумблер должен находиться в положении «0», а при включении между ними модулятора и демодулятора – в положении «т».

Блок контроля ошибок предназначен для фиксации ошибок в системе связи. Сигналы ошибок с выхода этого блока подсчитываются на ПК за определенное время наблюдения, а затем рассчитывается оценка вероятности ошибки. Сигналы ошибок в символе – положительные импульсы прямоугольной формы длительностью около 200 мкс формируются только для первых пяти символов последовательности (информационных).

Длительность сигнала ошибки в «букве» (то есть в пятисимвольной информационной посылке) определяется положением первого ошибочно принятого символа и моментом окончания 5-го символа.

Ниже блока контроля ошибок расположены гнезда входов ПК с потенциометрами, регулирующими уровень сигналов, подаваемых на ПК. Связь стенда с ПК осуществляется через экранированный кабель, заканчивающийся разъёмом, подключаемому на вход звуковой платы ПК.

Стенд комплектуется пятью сменными блоками.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Блок содержит полевой транзистор с нагрузкой в цепи стока в виде резистора или колебательного LC контура. Резонансная частота контура около 15 кГц. Блок позволяет подробно изучать изменение формы и спектра сигналов нелинейной безинерционной цепью, нелинейное резонансное усиление, умножение частоты, преобразование частоты, амплитудную модуляцию и детектирование АМ сигналов.

2. ЧАСТОТНЫЙ МОДЕМ

Блок содержит частотный модулятор на RC генераторе с полевыми

транзисторами в фазобалансной цепи и частотный детектор (ЧД) с симметрично расстроенными контурами. Модулятор ЧМ обеспечивает практически линейное изменение частоты в пределах от 7 до 18 кГц. Характеристика детектирования ЧД имеет линейный участок не уже ± 2 кГц относительно несущей частоты 14 кГц. Измерение частоты модулятора при снятии статической модуляционной характеристики (СМХ) и наблюдение спектров модулированных колебаний производится по анализатору спектра, реализованному программным методом на ПК.

Блок позволяет снять СМХ и характеристику детектирования, выбрать оптимальные режимы модулятора и детектора, наблюдать осциллограммы и спектры ЧМ сигналов, прохождение сигналов через частотный модем.

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ (ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА)

Блок содержит дискретизатор, переключатель фиксированных частот дискретизации (3, 6, 12, 16, 24 и 48 кГц) и три фильтра низких частот (ФНЧ) четвертого порядка на операционных усилителях. Формирование как частот сигнала, так и частот дискретизации осуществляется с использованием одного кварцевого генератора, что облегчает наблюдение на осциллографе дискретизированных сигналов.

4. АВТОГЕНЕРАТОРЫ

Блок содержит LC и RC автогенераторы с общей схемой прерывателя цепей обратной связи для изучения переходных процессов.

LC генератор собран на полевом транзисторе с трансформаторной обратной связью. Имеется возможность изменять знак обратной связи или вообще отключить ее. Частота генерации – фиксированная, около 20 кГц. Работает в режимах автоматического либо регулируемого смещения.

RC генератор собран на двухкаскадном резистивном усилителе с фазобалансной цепью. Предусмотрена возможность отключения цепи обратной связи, а также превращения схемы в мультивибратор. Частота генерации регулируется сдвоенным потенциометром в пределах сотен герц – единиц килогерц. Имеется ручная и автоматическая регулировка усиления (АРУ). Схема АРУ, включаемая отдельным тумблером, позволяет сохранить практически синусоидальную форму колебаний даже при попытке вручную изменить коэффициент усиления К-цепи.

5. МОДУЛЯТОР-ДЕМОДУЛЯТОР

Блок содержит цифровой манипулятор, работающий в режимах АМ_н, ЧМ_н, ФМ_н и ОФМ_н, «канал связи», представленный в виде сумматора с по-

лосовым фильтром (ПФ) для подачи шума от ГШ, и демодулятор, собранный по схеме корреляционного приёмника. Полосовой фильтр предназначен для ограничения полосы шума полосой частот, занимаемой спектром модулированных сигналов (от 10 до 35 кГц). Коэффициент передачи сумматора для сигнала равен 0,5, для шума – 5.

На сменном блоке изображена схема демодулятора – выведены на контрольные точки (гнезда) напряжения опорных сигналов, выходы перемножителей, интеграторов, пороговые напряжения. Переключение видов модуляции осуществляется кнопкой, расположенной около обозначения модулятора и индицируется светодиодными индикаторами.

В блоке имеется также переключатель начальной фазы опорного колебания (ФМ и ОФМ), ручная установка порога (АМ), а также индикатор ошибки.

Блок позволяет изучать виды дискретной модуляции, наблюдать смесь сигнала и шума при определённом их соотношении, изучать принцип действия демодулятора при разных видах модуляции, измерять помехоустойчивость системы.

Сменные блоки крепятся к стенду четырьмя фасонными винтами; электрическое соединение осуществляется ленточными многожильными кабелями с разъёмами. Разъёмы имеют буквенную маркировку, состоящую из первых букв названия сменного блока. Замену сменных блоков следует производить только при отключенном питании стенда.

Для выполнения лабораторных работ кроме стенда предполагается использование двухлучевого (двухканального) осциллографа и персонального компьютера совместно с оригинальным программным обеспечением для выполнения ряда специальных измерительных и демонстрационных функций (двухканальный анализатор спектра, построение гистограмм, функций корреляции, вычисление оценки вероятности ошибок).

В соответствии с правилами техники безопасности корпуса стенда, осциллографа и компьютера должны быть соединены общим проводом, подключенным к общему проводу заземления лаборатории. Гнездо «L» стенда расположено справа, на задней стенке.

3 Инструкция по использованию специального программного обеспечения «Теория электрической связи» (TES)

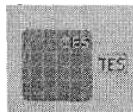
Программный пакет создан для использования совместно с универсальным лабораторным стендом. Исследуемые сигналы необходимо подавать на входы А или (и) В ПК стенда.

Пакет содержит программную реализацию ряда измерительных приборов: осциллографа, спектроанализатора, оценки плотности вероятности мгновенных значений сигнала и подсчёта числа ошибок с последующей оценкой их вероятности.

Для работы программы требуется ПК с процессором не менее Celeron 300 МГц, 32 МБ оперативной памяти, звуковой картой, ПО Windows 98 (рекомендуется SE).

3.1 Работа с компонентами

Загрузка программы выполняется с помощью двойного щелчка на пиктограмме:



После запуска программы на экране появляется окно, изображенное на рисунке 2. В левой верхней части данного окна находится панель компонент для выбора рабочего инструмента:

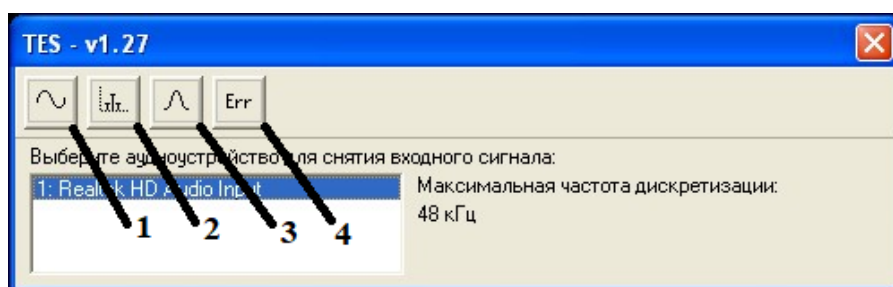


Рисунок 2 – Окно экрана монитора. Назначение «кнопок»: 1 – осциллограф; 2 – спектроанализатор; 3 – оценка плотности вероятности; 4 – подсчет ошибок

По умолчанию (т.е. при отсутствии подачи на ПК сигналов с лабораторного стенда) в рабочей области приборов отображаются сигналы, передаваемые по каналам звуковой карты. Звуковая карта выбирается при нажатии кнопки «Выбрать звуковую карту» из выпадающего списка.

3.2 Работа в режиме «Осциллограф»

При нажатии кнопки 1 на экране появляется окно с рабочей областью двухканального осциллографа, предназначенного для отображения временной зависимости $U(t)$ (рисунок 3).

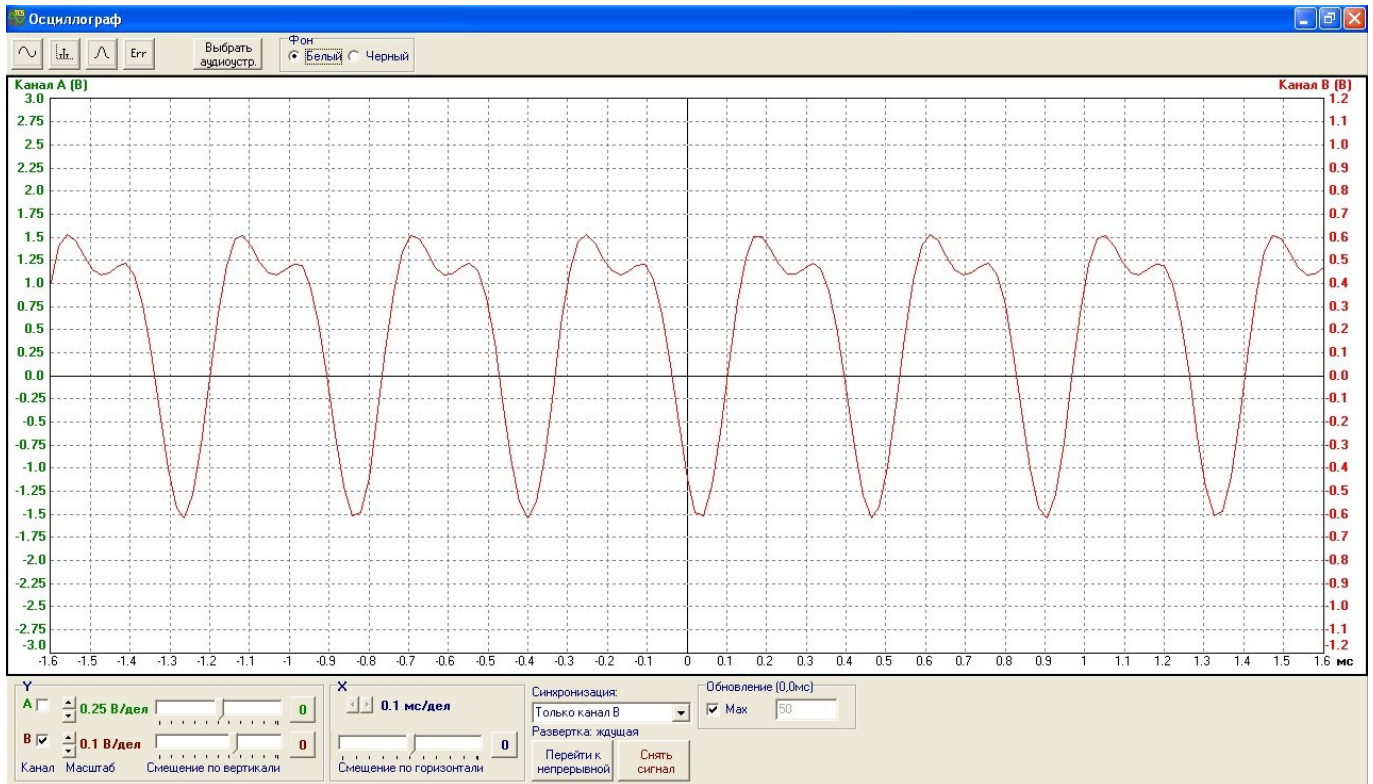


Рисунок 3 – Окно программы в режиме «Осциллограф»

Внизу окна располагается блок управления, который позволяет осуществлять:

- выбор сигнала канала, требуемого для отображения (канал А и (или) канал В установкой флажка);
- масштабирование по оси Y для каждого из каналов (В/дел);
- смещение сигнала по оси Y относительно начала координат для каждого из каналов («Смещение по вертикали»);
- смещение сигнала по оси X относительно начала координат для двух каналов одновременно («Смещение по горизонтали»);
- синхронизацию (выбор способа синхронизации в ниспадающем списке меню «Синхронизация»);
- непрерывную и ждущую развертки (по умолчанию развертка непрерывная, переход к ждущей развертке осуществляется нажатием на кнопку «Перейти к ждущей»); в режиме ждущей развертки обеспечена

возможность снятия мгновенного значения сигнала нажатием кнопки «Снять сигнал», переход к непрерывной развертке осуществляется нажатием кнопки «Перейти к непрерывной»;

– установку частоты обновления («Обновление»); максимально возможной - флажком «Мах» или значения.

3.3 Работа в режиме «Спектроанализатор»

При нажатии кнопки 2 на экране появляется окно с рабочей областью анализатора спектров по каналам А и В (рисунок 4).

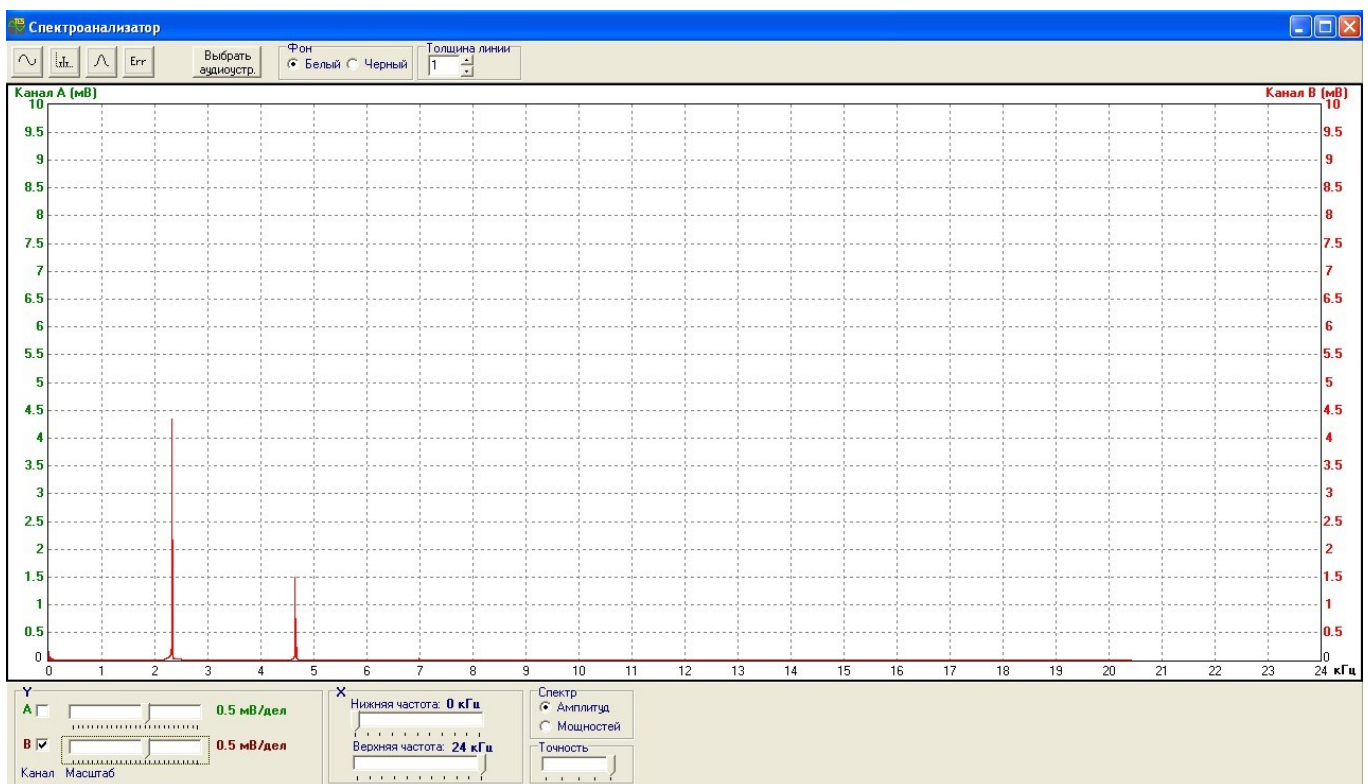


Рисунок 4 – Окно программы в режиме «Спектроанализатор»

Внизу окна располагается блок управления, который позволяет осуществлять:

- выбор сигнала канала требуемого для отображения (канал А, канал В установкой флажка);
- масштабирование по оси Y для каждого из каналов (В/дел);
- установку верхней и нижней граничных частот по оси X для обоих каналов («Верхняя частота», «Нижняя частота»);
- отображение спектра амплитуд или спектра мощностей установкой флажка «Амплитуд» или «Мощностей»;

– выбора толщины линии графика функции в меню «Толщина линии» верхней панели окна рабочего инструмента.

3.4 Работа в режиме «Оценка плотности вероятности»

При нажатии кнопки 3 на экране появляется окно с рабочей областью инструмента для оценки плотности вероятности распределения сигнала по каналам А и В (рисунок 5).

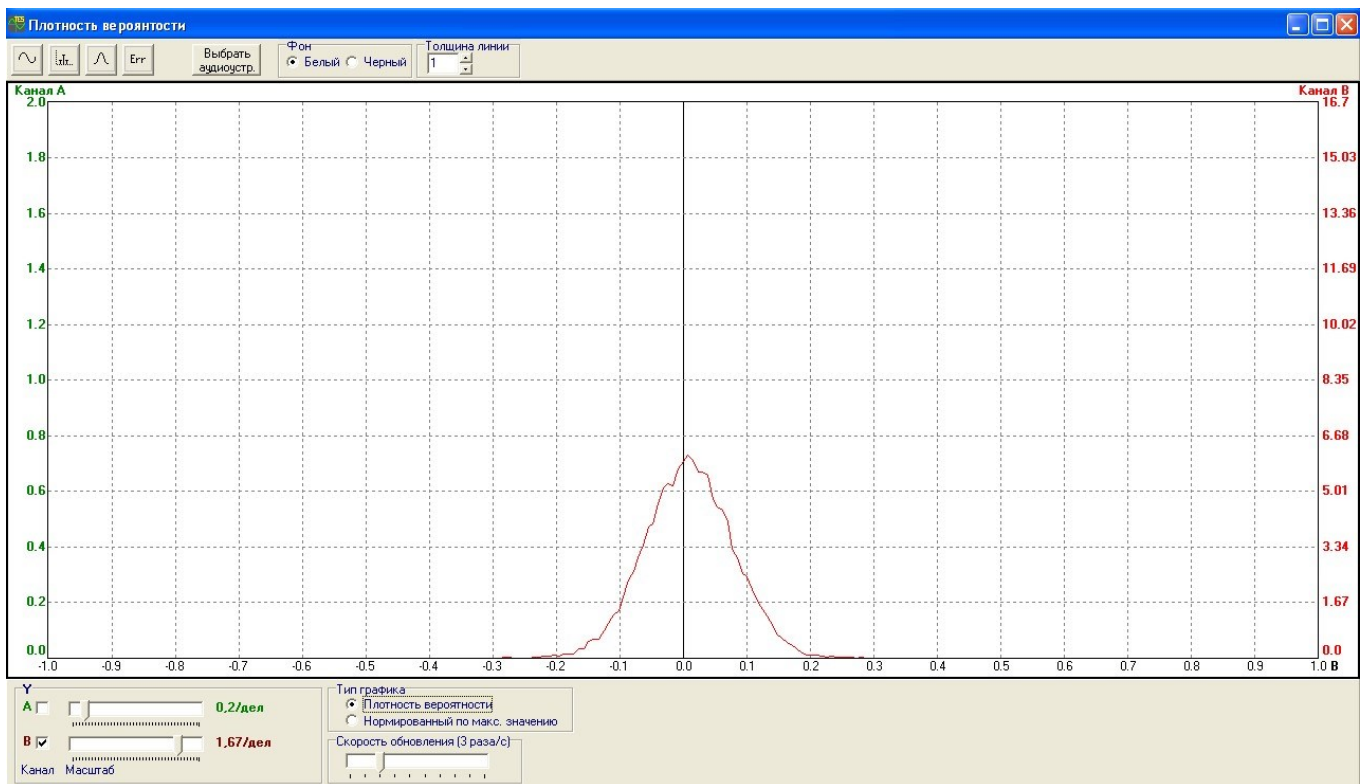


Рисунок 5 – Окно программы в режиме «Плотность вероятности»

Внизу окна располагается блок управления, позволяющий осуществлять:

- выбор сигнала канала, требуемого для отображения (канал А, канал В установкой флажка);
- масштабирование по оси Y для каждого из каналов (В/дел);
- выбор типа графика, установкой флажка «Плотность вероятности» или «Нормированный по максимальному значению»;
- установку скорости обновления сигнала, сдвигом рычажка влево-вправо («Скорость обновления»).

3.5 Работа в режиме «Подсчет ошибок»

При нажатии кнопки 4 на экране появляется окно с рабочей областью инструмента для подсчёта ошибок передаваемого сигнала по каналам А и В (рисунок 6).

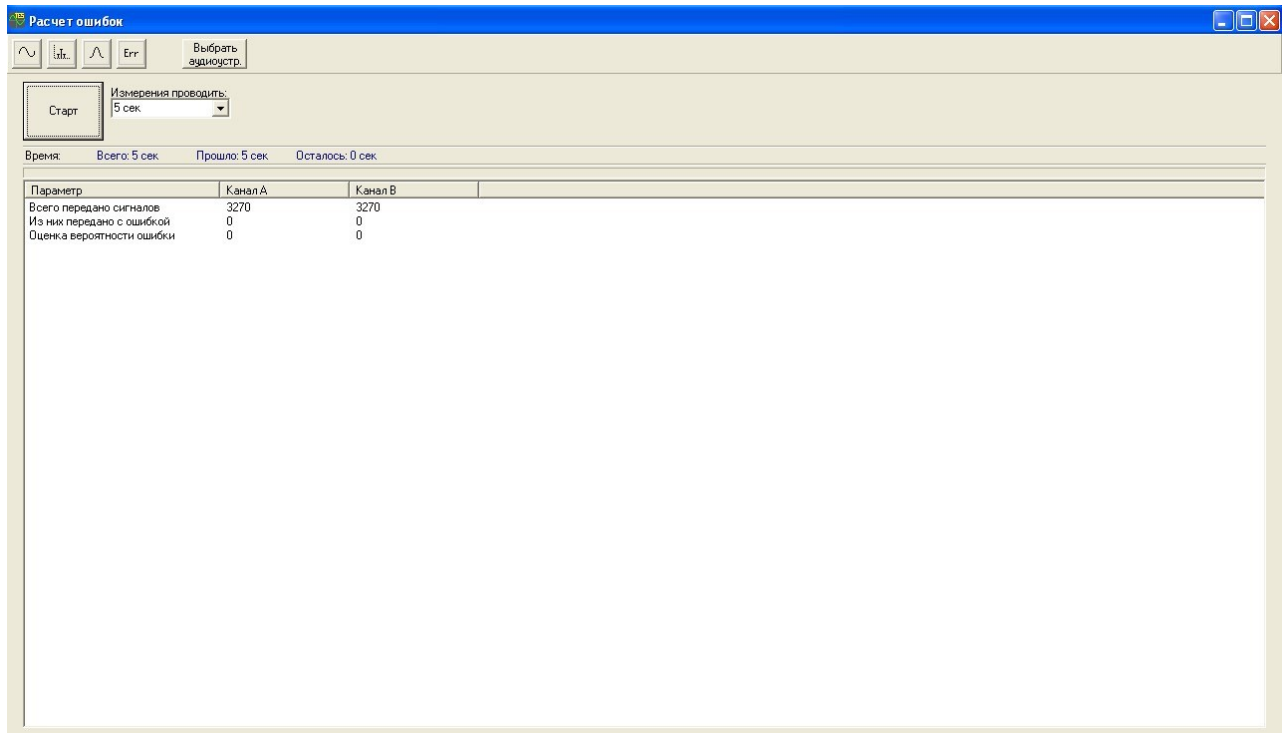


Рисунок 6 – Окно программы в режиме «Расчет ошибок»

Инструмент позволяет осуществлять:

- установку времени проведения измерений в меню «Измерения проводились»;
- подсчёт количества передаваемых символов по каналам А и В;
- подсчёт количества символов, переданных с ошибкой по каналам А и В;
- оценку вероятности ошибок в передаче по каналам А и В.

Запуск программы на выполнение задачи осуществляется нажатием кнопки «Старт».

4 Правила выполнения лабораторных работ по курсу «Общая теория связи»

1. Выполнению каждой лабораторной работы предшествует самостоятельная предварительная подготовка студента путём изучения по литературе необходимых разделов курса, выполнения расчётов, изучения описания лабораторного макета, задания и порядка выполнения соответствующей лабораторной работы. Подготовленный студент должен также отчётливо представлять, что и как он будет делать, и какие результаты ожидаются в каждом из пунктов работы (мысленный эксперимент).

2. В начале лабораторного занятия каждый студент представляет преподавателю рабочий листок с результатами предварительной подготовки по выполняемой работе: расчетами, схемами отдельных измерений по каждому пункту лабораторного задания и др.

3. К выполнению работы допускаются только подготовленные студенты. Поэтому в начале занятия преподаватель проводит проверку готовности каждого студента путем устного собеседования или с помощью технических средств в объеме материала, указанного в описании лабораторной работы.

4. Студенты, не допущенные к выполнению лабораторной работы, остаются в лаборатории для дополнительной подготовки.

5. В процессе выполнения работы результаты эксперимента аккуратно оформляются в рабочих листках в виде таблиц, графиков и т. д. Результаты каждого пункта должны иметь соответствующие заголовки и пояснения исходных данных, режимов измерений и др.

6. По окончании работы студент (бригада) представляет рабочий листок преподавателю для проверки и отметки о выполнении в журнале. Самовольный уход студентов из лаборатории не допускается.

7. По результатам лабораторной работы каждый студент должен оформить отчёт и защитить работу.

8. При выполнении работы не рекомендуется часто включать и выключать питание электронных приборов. Питание всех приборов, применяющихся в лабораторной работе, выключается студентами только после выполнения всех пунктов лабораторного задания с разрешения преподавателя.

9. Студенты, пропустившие лабораторное занятие без уважительной причины или не допущенные к выполнению лабораторной работы, выполняют её в специально установленное время (как правило, в конце семестра).

10. При выполнении лабораторных работ необходимо соблюдать правила техники безопасности.

12. Рабочее место в лаборатории должно быть оставлено в полном порядке: приборы должны стоять на положенных местах, провода аккуратно сложены, стулья ставятся вплотную к столу.

Лабораторная работа №1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННОГО И СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

1 Цель работы

– исследование формы и спектра гармонических сигналов и периодических последовательностей импульсов, формирование навыков спектрального анализа сигналов с помощью ПК.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- комплект соединительных проводов;

В работе используются блоки ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ, сумматор (Σ) и КОДЕК-1 универсального лабораторного стенда.

Источниками простейших гармонических сигналов с частотами 1 и 2 кГц являются гнезда « $\sim$ 1 кГц» и « $\sim$ 2 кГц» (два левых верхних гнезда стенда), а также сигналы от встроенного диапазонного генератора ГЕНЕРАТОР НЧ.

Источниками сигналов сложной формы, состоящих из двух гармоник (2 и 4 кГц, 2 и 6 кГц), являются гнезда S1, S2 и S3. Два последних сигнала отличаются фазой третьей гармоники.

Источником импульсной последовательности является блок КОДЕР-1, позволяющий формировать произвольную пятисимвольную последовательность, повторяющуюся с периодом $17T$, где $T=450$ мкс – длительность одного символа.

В качестве измерительных приборов используется встроенный вольтметр стенда.

3 Основные теоретические сведения

3.1 Базисная система сигналов

При формировании математической модели сигнала могут использоваться различные *системы ортогональных функций*. Однако наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют *ортогональные гармонические функции*:

$$1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin k\omega_1 t \quad (1)$$

Это объясняется тем, что *гармоническая функция является единственной, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейные системы*, то есть если на входе линейной системы действует гармонический сигнал, то на ее выходе сигнал по окончании переходного процесса будет гармоническим, отличаясь от входного лишь амплитудой и начальной фазой. Графики нескольких первых функций системы показаны на рисунке 1.

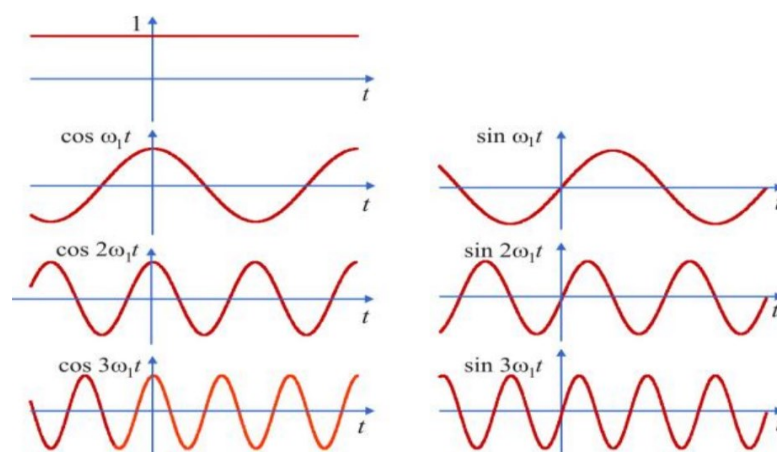


Рисунок 1 – Базисные тригонометрические функции

Система тригонометрических функций (1) является полной и ортогональной на интервале длительностью $T=2\pi/\omega_1$. Условия ортогональности имеют вид:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t dt = 0. \quad (4)$$

В качестве примера покажем справедливость соотношения (2). Сначала преобразуем подынтегральную функцию:

$$\cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t = \frac{1}{2} \cos(n-m)\omega_1 t + \frac{1}{2} \cos(n+m)\omega_1 t.$$

После этого для первого интеграла при $n \neq m$ найдем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t dt &= \frac{1}{2(n-m)\omega_1} \sin(n-m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \\ &+ \frac{1}{2(n+m)\omega_1} \sin(n+m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0. \end{aligned}$$

При $n = m$ получим

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_1 t dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2n\omega_1 t dt = \frac{T}{2}.$$

Подобным образом можно убедиться в справедливости соотношений (3) и (4).

3.2 Гармонический анализ периодических колебаний

Периодическую функцию $x(t)=x(t+nT)$ (T – период повторения) которая в пределах периода её изменения T удовлетворяет **условиям Дирихле** можно представить в виде **тригонометрического ряда Фурье** – суммы гармонических колебаний с частотами, **кратными основной частоте сигнала** $f_1=1/T$ ($\omega_1=2\pi/T$):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (5)$$

где $a_0 / 2$ – постоянная составляющая сигнала.

Коэффициенты разложения функции $x(t)$ в ряд Фурье определяются выражениями:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(k\omega_1 t) dt. \quad (6)$$

Неудобство синусно – косинусной формы ряда Фурье (5) состоит в том, что для каждого значения индекса суммирования k (то есть для каждой гармоники с частотой $k\omega_1$) в формуле фигурируют два слагаемых – синус и косинус. Воспользовавшись формулами тригонометрических преобразований, сумму этих двух слагаемых можно трансформировать в косинус той же частоты с иной амплитудой A_k и некоторой начальной фазой φ_k :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k), \quad (7)$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$, a_k и b_k – коэффициенты разложения

функции $x(t)$ в ряд Фурье, определяемые в соответствии с выражением (6).

Представление произвольного сигнала в виде совокупности постоянной составляющей и суммы гармонических колебаний с кратными частотами называют **спектральным разложением сигнала в базисе гармонических функций**, или **гармоническим анализом сигнала**.

Совокупность амплитуд гармоник A_k ($k=0,1,2,\dots$) образует **амплитудный спектр сигнала**, а совокупность фаз φ_k ($k=0,1,2,\dots$) – **фазовый спектр сигнала**. Спектр периодического сигнала называется **линейчатым** или **дискретным**, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам $\omega = n\omega_1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Линейчатый амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала $x(t)$ изображены на рисунке 2.

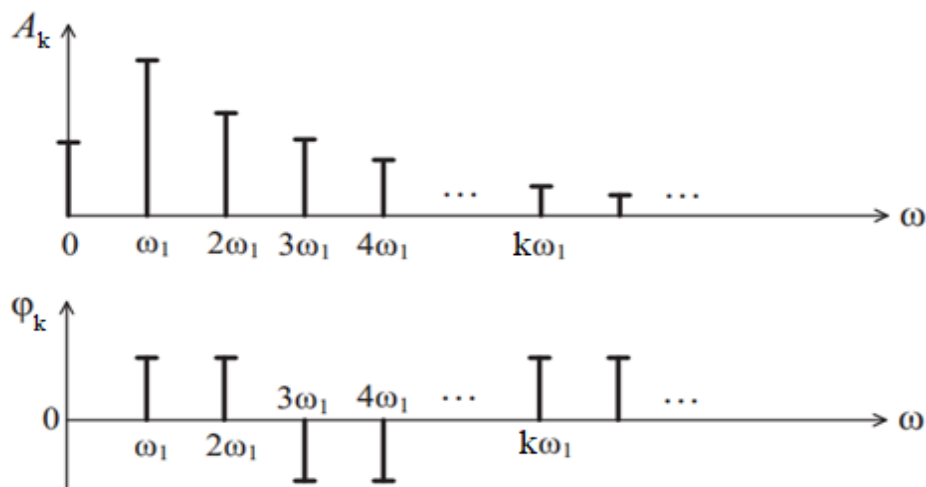


Рисунок 2 – Линейчатый амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала

Как отмечалось выше, функция, разлагаемая в ряд Фурье, должна удовлетворять **условиям Дирихле**, формулируемым следующим образом.

Функция $x(t)$ на интервале $[-T/2, T/2]$:

- 1) должна иметь конечное число максимумов и минимумов;
- 2) может иметь разрывы непрерывности первого рода при некоторых значениях аргумента $t = t_i$, число которых должно быть конечно;
- 3) должна иметь конечные (равные или неравные между собой) предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$.

На рисунке 3 показан график функции, имеющей пять разрывов непрерывности первого рода и неравные предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$.

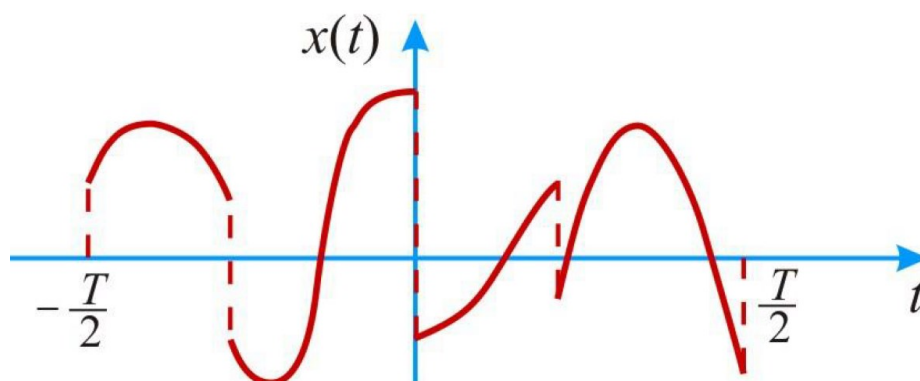


Рисунок 3 – Пример сигнала, удовлетворяющего условиям Дирихле

Отметим, что между периодическими сигналами и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодический сигнал $x(t)$ полностью определяет ее частотные спектры и, наоборот, имея частотные спектры, можно определить, какому периодическому сигналу они принадлежат. Имея в виду это соответствие, при решении многих практических задач операции над периодическими сигналами заменяют операциями над частотными спектрами сигналов.

Спектр сигналов, описываемых относительно гладкими функциями, быстро убывает (с ростом номера коэффициенты быстро стремятся к нулю). Спектр относительно «изрезанных» сигналов убывает медленно, так как для представления разрывов и «изломов» функции нужны синусоиды с большими частотами.

3.3 Спектр последовательности прямоугольных импульсов

При выборе начала отсчёта времени по рисунку 4 функция является чётной.

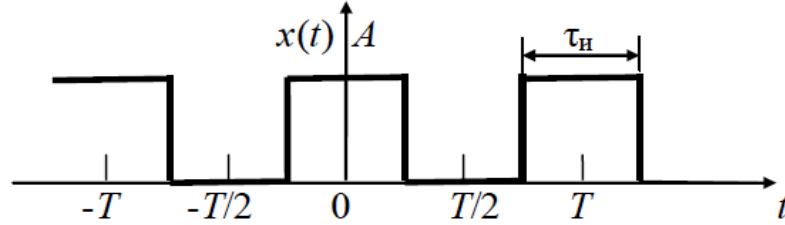


Рисунок 4 – Последовательность прямоугольных импульсов

Определим коэффициенты разложения в ряд Фурье α_k и b_k :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A \cos k\omega_1 t dt = \frac{2A}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 t}{k\omega_1} \Big|_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} = \frac{4A}{k\omega_1 T} \cdot \sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}, \quad (8)$$

где $T/\tau_n = q$ – скважность последовательности;

$$a_k = \frac{2A}{q} \cdot \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}} = \frac{2A}{q} \cdot \sin c \left(\frac{k\omega_1 \tau_n}{2} \right) = \frac{2A}{q} \cdot \sin c \left(\frac{\pi k}{q} \right); \quad a_0 = \frac{2A}{q};$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} x(t) \sin(k\omega_1 t) dt = 0 \quad (\text{подынтегральная функция нечётная}).$$

Ряд Фурье запишем для заданного сигнала в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + a_3 \cos 3\omega_1 t + \dots + a_k \cos k\omega_1 t = \\ &= \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin c \left(\frac{\pi k}{q} \right) \cos k\omega_1 t \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

При смещении начала отсчета амплитудный спектр сигнала не изменяется, изменяется лишь фазовый спектр.

Для $q = 2$ (меандровая последовательность) коэффициенты α_k равны:

$$a_0 = A, \quad a_k = A \sin c \left(\frac{k\omega_1 \tau_u}{2} \right) = A \sin c \left(\frac{\pi k}{2} \right), \quad \text{при } k > 0. \quad (10)$$

Спектр этой последовательности показан на рисунке 5.

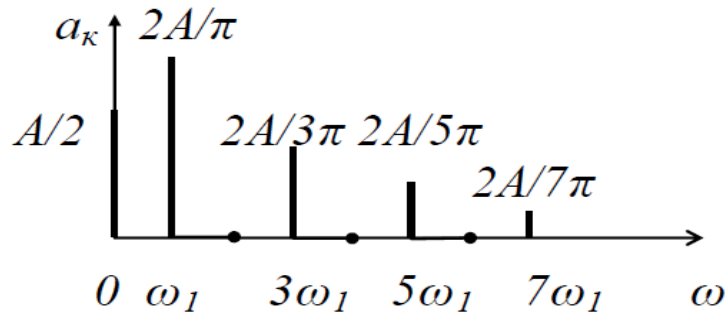


Рисунок 5 – Амплитудный спектр периодического сигнала (меандр)

Обобщённый амплитудный спектр произвольной периодической импульсной последовательности представлен на рисунке 6.

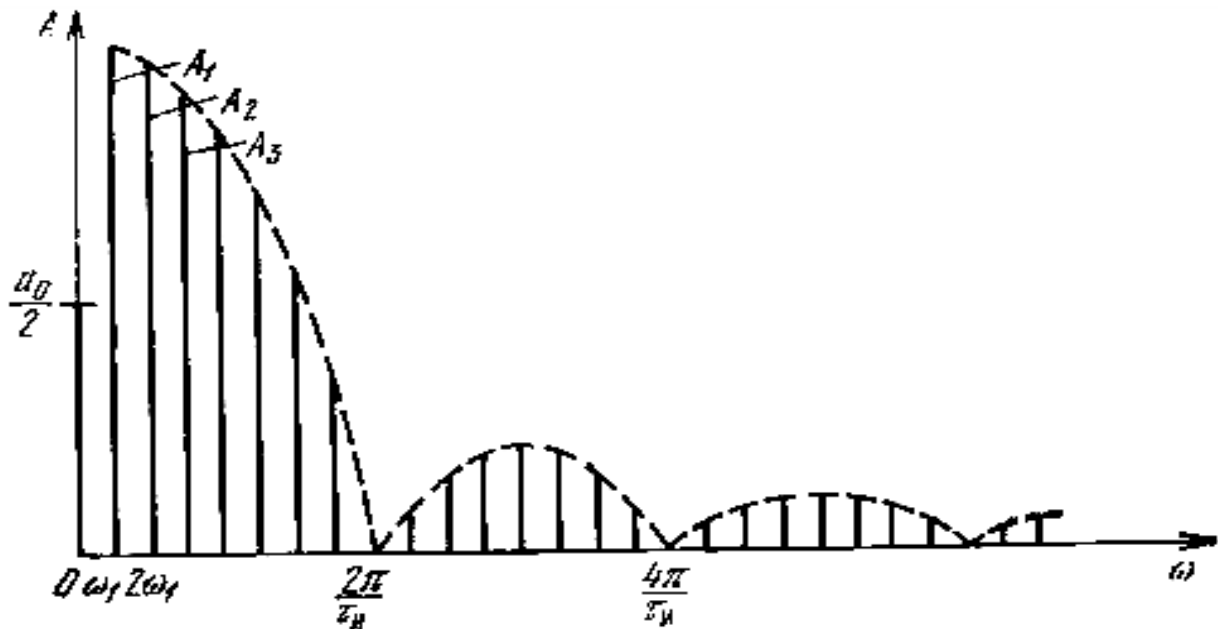


Рисунок 6 – Амплитудный спектр периодической импульсной последовательности

Ширина спектра сигнала равна, в данном случае, $\Delta\omega = 2\pi/\tau_n$ ($\Delta f = 1/\tau_n$).

При больших значениях скважности q спектр сигнала содержит большое число медленно убывающих по амплитуде гармоник; расстояние между соседними гармониками очень мало, а их амплитуды близки по величине. В спектре отсутствуют гармоники с частотой $\omega = 2n\pi/\tau_n$, $n=1, 2, \dots$. Чем короче импульс (меньше его длительность τ_n), тем шире спектр сигнала $\Delta\omega$, т.е. ширина спектра определяется только длительностью импульса τ_n .

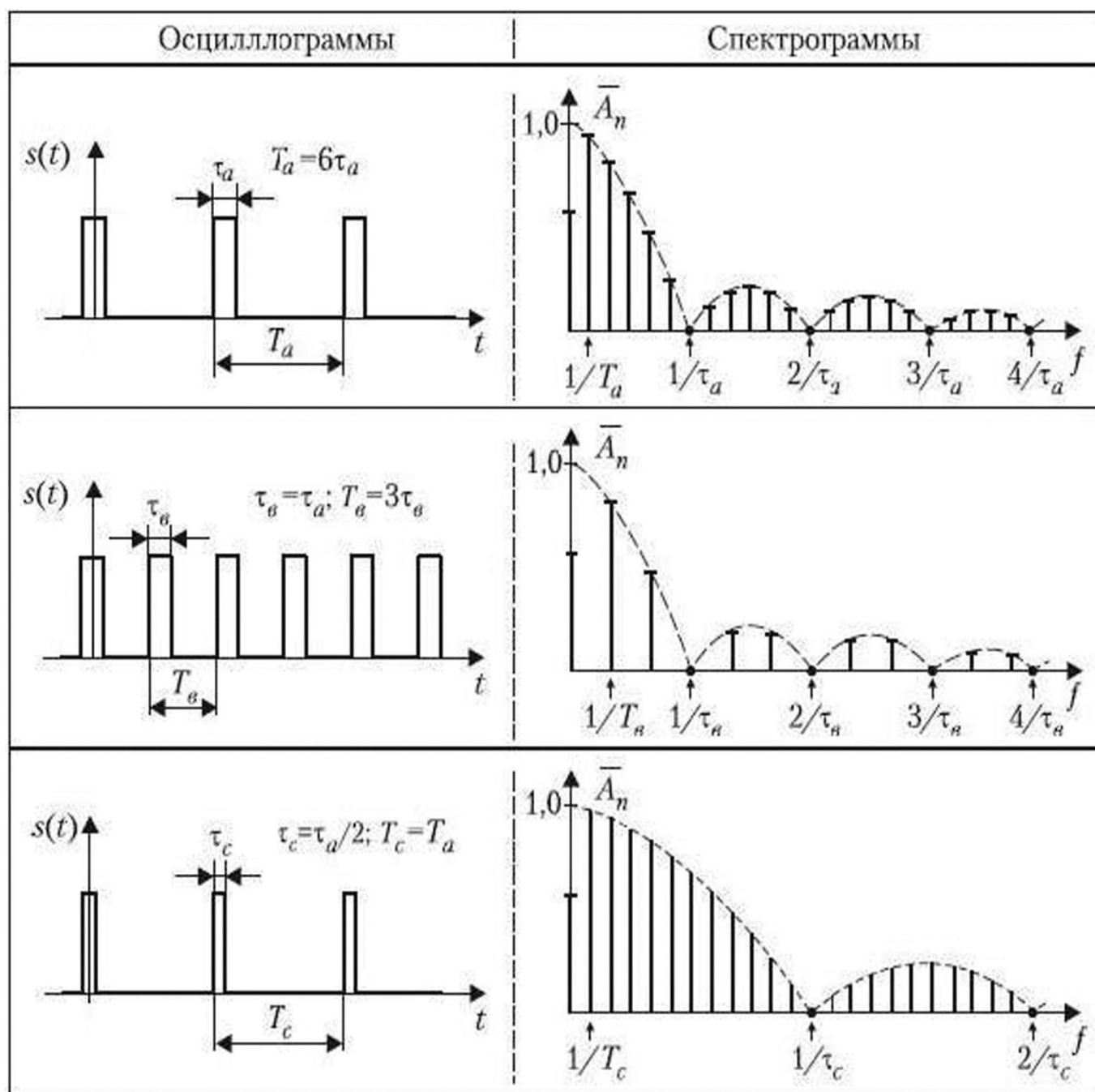


Рисунок 7 – Виды спектров импульсной последовательности при различных значениях длительности импульса

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это значит, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ аппроксимирован функцией $x^*(t)$, то наименьшая среднеквадратическая ошибка

$$M = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - x^*(t)]^2 dt. \quad (11)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (6).

С увеличением числа членов ряда Фурье ранее подсчитанные коэффициенты не изменяются, а среднеквадратическая ошибка уменьшается (рисунок 8).

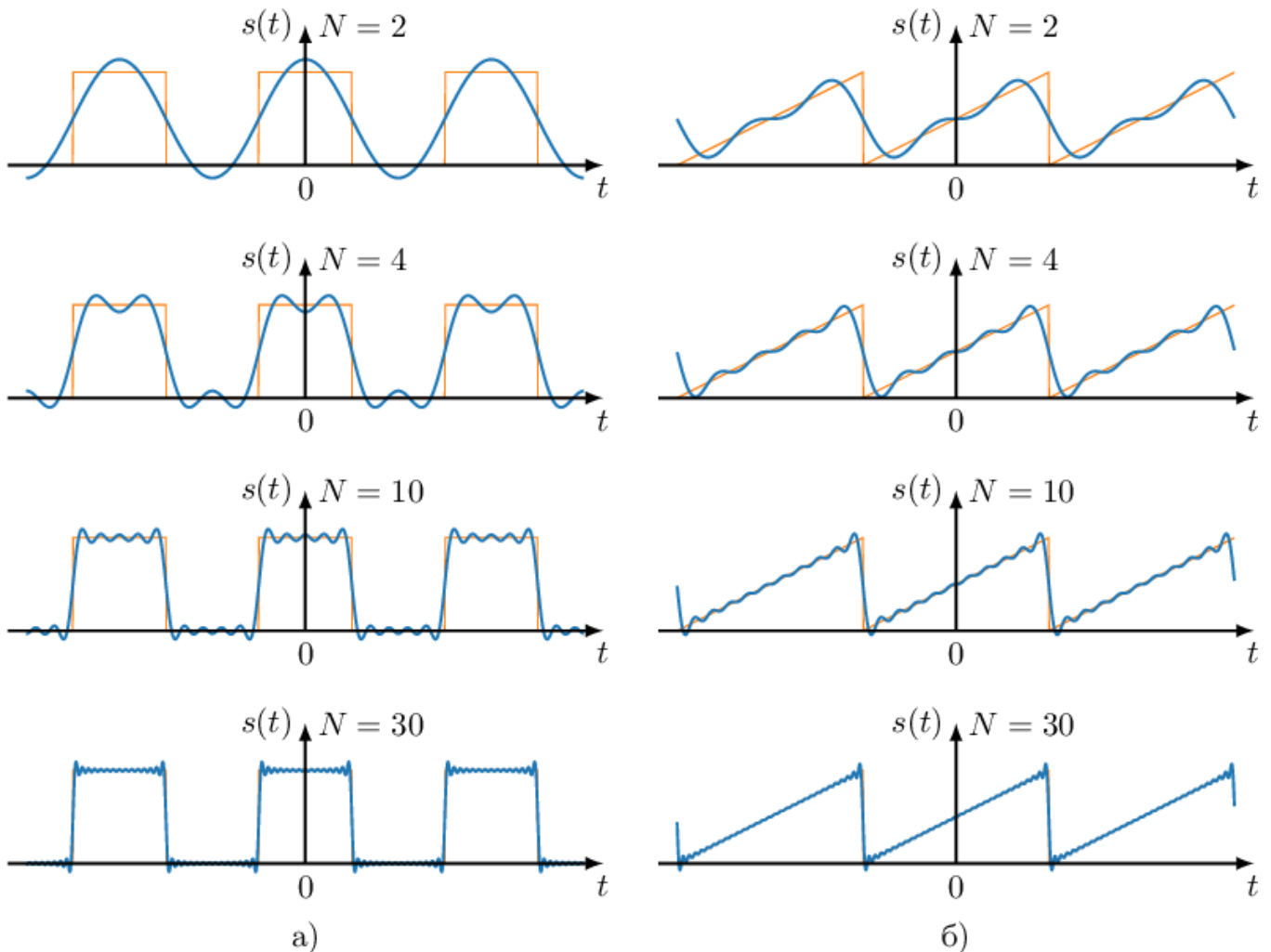


Рисунок 8 – Приближение сигналов усеченным рядом с Фурье:
а – прямоугольных импульсов; б – пилообразного сигнала

Реальные устройства и системы из-за наличия в них инерционных элементов не могут передавать колебания сколь угодно высоких частот. Следовательно, при решении практических задач, связанных с передачей периодических сигналов через устройства и системы, может быть учтено лишь определенное количество гармонических составляющих.

В связи с этим вводится понятие **практической ширины спектра**. Очевидно, необходимо учитывать ту часть спектра сигнала, которая содержит гармонические составляющие с относительно большими амплитудами. Поэтому **под практической шириной спектра**

сигнала понимается та область частот, в пределах которой лежат гармонические составляющие сигнала с амплитудами, превышающими наперед заданную величину. С энергетической точки зрения практическая ширина спектра может быть определена как область частот, в пределах которой сосредоточена подавляющая часть мощности сигнала.

3.3 Гармонический анализ непериодических функций

Непериодический сигнал легко получить из периодического, увеличивая период вплоть до $T \rightarrow \infty$ (рисунок 9). Амплитудные спектры для сигналов с разными периодами показаны на рисунке 10.

При увеличении периода сигнала частота первой гармоники $\omega_1 = 2\pi/T$ понижается. Спектральные линии становятся гуще. Амплитуды гармоник уменьшаются. Последнее становится понятным, если учесть, что энергия сигнала, оставаясь неизменной, перераспределяется теперь между возросшим числом гармоник. Естественно, доля каждой гармоники в общем сигнале падает.

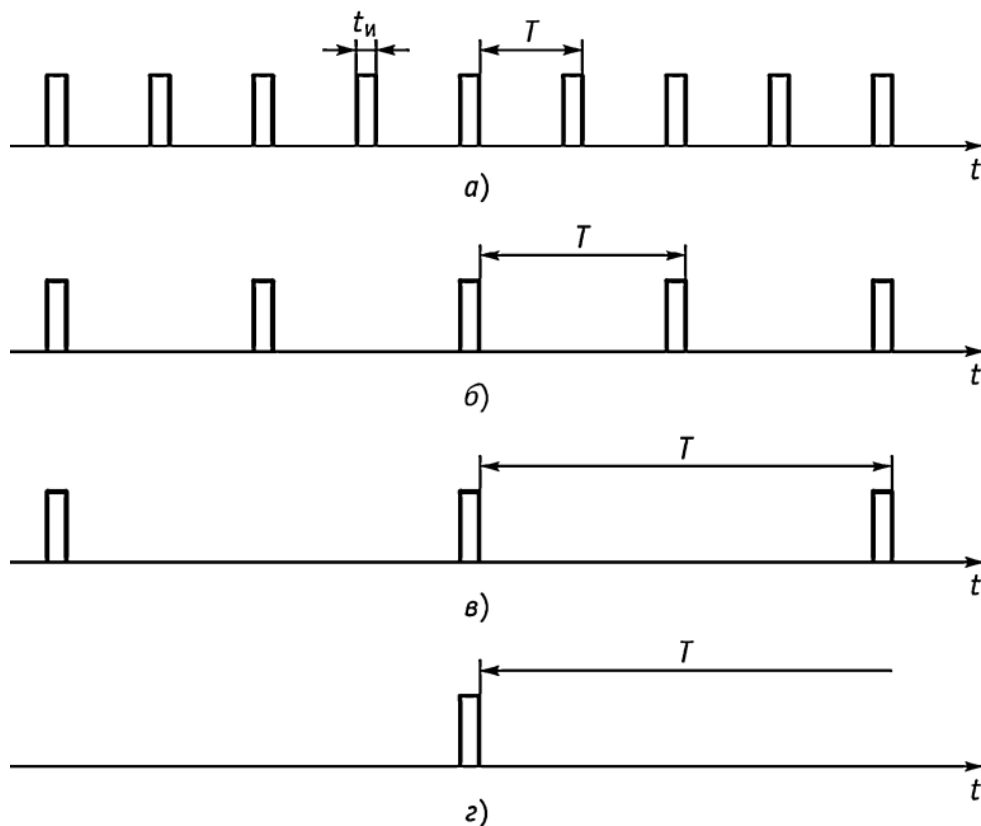


Рисунок 9 – Увеличение периода последовательности прямоугольных импульсов

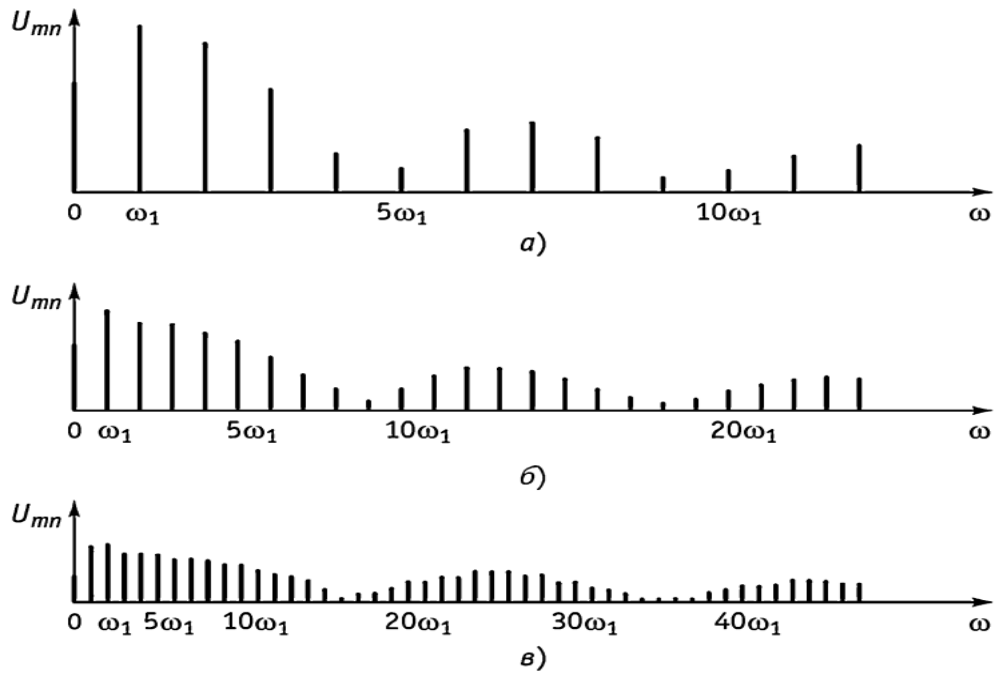


Рисунок 10 – Спектры амплитуд периодических последовательностей импульсов с разными периодами

Следовательно, при переходе к **непериодическому сигналу** (например, к одиночному импульсу) в спектре такого сигнала вместо отдельных гармоник будет наблюдаться бесконечно большое число синусоидальных колебаний с бесконечно близкими частотами, заполняющими всю шкалу частот. Причем амплитуда каждого такого колебания становится исчезающе малой, потому что на его долю приходится бесконечно малая часть энергии сигнала.

Поскольку сравнивать между собой бесконечно малые величины неудобно, то вместо амплитуд U_{mn} по оси ординат откладывают произведение $U_{mn} \cdot T/2$, которое с увеличением периода T остается постоянным.

Понятие спектра амплитуд здесь лишено смысла и заменяется понятием **спектральной плотности амплитуд**, которая показывает удельный вес бесконечно малой амплитуды синусоидального колебания в любой бесконечно узкой полосе частот (рисунок 11).

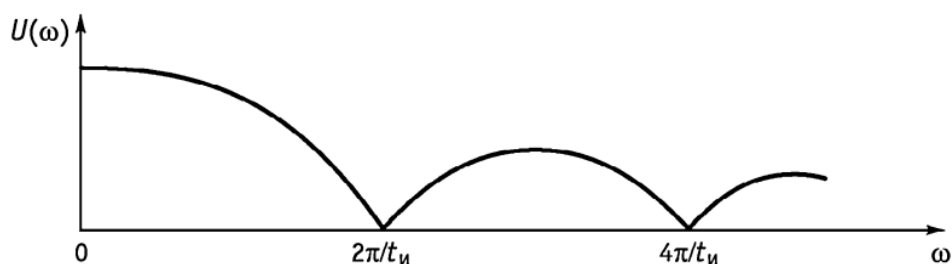


Рисунок 11 – Спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса

Таким образом, **спектр непериодического сигнала является непрерывным (сплошным)**.

Понятие спектра фаз заменяется понятием **спектральной плотности фаз**.

Запишем функцию $x(t)$ из выражения (7) в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}, \quad (12)$$

где

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12) и заменив $T=2\pi/\omega_1$, получим:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) \cdot e^{-jk\omega_1 \tau} d\tau \cdot e^{jk\omega_1 t} \omega_1. \quad (14)$$

Чтобы получить спектральное представление сигнала $x(t)$, в выражении (14) устремим T к бесконечности. При $T \rightarrow \infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота k -ой составляющей ряда $k\omega_1$ – в текущую частоту ω , а операция суммирования может быть заменена на операцию интегрирования. В результате получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau \right] d\omega. \quad (15)$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, для внутреннего интеграла в (15) введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (16)$$

Функцию $X(j\omega)$ называют **спектральной характеристикой** сигнала $x(t)$.

Выражение (15) с учетом (16) принимает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) образуют пару преобразований Фурье и устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формулу (16) называют **прямым преобразованием Фурье**, а функцию $X(j\omega)$ – спектральной характеристикой сигнала $x(t)$.

Формула (17) позволяет осуществить **обратное преобразование**

Фурье и вычислить мгновенное значение сигнала $x(t)$, если известна его спектральная характеристика $X(j\omega)$.

Спектральная характеристика $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ в общем случае является комплексной функцией частоты. Применяв известную формулу Эйлера, её можно записать в следующем виде

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sin \omega t dt = a(\omega) - jb(\omega). \quad (18)$$

Действительная часть $a(\omega)$ спектральной характеристики есть чётная функция частоты, а мнимая часть $b(\omega)$ – нечётная функция частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (19)$$

есть четная функция частоты, а аргумент спектральной характеристики – нечётная функция частоты.

Определим спектральную характеристику одиночного прямоугольного импульса.

Рассмотрим одиночный прямоугольный импульс с началом отсчета, совмещенным с его серединой (рисунок 12).

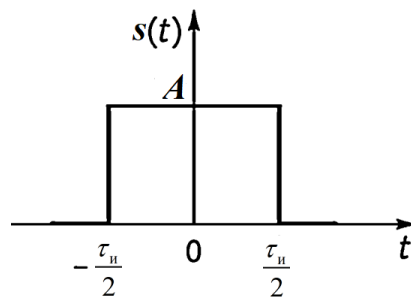


Рисунок 12 – Одиночный прямоугольный импульс

Импульс, представленный на рисунке 12, описывается выражением:

$$s(t) = \begin{cases} A, & \text{при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}; \\ 0, & \text{при } t < -\frac{\tau_n}{2} \text{ и } t > \frac{\tau_n}{2}. \end{cases}$$

Для определения спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса воспользуемся прямым преобразованием Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau_n}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau_n}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_n}{2} = A\tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2}$$

Данное выражение содержит функцию $\sin(x)/x$, поведение которой хорошо известно: эта затухающая функция максимальна и равна 1, когда $x=0$; она принимает нулевые значения при $x = \pm k\pi$.

Произведение $A \cdot \tau_{\text{и}}$, равное площади импульса, определяет значение спектральной плотности импульса при $\omega=0$, т.е. $X(0) = A\tau_{\text{и}}$. График спектральной плотности прямоугольного импульса изображен на рисунке 13.

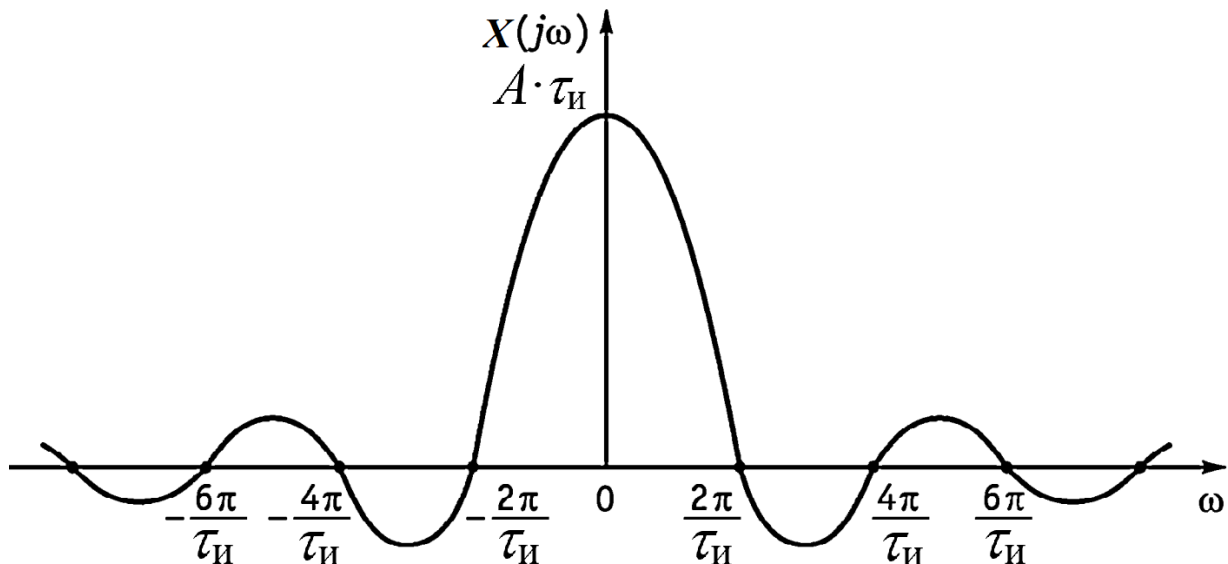


Рисунок 13 – График спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса

При удлинении импульса (увеличении длительности $\tau_{\text{и}}$) **расстояние между нулями функции $X(\omega)$ сокращается**, что равносильно сужению спектра. Значение $X(0)$ при этом возрастает. **При укорочении импульса** (уменьшении длительности $\tau_{\text{и}}$), наоборот, **расстояние между нулями функций $X(\omega)$ увеличивается** (расширение спектра), а значение $X(0)$ уменьшается.

Около 90% всей энергии импульса сосредоточено в полосе частот от 0 до $f_1=1/\tau_{\text{и}}$.

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Исследование моногармонического сигнала

Подключите осциллограф к гнезду «~ 1 кГц» стенда. Ручку регулятора уровня сигнала установите в среднее положение. Зафиксируйте в отчете осциллограмму сигнала и измерьте его период по делениям на экране

с учётом цены деления (мкс/дел.) переключателя развертки.

С помощью специального кабеля из комплекта стенда соедините гнездо « ~ 1 кГц» со входом ПК, расположенным в нижней части стенда правее сменного блока.

Анализ спектров проводите с помощью ПК, используя программу «Спектроанализатор».

Зафиксируйте в отчёте спектр сигнала, указав условия эксперимента, амплитуды (в делениях) и точные значения частот спектральных линий (в обозначениях на стенде – округленные значения частот).

Задание 2. Исследование сложных гармонических сигналов

Подключите сигнал с гнезда S_1 блока ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ на вход осциллографа, зафиксируйте форму исследуемого сигнала $s_1(t)$, определите его период. Подайте сигнал на вход ПК, зафиксируйте амплитуды и частоты спектральных составляющих сигнала.

Повторите выполнение предыдущего пункта работы для сигналов S_2 и S_3 .

Подайте на один из входов сумматора (Σ) стенда сигнал S_2 , на второй его вход – сигнал с гнезда « ~ 1 кГц». Наблюдая осциллограмму сигнала на выходе сумматора, плавно увеличьте уровень сигнала « ~ 1 кГц», добиваясь заметного изменения формы суммарного сигнала. Зафиксируйте осциллограмму (с указанием периода) и спектр полученного суммарного сигнала.

Подайте сигнал с выхода « ~ 1 кГц» ИСТОЧНИКА СИГНАЛОВ и сигнал с частотой 1,3 кГц от встроенного ГЕНЕРАТОРА НЧ на входы сумматора, установив напряжение каждого из них по 0,5 В (для контроля напряжения используйте встроенный вольтметр или осциллограф). Подайте суммарный сигнал сначала на осциллограф, зафиксируйте его форму с указанием периода суммарного сигнала, а затем – на вход ПК и зафиксируйте в отчёте его спектр с указанием амплитуд и частот спектральных составляющих.

Задание 3. Исследование импульсных последовательностей

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов формируется в блоке КОДЕР-1. «0» и «1» цифрового сигнала задаются пятью тумблерами ($b_1 - b_5$) со светодиодной индикацией с надписью ПЕРЕДАНО.

Соедините выходные гнезда КОДЕРА-1 со входами осциллографа и ПК.

Наберите в КОДЕРЕ-1 комбинацию 10000 (длительность импульса $T = 450$ мкс, а период – $17T$). Зафиксируйте в отчете форму и спектр сигнала с указанием их параметров.

Измените комбинацию в КОДЕРЕ-1 на 11000 (длительность импульса $2T$, период – $17T$). Зафиксируйте в отчете форму и спектр сигнала с указанием их параметров.

Измените комбинацию в КОДЕРЕ-1 на 11100 (длительность импульса $3T$, период – $17T$). Зафиксируйте в отчете форму и спектр сигнала с указанием их параметров.

Приведите в отчете развёрнутое объяснение отличия спектров исследованных последовательностей прямоугольных импульсов.

Сделайте общие выводы о временном и спектральном представлении различных сигналов.

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;

– последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;

- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответствующую численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Какова математическая связь формы периодического сигнала и его спектра?
2. Какова математическая связь формы непериодических (однократных) сигналов и их спектров?
3. Меняется ли спектр сложного сигнала при прохождении его через линейную цепь (например, ФНЧ)?
4. Меняется ли форма моногармонического сигнала при прохождении его через линейную цепь?
5. Меняется ли форма сложного сигнала при прохождении его через линейную цепь?
6. Что такое спектральная плотность амплитуд?
7. Влияет ли фазовый спектр сигнала на его форму?
8. От каких параметров сигнала и как зависит спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов?
9. Как связана длительность сигнала и ширина его спектра?
10. Имеется ли связь и какая между периодом сложного сигнала и нижней частотой его спектра?
11. Определите параметры синусоид, формирующих последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 14), имеющих амплитуду $U=10$ В и период $T=20$ мс.

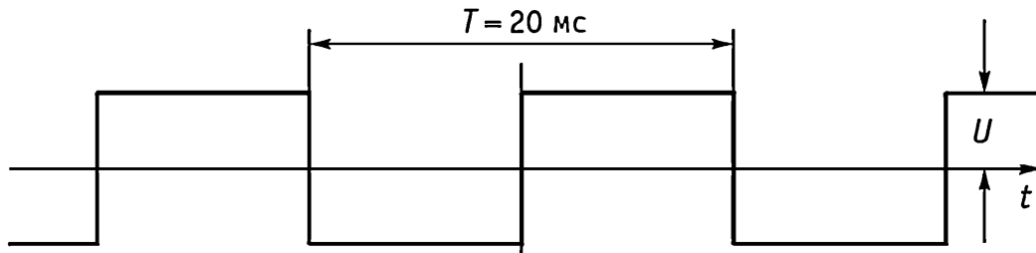


Рисунок 14 – Осциллограмма ППИ

12. В чем суть анализа спектрального состава периодических сигналов?
13. Сформулируйте алгоритм расчета реакции цепи на периодический сигнал.
14. Что такое практическая ширина спектра сигнала?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «отлично») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «хорошо») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «удовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «неудовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №2

ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ (ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА)

1 Цель работы

- практическое исследование процессов дискретизации непрерывных сигналов и их восстановления с помощью фильтров низких частот с различными частотами среза;
- формирование практических навыков оценки качества восстановления аналоговых сигналов.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- генератор Agilent 33210A (инв. ном. 104.3058)
- комплект соединительных проводов;

Исследуемое устройство размещено на сменном блоке ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА учебной установки теория электрической связи и представляет собой дискретизатор, обозначенный на макете как перемножитель сигналов, и набор из трех фильтров – восстановителей с разными частотами среза (рисунок 1).

Источники исследуемых сигналов S_1 , S_2 и S_3 находятся в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ, а сами сигналы представляют собой суммы гармоник с частотами 2, 4 и 6 кГц. При необходимости исследуемый сигнал может быть усложнен добавлением еще одного гармонического сигнала с частотой 1кГц с помощью сумматора стенда.



Рисунок 1 – Передняя панель сменного блока
«ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА»

Дискретизатор, формирующий отсчеты $s(k\Delta t)$ непрерывного сигнала $s(t)$, выполняет функцию перемножителя этого сигнала на короткие импульсы напряжения дискретизации $u_{\text{дискр}}$. Временной интервал между соседними отсчетами дискретизированного сигнала $s(k\Delta t)$ зависит от выбора частоты дискретизации f_d . Эта частота может изменяться дискретно при нажатии кнопки f_d , при этом выбранное значение этой частоты индицируется светодиодом ($f_d = 3, 6, 12, 16, 24$ и 48 кГц). Все упомянутые выше частоты (частоты дискретизации и частоты гармоник исследуемых сигналов) жестко синхронизированы, что упрощает наблюдение процессов на осциллографе.

В качестве фильтров – восстановителей используются три активных ФНЧ четвертого порядка с частотами среза $3, 6$ и 12 кГц. Для снятия импульсных характеристик фильтров используется генератор коротких импульсов δ – функций (гнезда $\delta(t)$ в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ).

В соответствии с теоремой Котельникова отсчеты, следующие через интервалы времени $\Delta t = 1/2F_v$, где F_v – верхняя частота сигнала, могут быть преобразованы в исходный сигнал после прохождения через идеальный ФНЧ с частотой среза $F_{\text{ср}} = F_v$. В работе используются реальные ФНЧ с недостаточно крутыми спадами АЧХ после частоты среза.

На практике выбирают Δt несколько меньше (а иногда и в несколько раз меньше), чем требуется в теореме Котельникова с тем, чтобы реальный ФНЧ с АЧХ трапецевидной формы позволял выделить спектр исходного сигнала из спектра дискретизированного сигнала, что гарантирует отсутствие искажений при обратном преобразовании (восстановлении) сигнала.

3 Основные теоретические сведения

Дискретизация – это основанное на теореме Котельникова *представление непрерывного во времени (аналогового) сигнала дискретной последовательностью импульсных отсчётов, по которым с заданной точностью можно восстановить исходное колебание* (рисунок 2).

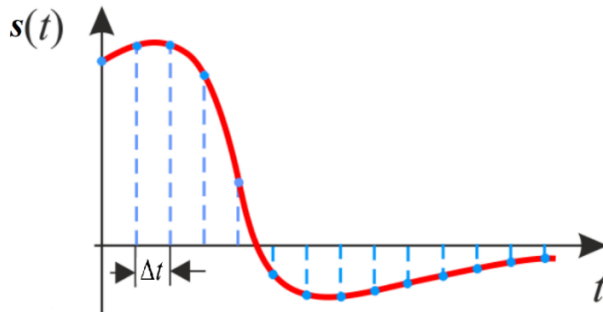


Рисунок 2 – Представление аналогового сигнала последовательностью дискретных отсчётов

Дискретный способ передачи непрерывного сообщения позволяет:

- сократить время, в течение которого канал связи занят передачей сигнала;
- осуществить временное уплотнение канала связи, т.к. в этом случае по одному каналу можно передавать одновременно информацию о нескольких непрерывных сигналах;
- уменьшить влияние помех на качество передаваемых сообщений, поскольку появляется возможность использования оптимальных методов приема сигналов и помехоустойчивого кодирования;
- использовать для формирования и обработки аналоговых сигналов современную элементную базу в виде микроэлектронных устройств и процессоров.

В соответствии с **теоремой Котельникова**, доказанной в 1933 году, сигнал, описываемый непрерывной функцией $s(t)$ с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями $s(n\Delta t)$, отсчитанными через интервалы времени (**интервалы дискретизации**) $\Delta t = 1/(2F_B)$, где F_B – верхняя частота сигнала (ширина спектра сигнала).

Реальные сигналы конечной длительности имеют бесконечные частотные спектры. *Практически ширину спектра исходного сигнала ограничивают некоторой верхней частотой F_v так, чтобы в диапазоне частот от 0 до F_v была сосредоточена более 90% его энергии.* Эту полосу частот принято называть практической шириной спектра $\Delta f_{\text{пр}} = F_v$, а спектральными составляющими сигнала с частотами $f > F_v$ пренебрегают.

Очевидно, что представление сигнала дискретной последовательностью отсчетов приводит к потере информации о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Чтобы эти потери были минимальны, интервал дискретизации необходимо уменьшать. Однако уменьшение периода дискретности приводит к увеличению числа отсчетов и, как следствие, к увеличению объема вычислений. Поэтому при выборе периода дискретизации приходится искать компромиссное решение.

В основе математического описания временной дискретизации непрерывных сигналов лежит периодическая последовательность единичных δ – импульсов с периодом $T = \Delta t = 1/(2F_v)$. Данный импульс определяется выражением $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$ и показан на рисунке 3.

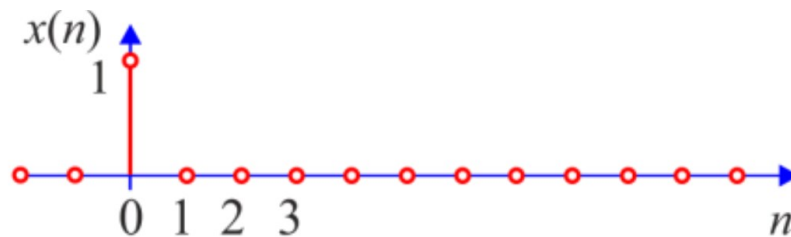


Рисунок 3 – Единичный импульс

Взятие отсчетов исходного сигнала эквивалентно умножению его временной функции на последовательность δ – импульсов. Дискретизированная функция передаваемого сигнала будет представлять собой сигнал с **амплитудно-импульсной модуляции (АИМ)**.

Отсчеты исходного сигнала могут быть переданы на противоположную сторону любым способом. На приёмной стороне системы связи осуществляется восстановление исходного сообщения по принимаемой последовательности отсчётов.

Непрерывная функция $s(t)$, содержащая гармонические составляющие с частотами от 0 до F_v , может быть представлена в виде **ряда Котельникова**:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B (t - n\Delta t)}{\omega_B (t - n\Delta t)}, \quad (1)$$

где $\omega_B = 2\pi F_B$.

Формулу (1) можно рассматривать как разложение сигнала $s(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B (t - n\Delta t)}{\omega_B (t - n\Delta t)}, \quad (2)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $s(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = n\Delta t$, $n \in (-\infty, \infty)$. Функция $\varphi_n(t)$, называемая **отсчетной функцией**, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n = n\Delta t$ (на рисунке 4 представлен график отсчетной функции для $n=3$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю.

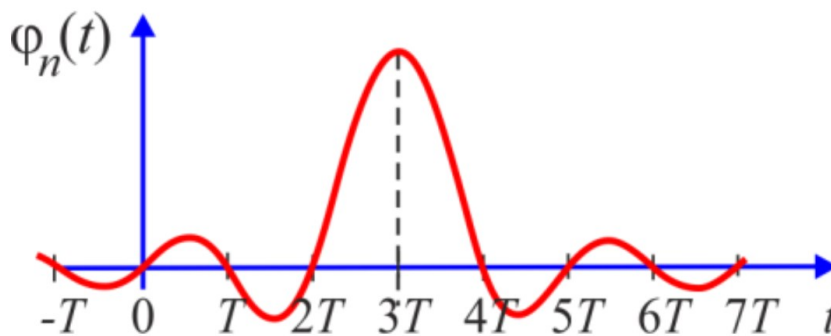


Рисунок 4 – График отсчетной функции для $n=3$

Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) dt = \begin{cases} \pi / \omega_B, & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \quad (3)$$

В каждой точке $t = n\Delta t$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (1), отличен от нуля и этот член равен $s(n\Delta t)$. Следовательно, в точках $t = n\Delta t$ справедливость формулы (1) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $s(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (2).

Таким образом, функция $s(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени Δt . С другой стороны, если имеются числовые значения функции $s(n\Delta t)$ для всех n , то она может быть полностью восстановлена по формуле (1).

Желая использовать теорему Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам, необходимо учитывать следующее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0, T_c]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Поэтому точно восстановить сигнал не удастся. Для приближенного восстановления можно выделить интервал частот $[0, \omega_B]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_B$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (1), состоящим из конечного числа членов:

$$s^*(t) = \sum_{n=0}^N s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - n\Delta t)}{\omega_B(t - n\Delta t)}. \quad (4)$$

На рисунке 5 показана аппроксимация рядом (1) прямоугольного импульса, представленного пятью дискретными отсчетами.

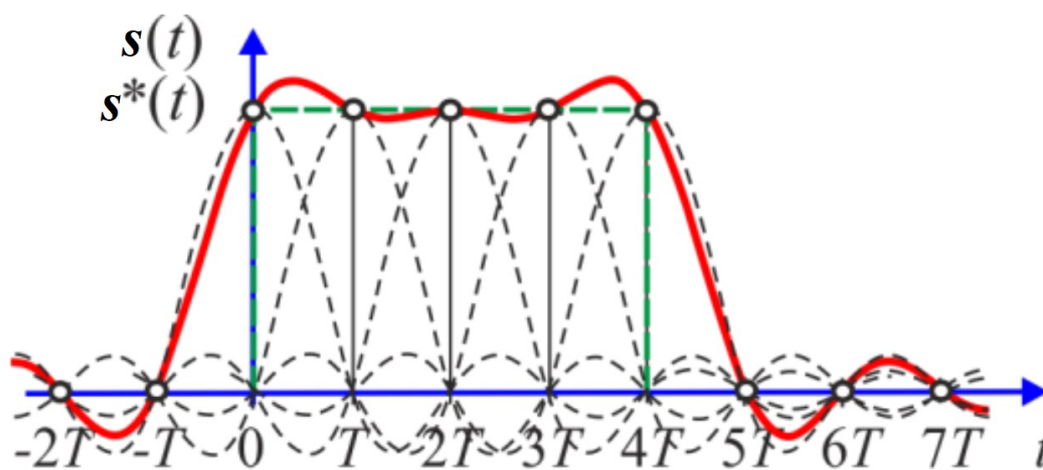


Рисунок 5 – Представление прямоугольного импульса рядом Котельникова

При суммировании членов ряда (4) сигнал $s(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = n\Delta t$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации Δt рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (2).

Таким образом, ряд Котельникова указывает на способ восстановления исходного сигнала по последовательности отсчетов путем формирования для каждого отсчета $s(n\Delta t)$ функции $\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B(t - n\Delta t)}{\omega_B(t - n\Delta t)}$, с

соответствующей амплитудой и последующим суммированием всех функций.

Техническим устройством, формирующим отклик вида $\sin(x)/x$ при воздействии δ – импульса, является идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания, равной F_v (рисунок 6).

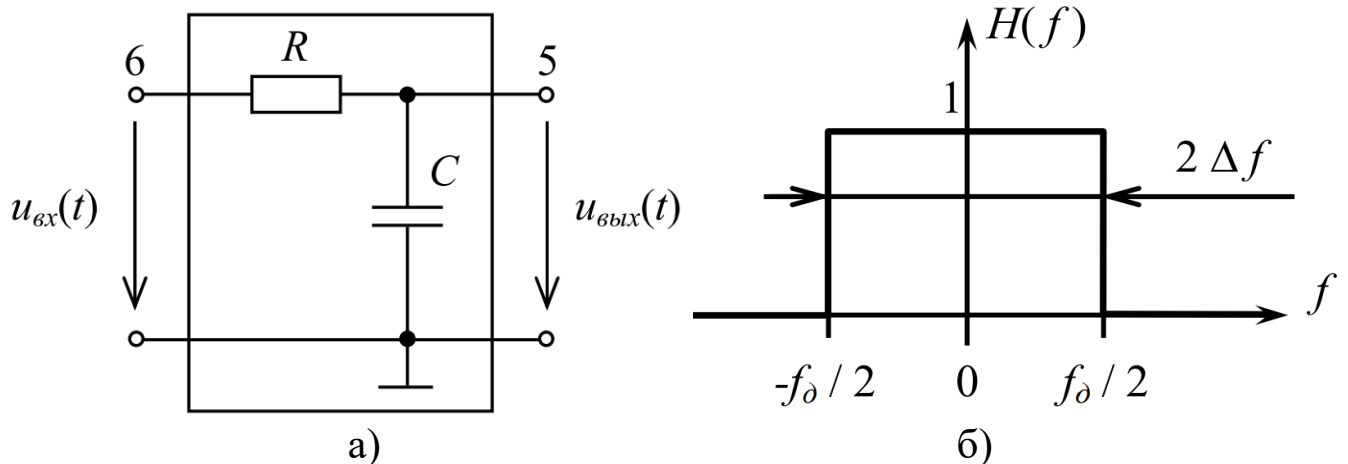


Рисунок 6 – Схема (а) и частотная характеристика идеального ФНЧ (б)

Спектр дискретного сигнала $\dot{S}_\Delta(f)$ можно получить путем периодического повторения спектра аналогового сигнала $s(t)$ с интервалом по частоте равным **частоте дискретизации** $f_d = 1/\Delta t$.

$$\dot{S}_\Delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}(f - kf_d), \quad (5)$$

где $\dot{S}(f)$ – спектр аналогового сигнала.

Пример спектра сигнала на выходе идеального дискретизатора представлен на рисунке 7.

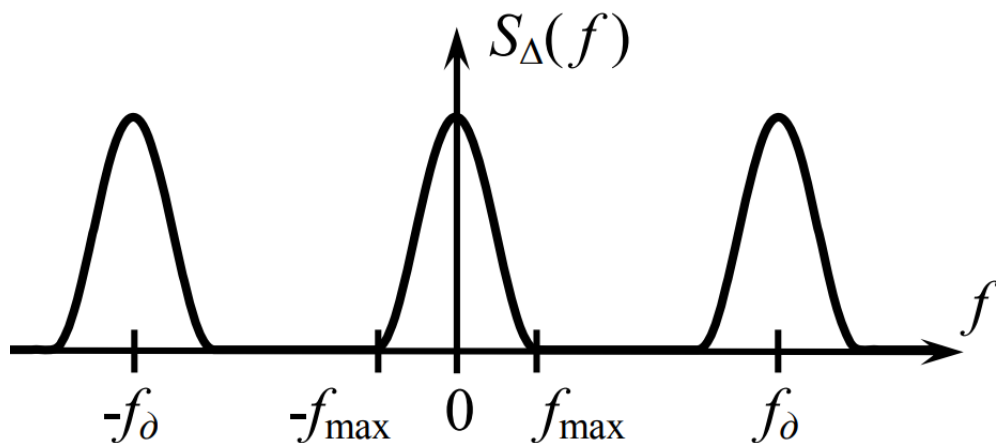


Рисунок 7 – Спектр дискретного сигнала

В этом случае спектр восстановленного сигнала можно найти следующим образом:

$$\dot{S}(f) = \dot{S}_{\Delta}(f) \cdot H(f). \quad (6)$$

При анализе восстановления аналогового сигнала из дискретного сигнала во временной области требуется определить импульсную характеристику восстанавливающего фильтра. Для идеального ФНЧ импульсная характеристика имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}. \quad (7)$$

Процесс восстановления исходной функции по последовательности отсчетов на приёмной стороне показан на рисунке 8.

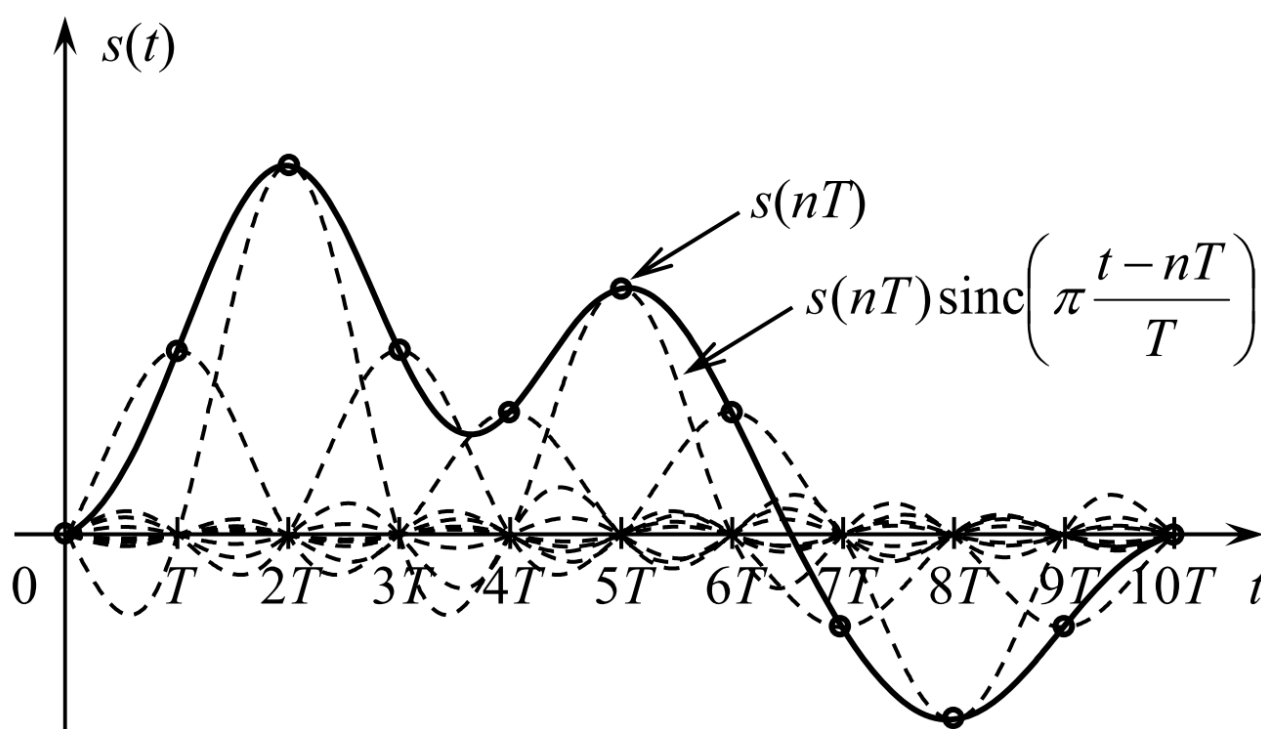


Рисунок 8 – Восстановление исходной функции по последовательности отсчётов

На вход ФНЧ через интервалы времени Δt поступают короткие импульсы с амплитудами, соответствующими (пропорциональными) отсчетам $s(n\Delta t)$. Напряжение на выходе ФНЧ будет представлять собой сумму его откликов на каждый из входных импульсов. В моменты времени $n\Delta t$ только один из откликов (на данный импульс) не равен нулю и максимален, а отклики от всех других импульсов отсчета равны нулю. В остальные промежуточные моменты времени $(n-1)\Delta t < t < (n+1)\Delta t$ суммируется бес-

конечное количество откликов. Таким образом, восстановленный аналоговый сигнал $s(t)$ может быть получен в результате суперпозиции sinc-функций, задержанных на интервал, кратный интервалу дискретизации Δt , и взвешенных соответствующими отсчетами дискретного сигнала

При практическом использовании теоремы и ряда Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам неизбежно будут возникать погрешности восстановления, обуславливающие отличие принятого сигнала $v(t)$ от передаваемого $s(t)$.

Наиболее важной причиной этого является отличие характеристик реальных ФНЧ от идеального.

У идеального ФНЧ амплитудно-частотная характеристика $H(f)$ имеет прямоугольную форму, т.е.:

$$H(f) = \begin{cases} H_{\max} & \text{при } -f_{\delta}/2 \leq f \leq +f_{\delta}/2; \\ 0 & \text{при } f < -f_{\delta}/2 \text{ и } f > f_{\delta}/2. \end{cases} \quad (8)$$

а фазочастотная характеристика $\varphi_{\text{иф}}(f) = f \cdot t$ – линейна.

То есть идеальный ФНЧ с одинаковым коэффициентом передачи пропускает все частотные составляющие спектра входного сигнала в пределах полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{в}}$ и полностью отфильтровывает (подавляет) составляющие с частотами $\omega > \Delta\omega_{\text{пр}}$.

Реализовать ФНЧ с АЧХ (1) практически невозможно. У реальных ФНЧ АЧХ не обеспечивает резкого ограничения спектра на граничной частоте среза фильтра $f_{\text{ср}} = F_{\text{в}}$, а имеет наклонный участок определенной крутизны (рисунок 9).

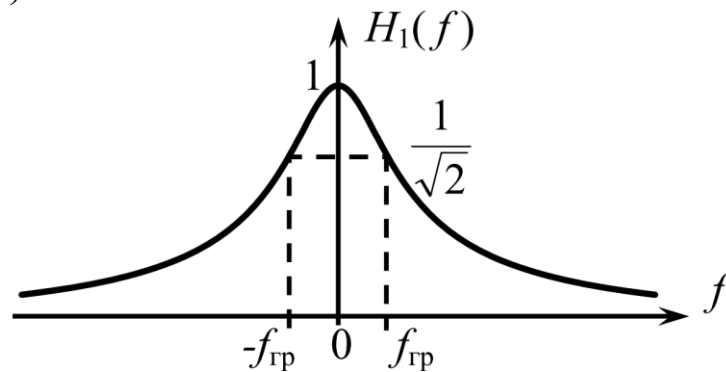


Рисунок 9 – АЧХ реального ФНЧ

Следовательно, в полосу пропускания фильтра будут попадать и внеполосные спектральные составляющие дискретизированного сигнала. Кроме того, реальные ФНЧ в пределах полосы пропускания имеют определённую неравномерность АЧХ. Все это приведет к искажению формы сигнала на выходе ФНЧ, т.е. к увеличению ошибки восстановления.

Дельта-функция (δ -функция, **функция Дирака**) – математическая модель реально не существующего сигнала, который имеет бесконечную по величине амплитуду и нулевую длительность (рисунок 10).

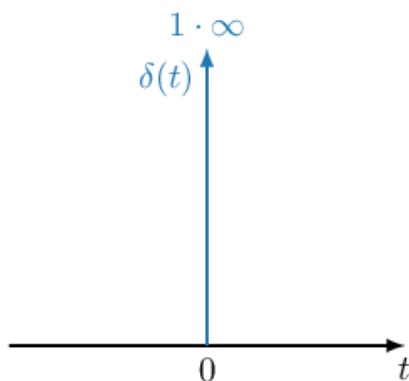


Рисунок 10 – Дельта – функция: $\delta(t) = \{\infty \text{ при } t = 0, 0 \text{ при } t \neq 0\}$

Свойства дельта-функции, благодаря которым она широко используется в радиотехнике, следующие:

1) площадь сигнала, описываемого δ -функцией, равна 1, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$

2) селектирующее свойство $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$.

Селектирующее свойство становится понятным, если учесть, что $\delta(t - t_0) = 0$ на всей оси времени, кроме точки $t = t_0$. Это позволяет сделать интервал интегрирования бесконечно малым в окрестности точки t_0 . В этом интервале функция $f(t)$ принимает значение $f(t_0)$, позволяющее её вынести за знак интеграла.

Данный сигнал называется **испытательным**, он применяется для получения импульсной характеристики радиотехнического устройства.

Реакция устройства на дельта-функцию – его импульсная характеристика.

Функция единичного скачка (функция Хевисайда) описывает процесс резкого (мгновенного) перехода физического устройства из одного состояния в другое. На рисунке 11 приведен график этой функции.

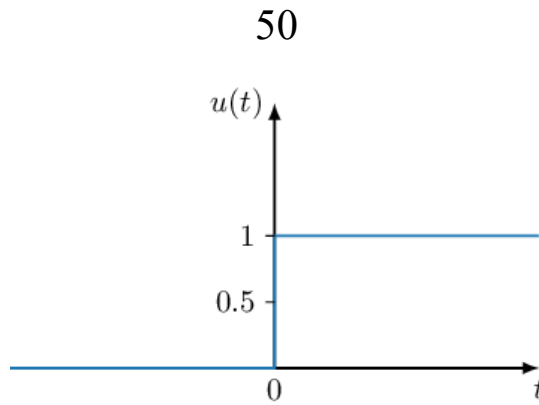


Рисунок 11 – Функция единичного скачка: $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$

Иногда функцию единичного скачка называют **функцией включения** и представляют формулой:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1/2 & \text{при } t = 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Функция Хевисайда, как и функция Дирака, является испытательным сигналом.

Реакция устройства на функцию единичного скачка – его переходная характеристика.

Связь между функциями Хевисайда и Дирака:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}; \quad u(t) = \int_0^t \delta(t) dt. \quad (10)$$

Передаточная функция фильтра низких частот определяется выражением:

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + p \cdot \tau}, \quad (11)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени RC-цепи.

Выполнив замену $p = j \cdot 2\pi f$ в выражении (11), можно определить амплитудно-частотную характеристику ФНЧ.

$$H_1(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau)^2}}. \quad (12)$$

Импульсная характеристика (ИХ) ФНЧ может быть найдена с помощью обратного преобразования Лапласа от передаточной функции $H(p)$ и имеет вид:

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Неидеальность АЧХ и ФЧХ реальных ФНЧ будут вызывать и неполное совпадение их импульсной характеристики $h_1(t)$ (рисунок 12) с функцией вида $\frac{\sin \omega_b(t - n\Delta t)}{\omega_b(t - n\Delta t)}$ в моменты времени $n\Delta t$.

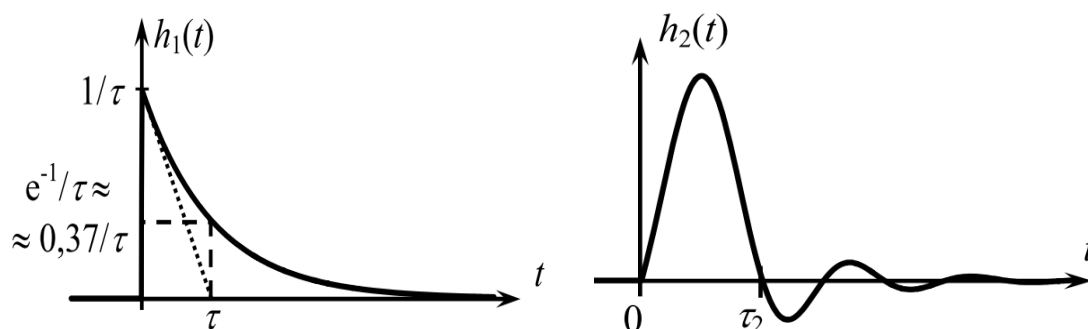


Рисунок 12 – Импульсные характеристики идеального и реального ФНЧ

Это приводит к тому, что сигнал на выходе фильтра в моменты времени $n\Delta t$ определяется не одним отсчетом, а всеми (многими) предшествующими.

Реальные фильтры имеют конечную «память» (конечное время запаздывания сигнала на выходе относительно входного δ – импульса) и, следовательно, будут суммировать одновременно конечное число отсчетов (вместо бесконечного в случае идеального ФНЧ). Это является причиной увеличения ошибки восстановления.

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Произвести дискретизацию одного из сложных сигналов (S_1 , S_2 или S_3)

Выберите один из трех сигналов (например, S_1) в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ и подайте его на вход «А» ПК, работающего в режиме спектроанализатора (входы ПК находятся в нижней части стенда справа).

С помощью спектроанализатора ПК получите спектр сигнала и определить его верхнюю частоту (F_b).

Рассчитайте требуемую частоту дискретизации f_d и установите её на макете кнопкой « f_d ».

Соедините входы двухлучевого осциллографа со входом и выходом дискретизатора, установите режим внешней синхронизации осциллографа (от гнезда С1 блока ИСТОЧНИКИ). Вход спектроанализатора подключите к выходу дискретизатора.

Зафиксируйте в отчёте временные диаграммы в следующем порядке (с сохранением масштаба по оси времени):

- исследуемый сигнал $S(t)$;
- сигнал дискретизации (гнездо нижнего входа перемножителя);
- выходной дискретизированный сигнал $s(k\Delta t)$.

С экрана монитора ПК зарисуйте спектры перечисленных выше сигналов.

Переключите кнопкой частоту дискретизации f_d на 1-2 шага выше и ниже выбранного значения f_d , при этом наблюдайте изменения в осциллограммах и спектрограммах сигнала на выходе дискретизатора. Наиболее характерные случаи зафиксируйте в отчёте.

Задание 2. Исследовать частотные и импульсные характеристики фильтров-восстановителей

С целью выбора наилучшего из трех ФНЧ в качестве фильтра-восстановителя необходимо определить частоту среза каждого из них по АЧХ и по импульсной характеристике $g(t)$. Кроме того, АЧХ фильтров необходима для последующей коррекции f_d , а импульсная реакция $g(t)$ нужна для объяснения процесса восстановления сигнала.

Снятие АЧХ фильтра проводится путем подачи на его вход гармонического сигнала с напряжением 1 В и с частотой 1 кГц от встроенного генератора в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ. К выходу фильтра подключите встроенный цифровой вольтметр переменного напряжения или осциллограф. Плавное увеличение частоты генератора, снимите частотную характеристику $U_{\text{вых}} = \varphi(f)$ с шагом 1 – 2 кГц так, чтобы зафиксировать частоту среза $f_{\text{ср}}$, на которой $U_{\text{вых}}$ окажется в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем на частоте 1 кГц, а также частоты, на которых $U_{\text{вых}}$ уменьшится до 0,1 и 0,05 от $U_{\text{вых}}$ (1 кГц). Постройте на одном графике АЧХ трёх фильтров и отметьте на них уточненные значения частот среза $f_{\text{ср}}$. Выберите лучший фильтр-восстановитель для исследуемого сигнала.

Снятие импульсной реакции ФНЧ производится путём подачи на вход фильтра коротких импульсов (с гнезда « $\delta(t)$ » блока ИСТОЧНИКИ). Осциллограмма выходного сигнала будет соответствовать импульсной реакции фильтра $g(t)$. Зарисуйте осциллограммы $g(t)$ для трёх фильтров, фиксируя на них значения «нулей» (рисунок 13) по шкале на экране осциллографа с учетом масштаба развёртки (мкс/дел). Определите $\Delta t'$ для каждого ФНЧ и найдите частоты среза по формуле $f_{\text{ср}} = 1/(2\Delta t')$.

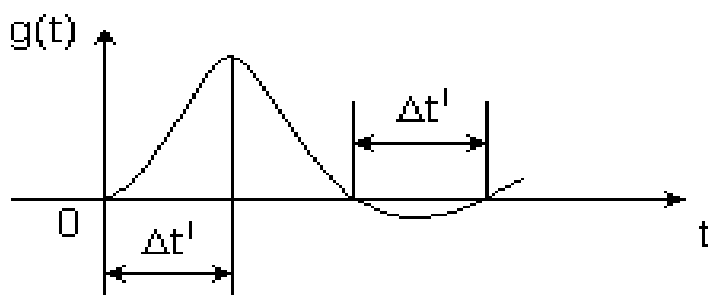


Рисунок 13 – Импульсная характеристика реального ФНЧ

Затем аргументированно выберите фильтр, наиболее пригодный для восстановления дискретизированного сигнала.

Задание 3. Исследовать процесс восстановления дискретизированных сигналов

Сопоставьте спектры, снятые с АЧХ выбранного фильтра-восстановителя и скорректируйте частоту дискретизации, увеличив её на 1-2 шага от расчетного значения с тем, чтобы спектр исходного сигнала $s(t)$ можно было выделить из спектра дискретизированного сигнала с помощью выбранного реального ФНЧ.

Соедините выход дискретизатора со входом выбранного ФНЧ, установите на макете уточненное значение f_d . Подключите один из входов осциллографа ко входу дискретизатора, а второй – к выходу ФНЧ и зафиксируйте в отчёте осциллограммы исходного и восстановленного сигнала.

Изменяя частоту дискретизации на 1-2 шага от скорректированного значения f_d , зафиксируйте наиболее характерные осциллограммы восстановленных сигналов. В отчёте приведите заключение о том, допустимо ли изменять интервал между отсчетами дискретизированного сигнала Δt .

Установите прежнее значение f_d , замените выбранный ФНЧ на другой, а затем и на третий фильтр. Зафиксируйте в отчёте осциллограммы восстановленных сигналов с указанием f_{cp} ФНЧ.

Соедините вход дискретизатора с источником периодической последовательности прямоугольных импульсов, в качестве которого используется КОДЕР-1. Установите тумблерами КОДЕРА-1 любую комбинацию из одной единицы и четырех нулей. При этом на выходе КОДЕРА-1 формируются прямоугольные импульсы длительностью 450 мкс с периодом 7650 мкс. Проведя анализ спектра этого сигнала, выберите f_d и фильтр восстановитель. Зафиксируйте осциллограммы и спектры входного, дискретизированного и восстановленного сигналов.

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответственную численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Каков практический смысл в дискретизации аналоговых сигналов?
2. Сформулируйте теорему Котельникова.
3. При каких условиях теорема Котельникова гарантирует двойное преобразование сигналов (дискретизация и восстановление) без искажений?
4. Могут ли быть дискретизированы и затем восстановлены импульсы прямоугольной формы?
5. Каков алгоритм восстановления дискретизированного сигнала?
6. Какова роль ряда Котельникова в объяснении процесса восстановления сигнала?
7. Какую функцию выполняет ФНЧ?
8. С какой целью в работе исследовались спектры исходного и дискретизированного сигналов?
9. Можно ли произвольно увеличивать или уменьшать Δt между отсчетами? К чему это может привести?
10. В чем отличие идеального и реального ФНЧ?
11. С чем связана необходимость корректировать значение частоты дискретизации?
12. Какие функциональные узлы необходимы для дискретизации непрерывного сигнала?
13. Все ли аналоговые сигналы могут быть:
 - дискретизированы во времени;
 - восстановлены после дискретизации.
14. Назовите причины, вызывающие искажения при восстановлении дискретизированных сигналов.
15. Как по зависимости коэффициента передачи фильтра от частоты найти его импульсную характеристику?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «отлично») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «хорошо») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «удовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «неудовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

1 Цель работы

- ознакомление с методикой экспериментальных исследований плотностей вероятности случайных процессов;
- установление количественных связей между характером случайного процесса, его числовыми характеристиками и графиками плотности вероятности.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- генератор Agilent 33210A (инв. ном. 104.3058)
- комплект соединительных проводов;

Для проведения работы сменные блоки стенда НЕ требуются, используются внутренние источники сигналов:

- гармонические сигналы с частотой 1 кГц в качестве сигнала со случайной начальной фазой;
- «белый» шум с выхода генератора шума;
- аддитивная смесь этих сигналов при различном соотношении сигнал/шум (a/σ).

Измерение плотности вероятности мгновенных значений сигналов производится с помощью ПК, работающего в режиме «ГИСТОГРАММА». Записанная в память ПК реализация исследуемого сигнала воспроизводится на экране монитора, а затем подвергается статистическому анализу,

в результате которого получаются графики плотности вероятности и вычисляются параметры случайного процесса (m и σ). Для контроля параметров входных сигналов используется встроенный вольтметр. Получение аддитивной смеси сигналов обеспечивается сумматором (Σ) стенда.

3 Основные теоретические сведения

Большинство сигналов, с которыми работают системы связи, являются **случайными**. Особенностью случайного процесса является то, что значения, которые он принимает в момент времени t , случайны (заранее не определены). Если речь идет об электрических сигналах, то это значения напряжения или тока.

Различают **теорию случайных величин** и **теорию случайных процессов**. В теории случайных величин изучаются результаты экспериментов и их значения фиксированы. А случайные сигналы являются функциями времени, и для их рассмотрения методов классической теории вероятностей недостаточно. Случайные сигналы изучаются в теории случайных процессов.

Известно, что детерминированные сигналы можно описать функциональными зависимостями. Если построить зависимость мгновенных значений случайного сигнала от времени, то в общем случае получим только **реализацию случайного процесса**. Случайным процессом, как показано на рисунке 1, будет являться бесконечная совокупность реализаций, формирующая **статистический ансамбль**. Значения случайной функции при фиксированном аргументе называются его **сечением**.

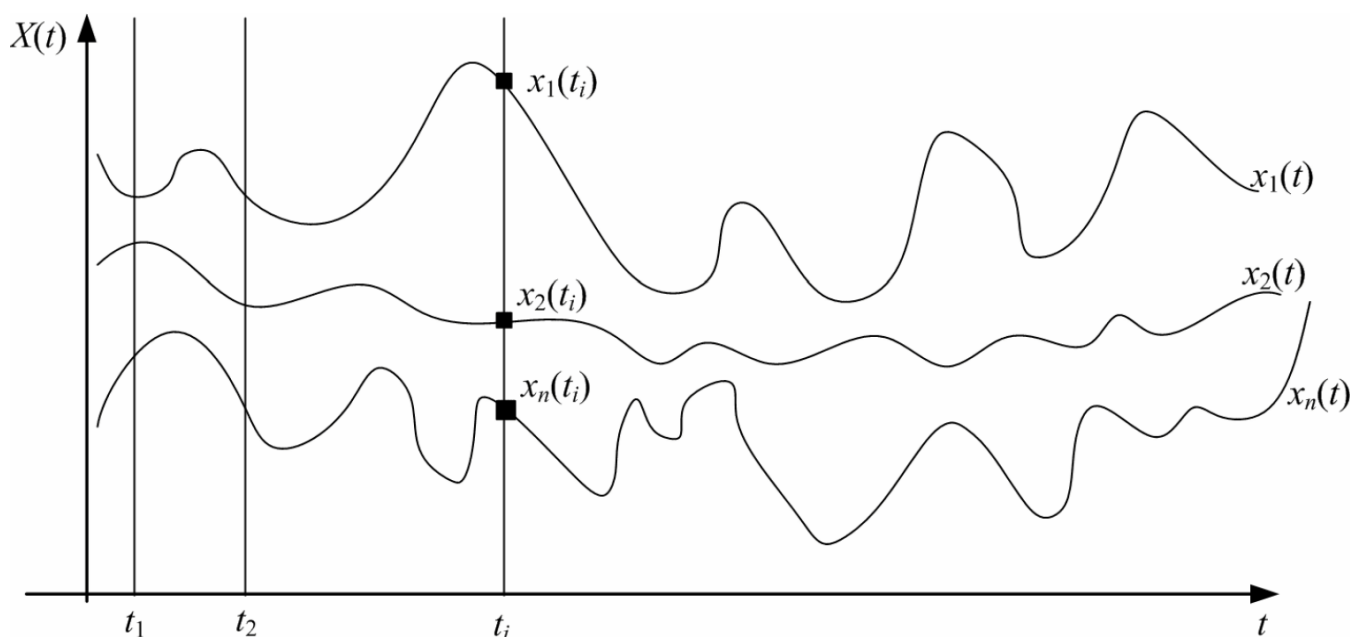


Рисунок 1 – Ансамбль реализаций случайного процесса

На практике часто работают с сигналами, у которых *случайной величиной* является только один параметр, а другие параметры определены (детерминированы). Таким сигналом является, например, гармонический сигнал вида $U\cos(\omega t + \varphi)$ со случайной амплитудой U . При этом два других параметра (частота ω и фаза φ) известны. Амплитуда принимает определенное значение в каждой реализации, которое заранее не известно. Такие случайные процессы называются *квазидетерминированными* случайными процессами.

Вид реализации случайного процесса заранее не известен! Однако, изучая многократные реализации случайного процесса в одинаковых условиях, можно установить определенные закономерности.

Для *непрерывного* случайного процесса (СП) можно лишь говорить о некоторой вероятности того, что в момент времени t значение случайной величины $X(t)$ окажется в интервале между значениями x и $x + \Delta x$, т.е. если $X(t)$ есть *случайная функция*, то её значения при фиксированном значении аргумента представляют собой *случайные величины* $X(t_i) = X_i$.

Обозначим X случайную величину, которая в 1-м эксперименте принимает случайное значение x ; из множества вещественных чисел. Рассмотрим функцию $F(x)$ вещественного аргумента x , определяемую как вероятность P того, что случайная величина X примет значение, равное или меньшее конкретного x :

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (1)$$

Определенная таким образом функция $F(x)$ будет неслучайной функцией. Она называется *функцией распределения (интегральным законом распределения вероятностей)* случайной величины X .

Когда случайная величина X определена на всем множестве вещественных чисел, функция $F(x)$ имеет вид гладкой неубывающей функции с областью значений от 0 до 1: $0 \leq F(x) \leq 1$.

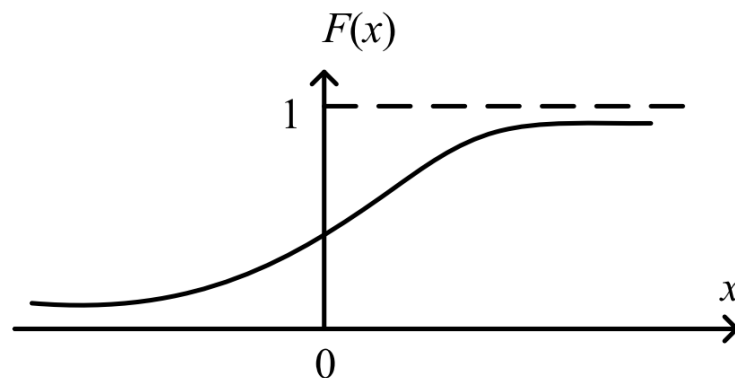


Рисунок 2 – Вид функции распределения (интегрального закона распределения вероятностей) случайной величины X

Очевидно, что вероятность попадания случайной величины в интервал значений от x_1 до x_2 можно определить следующим образом:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (2)$$

Найдем производную $p(x)$ функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = dF(x)/dx. \quad (3)$$

Функция $p(x)$ называется **плотностью распределения вероятности (плотностью вероятности)** случайной величины X или **дифференциальным законом распределения**. Взаимосвязь функций $p(x)$ и $F(x)$ можно показать следующим образом:

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx. \quad (4)$$

Тогда

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (5)$$

Таким образом, **величина $p(x)dx$ представляет собой вероятность попадания случайной величины X в интервал значений $(x, x+dx)$**

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{|\Delta x|} \geq 0. \quad (6)$$

Если X – непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $p(x)$ является гладкой функцией (рисунок 3).

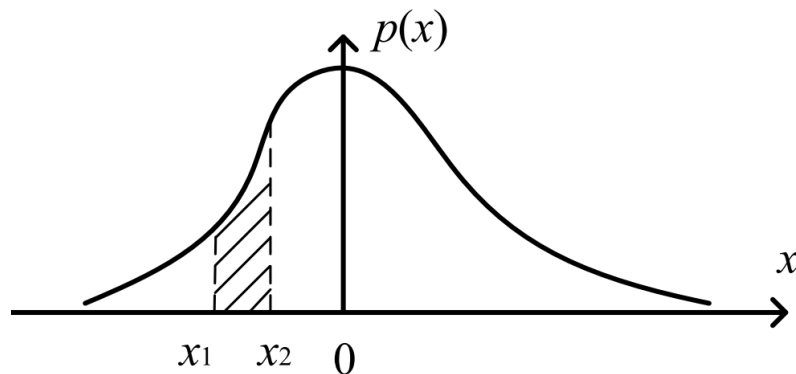


Рисунок 3 – Вид плотности распределения вероятности (дифференциального закона распределения вероятностей) непрерывной случайной величины

Зависимость $p(x)$ является главной статистической характеристикой случайного процесса. Плотность вероятности случайного процесса определяет закон распределения. Каждый закон распределения обладает определенными свойствами.

Основные сведения о свойствах интегральной функции распределения вероятности (ИФР) и плотности вероятности (ПВ) приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные свойства ИФР и ПВ случайной величины

Название и обозначение	Функция распределения $F(x)$	Плотность вероятности $w(x)$
Определение	$F(x) = P(X \leq x)$	$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{ \Delta x }$
Физическая размерность	безразмерная	размерность $1/X$
Взаимосвязь	$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy$	$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
Особенности функции	$F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$ (неубывающая)	$p(x) \geq 0$ (неотрицательная)
Расчет вероятности $P(x_1 \leq X \leq x_2)$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$

Рассмотрим характеристики развивающихся во времени случайных процессов. Обозначим как $X(t)$ случайный процесс, представляющий собой ансамбль из n реализаций $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Пусть t_1 – произвольный момент времени. Определив значения $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)\}$, получим одномерное сечение случайного процесса и случайную величину $X(t_1)$.

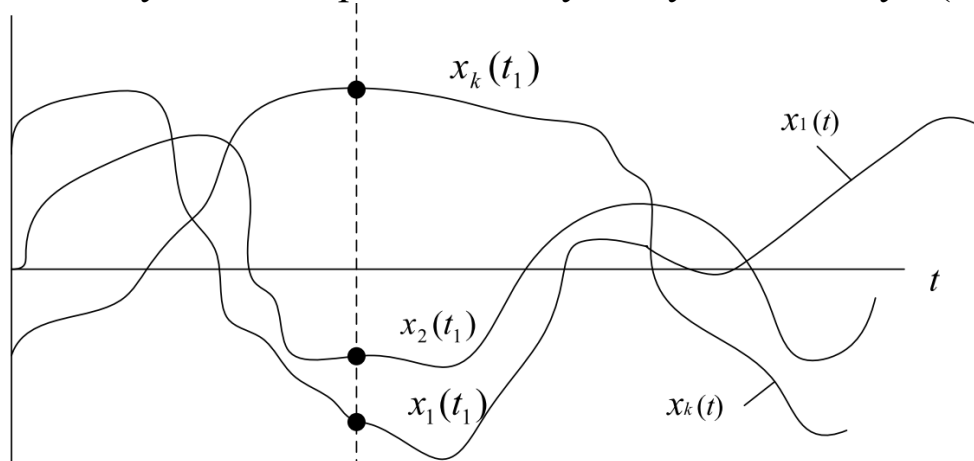


Рисунок 4 – Определение одномерной плотности вероятности случайного процесса $X(t)$ в момент времени t_1

Плотность вероятности этой случайной величины $p(X, t_1)$ есть одномерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ в момент времени t_1 (рисунок 4).

Одномерная плотность вероятности характеризует случайный процесс лишь в один момент времени и не позволяет судить о развитии и поведении случайного процесса во времени. Дополнить сведения о рассматриваемом процессе позволяет рассмотрение двух его сечений в моменты времени t_1 и t_2 ($t_1 \neq t_2$). Получаем **двумерную** случайную величину $\{X_1, X_2\}$, которая описывается **двумерной плотностью вероятности** $p(X_1, X_2, t_1, t_2)$.

Двумерная плотность вероятности характеризует статистическую взаимосвязь между значениями случайной величины в два момента времени (в сечениях t_1 и t_2). Знание $p(X_1, X_2, t_1, t_2)$ позволяет, в частности, определить вероятность попадания случайной величины X в интервал значений (a, b) в сечении t_1 , в то время как в сечении t_2 она попадает в интервал значений (c, d) по следующей формуле

$$P(a < X < b, c < X < d) = \int_a^b \int_c^d p(X_1, X_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (7)$$

Если интервалы (a, b) и (c, d) включают все возможные значения случайной величины, то интеграл (7) равен единице (полная вероятность).

Рассматривая случайный процесс в n моментов времени ($n > 2$), получим **многомерную плотность вероятности** $p(X_1, X_2, X_n, t_1, t_2, t_n)$. Необходимо, чтобы многомерная плотность вероятности удовлетворяла условию нормировки и была неотрицательной. Кроме того, многомерная плотность вероятности должна удовлетворять условию симметрии, т.е. не зависеть от порядка аргументов.

Случайный процесс описывается при помощи n -мерной плотности вероятности тем детальнее, чем больше n .

3.1 Моментные функции случайных процессов

В ряде случаев на практике необходимо получить менее детальные характеристики случайных процессов. Для этого определяют моменты случайных величин в сечениях случайного процесса. В общем случае моменты зависят от времени, поэтому называются моментными функциями. Наибольшее практическое значение имеют математическое ожидание, дисперсия, ковариационная и корреляционная функции.

Математическим ожиданием или начальным моментом первого порядка является **среднее значение случайного процесса** $X(t)$ по ансамблю реализаций в момент времени t .

$$m(t) = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, t) dx. \quad (8)$$

Такая характеристика как **среднее значение квадрата случайной величины** является начальным моментом второго порядка:

$$m^2(t) = \overline{X^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x, t) dx. \quad (9)$$

Среднее значение квадрата случайной величины имеет физический смысл **полной средней мощности процесса (с учетом мощности математического ожидания)**.

Флуктуация – это отклонение случайного процесса от его среднего значения, то есть **переменная составляющая случайного процесса**. Разность между случайным процессом и его математическим ожиданием называется **центрированным процессом**.

Дисперсия или центральный момент второго порядка – это математическое ожидание квадрата центрированного процесса:

$$D(t) = \overline{[X(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m(t)]^2 \cdot p(x, t) dx. \quad (10)$$

Дисперсия характеризует степень разброса мгновенных значений реализаций процесса в фиксированном сечении (в момент времени t) относительно среднего значения. Дисперсия имеет физический смысл средней мощности переменной составляющей случайного процесса и численно равна разности полной средней мощности случайного процесса и мощности математического ожидания этого процесса.

Величина σ называется **среднеквадратическим отклонением (СКО)** и определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D(t)} \quad (11)$$

Среднеквадратическое отклонение имеет физический смысл действующего значения переменной составляющей случайного процесса по аналогии с действующим значением детерминированного сигнала.

Рассмотрим пример. На рисунке 5, а показаны возможные реализации процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ с различными математическими ожиданиями, а на рисунке 5, б – с одинаковыми математическими ожиданиями, но разными дисперсиями.

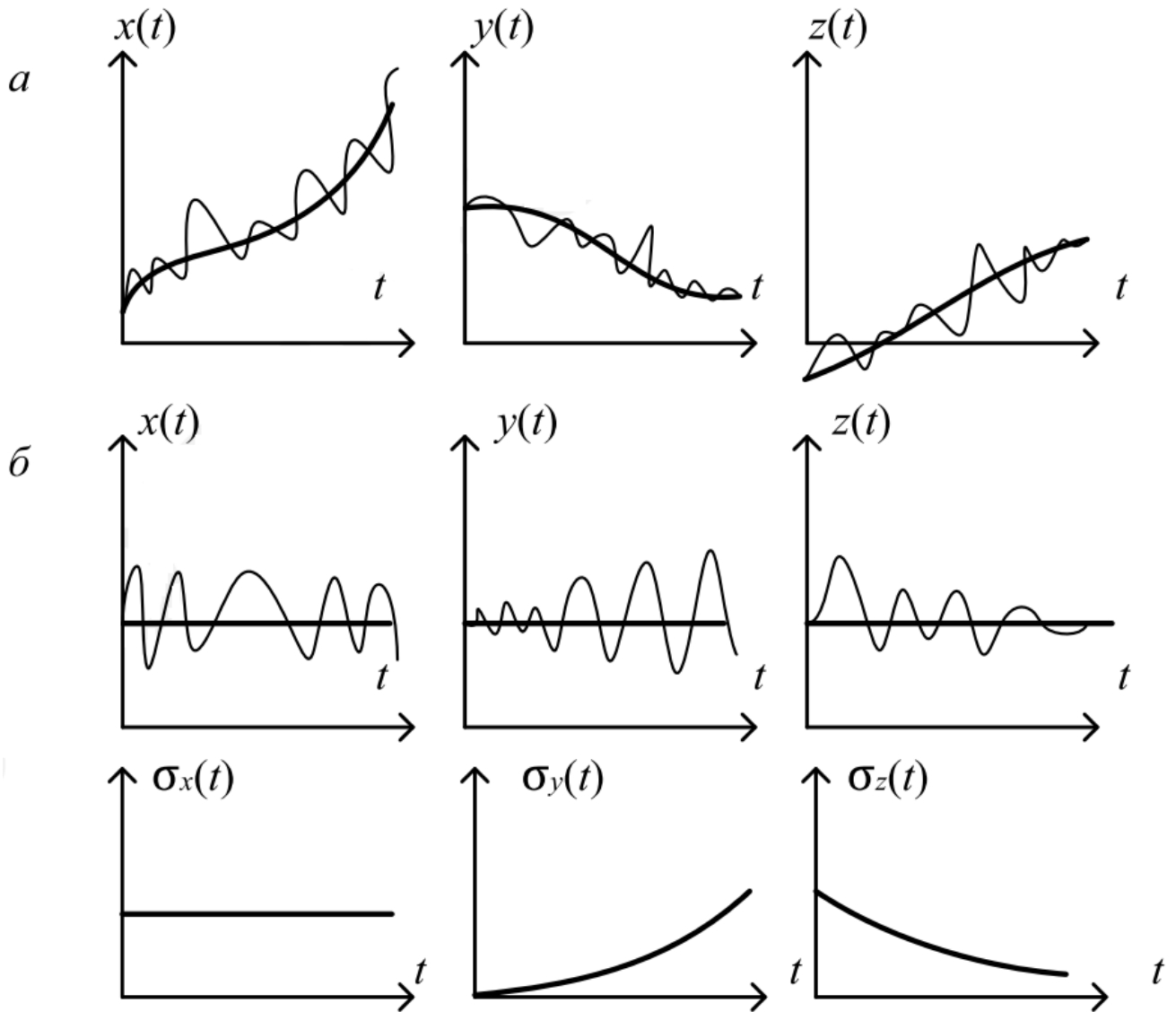


Рисунок 5 – Реализации случайных процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Знание двумерной плотности вероятности позволяет ввести понятие ковариационной и корреляционной функций случайного процесса.

Ковариационная функция случайного процесса вводится как *среднее значение произведения двух значений случайной величины X_1 и X_2* в сечениях, которые находятся на расстоянии τ друг от друга. Процедура усреднения для двумерных процессов характеризуется использованием двумерного интеграла и двумерной плотности вероятности:

$$K(t_1, t_2) = \overline{[m(t_1)][m(t_2)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X(t_1)][X(t_2)]p(X_1, X_2, t_1, t_2)dX_1dX_2. \quad (12)$$

При $\tau=0$ ковариационная функция положительна, принимает максимальное значение и численно равна среднему квадрату случайного процесса.

Важнейшей характеристикой случайного процесса является двумерный центральный момент второго порядка – **корреляционная функция** случайного процесса $X(t)$, определяемая следующим образом:

$$R(t_1, t_2) = \overline{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)] p(X_1, X_2, t_1, t_2) dX_1 dX_2. \quad (13)$$

Функция корреляции есть математическое ожидание произведения двух сечений центрированного случайного процесса. Эта функция характеризует степень статистической связи случайных величин в сечениях $t=t_1$, $t=t_2$.

Корреляционная функция отличается от ковариационной на постоянную величину, равную квадрату математического ожидания. Для центрированного случайного процесса ковариационная и корреляционная функции совпадают.

В случае $t_1=t_2$ функция корреляции является дисперсией:

$$R(t_1, t_2) = D(t) = \sigma^2(t). \quad (14)$$

При $\tau=0$ корреляционная функция положительна, принимает максимальное значение и численно равна дисперсии случайного процесса.

3.2 Свойства случайных процессов

3.2.1 Стационарность

Случайные процессы с одинаковыми статистическими характеристиками во всех сечениях называются **стационарными случайными процессами**. Вероятностные характеристики стационарных процессов не меняются при изменении начала отсчета времени.

Различают стационарные случайные процессы в **узком** и **широком** смысле. Процесс является стационарным в узком смысле, если любая n -мерная плотность вероятности не зависит от временного сдвига τ .

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание m и дисперсия σ^2 не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от $\tau=t_2-t_1$. Для такого процесса

$$R(t_1, t_2) = R(\tau). \quad (15)$$

Если процесс стационарен в узком смысле, то он является стационарным в широком смысле. Обратное утверждение не верно.

Функция корреляции стационарного случайного процесса является **четной**:

$$R(\tau) = R(-\tau). \quad (16)$$

Модуль функции корреляции стационарного случайного процесса максимален при $\tau=0$:

$$|R(\tau)| = R(0) = \sigma^2. \quad (17)$$

Нормированная функция корреляции определяется следующим образом:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}; \quad r(0) = 1. \quad (18)$$

Часто корреляционные функции случайных процессов в системах связи имеют вид, показанный на рисунке 6.

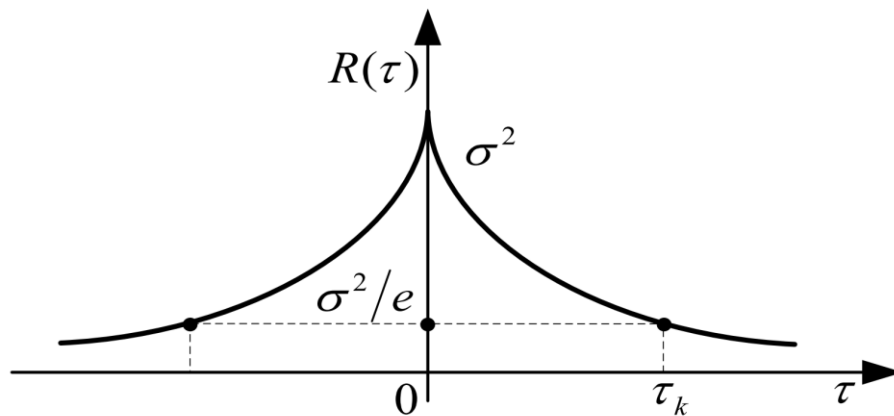


Рисунок 6 – Корреляционная функция случайных процессов

Интервал времени τ_k , на котором корреляционная функция, т.е. величина связи между значениями случайного процесса, уменьшается в M раз, называется **интервалом** или **временем корреляции** случайного процесса. Обычно $M=10$ или $M=e$. Можно сказать, что значения случайного процесса, отличающиеся по времени на интервал корреляции, слабо связаны друг с другом.

Таким образом, *знание корреляционной функции позволяет судить о скорости изменения случайного процесса.*

3.2.2 Эргодичность

Среди всех стационарных случайных процессов наиболее удобны для анализа (особенно аппаратного) так называемые **эргодические процессы**. **Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при нахождении его моментных функций усреднение по статистическому**

ансамблю можно заменить усреднением по времени для достаточно длительной реализации.

То есть для определения характеристик процесса операция усреднения выполняется над единственной реализацией $x(t)$ длительностью T . Таким образом, статистические характеристики эргодических процессов, полученные усреднением **по ансамблю** возможных реализаций, не отличаются от характеристик, полученных усреднением во времени в пределах **одной** реализации. Свойства случайных процессов можно проиллюстрировать рисунком 7.

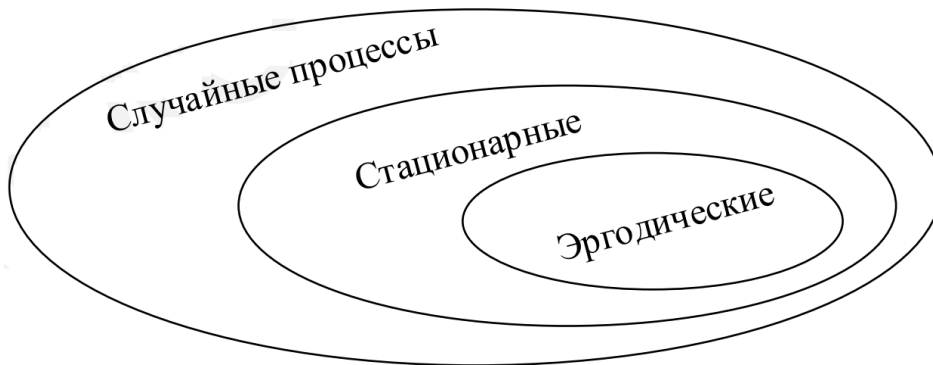


Рисунок 7 – Свойства случайных процессов

Тогда математическое ожидание эргодического случайного процесса, являющееся постоянной составляющей выбранной реализации, определяется по формуле:

$$m = X(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (19)$$

Дисперсия эргодического случайного процесса определяется как

$$\sigma^2 = \overline{[X(t) - m]^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - m]^2 dt = X^2(t) - m^2. \quad (20)$$

Значение $X^2(t)$ есть мощность реализации, величина m^2 – мощность постоянной составляющей. Следовательно, дисперсия является мощностью переменной (флуктуационной) составляющей эргодического процесса.

Корреляционная функция эргодического случайного процесса определяется по формуле:

$$R(\tau) = \overline{[X(t) - m][X(t + \tau) - m]}. \quad (21)$$

Чтобы случайный процесс, стационарный в широком смысле, являлся эргодическим, достаточно стремление к нулю функции корреляции при временном сдвиге $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0. \quad (22)$$

Для **дискретной** эргодической случайной величины математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$m = \sum_i x_i P_i; \quad (23)$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - m)^2 P_i. \quad (24)$$

Для **непрерывной** эргодической случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют следующий вид:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx; \quad (25)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot p(x) dx. \quad (26)$$

Любая характеристика эргодического случайного процесса может быть получена путем соответствующего усреднения по времени (на интервале бесконечной протяженности) произвольной реализации этого процесса.

Периодические колебания со случайной начальной фазой, распределенной равномерно в пределах периода, являются эргодическими случайными процессами. Равновероятные значения фазы гарантируют одинаковое «поведение» случайного процесса в любой точке оси времени, т.е. стационарность сигнала. А тот факт, что реализации отличаются друг от друга лишь временным смещением, которое при усреднении по времени на бесконечном интервале теряет свою значимость, позволяет утверждать, что все подобные сигналы – эргодические.

3.3 Функции корреляции двух случайных процессов

Часто необходимо установить степень статистической связи между двумя стационарными случайными процессами $X(t)$ и $Y(t)$. Поэтому вводят понятие взаимной функции корреляции этих процессов:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{[X(t_1) - m_x][Y(t_2) - m_y]}; \quad (27)$$

$$R_{yx}(t_1, t_2) = \overline{[Y(t_1) - m_y][X(t_2) - m_x]}. \quad (28)$$

Говорят, что случайные процессы стационарно связаны, если функции

$R_{xy}(t_1, t_2)$ и $R_{yx}(t_1, t_2)$ зависят не от аргументов t_1 и t_2 , а от разности $\tau = t_2 - t_1$. Тогда

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau). \quad (29)$$

Рассмотрим статистически независимые случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$. Тогда для мгновенных значений $X = X(t)$ и $Y_\tau = Y(t + \tau)$ двумерная совместная плотность вероятности равна

$$P(X, Y_\tau) = P(X)P(Y_\tau). \quad (30)$$

Следовательно,

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)P(X)dX \int_{-\infty}^{\infty} (Y_\tau - m_y)P(Y_\tau)dY_\tau = 0. \quad (31)$$

Таким образом, статистически независимые случайные процессы некоррелированы. Обратное утверждение верно не всегда.

Рассмотрим примеры статистических характеристик случайных процессов.

На рисунке 8 изображено синусоидальное колебание с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой.

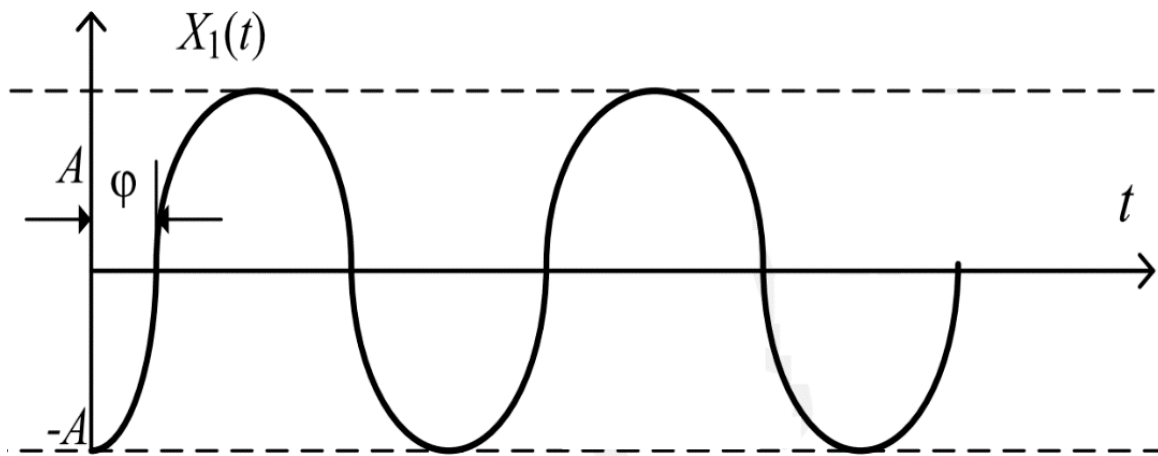


Рисунок 8 – Реализация синусоидального колебания с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой

Гармоническое колебание $X(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$, имеющее одинаковую амплитуду A и частоту ω_0 , но случайную начальную фазу φ , которая может принимать значения в интервале от $-\pi$ до $+\pi$, имеет плотность вероятности мгновенных значений x :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, & \text{при } -A \leq x \leq A; \\ 0 & \text{при } x < -A, \quad x > A. \end{cases} \quad (32)$$

График плотности вероятности данного процесса представлен на рисунке 8. Чем больше A , тем кривая ниже и шире

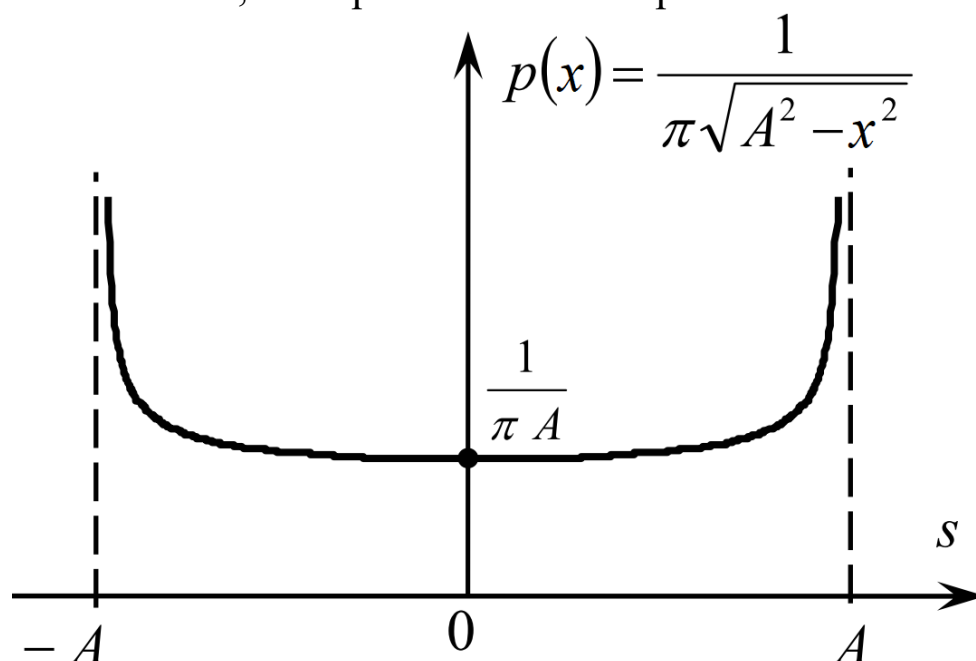


Рисунок 9 – Плотность вероятности гармонического сигнала со случайной начальной фазой

Нормальный (гауссов) случайный процесс занимает особое место в теории электрической связи. Это обусловлено следующими особенностями этого процесса:

1) в природе большинство процессов либо нормальные, либо близки к нормальному;

2) согласно **центральной предельной теореме**, плотность вероятности суммы приближается к нормальной с увеличением количества слагаемых, вне зависимости от того, какой вид имеют плотности вероятности отдельных слагаемых;

3) при прохождении нормальных случайных сигналов через линейные цепи процесс остается нормальным.

Одномерная плотность вероятности нормального процесса определяется выражением:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (33)$$

где m и σ – постоянная составляющая (математическое ожидание) и средняя мощность флуктуационной составляющей одной реализации случайного процесса (дисперсия).

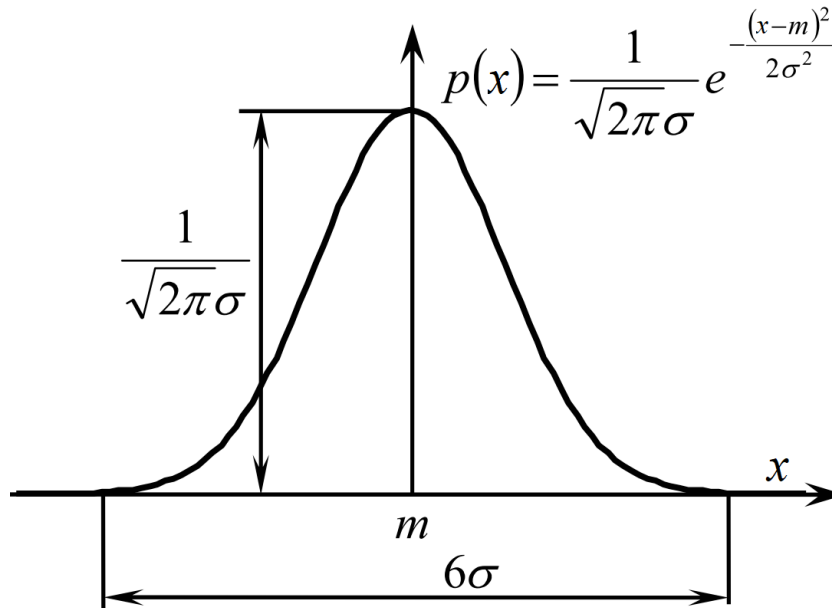


Рисунок 10 – Одномерная плотность вероятности нормального случайного процесса

Рассмотрим процесс с нулевым средним ($m=0$) и определим для этого случая вероятность попадания случайной величины, распределенной по закону Гаусса, в интервал значений от a до b :

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (34)$$

Проведем замену переменной $y = x / \sigma$. Тогда получим:

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{a/\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (35)$$

Интеграл вида

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \quad (36)$$

называют **интегралом вероятности (интегралом Лапласа)**. Он позволяет рассчитать вероятность попадания случайной безразмерной величины y в интервал значений $0 < y < u$.

Рассчитаем вероятность попадания случайной величины x в симметричный интервал, положив $a = -b$, получаем:

$$P(-b < x < b) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right).$$

Результаты расчета вероятности по этой формуле для различных интервалов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты расчета вероятности

Интервал	Вероятность
$-\sigma \dots \sigma$	0,683
$-2\sigma \dots 2\sigma$	0,954
$-3\sigma \dots 3\sigma$	0,997

Из таблицы следует, что в интервал значений $\pm 3\sigma$ при нормальном законе распределения попадает 99,7% значений случайной величины.

Другим законом распределения вероятности случайного процесса является **равномерный закон**. Это такой закон распределения, плотность вероятности которого равномерна в интервале допустимых значений ($x_{\min}$, $x_{\max}$). При этом вероятность попадания случайной величины в любые равные промежутки в интервале ($x_{\min}$, $x_{\max}$) одинакова, а за пределы этого интервала – равна нулю. Из приведенного определения следует, что аналитическое выражение для плотности вероятности случайной величины, распределенной по равномерному закону, имеет следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}}, & \text{при } x_{\min} < x < x_{\max}; \\ 0, & \text{при } x < x_{\min}; \ x > x_{\max}. \end{cases} \quad (37)$$

График плотности вероятности равномерного закона приведен на рисунке 11.

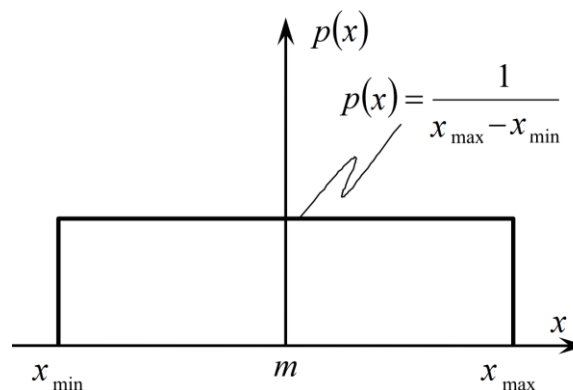


Рисунок 11 – Плотность вероятности равномерного закона распределения

Параметрами равномерного закона является минимальное $x_{\min}$ и максимальное $x_{\max}$ значение случайной величины. Среднее значение, дисперсия и СКО процесса с таким законом распределением определяется как:

$$m = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x dx = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}; \quad (38)$$

$$D = \frac{(x_{\max} - x_{\min})^2}{12}; \quad (39)$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}. \quad (40)$$

Рассмотрим случайный процесс, представляющий собой сумму гармонического процесса и гауссовского шума. В этом случае реализация стационарного эргодического случайного процесса имеет вид $s(t)=x(t)+n(t)$, где $x(t)$ – гармонический процесс $x(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$, а $n(t)$ гауссовский случайный шум.

Плотность вероятности этого процесса равна свертке плотностей слагаемых, задаваемых формулами (32) и (33).

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (41)$$

Введя нормированную случайную переменную $\overset{\circ}{x} = x/\sigma$ и обозначив через $a = A/\sigma$ величину, характеризующую отношение сигнал/шум по напряжению, получим окончательную формулу:

$$w(\overset{\circ}{x}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi e^{-\frac{1}{2}(\overset{\circ}{x}-a\cos\psi)^2} d\psi. \quad (42)$$

где $\psi = \omega_0 t + \varphi$.

Графики этой плотности вероятности для нескольких значений параметра a приведены на рисунке 12.

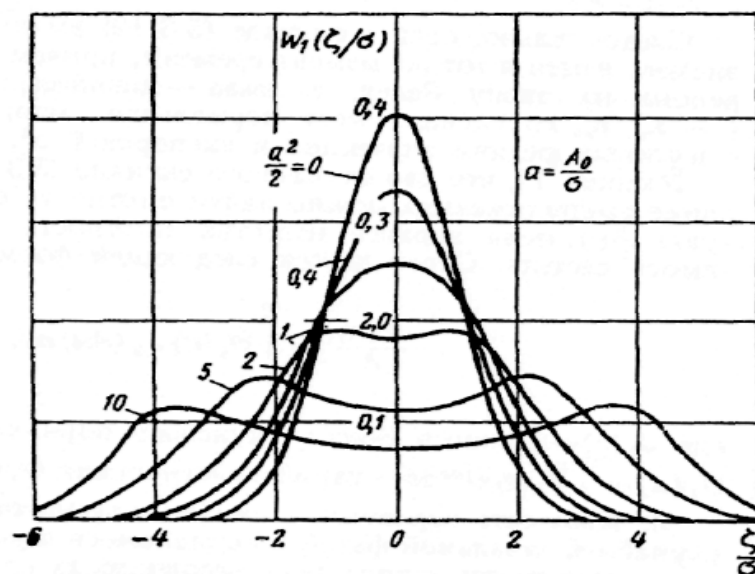


Рисунок 12 – Плотность вероятности суммы нормального шума и гармонического сигнала со случайной начальной фазой.

3.4 Спектральный анализ случайных процессов

Каждая из реализаций случайного процесса представляет собой детерминированный сигнал, поэтому можно определить спектральную плотность отдельных реализаций. Очевидно, что различным реализациям соответствуют различные спектры. Из-за случайности и независимости начальных фаз составляющих спектра усреднение спектральной плотности по ансамблю реализаций приведет к нулевому значению спектральной плотности. Поэтому для случайных процессов бессмысленно говорить о спектральной плотности амплитуд, как это делалось для детерминированного сигнала.

В то же время случайный процесс обладает средней мощностью (средний квадрат), которая не зависит от начальных фаз составляющих и распределена по частотному диапазону. Поэтому для случайных процессов вводят понятие: **спектральная плотность средней мощности**. Эта характеристика в некоторой частотной точке $\omega=2\pi f$ представляет собой предел отношения средней мощности, сосредоточенной в полосе частот Δf , охватывающей эту точку, к величине этой полосы при стремлении ее к нулю. Из этого определения следует, что спектральная плотность средней мощности вводится как

$$W(\omega) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta M[x^2]}{\Delta f}, \quad (43)$$

где $\Delta M[x^2]$ – средняя мощность, сосредоточенная в полосе частот Δf .

Спектральную плотность средней мощности называют также **энергетическим спектром** случайного процесса. Из () следует, что энергетический спектр измеряется в следующих единицах: $\text{В}^2/\text{Гц}$ или $\text{А}^2/\text{Гц}$.

Энергетический спектр случайного процесса $W(\omega)$ обладает следующими основными свойствами:

- 1) $W(\omega)$ – действительная и неотрицательная функция частоты;
- 2) $W(\omega)$ – четная функция аргумента ω .

Между ковариационной функцией и энергетическим спектром случайного стационарного процесса имеется взаимосвязь, которая определяется **теоремой Винера-Хинчина**.

Теорема: энергетический спектр и ковариационная функция случайного стационарного процесса связаны парой преобразований Фурье:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau; \quad (44)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (45)$$

Для процесса с нулевым средним ($m=0$) вместо ковариационной функции $K(\tau)$ в (44) и (45) можно использовать корреляционную функцию $R(\tau)$, поскольку в этом случае эти функции совпадают.

Из теоремы Винера-Хинчина вытекает важное свойство: **чем меньше интервал корреляции случайного процесса, тем шире его спектр.**

Белый шум – это случайный процесс, энергетический спектр которого равномерен во всей полосе частот, то есть

$$W(\omega) = W_0 = \text{const}. \quad (46)$$

Определим корреляционную функцию белого шума:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau). \quad (47)$$

Таким образом корреляционная функция представляет собой δ -функцию с весовым коэффициентом W_0 (рисунок 13).

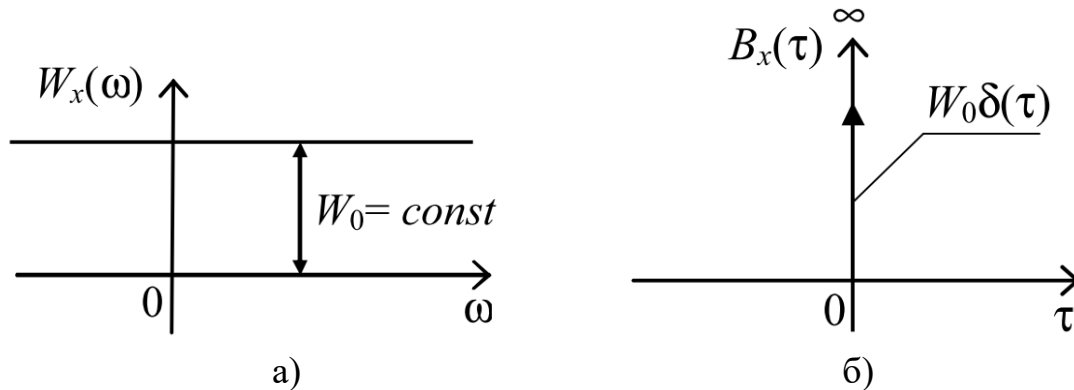


Рисунок 13 – Энергетический спектра (а) и корреляционная функция (б) белого шума

Определим дисперсию белого шума:

$$D = R(0) = \infty. \quad (48)$$

Таким образом, средняя мощность белого шума равна бесконечности, а это говорит о невозможности физической реализации такого процесса.

Реальные процессы обладают энергетическими спектрами, которые убывают с ростом частоты. Модель белого шума используют в том случае, если ширина спектра шума существенно больше полосы пропускания устройства, на которое воздействует этот шум.

Широкополосный шум – это случайный процесс, энергетический спектр которого существенно отличен от нуля в полосе частот от $-\omega_1$ до ω_1 ($\omega_1 = 2\pi f_1$), а за пределами этой полосы – быстро убывает, стремясь к нулю. Такой шум можно получить на выходе ФНЧ, если на его вход подать белый шум.

На рисунке 14 изображен энергетический спектр идеального широкополосного шума, который имеет П – образную форму. Аналитическое выражение для такого спектра имеет вид:

$$W(\omega) = \begin{cases} W_0 = const, & \text{при } |\omega| < \omega_1; \\ 0, & \text{при } |\omega| > \omega_1. \end{cases} \quad (49)$$

Определим корреляционную функцию этого процесса

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} W_0 \cos(\omega\tau) d\omega = 2W_0 f_1 \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1 \tau}. \quad (50)$$

График нормированной корреляционной функции широкополосного шума изображен на рисунке 14.

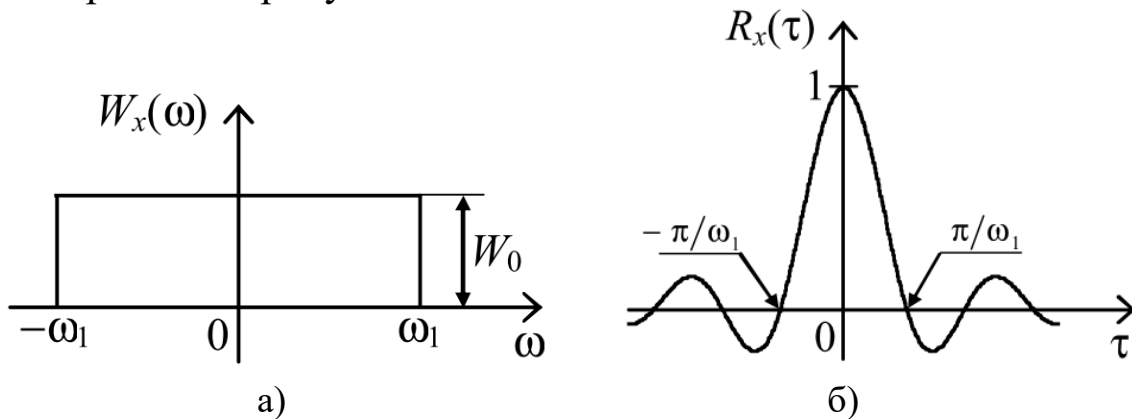


Рисунок 14 – Энергетический спектра (а) и корреляционная функция (б) широкополосного шума

Корреляционная функция с ростом τ немонотонно убывает, стремясь к нулю.

Интервал корреляции процесса приблизительно соответствует ширине центрального лепестка корреляционной функции: $\tau = 2\pi/\omega_1 = 1/f_1$. То есть, с расширением спектра (увеличением ω_1) интервал корреляции уменьшается.

Узкополосный шум – это случайный процесс, энергетический спектр которого существенно отличен от нуля в полосе частот $\Omega=2\pi F_1$ в районе частот $\pm\omega_0$, а за пределами этой полосы быстро уменьшается, стремясь к нулю. Причем выполняется следующее условие: $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$.

Такой шум можно получить на выходе полосно - пропускающего узкополосного фильтра, если на его вход подать белый шум.

На рисунке 12 изображен энергетический спектр идеального узкополосного шума. Спектр имеет П-образную форму. Аналитическая запись энергетического спектра такого процесса имеет вид:

$$W(\omega) = \begin{cases} W_0 = \text{const}, & \text{при } \omega_0 - \Omega_1/2 < |\omega| < \omega_0 + \Omega_1/2; \\ 0, & \text{при } |\omega| < \omega_0 - \Omega_1/2, \quad |\omega| > \omega_0 + \Omega_1/2. \end{cases} \quad (51)$$

Определим корреляционную функцию такого шума:

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Omega_1/2}^{\omega_0 + \Omega_1/2} W_0 \cos(\omega\tau) d\omega = 2W_0 f_1 \frac{\sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1\tau/2} \cos(\omega_0\tau). \quad (52)$$

В соответствии с (52) корреляционная функция представляет собой высокочастотный процесс с частотой осцилляций ω_0 и медленным изменением огибающей. На рисунке изображена нормированная корреляционная функция узкополосного процесса. Исходя из этого, можно считать, что узкополосный шум представляет собой высокочастотное колебание со случайным изменением амплитуды и частоты осцилляций. Причем средняя частота осцилляций равна ω_0 .

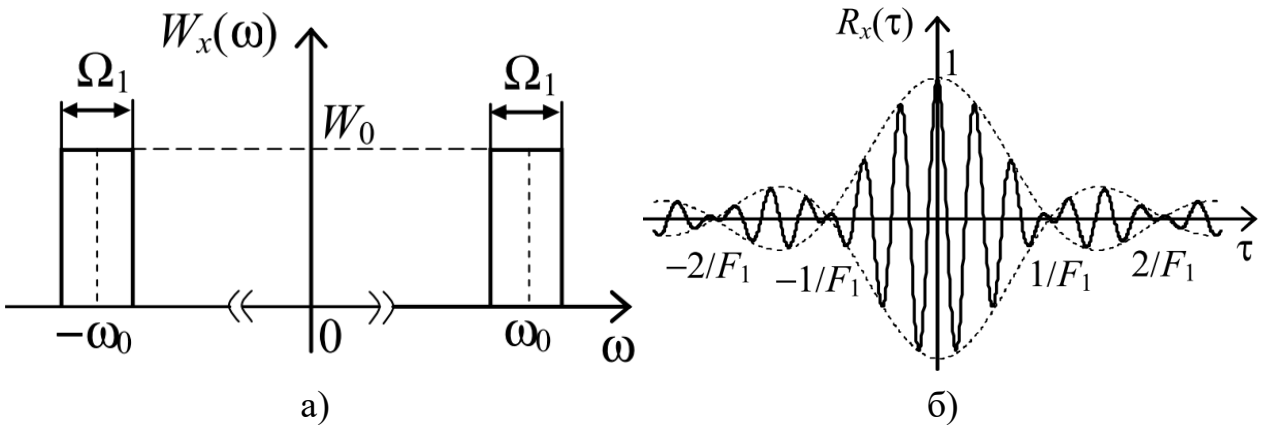


Рисунок 15 – Энергетический спектра (а) и корреляционная функция (б) узкополосного шума

Запишем выражение для реализации узкополосного процесса

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)), \quad (53)$$

где $A(t)$, $\theta(t)$ – огибающая и начальная фаза процесса, которые являются случайными медленно изменяющимися функциями времени.

Таким образом, узкополосный шум представляет собой высокочастотное колебание со случайной амплитудной и угловой модуляциями. Реализация такого процесса представлена на рисунке 16.

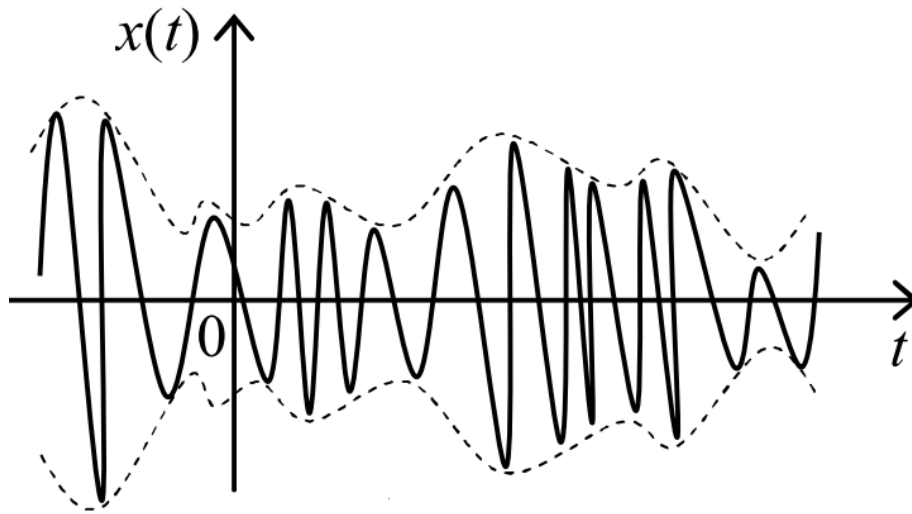


Рисунок 16 – Узкополосный шум

Огибающая и начальная фаза этого процесса изменяются медленно по сравнению с изменением мгновенного значения.

Мгновенное значение узкополосного шума подчиняется нормальному закону распределения. Исходя из этого, запишем выражение для одномерной плотности вероятности мгновенного значения узкополосного шума

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (54)$$

При этом плотность вероятности огибающей узкополосного процесса соответствует закону распределения Рэлея, а начальной фазы – равномерному закону:

$$p(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)}; \quad (55)$$

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{при } |\theta| < \pi; \\ 0, & \text{при } |\theta| > \pi. \end{cases} \quad (56)$$

Графики плотностей вероятности огибающей и начальной фазы узкополосного случайного процесса показаны на рисунке 17.

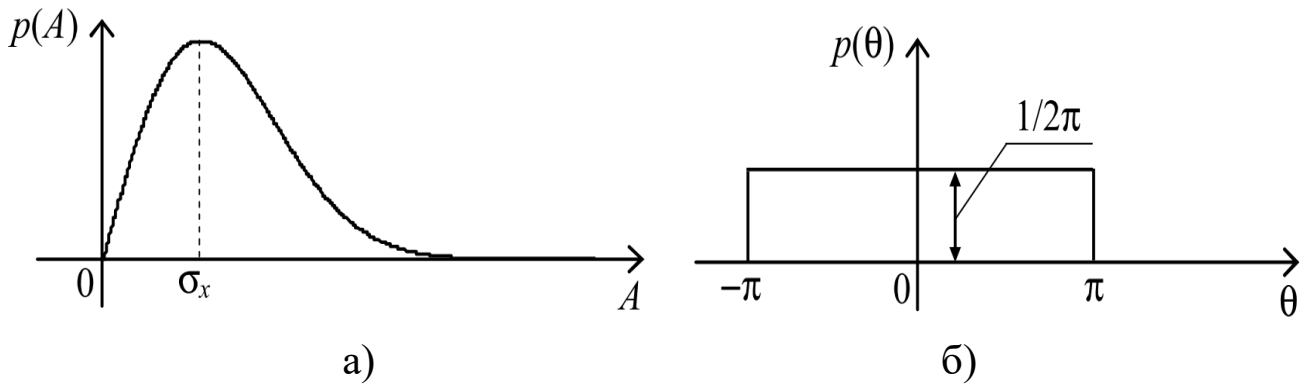


Рисунок 17 – Плотность вероятности огибающей (а) и начальной фазы (б) узкополосного случайного процесса

Знание $p(A)$ и $p(\theta)$ позволяет определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение огибающей и начальной фазы узкополосного шума:

$$m_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma; \quad D_A = \frac{\sigma^2}{2}; \quad \sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \quad (57)$$

3.5 Случайные процессы различных типов

До этого рассмотрены непрерывные случайные процессы. Кроме непрерывных существуют и другие типы случайных процессов. Если стохастическая $X(t)$ принимает континуум значений, а значения параметра t выбираются из дискретного множества $t_1, t_2, \dots$ (которое может быть конечным или бесконечным), то $X(t)$ называется **непрерывной случайной последовательностью** (рисунок 18).

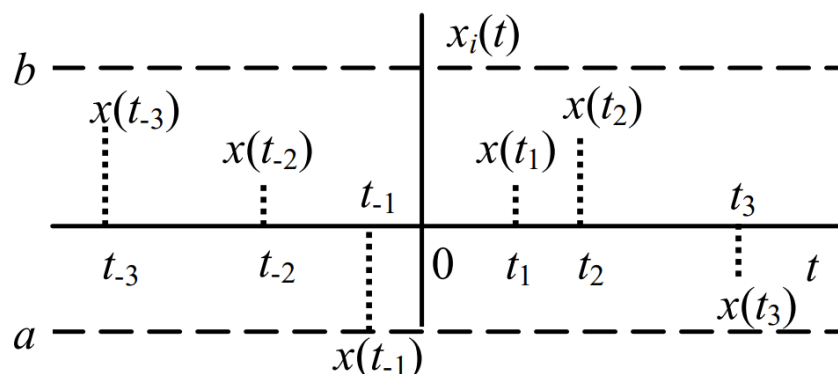


Рисунок 18 – Непрерывная случайная последовательность

Когда значения $X(t)$ выбираются из дискретного множества значений $X(t_k)_1, X(t_k)_2, \dots$ – в дискретные моменты t_k . Такие процессы часто называют **дискретными случайными последовательностями** (рисунок 19).

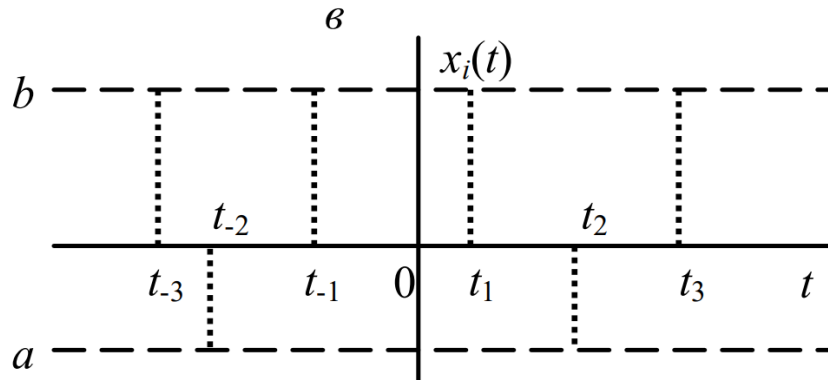


Рисунок 19 – Дискретная случайная последовательность

Существует случай, когда $X(t)$ может принимать множество дискретных значений, а множество t изменяется непрерывно. Таким образом, одно из дискретного множества возможных значений сохраняется в течении периода различной длительности. Такие процессы называются **дискретными случайными процессами** (рисунок 20).

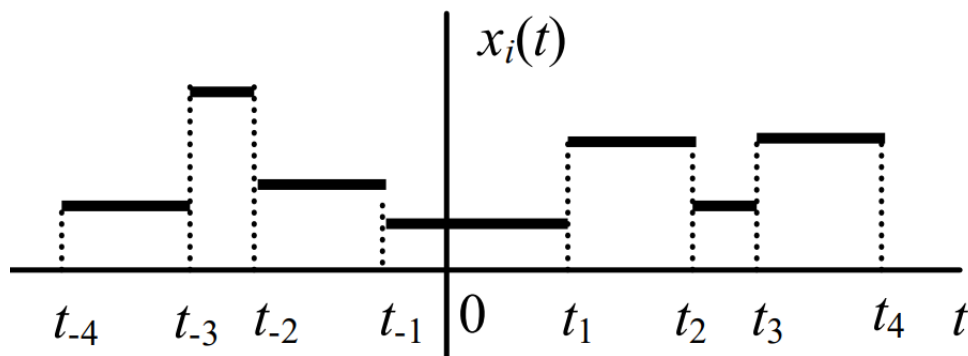


Рисунок 20 – Дискретный случайный процесс

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Исследование гармонического сигнала со случайной начальной фазой

Проведите калибровку осциллографа. Для этого соедините вход вольтметра, работающего в режиме измерения переменного напряжения, с гнездом «1 кГц» в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ. Ручкой регулятора выхода генератора установите напряжение 0,707 В. Напомним, что измерительные приборы показывают действующее значение гармонического сигнала: $U_m = \sqrt{2} U = 0,707 \sqrt{2} = 1,0$ В.

Не меняя регулировки выходного напряжения, замените вольтметр осциллографом. Отрегулируйте масштаб усиления осциллографа так, чтобы размах сигнала по вертикали составлял 2 клетки, т. е. амплитуда $a=1$

клетке. На этом калибровка закончена и в дальнейшем её менять не следует. Итак, одна клетка на экране осциллографа теперь соответствует 1,0 В.

Зафиксируйте реализацию (осциллограмму) исследуемого сигнала. В случаях, когда исследуется непериодический сигнал, сделать это по осциллографу затруднительно. В этом случае исследуемый сигнал следует подать на гнездо «А» входа ПК на стенде, а затем вызвать программу «ОСЦИЛЛОГРАФ», которая позволяет «остановить» картинку и при необходимости изменить её масштаб.

Соедините вход «А» ПК (он расположен в правой части стенда, внизу) с гнездом генератора «1 кГц». При этом уровень сигнала не менять; $U_m=1,0$ В.

Переведите ПК в режим «ГИСТОГРАММА». В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Пользуясь вольтметром или осциллографом, уменьшите сигнал с выхода генератора «1 кГц» в 2 раза, т.е. установите $U_m=0,5$ В (или $U_d=0,35$ В). В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Задание 2. Исследование аддитивного белого гауссовского шума

Соедините гнездо ГШ со входом осциллографа, установите напряжение шума таким, чтобы максимальная ширина шумовой «дорожки» на экране не превышала 6 клеток. Согласно «правилу трёх сигм» нормального закона это означает, что $6\sigma = 6$ клеток, или $\sigma=1$ клетке, т.е. в соответствии с калибровкой, $\sigma = 1,0$ В.

Соедините вход ПК («А») с гнездом выхода ГШ. В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Контролируя напряжение шума по экрану осциллографа, уменьшите (ручкой выхода ГШ) напряжение шума в 2 раза. При этом σ будет соответствовать половине клетки, т.е. 0,5 В. В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Задание 3. Исследование смеси гармонического сигнала и аддитивного белого гауссовского шума

Подключите осциллограф к выходу сумматора. Подайте на один из входов гармонический сигнал (второй вход свободен). Отрегулируйте (если нарушена предыдущая регулировка) $a=0,5$ клетки ручкой выхода генератора «1 кГц». Затем, отключив сигнал от входа сумматора, на второй его вход подайте шум. Ширина шумовой «дорожки» на экране осциллографа должна быть 3 клетки. При необходимости отрегулируйте выходное напряжение ГШ. Восстановите схему, подключив источник «1 кГц» ко входу сумматора. Таким образом, выставлено соотношение сигнал/шум $a/\sigma=1$. В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Отключив шум, увеличьте сигнал в 2 раза (размах сигнала на экране осциллографа должен быть 2 клетки), а напряжение шума сохраните прежним. Восстановите схему, подключив источник шума к сумматору. Теперь $a/\sigma = 2$. В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

Установите отношение $a/\sigma=3$. В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию сигнала (осциллограмму);
- условия эксперимента.

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответствующую численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Нарисуйте график плотности вероятности любого сигнала. Объясните, что отложено по осям, размерности. Объясните смысл понятия «плотность вероятности».
2. Как практически определить плотность вероятности?
3. Что такое нормальный случайный процесс? Его аналитическая запись.
4. Изобразите график $w(x)$ для нормального закона и его изменения при увеличении или уменьшении σ и m .
5. Как по графику $w(x)$ нормального закона найти математическое ожидание и дисперсию?
6. Как определить вероятность попадания в заданный интервал Δx по:
 - графику плотности вероятности;
 - графику функции распределения.
7. Объясните физический смысл понятий математическое ожидание и дисперсия применительно к сигналам связи?
8. В чём состоит различие стационарных и нестационарных процессов?
9. Дайте определение эргодического случайного процесса?
10. Что такое случайный процесс и его реализация?
11. Что понимается под стационарными случайными процессами? Назовите условие их эргодичности.
12. Назовите свойства корреляционных функций.
13. Покажите взаимосвязь между спектральной плотностью и автокорреляционной функцией стационарной случайной функции.
14. По заданной спектральной плотности процесса вычислите автокорреляционные функции для первой и второй его производных.
15. В каком случае случайный процесс называется стационарным в широком смысле?
16. Дайте определение стационарности в строгом смысле случайного процесса.
17. Приведите определение взаимной стационарности в широком смысле двух случайных процессов.
18. Справедливо ли утверждение «Стационарный в широком смысле случайный процесс стационарен и в строгом смысле»?

19. Верно ли предложение «Стационарный в строгом смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле»?

20. Какой случайный процесс называется эргодическим по математическому ожиданию?

21. Приведите определение эргодичности случайного процесса по ковариационной функции.

22. Дайте определение эргодичности процесса по его дисперсии.

23. Сформулируйте теорему Хинчина, приведите формулу спектрального представления ковариационной функции.

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «**отлично**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «**хорошо**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «**удовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «**неудовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №4

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМЫ И СПЕКТРА СИГНАЛОВ БЕЗИНЕРЦИОННЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

1 Цель работы

– изучение формы и спектра сигналов на выходе резистивной цепи, содержащей нелинейный безинерционный элемент при моно- и бигармоническом воздействии.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- генератор Agilent 33210A (инв. ном. 104.3058)
- комплект соединительных проводов;

Для проведения работы используется сменный блок стенда «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ».

Принципиальная схема исследуемой цепи (рисунок 1) содержит резистивный усилительный каскад на полевом транзисторе. Для формирования этой схемы достаточно переключатель НАГРУЗКА («R» «LC») установить в положение «R». Состояние остальных переключателей макета безразлично (колебательный контур и связанные с ним цепи в данной работе не используются). Источниками входных сигналов служат внутренние генераторы, гнезда и регуляторы выходного напряжения которых расположены в левой части стенда (в блоке «ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ»). Там же находится встроенный диапазонный звуковой генератор. Входные сигналы, подаваемые на любые из трех входов макета (гнезда VX1...VX3), а также напряжение смещения $E_{см}$, через сумматор (Σ) подаются на затвор

полевого транзистора (гнездо КТ1). Сумматор выполнен на операционном усилителе.

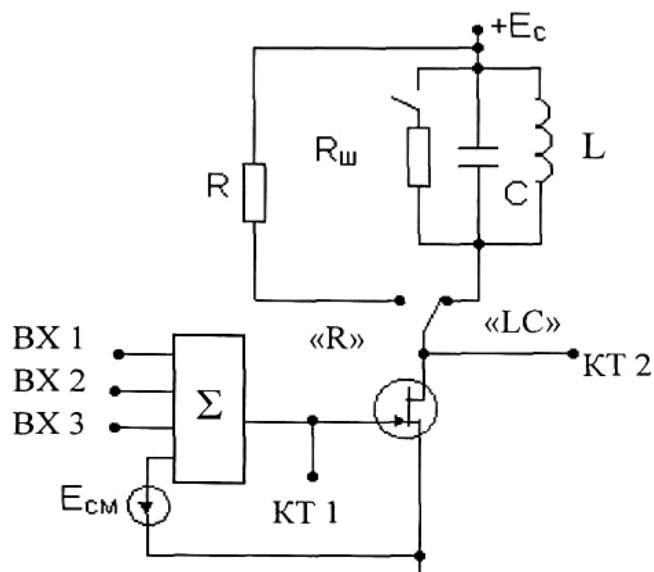


Рисунок 1 – Принципиальная схема исследуемой цепи

Схема сумматора исключает взаимное влияние между входами VX1, VX2 и VX3, что позволяет измерять напряжения каждого источника непосредственно на входе сумматора, не отключая остальные источники. Выходом макета является гнездо КТ2 в цепи стока. Напряжение смещения устанавливается движковым потенциометром в правой части стенда (ручкой $E_{см}$) и контролируется вольтметром, расположенным выше. Для измерения постоянной составляющей тока стока (i_c) там же расположен микроамперметр. Для включения прибора в цепь стока следует нажать кнопку « i_c » в середине сменного блока.

3 Основные теоретические сведения

Электрическая цепь – это совокупность различных устройств и соединяющих их проводников, образующих путь для электрического тока, в которой электромагнитные процессы могут быть описаны с помощью понятий ЭДС, напряжения и тока.

При проектировании большинства устройств возникает необходимость **преобразования спектра полезного сигнала**. К их числу относятся устройства, которые реализуют основные процессы обработки сигналов в системах связи и управления: генерирования и усиления сигналов, детектирования, модуляции, преобразования частоты и др. Изменение спектрального состава сигнала осуществляется с помощью **нелинейных цепей**,

основным свойством которых является *способность обогащать спектр сигнала*. При этом *под обогащением понимается не увеличение количества спектральных составляющих, а появление составляющих с новыми частотами*.

В *нелинейных цепях* параметры некоторых элементов зависят от входных воздействий. Поэтому процессы в таких цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. *Принцип суперпозиции* для нелинейных цепей не применим, так как значения её параметров при поступлении сигнала $s(t) = \sum_i s_i(t)$ отличаются от значений параметров при воздействии каждой составляющей $s_i(t)$ в отдельности.

Существуют *резистивные* и *реактивные* нелинейные элементы, параметры которых (крутизна, сопротивление, емкость, индуктивность) зависят от напряжения и тока.

Основной характеристикой резистивного элемента (диод, транзистор) является *вольт-амперная характеристика* $i(u)$; нелинейной емкости (варикап, конденсатор с сегнетоэлектриком) – *вольт-кулонная характеристика* $q(u)$; нелинейной индуктивности (катушка с ферромагнитным сердечником) – *ампер-веберная характеристика* $\Phi(i)$.

Нелинейность вольт-кулонной и ампер-веберной характеристик приводит в конечном счете к нелинейности вольт-амперных характеристик реактивных нелинейных элементов.

Все нелинейные элементы делятся на две большие группы:

– *инерционные* – те, которые не успевают изменить свою величину в течение одного периода изменения приложенной к нелинейному элементу величины (ток или напряжение);

– *безинерционные* – те, которые изменяют свою величину в весьма широких пределах в течении одного периода изменения входной величины (мгновенное установление реакции вслед за изменением входного воздействия).

В радиотехнических цепях наиболее часто встречаются резистивные нелинейные элементы. Для них наибольший интерес имеют такие параметры вольт-амперной характеристики (ВАХ), как дифференциальная и средняя крутизна.

Дифференциальная крутизна – это крутизна ВАХ в рабочей точке U_0 , определяемая выражением:

$$S(U_0) = \left| \frac{di(u)}{du} \right|_{u=U_0}. \quad (1)$$

Характеризует линейный режим работы нелинейного устройства (в режиме слабых сигналов). При работе на нелинейном участке зависит от рассматриваемого момента времени. **Физический смысл – тангенс угла наклона касательной к ВАХ в данной точке.**

Средняя крутизна – это крутизна ВАК при сильном гармоническом сигнале. Определяется выражением:

$$S_{cp} = \frac{I_1}{E}, \quad (2)$$

где I_1 – амплитуда первой гармонической составляющей тока в резистивном элементе;

E – амплитуда гармонического колебания на входе резистивного элемента.

Характеризует нелинейный режим работы устройства в режиме сильных сигналов и учитывает форму ВАХ в широких пределах.

Характеристики реальных нелинейных элементов, которые определяют обычно с помощью экспериментальных исследований, имеют сложный вид и представляются в виде таблиц или графиков. В то же время для анализа и расчета цепей необходимо аналитическое представление характеристик, т.е. представление в виде достаточно простых функций. Процесс составления аналитического выражения для характеристик, представленных графически или таблично, называется **аппроксимацией**.

При аппроксимации решаются следующие проблемы:

1. Определение области аппроксимации, которая зависит от диапазона изменения входных сигналов.

2. Определение точности аппроксимации. Понятно, что аппроксимация дает приблизительное представление характеристики в виде какого-либо аналитического выражения. Поэтому необходимо количественно оценить степень приближения аппроксимирующей функции к экспериментально определенной характеристике.

Выбор оптимальной аппроксимации зависит от вида нелинейной характеристики, а также от режима работы нелинейного элемента.

Полиномиальная аппроксимация применяется при малых относительно ширины характеристики амплитудах входного воздействия. При полиномиальной аппроксимации характеристика нелинейного элемента на некотором участке заменяется полиномом n -й степени

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + \dots + a_n \cdot u^n. \quad (3)$$

Для определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ можно использовать **метод выбранных точек**: в соответствии с которым в $(n+1)$ точках, называемых **узлами аппроксимации**, значения полинома совпадали со значениями реальной характеристики (рисунок 2).

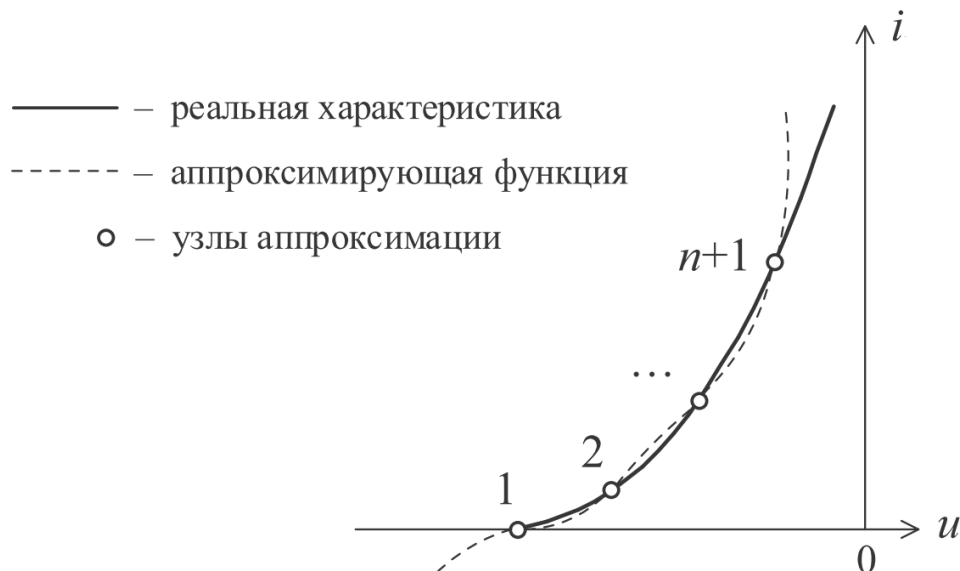


Рисунок 2 – Полиномиальная аппроксимация характеристики
нелинейного полинома

Составив систему из $(n+1)$ уравнений получим:

[illegible]

Решив ее, получим значения коэффициентов полинома.

Необходимо также учитывать, что функция (3) описывает характеристику лишь на определенном участке от $u(1)$ до $u(n+1)$, при выходе за пределы которого точность аппроксимации значительно снижается.

Одним из наиболее распространенных способов аппроксимации является *аппроксимация степенным полиномом, основанная на разложении нелинейной ВАХ $i(u)$ в ряд Тейлора, сходящийся в окрестностях рабочей точки U_0 :*

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots, \quad (5)$$

где коэффициенты $a_i, i = 1, \dots, n$ определяются выражением:

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n i}{du^n} \Big|_{u=U_0} . \quad (6)$$

Коэффициент a_1 представляет собой крутизну характеристики в рабочей точке $u = U_0$, a_2 – первую производную крутизны (с коэффициентом $1/2!$), a_3 – вторую производную крутизны (с коэффициентом $1/3!$) и т.д. При заданной форме ВАХ величины коэффициентов a_i , $i = 1, \dots, n$ существенно зависят от положения рабочей точки U_0 на характеристике. Количество членов разложения n зависит от заданной точности расчётов. **Чем больше членов ряда, тем точнее аппроксимация.**

Степенную аппроксимацию используют при анализе работы нелинейных цепей при воздействии относительно малых внешних воздействий.

При больших амплитудах сигнала используют **кусочно-линейную аппроксимацию** нелинейной характеристики.

Данный способ основан на приближённой замене реальной характеристики отрезками прямых линий с различными наклонами (рисунок 3).

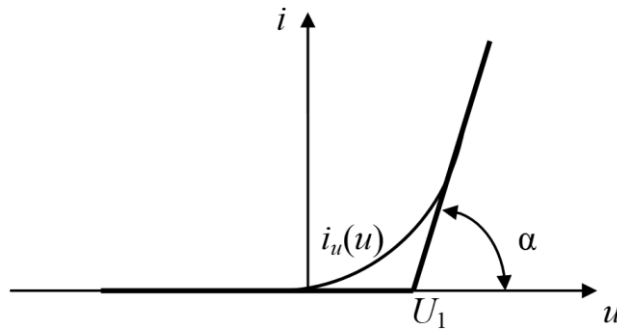


Рисунок 3 – Кусочно-линейная аппроксимация

Аппроксимация определяется двумя параметрами – напряжением начала аппроксимированной характеристики U_1 и крутизной S , имеющей размерность проводимости. Математическая форма аппроксимированной ВАХ имеет вид:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & u \leq U_1; \\ S(u - U_1), & u \geq U_1, \end{cases} \quad (7)$$

где U_1 – напряжение отсечки.

Режим работы усилителей с нелинейной ВАХ в зависимости от напряжения входного сигнала можно условно разделить на **квазилинейный** (режим слабых сигналов) и **нелинейный** (режим сильных сигналов).

На рисунке 4 представлен первый режим работы, при котором напряжение входного сигнала $u(t)$ не выходит за пределы точки U_1 и ВАХ $i(u)$ и удовлетворительно аппроксимируется степенным полиномом (3).

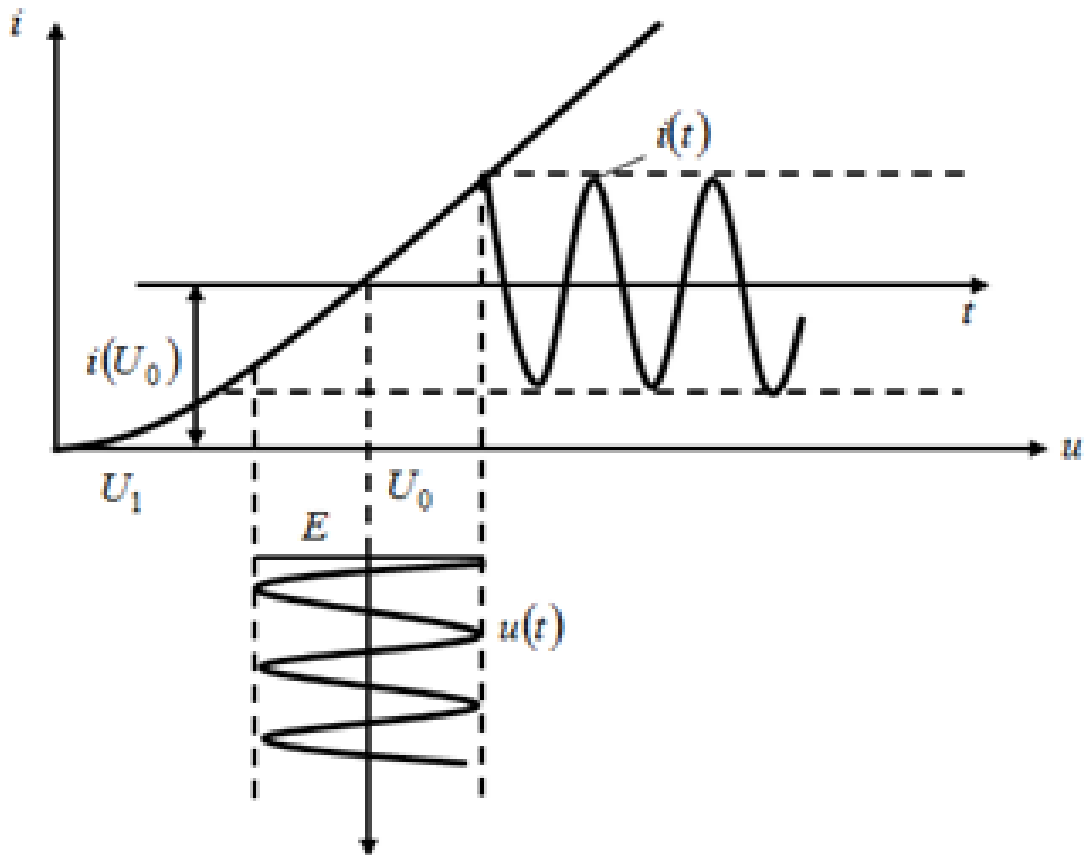


Рисунок 4 – Слабо нелинейный режим работы усилителя

Подставив в (3) $u(t) = E \cos \omega_1 t$, получим:

$$i(t) = i(U_0) + a_1 E \cos \omega_1 t + a_2 E^2 \cos^2 \omega_1 t + a_3 E^3 \cos^3 \omega_1 t \dots \quad (8)$$

Воспользуемся известными формулами для степеней тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); & \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x; \\ \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x; & \cos^5 x &= \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

тогда выражение (8) приводится к виду:

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos \omega_1 t + I_2 \cos 2\omega_1 t + I_3 \cos 3\omega_1 t + \dots, \quad (9)$$

где I_0, I_1, I_2, I_3 – соответственно амплитуда постоянной составляющей и гармоник основной частоты;

$$I_0 = i(U_0) + \frac{1}{2} a_2 E^2 + \frac{3}{8} a_4 E^4 + \dots; \quad (10)$$

$$I_1 = a_1 E + \frac{3}{4} a_3 E^3 + \frac{5}{8} a_5 E^5 + \dots; \quad (11)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}a_2E^2 + \frac{1}{8}a_4E^4 + \dots \quad (12)$$

$$I_3 = \frac{1}{4}a_3E^3 + \frac{5}{16}a_5E^5 + \dots \quad (13)$$

Из выражения (9) видны последствия нелинейности ВАХ при усилении гармонического сигнала:

– амплитуда I_1 первой гармоники (основной частоты ω_1) связана с амплитудой входного сигнала E нелинейным соотношением, обусловленным нечётными степенями аппроксимирующего ВАХ полинома (11);

– ток $i(t)$ содержит высшие гармоники с частотами $n\omega_1$, кратными основной частоте ω_1 . Постоянная составляющая и чётные гармоники (с частотами $2\omega_1, 4\omega_1, \dots$) обусловлены чётными степенями, а нечётные гармоники (с частотами $3\omega_1, 5\omega_1, \dots$) – нечётными степенями полинома;

– номер гармоники в спектре тока не может быть выше степени аппроксимируемого полинома.

Пользуясь полученными результатами и структурной схемой нелинейного устройства, можно предложить общую идею построения некоторых радиотехнических устройств. Так, если фильтр нелинейного устройства с квадратичной характеристикой настроить на частоту первой гармоники тока (на частоту входного сигнала), то получится схема усилителя мощности. Если фильтр нелинейного устройства настроить на частоту второй гармоники тока, то получится схема удвоителя частоты сигнала. Если в качестве фильтра использовать фильтр низких частот с АЧХ, обеспечивающей подавление всех гармоник, кроме нулевой, то получится схема квадратичного детектора.

Свойство нелинейной цепи обогащать спектр сигнала хорошо проявляется, если сигнал представляет собой сумму некоторого числа гармонических колебаний с различными частотами.

Предположим, что рабочий участок характеристики нелинейного элемента описывается полиномом второй степени

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2.$$

На вход поступает бигармонический сигнал, формула которого совместно с напряжением рабочей точки имеет вид:

$$u(t) = U_0 + E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t.$$

Подставив данное выражение в формулу степенного полинома, получаем:

$$i(u) = a_0 + a_1(E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t) + a_2(E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t)^2.$$

Выполним элементарные преобразования:

$$\begin{aligned}
 i(u) &= a_0 + a_1 E_1 \cos \omega_1 t + a_1 E_2 \cos \omega_2 t + a_2 E_1^2 \cos^2 \omega_1 t + a_2 E_2^2 \cos^2 \omega_2 t + \\
 &+ 2a_2 E_1 E_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t; \\
 i(u) &= \left(a_0 + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 + \frac{1}{2} a_2 E_2^2 \right) + a_1 E_1 \cos \omega_1 t + a_1 E_2 \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 \cos 2\omega_1 t + \\
 &+ \frac{1}{2} a_2 E_2^2 \cos 2\omega_2 t + a_2 E_1 E_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)t + a_2 E_1 E_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Из полученного выражения (14) видно, что в спектре тока нелинейного элемента кроме постоянной составляющей (слагаемое в скобках) и гармоник с частотами, кратными частотам входного воздействия, имеются гармоники с комбинационными частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ (рисунок 5).

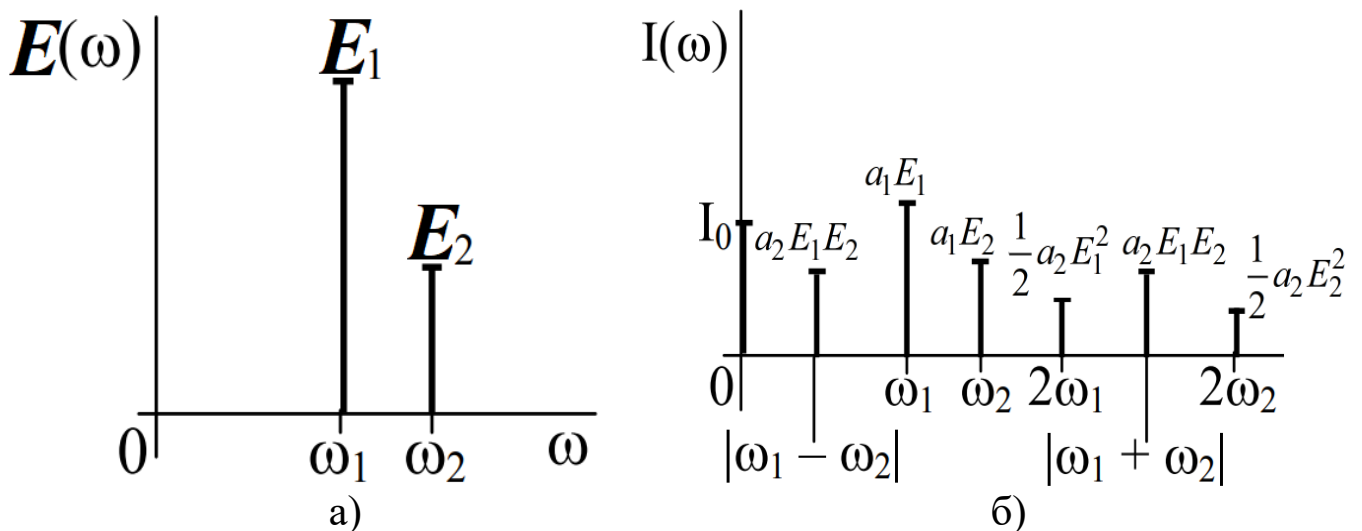


Рисунок 5 – Спектр бигармонического напряжения на входе нелинейного элемента (а) и спектр тока на выходе нелинейного элемента (б)

Таким образом, с помощью нелинейного элемента с такой характеристикой можно построить схему преобразователя частоты. Для этого достаточно использовать в составе нелинейного устройства высокочастотный полосовой фильтр, настроенный на частоту $\omega_1 + \omega_2$ (или на частоту $\omega_1 - \omega_2$). На вход устройства подается гармонический сигнал, частота ω_1 которого должна быть преобразована, и вспомогательный сигнал с частотой ω_2 (сигнал гетеродина).

Работа усилителя во втором (**нелинейном**) режиме характеризуется большой амплитудой входного сигнала E , сдвигом рабочей точки U_0 влево (U_1 – напряжение отсечки) и кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ (рисунок 6, а).

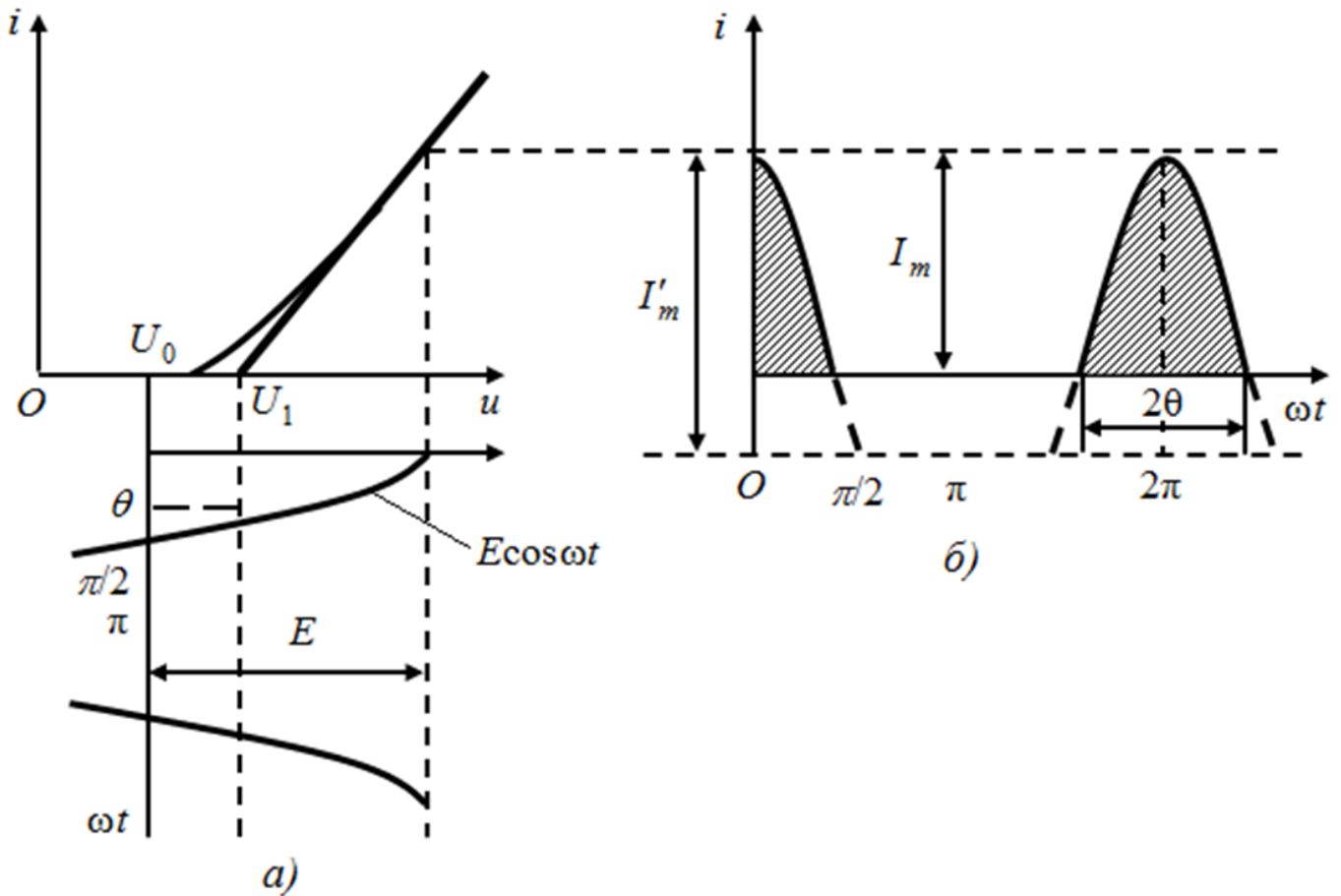


Рисунок 6 – Нелинейный режим работы усилителя

Пусть на вход рассматриваемого элемента поступает гармонический сигнал $s(t) = E \cos \omega_0 t$. Тогда с учётом напряжения рабочей точки входное воздействие на элемент равно

$$u(t) = U_0 + E \cos \omega_0 t.$$

При гармоническом входном сигнале ток $i(t)$ приобретает вид периодической последовательности импульсов, описываемых чётной функцией (рисунок 6, б).

Угол θ , соответствующий изменению тока от максимального значения I_m до нуля, называется **углом отсечки** тока. Длительность импульсов тока равна 2θ (рисунок 6, б).

Максимальное значение тока $i(t)$ равно I_m , а длительность импульсов тока – 2θ . Очевидно, что при фазовом угле θ входное воздействие равно $U_1 = U_0 + E \cos \theta$. Тогда:

$$\cos \theta = \frac{(U_1 - U_0)}{E}. \quad (15)$$

Пользуясь аналитическим выражением для ВАХ, можно записать

$$i(t) = S(U_0 + E \cos \omega_0 t - U_1) \quad \text{при} \quad -\theta \leq \omega t \leq \theta. \quad (16)$$

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$i(t) = SE \left(\cos \omega_0 t - \frac{U_1 - U_0}{E} \right) = SE (\cos \omega_0 t - \cos \theta) \quad \text{при} \quad -\theta \leq \omega t \leq \theta. \quad (17)$$

Определим значение амплитуды тока $i(t)$, т.е. значение I_m . Для этого воспользуемся рисунком 6, б.

$$I_m = S[E - (U_1 - U_0)] = SE \left[1 - \frac{U_1 - U_0}{E} \right] = SE(1 - \cos \theta).$$

Подставив в (17) значение SE , получим математическое выражение для импульсов тока:

$$i(t) = \frac{I_m}{1 - \cos \theta} (\cos \omega_0 t - \cos \theta) \quad \text{при} \quad -\theta \leq \omega t \leq \theta.$$

Ряд Фурье для тока $i(t)$ имеет вид:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t).$$

Коэффициенты ряда, т.е. амплитуды гармонических составляющих, равны

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) dt; \quad I_k = 2 \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \cos(k\omega_0 t) dt.$$

Перепишем данные выражения, выполнив замену переменной $t = \omega_0 t$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega_0 t) d(\omega_0 t); \quad I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) d(\omega_0 t).$$

Пользуясь полученными выражениями, определим амплитуды нулевой и первой гармонических составляющих спектра тока.

Амплитуда нулевой гармоники:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{I_m}{1 - \cos \theta} [\cos(\omega_0 t) - \cos \theta] d(\omega_0 t) = \\ &= \frac{I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} \left[\int_0^{\theta} \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) - \cos \theta \int_0^{\theta} d(\omega_0 t) \right] = \\ &= \frac{I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} (\sin \theta - \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$I_0 = I_m \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}. \quad (18)$$

Амплитуда первой гармоники

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{I_m}{1 - \cos \theta} [\cos(\omega_0 t) - \cos \theta] \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \\
&= \frac{2I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} \left[\int_0^{\theta} \cos^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t) - \cos \theta \int_0^{\theta} \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Учитывая, что $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$, получаем:

$$\int_0^{\theta} \cos^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2}; \quad \cos \theta \int_0^{\theta} \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \sin \theta \cos \theta.$$

$$\text{Тогда } I_1 = \frac{2I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \sin \theta \cos \theta \right).$$

Окончательно получаем:

$$I_1 = I_m \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}. \tag{20}$$

Аналогично можно получить амплитуды остальных гармонических составляющих спектра тока нелинейного элемента. Общее выражение для амплитуды n -ой гармоники имеет вид:

$$I_n = I_m \frac{2(\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta)}{n\pi(n^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \tag{21}$$

Как видно из полученных выражений, амплитуды гармоник спектра тока зависят от угла отсечки θ и максимальной величины импульсов тока I_m .

Величины

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\theta) &= \frac{I_0}{I_m} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}, \\
\alpha_1(\theta) &= \frac{I_1}{I_m} = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}, \\
\alpha_n(\theta) &= \frac{I_n}{I_m} = \frac{2(\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta)}{n\pi(n^2 - 1)(1 - \cos \theta)}
\end{aligned}$$

называют коэффициентами Берга.

Коэффициенты Берга $\alpha_n(\theta)$ определяют зависимость амплитуды n -ой гармоники тока от угла отсечки при $I_m = \text{const}$, причём угол отсечки изменяется за счёт изменения амплитуды входного сигнала E и смещения U_0 .

Пользуются также функциями Берга $\gamma_n(\theta) = \frac{I_n}{SE} = \frac{I_k}{I_m}(1 - \cos \theta)$, которые определяют зависимость амплитуды n -ой гармоники тока от угла отсечки при $E = \text{const}$, причём угол отсечки изменяется за счёт изменения смещения.

Коэффициенты и функции Берга связаны между собой следующим образом:

$$\gamma_n(\theta) = \alpha_n(\theta)(1 - \cos \theta).$$

На рисунке 7 приведены графики $\alpha_n(\theta)$ и $\gamma_n(\theta)$.

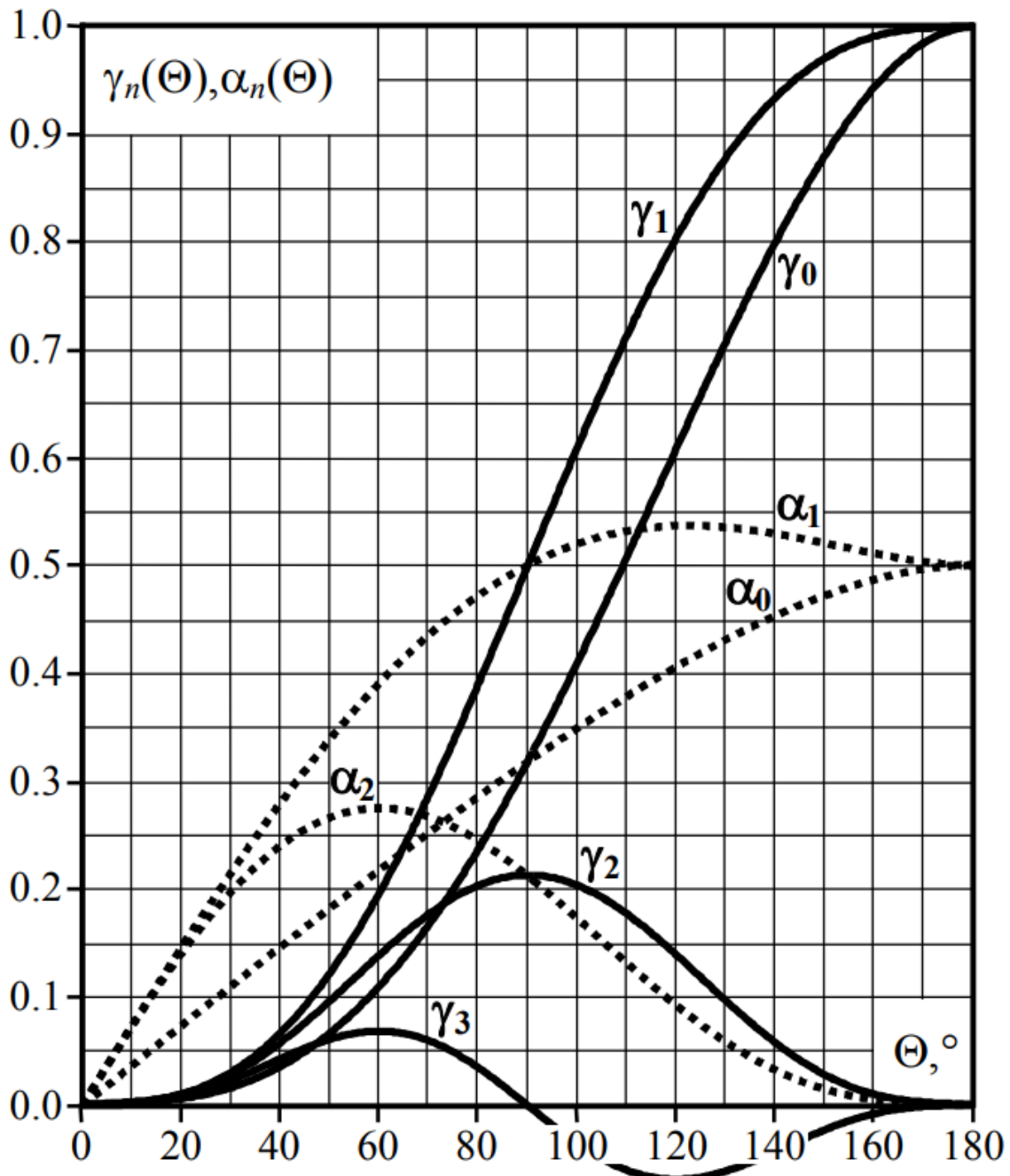


Рисунок 7 – Графики коэффициентов и функций Берга

Вид графиков показывает, что для каждой гармоники тока существует угол отсечки, при котором амплитуда ее имеет максимальное значение. Этот угол для коэффициентов Берга $\alpha_n(\theta)$ определяется выражением $\theta_{o\alpha} = \frac{120^0}{n}$, а для функций $\gamma_n(\theta)$ - выражением $\theta_{o\gamma} = \frac{180^0}{n}$. Выбор одного из этих углов определяется начальными условиями. Если задано максимальное значение импульсов тока I_m , а изменение угла отсечки осуществляется напряжением смещения и амплитудой входного сигнала, то следует использовать $\theta_{o\alpha}$. Если задана амплитуда входного сигнала E , а изменение угла отсечки осуществляется напряжением смещения, то следует использовать $\theta_{o\gamma}$.

Полученные результаты применяются при выборе режима работы нелинейного элемента в процессе построения усилителей мощности, умножителей частоты и некоторых других устройств.

При $\theta = 0$ ток равен нулю (нелинейный элемент заперт на протяжении всего периода), а при $\theta = 180^\circ$ отсечка тока отсутствует и режим работы становится линейным (рисунок 8).

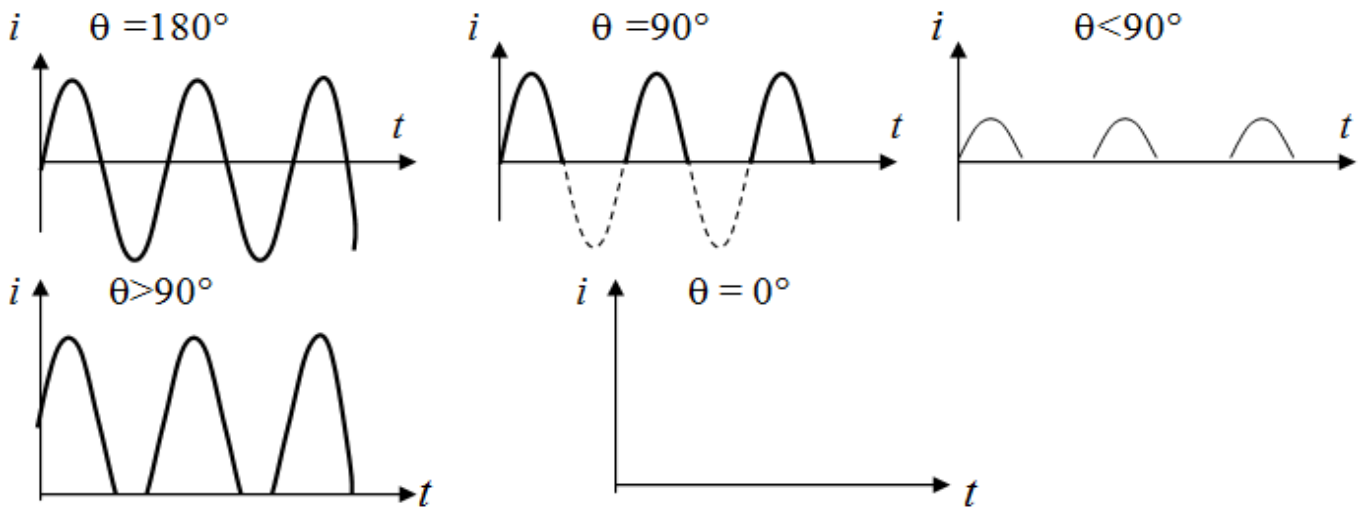


Рисунок 8 – Диаграммы сигналов на выходе НЭ при различных θ

Сдвиг спектра сигнала по оси частот на определённую постоянную величину при сохранении структуры сигнала называется преобразованием частоты.

Из качественного рассмотрения полученных результатов следует, что простой резистивный НЭ в сочетании с избирательной линейной цепью позволяет осуществить ряд преобразований, таких, как нелинейное резонансное преобразование частоты.

нансное усиление, умножение и преобразование частоты сигнала, выпрямление, детектирование модулированных сигналов, амплитудную модуляцию, и др.

В *методах трёх и пяти ординат* используются формулы, позволяющие выполнить анализ прохождения гармонического сигнала через НЦ с известной ВАХ (рисунок 9).

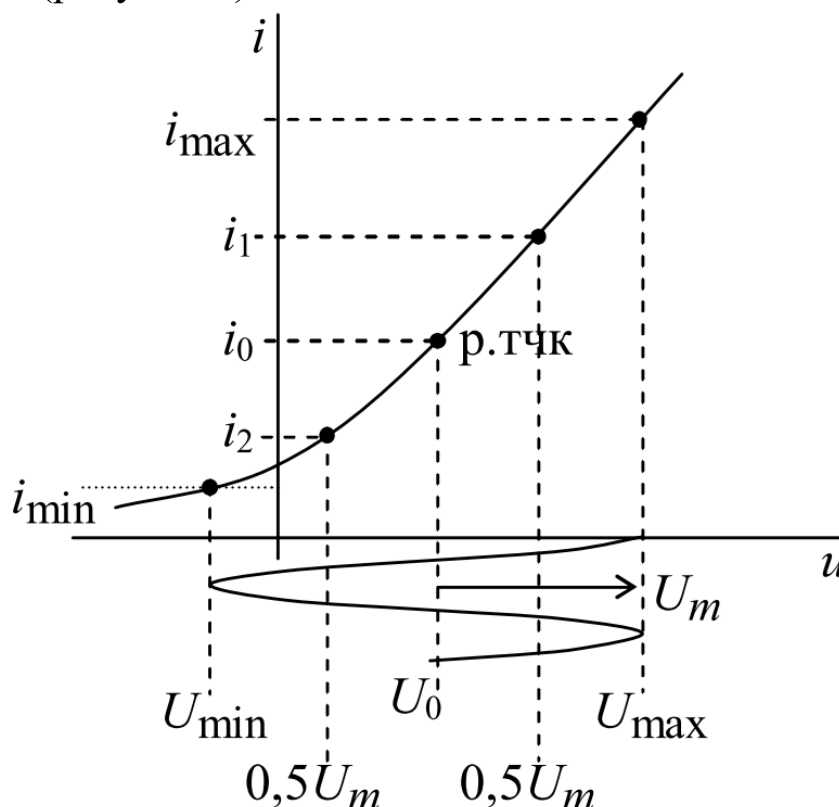


Рисунок 9 – Известная ВАХ нелинейной цепи

С помощью формул трёх ординат можно рассчитать приближённые значения постоянной составляющей и амплитуд первой и второй гармоник тока НЦ. Они имеют вид:

$$\begin{cases} I_0 = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} + \frac{i_0}{2}; \\ I_1 = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2}; \\ I_2 = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2}, \end{cases} \quad (22)$$

где $i_{\max}$, $i_{\min}$ и i_0 – токи, соответствующие максимальному и минимальному значению напряжения входного сигнала и напряжению постоянной составляющей U_0 (напряжению рабочей точки или смещения).

Формулы пяти ординат позволяют находить приближённые значения постоянной составляющей и амплитуд первой, (второй, третьей и четвёртой гармоник тока НЦ. Они имеют вид

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{6} [i_{\max} + i_{\min} + 2(i_1 + i_2)]; & I_1 = \frac{1}{3} [i_{\max} - i_{\min} + (i_1 - i_2)]; \\ I_2 = \frac{1}{4} (i_{\max} + i_{\min} - 2i_0); & I_3 = \frac{1}{6} [i_{\max} - i_{\min} - 2(i_1 - i_2)]; \\ I_4 = \frac{1}{12} [i_{\max} + i_{\min} - 4(i_1 + i_2) + 6i_0], \end{cases} \quad (23)$$

где $i_{\max}$, $i_{\min}$, i_0 , i_1 , i_2 – токи, соответствующие максимальному и минимальному значению напряжения входного сигнала, напряжению постоянной составляющей и значениям, при которых напряжение входного сигнала равно $\pm U_m$, где U_m – амплитуда сигнала.

Сигнал гармонической формы при прохождении через НЦ искажается за счёт появления гармоник кратных частот. Эти искажения (отличие формы выходного сигнала от гармонической) оцениваются **коэффициентом гармоник (коэффициентом нелинейных искажений)** по току или напряжению:

$$k_{zI} = k_{nuI} = \frac{\sqrt{I_{2\omega_1}^2 + I_{3\omega_1}^2 + \dots + I_{n\omega_1}^2}}{I_{\omega_1}} \cdot 100\%, \quad (24)$$

$$k_{nuU} = \frac{\sqrt{U_{2\omega_1}^2 + U_{3\omega_1}^2 + \dots + U_{n\omega_1}^2}}{U_{\omega_1}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_{n\omega_1}^2}}{U_{\omega_1}} \cdot 100\%, \quad (25)$$

где U_{ω_1} и U_{ω_n} – амплитуды напряжения 1-й и n -й гармоники на выходе НЦ. Он принимает значения в пределах от 0 до ∞ .

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Снимите и постройте вольт-амперную характеристику (ВАХ) нелинейного элемента

Снятие ВАХ (сток-затворной) полевого транзистора $i_c = f(E_{cm})$ производится путем последовательной установки ряда напряжений смещения (таблица 1) и измерения для каждого из них значения тока стока i_c . Для

измерения необходимо нажать кнопку « i_c » и произвести отсчет со встроенного миллиамперметра.

Таблица 1 – Значения напряжения смещения

$E_{см}$	В	0	-0,5	-1	-1,5	...	u_0
i_c	мА					...	0

При этом учтите, что полное отклонение стрелки этого прибора соответствует 5,0 мА и не зависит от положения переключателя пределов измерений. Во избежание ошибок при снятии вольт-амперной характеристики отключите все провода от входов сумматора. После заполнения таблицы 1 постройте график $i_c(E_{см})$, подобный рисунку 10.

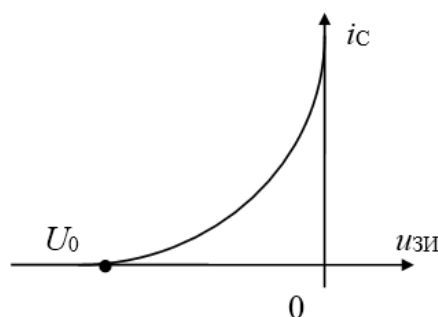


Рисунок 10 – Типовая вольт-амперная характеристика

Задание 2. Исследуйте преобразование формы и спектра моногармонического сигнала на квадратичном участке ВАХ нелинейного элемента

Моногармоническое воздействие задаётся следующим выражением $u_{зи} = E_{см} + U_m \cos 2\pi f_1 t$. На построенной ВАХ определите границы квадратичного участка ($U_0 < E_{см} < 0$).

Положение рабочей точки выбирается на середине квадратичного участка ВАХ, т.е. $E_{см1} = U_0/2$, где U_0 – напряжение отсечки (рисунок 7). Установите полученное значение $E_{см1}$ потенциометром $E_{см}$ и занесите его в таблицу 2.

Таблица 2 – Спектр тока стока

$E_{см1} =$ В; $f_1 = 1$ кГц; $U_{m1} =$ В; $U_1 = U_{m1}/\sqrt{2} =$ В					
Частота	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	...
Амплитуда					...

Амплитуда входного сигнала U_{m1} должна быть такой, чтобы сигнал занимал весь квадратичный участок ВАХ (от нуля до отсечки), т.е. $U_{m1}=|E_{cm1}|$ (рисунок 11).

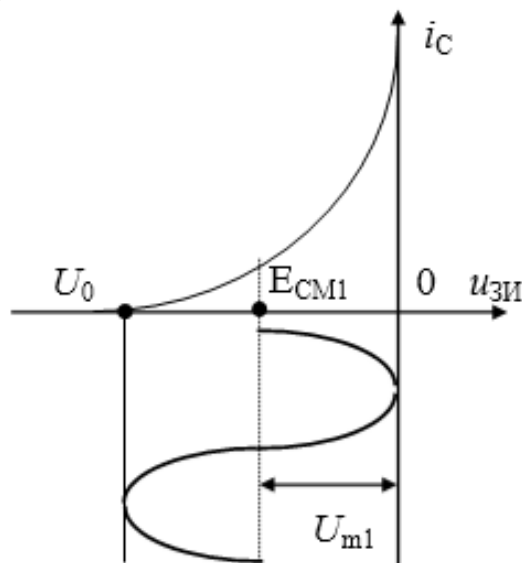


Рисунок 11 – Исследование моногармонического сигнала на квадратичном участке ВАХ

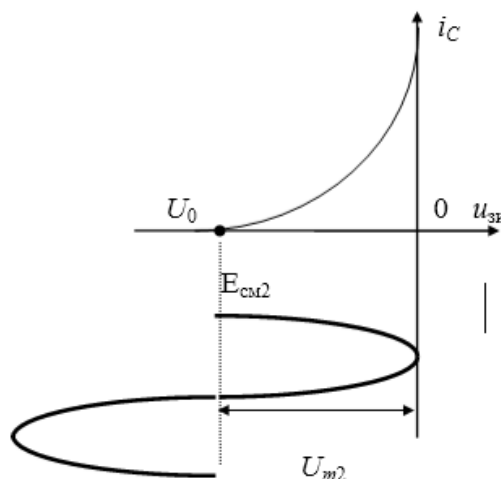
Учтите, что измерительные приборы имеют градуировку в действующих (U), а не амплитудных (U_m) значениях:

$$U = U_m / \sqrt{2}.$$

Временные диаграммы и спектры при моногармоническом сигнале наблюдайте на входе (гнездо КТ1) и выходе (гнездо КТ2) преобразователя. Зарисуйте их друг под другом с сохранением соответствия как по оси времени, так и по оси частот. Для анализа спектра на ПК соответствующее гнездо стенда соедините специальным проводом со входом «А» ПК, расположенным внизу стенда, левее встроенного вольтметра. На приводимых спектрограммах обязательно укажите частоты в Гц и амплитуды спектральных составляющих в делениях. Эти же данные внесите в таблицу 2.

Задание 3. Исследуйте преобразование формы и спектра моногармонического сигнала на кусочно-параболическом участке ВАХ нелинейного элемента

Установите $E_{cm2}=U_0$. Установите амплитуду входного сигнала $U_{m2}=|U_0|$ (U_{m2} – второе значение амплитуды входного сигнала, рисунок 12).

Рисунок 12 – Амплитуда входного сигнала U_{m2}

Временные диаграммы и спектры при моногармоническом сигнале наблюдайте на входе (гнездо КТ1) и выходе (гнездо КТ2) преобразователя. Зарисуйте их друг под другом с сохранением соответствия как по оси времени, так и по оси частот. Для анализа спектра на ПК соответствующее гнездо стенда соедините специальным проводом со входом «А» ПК, расположенным внизу стенда, левее встроенного вольтметра. На приводимых спектрограммах обязательно укажите частоты в Гц и амплитуды спектральных составляющих в делениях. Эти же данные внесите в таблицу 3.

Таблица 3 – Спектр тока стока

$E_{см2} =$ В; $f_1 = 1$ кГц; $U_{m2} =$ В; $U_1 = U_{m2} / \sqrt{2} =$ В					
Частота	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	...
Амплитуда					...

Задание 4. Исследуйте преобразование формы и спектра бигармонического сигнала на квадратичном участке ВАХ нелинейного элемента

Бигармоническое воздействие задаётся следующим выражением:
 $u_{зи} = E_{см} + U_{1m} \cos 2\pi f_1 t + U_{2m} \cos 2\pi f_2 t$.

В качестве источника второго гармонического сигнала с частотой $f_2 = 1,2$ кГц используется диапазонный генератор низкой частоты в блоке «ИСТОЧНИКИ». На один из входов сумматора подайте прежний сигнал $f_1 = 1$ кГц, на любой другой – $f_2 = 1,2$ кГц.

Установите смещение $E_{см} = E_{см1} = U_0/2$ (рабочая точка на середине квадратичного участка ВАХ).

Установите одинаковые амплитуды сигналов от разных источников на обоих входах сумматора $U_{1m}=U_{2m}=U_0/4$, при этом суммарный сигнал («биения») не выйдет за пределы квадратичного участка. Заполните таблицу 4.

Таблица 4 – Спектр тока стока

$E_{cm1} = \text{В}; f_1 = 1 \text{ кГц}; f_2 = 1,2 \text{ кГц}; U_{1m}=U_{2m}= \text{В};$					
Частота	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	...
Амплитуда					...

Уменьшите вдвое амплитуду одного из сигналов. Заполните таблицу 5.

Таблица 5 – Спектр тока стока

$E_{cm1} = \text{В}; f_1 = 1 \text{ кГц}; f_2 = 1,2 \text{ кГц}; U_{1m}= \text{В}; U_{2m}= \text{В};$					
Частота	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	...
Амплитуда					...

Приведите в отчёте развёрнутое объяснение результирующих спектров, полученных на выходе нелинейного элемента при моногармоническом и бигармоническом воздействии.

Сделайте общие выводы о прохождении сигналов через нелинейные элементы.

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответственную численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Каковы характерные особенности спектров тока, протекающего через нелинейный безынерционный элемент, при моно- и бигармоническом воздействиях?

2. Что называется порядком комбинационного колебания? Поясните примером.

3. Какова связь между наивысшим порядком комбинационного колебания и степенью полинома, аппроксимирующего характеристику нелинейного элемента?

4. Перечислите наиболее часто применяемые методы спектрального анализа колебаний на выходе безынерционных нелинейных преобразователей. Укажите, при каких видах аппроксимации целесообразно применять каждый из них.

5. Что называется углом отсечки, как определить его по осциллограмме сигнала и как выразить аналитически?

6. Характеристика нелинейного элемента аппроксимирована ломаной линией. Входное воздействие представляет собой сигнал вида $u = E_{cm} + U_m \cos \omega t$. Пользуясь системой трех координатных плоскостей, покажите, как следует выбрать E_{cm} и U_m , чтобы:

- а) ток по форме повторял форму входного сигнала;
- б) ток принял форму косинусоидальных импульсов с углом отсечки 90° .

7. Поясните, как работает преобразователь, принципиальная схема которого приведена на рисунке 1.

8. Как практически изменить положение рабочей точки на сток-затворной характеристике полевого транзистора?

9. Перечислите все составляющие спектра тока, если на вход нелинейного элемента с параболической (квадратичной) ВАХ подать гармонические сигналы с частотами 5 и 6 кГц.

10. То же для случая аппроксимации ВАХ степенным полиномом третьей степени.

11. Как изменится спектральный состав тока, если амплитуду входного напряжения уменьшить в 10 раз?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «отлично») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «хорошо») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «удовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «неудовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №5

ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

1 Цель работы

– исследование изменения законов распределения мгновенных значений случайных сигналов при их прохождении через линейные и нелинейные цепи.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- комплект соединительных проводов;

В работе используется универсальный лабораторный стенд со сменным блоком «ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ» (рисунок 1).

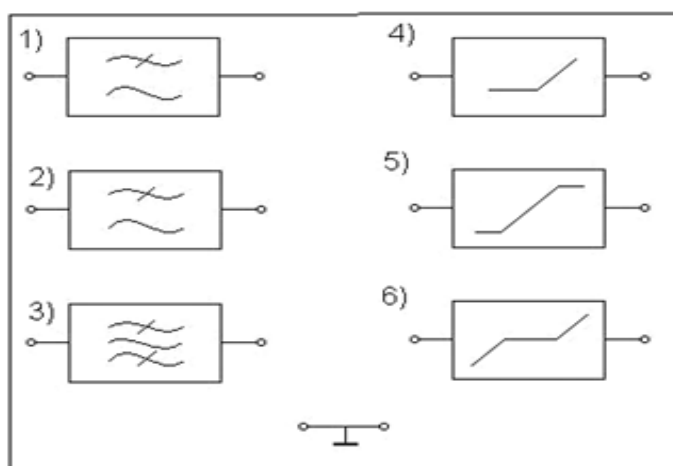


Рисунок 1 – Сменный блок для исследования прохождения случайных сигналов через различные цепи

В составе блока имеются три линейные цепи с номерами: **1** – фильтр низких частот с частотой среза 3 кГц; **2** – фильтр низких частот с частотой среза 6 кГц; **3** – полосовой фильтр с центральной частотой 6 кГц и шириной полосы пропускания $\Delta f=0,5$ кГц.

Также имеется три нелинейных безинерционных цепи под номерами: **4** – односторонний ограничитель; **5** – двухсторонний ограничитель; **6** – нелинейная цепь, вызывающая искажение типа «центральная отсечка».

В качестве сигналов используются:

- «белый» шум (нормальный случайный процесс);
- гармонический сигнал со случайной начальной фазой;
- аддитивная смесь этих сигналов в разных соотношениях.

Кроме универсального лабораторного стенда в работе используются вольтметр и ПК, работающий в режиме «ГИСТОГРАММА» для снятия кривых плотности вероятности (гистограмм). Для фиксации реализаций исследуемых процессов используется ПК в режиме «ОСЦИЛЛОГРАФ».

3 Основные теоретические сведения

Прохождение случайных сигналов через измерительные цепи требует отыскания многомерных законов распределения, что представляет сложную математическую задачу. Чтобы упростить расчет прохождения случайных сигналов через измерительные цепи, обычно ограничивают класс исследуемых случайных сигналов, предполагая их *стационарными* и обладающими *эргодическим* свойством. В этом случае расчет n -мерных характеристик случайных сигналов можно заменить одномерным и определять их не по множеству процессов, а по одной реализации за некоторый интервал времени.

3.1 Классификация радиотехнических цепей

Радиотехнические цепи, применяемые для преобразования сигналов, весьма разнообразны по своему составу, структуре и характеристикам. В процессе их разработки и аналитического исследования используют различные математические модели, удовлетворяющие требованиям адекватности и простоты. В качестве математической модели радиотехнической цепи может служить совокупность оператора T и двух множеств $X=\{x_i(t)\}$ $Y=\{y_i(t)\}$ сигналов на входе и выходе цепи, причем

$$y_i(t)=T \cdot x_i(t) \quad (1)$$

По виду преобразования входных сигналов в выходные, т.е. по виду оператора T , осуществляют классификацию радиотехнических цепей.

Радиотехническая цепь является *линейной*, если оператор T таков, что цепь удовлетворяет условиям *аддитивности* и *однородности*, т.е. справедливы равенства

$$T\{x_i(t) + x_j(t)\} = T\{x_i(t)\} + T\{x_j(t)\}; \quad (2)$$

$$T\{c \cdot x_i(t)\} = cT\{x_i(t)\}, \quad (3)$$

где c – константа.

Эти условия выражают суть принципа суперпозиции, свойственного только линейным цепям.

Функционирование линейных цепей описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Характерно, что линейное преобразование сигнала любой формы не сопровождается появлением в спектре выходного сигнала гармонических составляющих с новыми частотами, т.е. не приводит к обогащению спектра сигнала. Радиотехническая цепь является *нелинейной*, если оператор T не обеспечивает выполнение условий аддитивности и однородности. Функционирование таких цепей описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

Структурно линейные цепи содержат только линейные элементы. Линейные цепи – это усилители, фильтры, длинные линии и др. Нелинейные цепи содержат один или несколько нелинейных элементов. К числу нелинейных цепей относятся генераторы, детекторы, модуляторы, умножители и преобразователи частоты, ограничители и др. По характеру временной зависимости выходного сигнала от входного различают *инерционные* и *безынерционные* радиотехнические цепи.

Радиотехническая цепь, у которой значение выходного сигнала $y(t)$ в момент $t=t_0$ зависит не только от значения входного сигнала $x(t)$ в этот момент времени, но и от значений $x(t)$ в моменты времени, предшествовавшие моменту t_0 , называется *инерционной* цепью. Если значение выходного сигнала $y(t)$ в момент $t=t_0$ полностью определяется значением $x(t)$ в тот же момент времени t_0 , то такая цепь называется *безынерционной*.

3.2 Прохождение случайных измерительных сигналов через линейные цепи

Общий случай анализа преобразования случайных сигналов в линейной цепи с постоянными параметрами предполагает, что на вход её с ча-

стотной характеристикой $K(j\omega)$ поступает случайный сигнал $X(t)$ с заданными статистическими свойствами. Требуется определить статистические характеристики случайного сигнала $Y(t)$ на выходе цепи. В зависимости от анализируемых характеристик случайных сигналов $X(t)$ и $Y(t)$ общую задачу разделяют на две отдельные задачи.

1 Определение энергетического спектра $W_Y(\omega)$ и корреляционной функции $R_Y(\tau)$ случайного сигнала на выходе линейной цепи (ЛЦ).

2 Определение закона распределения вероятностей случайного сигнала $p(y)$ на выходе линейной цепи.

3.2.1 Определение энергетического спектра и корреляционной функции случайного сигнала на выходе линейной цепи

Указанная задача может быть решена с помощью **временного метода**. В соответствии с интегралом Дюамеля для некоторой реализации $y_k(t)$ выходного сигнала $Y(t)$ при нулевых начальных условиях имеем:

$$y_k(t) = \int_0^t x_k(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Математическое ожидание выходного сигнала $m_Y(t)$ по ансамблю реализаций

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y, t)dy = \int_0^t m_X(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Ковариационная функция

$$B_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(\tau_1)h(\tau_2)B_X(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \quad (6)$$

Энергетический спектр $W_Y(\omega)$ сигнала $Y(t)$ с математическим ожиданием $m_Y \neq 0$ можно определить через преобразование Фурье:

$$W_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \quad (7)$$

Второй способ решения предполагает использования **частотного метода**. Решение в частотной области основано на том, что энергетический спектр случайного сигнала на выходе линейной цепи $W_Y(\omega)$ в стационарном режиме равен энергетическому спектру входного сигнала $W_X(\omega)$, умноженному на квадрат модуля частотной характеристики цепи, т.е.

$$W_Y(\omega) = W_X(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2. \quad (8)$$

Энергетический спектр $W_X(\omega)$ сигнала $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X \neq 0$ связан с его ковариационной функцией $B_X(\tau)$ преобразованиями Фурье:

$$W_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (9)$$

$$B_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (10)$$

Следовательно, ковариационную $B_Y(\tau)$ и автокорреляционную $R_Y(\tau)$ функции сигнала $Y(t)$ на выходе ЛЦ можно определить следующим образом:

$$B_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_Y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega; \quad (11)$$

$$R_Y(\tau) = B_Y(\tau) - m_Y^2. \quad (12)$$

При этом дисперсия D_Y и математическое ожидание m_Y сигнала $Y(t)$ равны

$$D_Y = R_Y(\tau = 0) = B_Y(\tau = 0) - m_Y^2, \quad m_Y = m_X K(\omega = 0), \quad (13)$$

где $K(\omega=0)$ коэффициент передачи линейной цепи по постоянному току.

3.2.2 Определение закона распределения плотности вероятности случайного сигнала на выходе линейной цепи

Метода решения этой задачи, который позволял бы непосредственно находить закон распределения сигнала $p(y)$ на выходе инерционной ЛЦ по известному закону распределения сигнала $p(x)$ на входе, в общем виде не существует. Решается задача для случайных сигналов с гауссовским (нормальным) законом распределения, а также для некоторых частных случаев.

В отношении закона распределения вероятностей выходного сигнала $p(y)$ существует несколько положений:

1) закон распределения $p(y)$ сигнала на выходе безынерционной ЛЦ функционально совпадает с законом распределения $p(x)$ входного сигнала, а изменяются только дисперсия и математическое ожидание;

2) для любой ЛЦ нормальный закон $p(x)$ для входного сигнала $X(t)$ остается нормальным на выходе ЛЦ. Поскольку нормальный закон распределения полностью определяется математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией, то для нахождения закона распределения $p(y)$

выходного сигнала достаточно вычислить данные числовые характеристики;

3) в некоторых (довольно частых) случаях решить задачу определения вероятностных характеристик случайного процесса на выходе инерционных цепей позволяет использование *эффекта нормализации* случайного процесса, свойственного инерционным системам.

Если негауссовский процесс $x(t)$ с интервалом корреляции τ_k воздействует на инерционную линейную цепь с постоянной времени $\tau_k \gg \tau_{\text{ц}}$ (при этом ширина энергетического спектра случайного процесса $x(t)$ больше полосы пропускания цепи), то процесс $y(t)$ на выходе такой цепи приближается к гауссовскому по мере увеличения отношения $\tau_k/\tau_{\text{ц}}$. Этот результат называется эффектом нормализации случайного процесса. Эффект нормализации проявляется тем сильнее, чем уже полоса пропускания цепи.

3.2.2.1 Прохождение случайных сигналов через линейный усилитель

Поскольку линейный усилитель характеризуется некоторым коэффициентом усиления $K_0 > 1$ и если при этом он не зависит от частоты, то согласно (8), энергетический спектр сигнала на выходе линейной цепи $W_Y(\omega)$ определится как

$$W_Y(\omega) = W_X(\omega) \cdot |K_0|^2. \quad (14)$$

Для линейной цепи случайный процесс на выходе $y(t)$ связан со случайным процессом на входе $x(t)$ (рисунок 2, а):

$$y = K_0 \cdot x. \quad (15)$$

При любых линейных преобразованиях процессов с нормальным распределением закон распределения выходных процессов остается также нормальным.

Для случайного сигнала $x(t)$ с нормальным распределением (рисунок 2, г) закон распределения $p(x)$ определяется по формуле

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x(t)-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (16)$$

где m_x – математическое ожидание;

σ_x – дисперсия входного случайного сигнала.

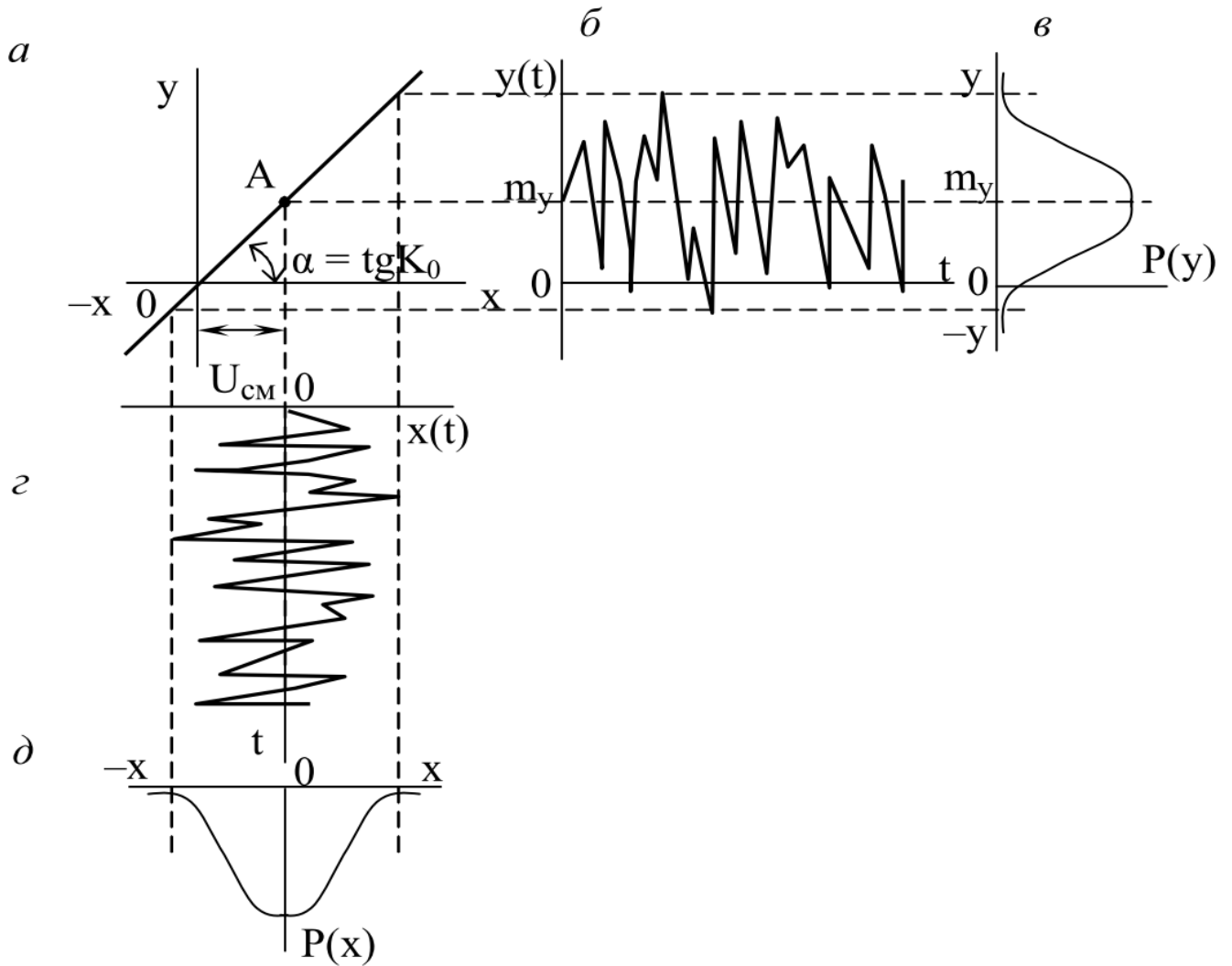


Рисунок 2 – Иллюстрация прохождения случайного сигнала через линейный усилитель

Обычно полагают, что входной случайный сигнал является центрированным, т.е. $m_x=0$. Тогда (16) примет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2(t)}{2\sigma_x^2}}. \quad (17)$$

С учетом (15) закон распределения выходного случайного сигнала $p(y)$ примет вид

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y(t)-m_y)^2}{2\sigma_y^2 K_0^2}}, \quad (18)$$

при этом дисперсия выходного случайного сигнала σ_y определится как

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K_0|^2 d\omega. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что при прохождении случайного стационарного сигнала через линейный безынерционный усилитель закон распределения не изменяется, а изменяется его площадь и увеличивается дисперсия σ_y^2 , что связано с увеличением в K_0 раз случайных амплитуд в выходном сигнале (рисунок 2, (д и б)).

В случае установки напряжением смещения $U_{см}$ рабочей точки А на ВАХ, не совпадающей с нулем, выходной случайный сигнал становится нецентрированным, т.е. $m_y \neq 0$, как показано на рисунке 2, б.

Из вышесказанного следует, что

$$m_y = K_0 m_x \quad \sigma_y = K_0 \sigma_x \quad (20)$$

Рассмотренным выше свойствам подчиняются и другие типы случайных сигналов.

3.2.2.2 Прохождение случайных сигналов через линейную инерционную цепь – узкополосный фильтр

Структурная схема, отображающая анализ прохождения случайных сигналов в виде импульсов, представлена на рисунке 3.

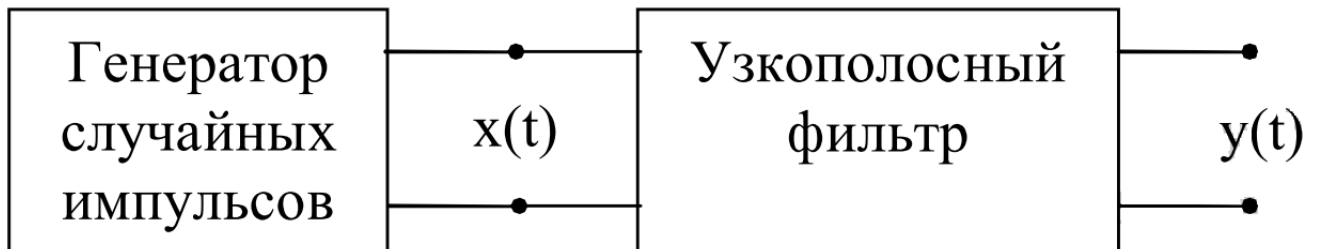


Рисунок 3 – Схема для анализа случайных импульсных сигналов

В качестве случайного сигнала используется генератор случайных импульсов («клипированного» сигнала), показанных на рисунке 4, а и имеющих не нормальный закон распределения (рисунок 4, б). При прохождении такого сигнала через узкополосный фильтр, которым является высокочастотный колебательный контур, постоянная времени которого τ_k , велика по сравнению со средней величиной интервала между импульсами τ_i , разрушаются внутриспектральные связи. В результате, на выходе фильтра в какой-то момент времени t_i получается случайный сигнал, образованный суммой свободных колебаний от каждого τ_i импульса. Чем уже полоса про-

пускания, тем большее число соизмеримых по величине и некоррелированных слагаемых принимает участие в образовании результирующего напряжения $y(t)$ в момент времени t_i .

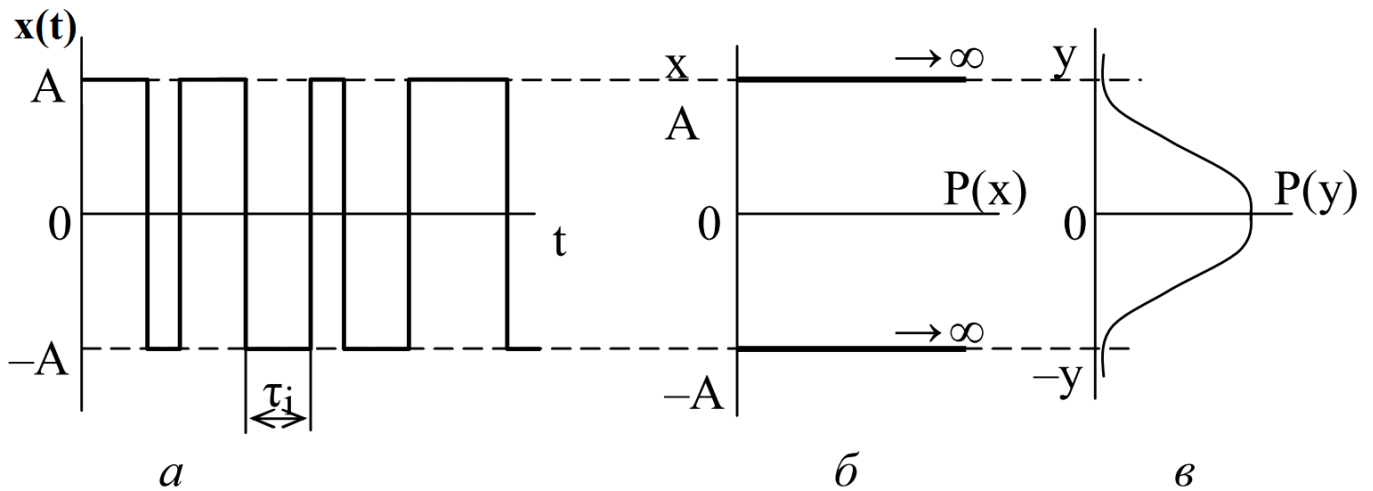


Рисунок 4 – Изменение плотности вероятности клипированного сигнала

В соответствии с центральной предельной теоремой этих условий достаточно для приближения распределения $p(y)$ выходного случайного сигнала $y(t)$ к нормальному закону (рисунок 4, в), т.е. имеем процесс нормализации случайного сигнала.

3.3 Прохождение случайных измерительных сигналов через нелинейные цепи

Пусть известна одномерная плотность вероятности $p(x)$ случайного сигнала $x(t)$ на входе нелинейного устройства с характеристикой преобразования $y=f(x)$. Необходимо определить плотность вероятности $p(y)$ выходного сигнала $y(t)$.

Рассмотрим три характерных случая:

1. Функция $y=f(x)$ нелинейной цепи определяет однозначное соответствие между $x(t)$ и $y(t)$ (рисунок 5, а). Полагаем, что существует обратная функция $x=g(y)$, которая также определяет однозначное соответствие между $y(t)$ и $x(t)$. В этом случае

$$p(y) = p(x) \left| \frac{d[g(y)]}{dy} \right|. \quad (21)$$

2. Обратная функция $x=g(y)$ неоднозначна, т.е. одному значению y , соответствует несколько значений x (рисунок 5, б). Пусть, например, значению $y=y_1$, соответствуют значения $x=x_1, x_2 \dots x_n$.

Тогда

$$p(y) = p(x) \left| \frac{d[g(y)]}{dy} \right|_{y=x_1} + p(x) \left| \frac{d[g(y)]}{dy} \right|_{y=x_2} + \dots + p(x) \left| \frac{d[g(y)]}{dy} \right|_{y=x_n}. \quad (22)$$

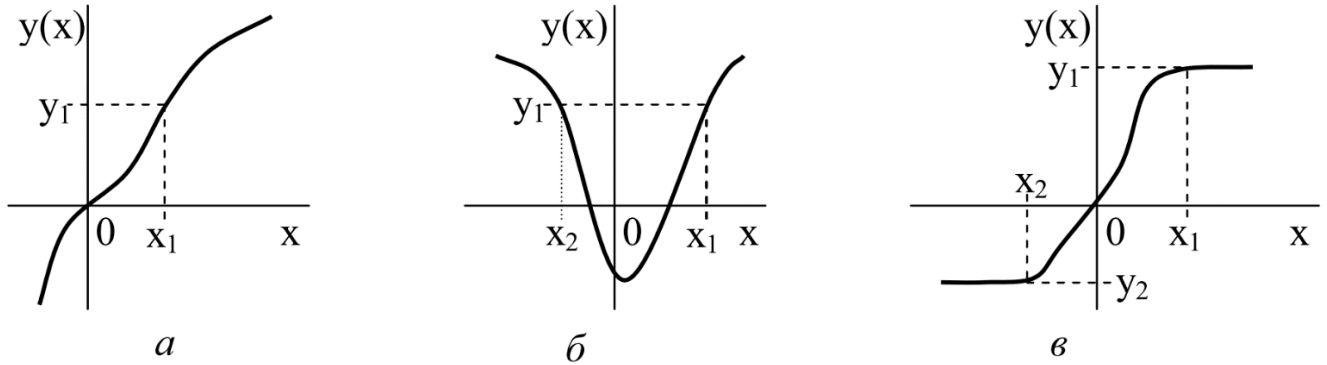


Рисунок 5 – Варианты соответствия между входным сигналом x и выходным сигналом y

3. Характеристика $y=f(x)$ НЦ имеет один или более горизонтальных участков, где $y=\text{const}$ (рисунок 5, в). В этом случае плотность вероятности выходного сигнала на отрезке $y_2 < y < y_1$ определяется выражением

$$p_1(y) = p(x) \left| \frac{d[g(y)]}{dy} \right|_{y_2 < y < y_1}, \quad (23)$$

в точках $y=y_1=\text{const}$ и $y=y_2=\text{const}$ представляется в виде дельта-функций:

$$\lambda P_1 \delta(y - y_1) \quad \text{и} \quad \lambda P_2 \delta(y - y_2), \quad (24)$$

где вероятности $P_1 = P(x \geq x_1) = \int_{x_1}^{\infty} p(x) dx$ и $P_2 = P(x \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx$, а ко-

эффициент λ определяется из условия нормировки:

$$p_1(y) + \lambda(P_1 + P_2) = 1. \quad (25)$$

Тогда

$$p(y) = \begin{cases} p_1(y) + \lambda[P_1 \delta(y - y_1) + P_2 \delta(y - y_2)], & y_2 \leq y \leq y_1, \\ 0, & y_2 < y < y_1. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, задача определения плотности распределения $y(t)$ на выходе безынерционной НЦ решается аналитически для достаточно простых характеристик $y=f(x)$.

3.3.1 Прохождение случайных сигналов через нелинейную безынерционную цепь

Рассмотрим прохождение случайного сигнала через идеальный ограничитель (рисунок 6, а), ВАХ которого описывается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} y &= A \text{ при } x \geq 0, \\ y &= -A \text{ при } x \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

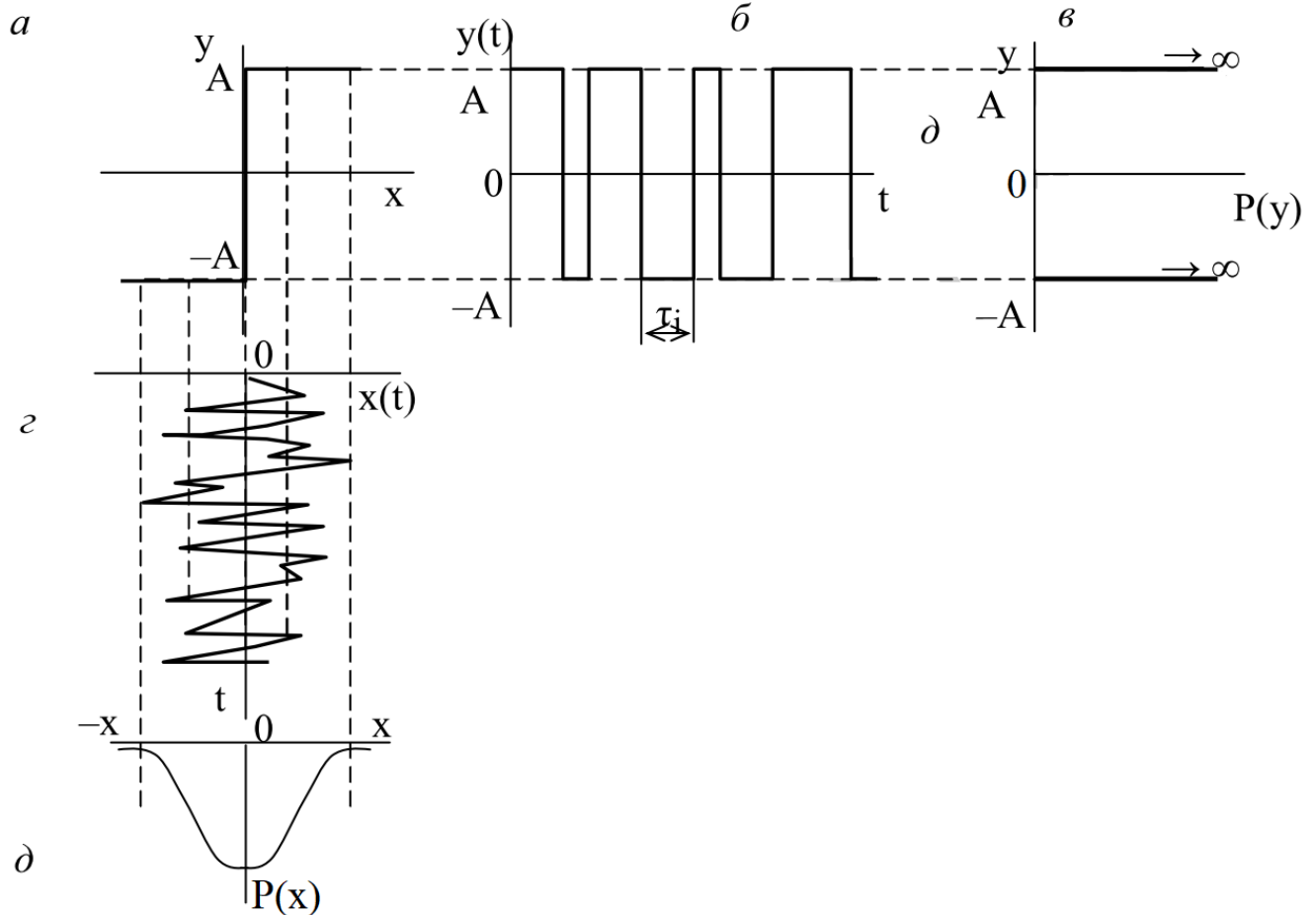


Рисунок 6 – Прохождение случайного сигнала через идеальный ограничитель

На такую нелинейную цепь подается случайный сигнал с нормальным распределением, (рисунок 6, г, д). На выходе идеального ограничителя получим «клиппированный» (квантованный) сигнал с постоянной амплитудой, но случайной длительностью и частотой следования (рисунок 6, б). Для такого случайного сигнала характерно то, что дисперсия его $\sigma_y = 0$, а математическое ожидание $m_y = A$ и $m_y = -A$. Подставив в (18) значение $\sigma_y = 0$, получим закон распределения $p(y)$ в виде двух δ -функций для $m_y = A$ и $m_y = -A$ (рисунок 6, в), т.е.

$$\begin{cases} p(y) = 0,5\delta_y & \text{при } y = A, \\ p(y) = 0,5\delta_y & \text{при } y = -A. \end{cases} \quad (28)$$

Коэффициент 0,5 характеризует вероятность появления случайного «клиппированного сигнала амплитудой A или $-A$.

3.3.2 Прохождение случайных сигналов с нормальным распределением через усилитель-ограничитель

Функция передачи усилителя-ограничителя может быть представлена линейно ломаными отрезками (рисунок 7, а) как

$$\left. \begin{aligned} y &= A_1 \text{ при } x \geq x_1, \\ y &= K_0 x \text{ при } x_2 \leq x \leq x_1, \\ y &= -A_2 \text{ при } x \leq x_2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где K_0 – коэффициент усиления усилителя.

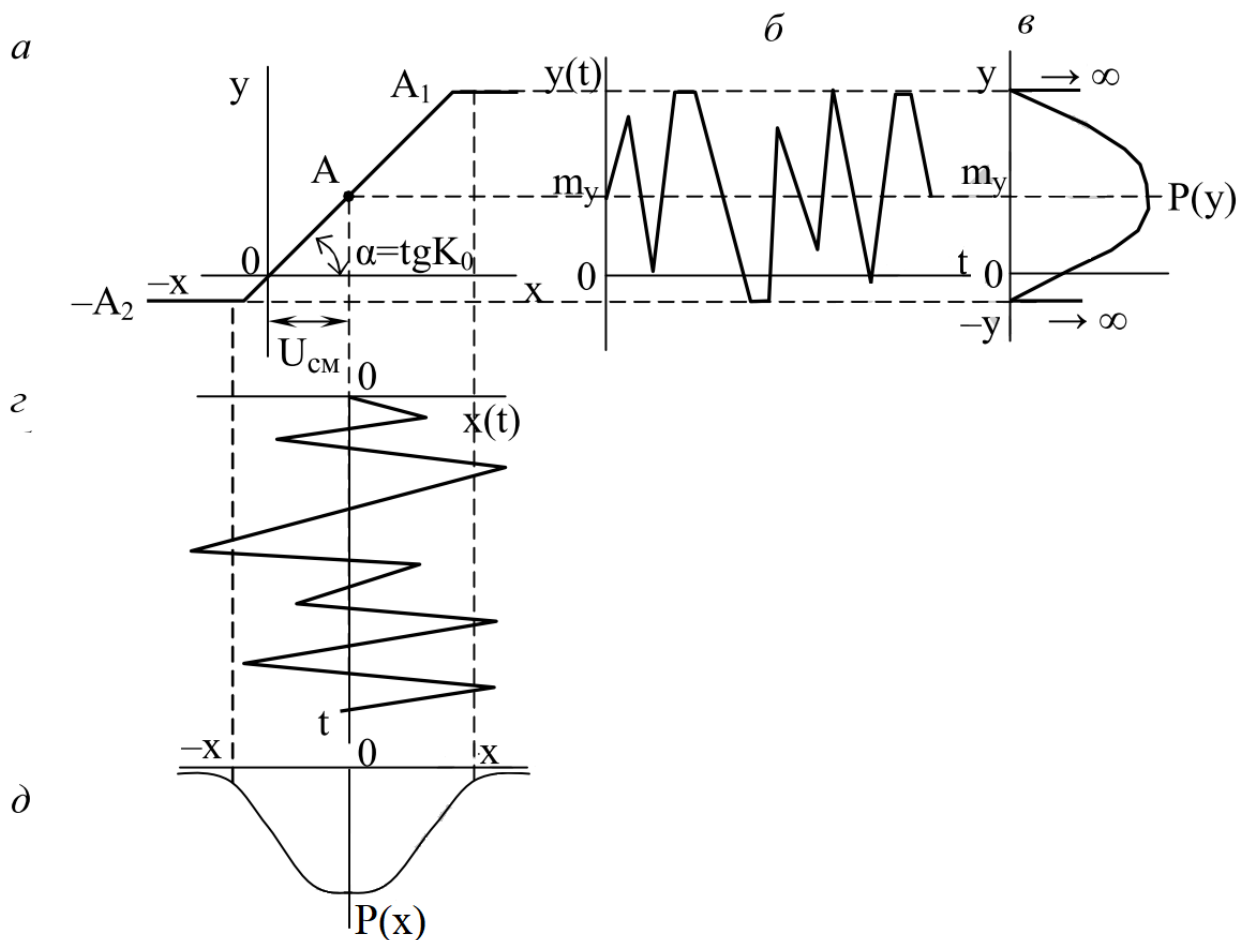


Рисунок 7 – Прохождение случайных сигналов с нормальным распределением через усилитель-ограничитель

При прохождении через такой усилитель случайного сигнала $x(t)$ с нормальным распределением $p(x)$ (рисунок 7, г, д) на выходе его получим усиленный в K_0 раз случайный сигнал, содержащий и ограниченные случайные амплитуды, превышающие пороги ограничения A_1 и $-A_2$ соответственно для значений $x(t) \geq x_1$ и $x(t) \leq -x_2$ (рисунок 7, б). Таким образом, на выходе усилителя-ограничителя имеем смесь случайного и «клиппированного» сигналов. В этом случае закон распределения плотности вероятности выходного сигнала $p(y)$ имеет вид, показанный на рисунке 7, в, и может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} p(y) = 0 & \text{при } y < A_2, \\ p(y) = \alpha_1 \delta(y + A_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi K_0 \sigma_x}} e^{-\frac{(y(t) - m_y)^2}{2K_0^2 \sigma_x^2}} + \alpha_2 \delta(y - A_2) & \text{при } A_2 \leq y \leq A_1, \\ p(y) = 0 & \text{при } y > A_1, \end{cases}$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты, характеризующие вероятность появления случайного сигнала $y(t)$ с амплитудами A_1 и A_2 и численно равные площадям S_1 и S_2 под кривой $p(x)$ левее x_2 и правее x_1 (рисунок 7, д).

3.3.3 Прохождение случайных сигналов с нормальным распределением через нелинейную инерционную цепь

Полагаем, что нелинейная инерционная цепь содержит линейный детектор, нагрузкой которого является фильтр нижних частот в виде интегрирующей RC-цепи (рисунок 8, а).

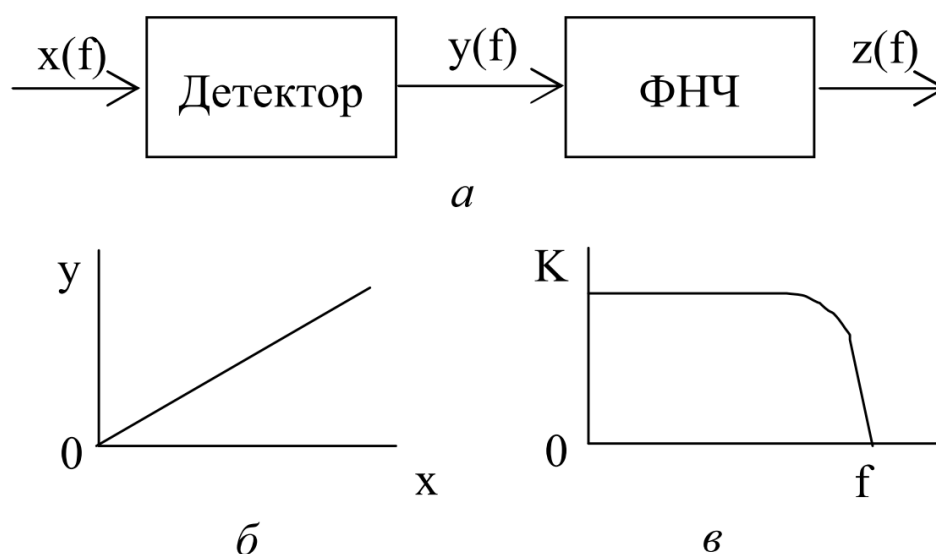


Рисунок 8 – Состав и характеристики нелинейной инерционной цепи

Линейный детектор можно описать линейной характеристикой (рисунок 8, б)

$$y = \alpha x. \quad (30)$$

В случае подачи на вход такого устройства случайного сигнала с нормальным распределением (рисунок 9, а, б) на выходе линейного детектора получим также случайный сигнал с нормальным распределением (рисунок 9, в), что равносильно случаю прохождения случайного сигнала через линейный усилитель.

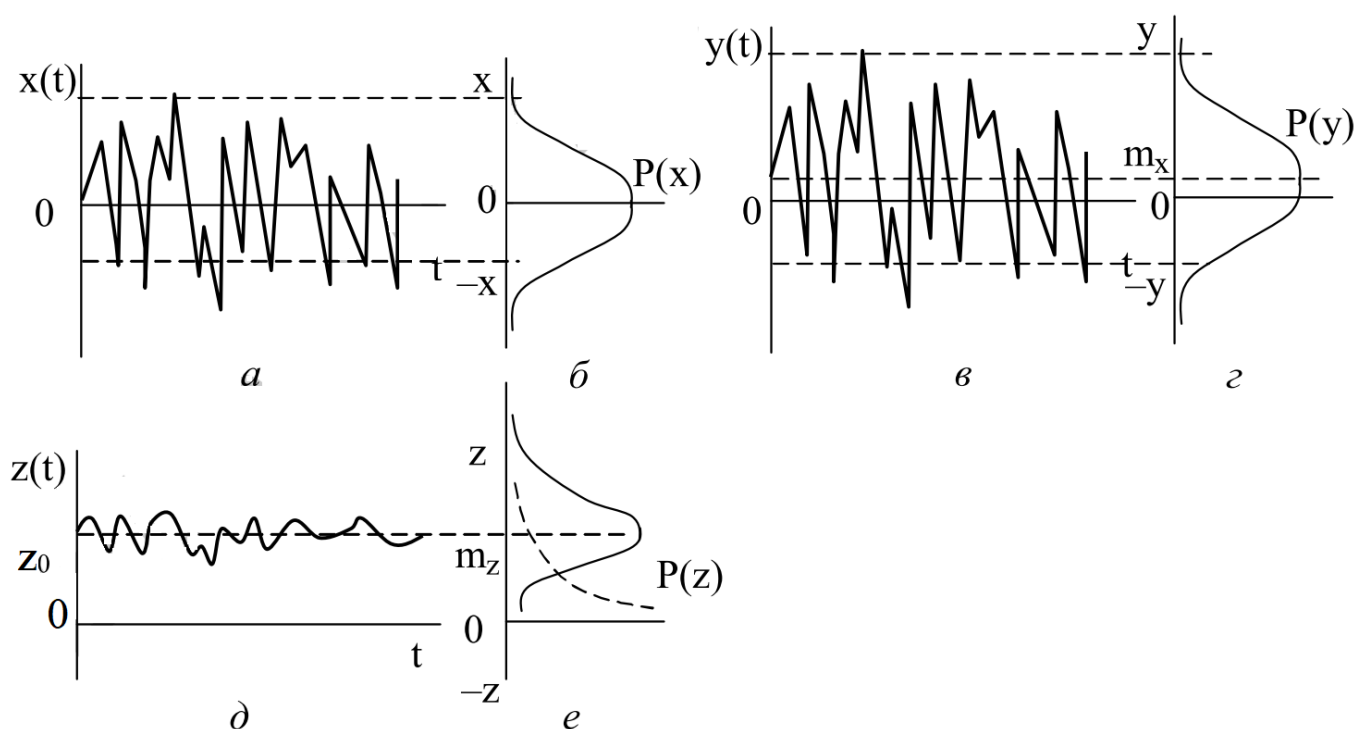


Рисунок 9 – Случайный сигнал на входе и выходе инерционной цепи

После ФНЧ, имеющего АЧХ, показанную на рисунке 9, в, на выходе получим случайный сигнал, содержащий низкочастотные составляющие, которые пропустит фильтр, а высокочастотные будут подавлены.

В результате на выходе ФНЧ будем иметь медленно изменяющийся случайный сигнал $z(t)$ с нормальным законом распределения $P(z)$ относительно среднего значения m_z , (рисунок 9, д, е). Кроме этого, появится некоторая усредненная постоянная составляющая z_0 , которая задаст смещение случайного сигнала относительно нуля (см. рисунок 9, д). Если расширять полосу пропускания ФНЧ, то в состав низкочастотных составляющих будут входить и высокочастотные составляющие спектра случайного сигнала и $P(z)$ будет стремиться к функции, показанной на рисунке 9, е пунктирно.

3.3.4 Линейные (инерционные) преобразования случайного процесса

Процесс на выходе линейной инерционной электрической цепи (ЛЭЦ) $\eta(t)$ зависит от значений входного процесса ξ в моменты времени, предшествующие t_1 , непосредственно в t_1 и в последующие после t_1 :

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где $\eta(t)$ – СП на выходе линейной цепи,

$\xi(t)$ – входной СП,

$h(t - \tau)$ – импульсная характеристика (реакция) линейной цепи.

Основные свойства линейных преобразований СП:

1) если СП на входе ЛЭЦ $\xi(t)$ нормальный, то СП на выходе $\eta(t)$ тоже нормальный, но его числовые характеристики отличаются от числовых характеристик входного процесса $\xi(t)$ и определяются следующим образом:

$$m_{1\eta} = \overline{\eta(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} m_{1\xi} h(t - \tau) d\tau, \quad B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) B_{\xi}(u - v + \tau) du dv;$$

2) если процесс на входе ЛЭЦ не нормальный, но ширина его спектра значительно больше полосы пропускания линейной цепи $\Delta\omega_{\xi} \gg \Pi_{\text{ЛЭЦ}}$, то процесс на выходе ЛЭЦ имеет тенденцию к нормализации.

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Исследование прохождения сигнала с нормальным законом распределения через линейные и нелинейные цепи

Пользуясь генератором «1 кГц» в блоке «ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ» и встроенным мультиметром, откалибруйте осциллограф так, чтобы при $U_{\text{вх}}=0,35$ В размах синусоиды на его экране составлял ± 1 деление. Затем, заменив генератор «1 кГц» на генератор шума (ГШ), ручкой регулятора выхода ГШ установите ширину «шумовой дорожки» на экране ± 3 деления, что соответствует $\pm 3\sigma$ (согласно правилу «трёх сигм» для нормального случайного процесса). Следовательно, σ шума соответствует 0,5 В. При последующем исследовании шести цепей не меняйте ни уровень шума, ни усиление осциллографа.

Подключив ГШ ко входу «А» ПК, работающего в режиме «ГИСТОГРАММА», с помощью ручки регулировки входного сигнала ПК, расположенной рядом с гнездом «А», установите на мониторе требуемый размах сигнала. Зафиксируйте общую для всех цепей реализацию сигнала на входе, график плотности вероятности и его параметры – m и σ .

Подключите выход ГШ ко входу первой цепи, а ПК – к её выходу, зафиксируйте выходную реализацию, плотность вероятности выходного сигнала $w_{\text{вых}}(x)$ и его параметры $m_{\text{вых}}$ и $\sigma_{\text{вых}}$. Повторите данное задание для остальных **пяти** цепей.

Задание 2. Исследование процесса нормализации закона распределения при прохождении сигнала через линейную узкополосную цепь

Случайный сигнал с распределением, отличным от нормального, может быть получен путём передачи нормального случайного процесса через нелинейную цепь (блоки 5 или 6), рисунок 10.

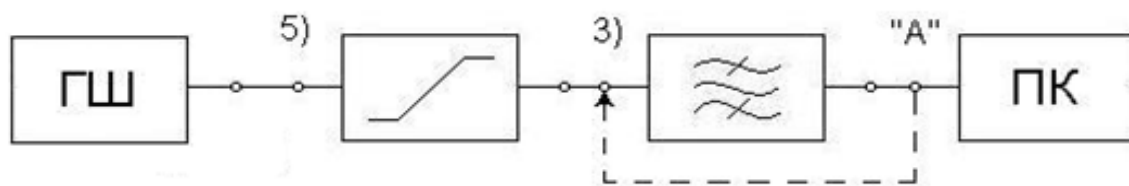


Рисунок 10 – Структурная схема проведения измерений

Соберите цепь согласно схеме на рисунке 3.

Подключив осциллограф к выходу цепи 5, ручкой регулятора выхода ГШ добейтесь появления на осциллограмме заметного двухстороннего ограничения сигнала.

Проходя через узкополосную линейную цепь (3), такой сигнал «нормализуется», т.е. его закон распределения приближается к гауссовскому.

Подключая ПК на вход и выход цепи 3, получите реализации сигналов и гистограммы на входе и выходе цепи 3.

В отчёте охарактеризуйте изменения в законе распределения сигнала при прохождении линейной узкополосной цепи.

Задание 3. Исследование прохождения узкополосного сигнала с нормальным законом распределения через амплитудный детектор

Для получения узкополосного нормального процесса используйте полосовой фильтр (цепь 3), а для получения огибающей – амплитудный детектор, состоящий из диодного ограничителя (нелинейная цепь 4) и ФНЧ (цепь 1), как показано на рисунке 11.

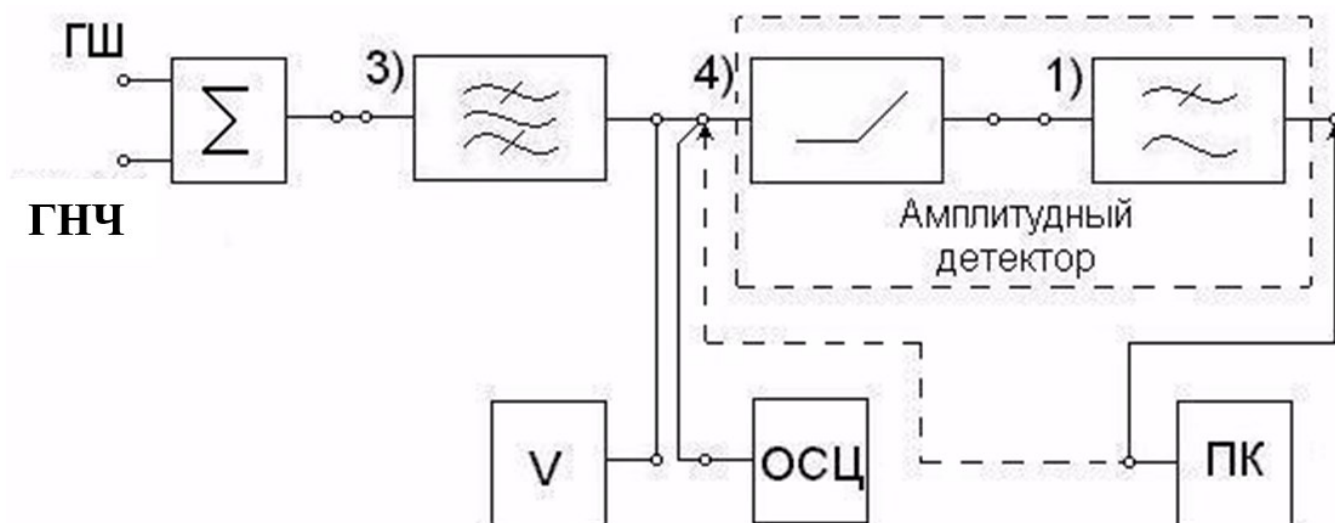


Рисунок 11 – Структурная схема проведения измерений

Соберите цепь в соответствии с рисунком 4. Отключите генератор шума от сумматора, подберите частоту генератора НЧ (в районе 6 кГц), при которой показания вольтметра достигнут максимума. Установите выходное напряжение генератора таким, чтобы показания вольтметра на выходе цепи 3 соответствовали 0,35 В.

Отключите генератор НЧ от входа сумматора и подключите к нему ГШ. Отрегулируйте выходное напряжение ГШ так, чтобы на экране осциллографа, подключённого к выходу цепи 3, максимальная ширина «шумовой дорожки» составляла 6 клеток ($6\sigma=6$ клеток). Если калибровка осциллографа, выполненная в рамках задания 1 не нарушалась, то σ при этом равно 0,5 В, а отношение $a/\sigma=0$ (так как генератор отключён).

Подключая ПК ко входу амплитудного детектора (вход цепи 4) и его выходу (выход цепи 1), зафиксируйте реализации и гистограммы исследуемых сигналов.

Подключите генератор НЧ ко входу сумматора и отключите источник шума. Отрегулируйте выходное напряжение генератора так, чтобы ширина

осциллограммы в той же точке схемы составляла 2 клетки (двойная амплитуда $2a$ соответствует 1 В, т.е. $a=0,5$ В). Подключив источник шума ко входу сумматора, на его выходе получите аддитивную смесь «белого» шума и гармонического сигнала при $a/\sigma = 1$. Зафиксируйте реализации и гистограммы исследуемых сигналов. Отключив шумовой генератор от входа сумматора, отрегулируйте выходное напряжение гармонического сигнала так, чтобы ширина осциллограммы составила 4 клетки (т.е. $a=1$ В). Подключите источник шума ко входу сумматора. Если положение регуляторов выхода не нарушились, то σ по-прежнему равно 0,5 В, следовательно, $a/\sigma=2$. Зафиксируйте реализации и гистограммы исследуемых сигналов.

Установив $a/\sigma=3$, зафиксируйте реализации и гистограммы исследуемых сигналов.

В отчете сформулируйте выводы об изменении плотности вероятности суммы гармонического сигнала и белого шума при различных отношениях a/σ .

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;

- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответствующую численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Что такое плотность вероятности? Поясните смысл и свойства графика плотности вероятности.
2. Функция распределения и плотность вероятности – какова их связь?
3. Нормальный случайный процесс и его свойства.
4. К каким случайным процессам относится «правило трёх сигм»?
5. Меняется ли форма графика $w(x)$ при прохождении любого случайного процесса через:
 - линейную инерционную цепь;
 - нелинейную безинерционную цепь?
6. Как получить график $w(x)$ на выходе нелинейной цепи?
7. Как рассчитать дисперсию и математическое ожидание на выходе нелинейной цепи?
8. Что происходит с плотностью вероятности случайного сигнала, проходящего через узкополосную линейную цепь?
9. Что такое закон Рэлея?
10. Какому закону подчиняется распределение мгновенных значений огибающей смеси узкополосного нормального случайного процесса и гармонического сигнала?
11. Как рассчитать дисперсию процесса на выходе линейной цепи?

12. Как рассчитать математическое ожидание процесса на выходе линейной цепи?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «**отлично**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «**хорошо**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «**удовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «**неудовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №6

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ И ДЕТЕКТИРОВАНИЯ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

1 Цель работы

– исследование процесса формирования и детектирование сигналов с амплитудной модуляцией, получение статической модуляционной характеристики и выбор оптимального режима работы модулятора и детектора.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- комплект соединительных проводов;

В работе используется универсальный стенд со сменным блоком «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ». Принципиальная схема исследуемой цепи амплитудного модулятора приведена на рисунке 1.

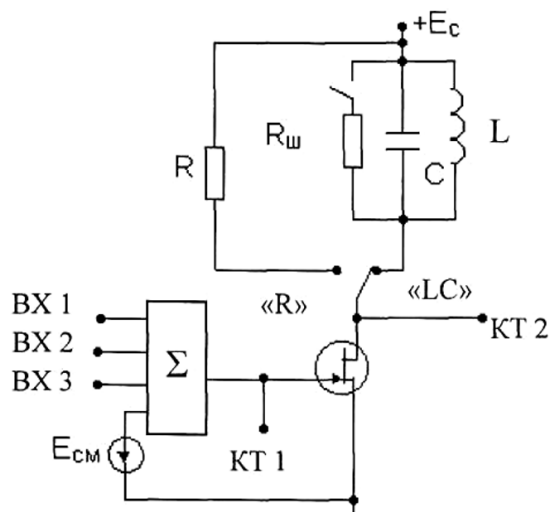


Рисунок 1 – Принципиальная схема исследуемой цепи

С помощью переключателя «R» – «LC» выбирается колебательный контур, а для снижения его добротности сопротивление $R_{ш}$ должно быть включено. В качестве источника несущего колебания используется встроенный генератор звуковой частоты (Генератор НЧ), подключаемый к гнезду ВХ 1. Источник низкочастотного модулирующего колебания с частотой 1кГц должен быть подключен к гнезду ВХ 2. В качестве измерительных приборов используются вольтметр (напряжение смещения – $E_{см}$), осциллограф и ПК в режиме анализатора спектра. Наблюдение процессов на затворе и стоке полевого транзистора осуществляется на гнезде КТ 1 и КТ 2 соответственно.

Схема исследуемой цепи амплитудного детектора приведена на рисунке 2.

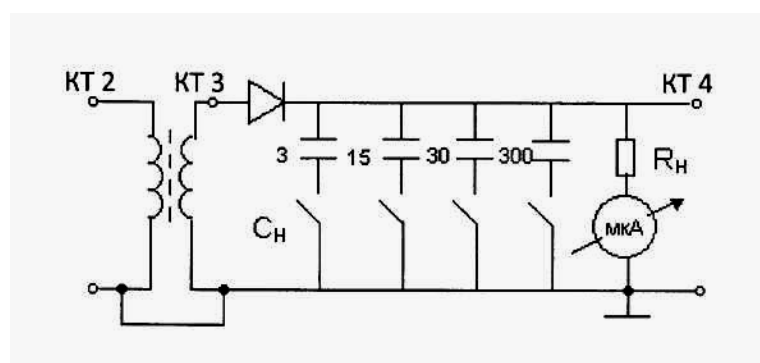


Рисунок 2 – Схема детектора АМ сигналов

Переключатель «С_н» дает возможность изменять в широких пределах постоянную времени RC – цепи (нагрузка диода). Изображенный на схеме микроамперметр находится в правой части приборной панели вверху стенда.

В качестве источника АМ сигнала с относительно низкой частотой несущего колебания ($f_{Н1} = 13...15$ кГц) используется амплитудный модулятор, настроенный на оптимальный режим работы. Выход амплитудного модулятора (гнездо КТ 3) является входом детектора.

В качестве источника АМ сигнала с повышенной частотой несущего колебания используется генератор, расположенный блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ ($f_{Н2}=110$ кГц). При использовании этого генератора его выход так же подключается ко входу детектора (гнездо КТ3), но при этом нагрузка модулятора должна являться активной (кнопка «R» нажата). При этом одновременно отключается ёмкость контура (на схеме макета это не показано) и исключается шунтирующее действие расстроенного низкочастотного контура ($f_{Н1} \approx 15$ кГц) на генератор высокочастотного сигнала ($f_{Н2}=110$ кГц).

Измерительные приборы подключаются ко входу (гнездо КТ3) или к выходу детектора (гнездо КТ4). Используются вольтметр, осциллограф и анализатор спектра (ПК).

3 Основные теоретические сведения

3.1 Амплитудная модуляция

При передаче сигналов, несущих сообщения (обычно низкочастотные), с помощью радиоволн их спектры необходимо перенести в область высоких частот. Для этого достаточно изменить в соответствии с передаваемым сообщением параметры высокочастотного колебания, называемого *несущим*. Такое преобразование можно произвести в нелинейных системах. В качестве несущих чаще всего используются непрерывные гармонические колебания.

Физический процесс изменения одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением, сопровождающийся нелинейным преобразованием низкочастотного спектра модулирующего сигнала в спектр в области высокочастотного несущего колебания, называется *модуляцией*.

Модуляция высокочастотного колебания по амплитуде, частоте или фазе называется *амплитудной* (АМ), *частотной* (ЧМ) или *фазовой* (ФМ) модуляцией. При этом ширина спектра модулирующего сигнала выбирается малой по сравнению с частотой несущего колебания, а сам сигнал оказывается медленной функцией времени по сравнению с несущим колебанием.

Обратным процессу модуляции является процесс детектирования (демодуляции).

Детектированием называется преобразование модулированного высокочастотного сигнала в низкочастотное колебание, соответствующее закону модуляции (восстановление передаваемого сообщения из модулированного сигнала).

Модуляция и детектирование сопровождаются трансформацией частотных спектров и поэтому являются нелинейными процессами, т.е. могут быть реализованы в нелинейных или в линейных параметрических системах.

Амплитудной модуляцией (АМ) называют образование сигнала путём изменения амплитуды гармонического колебания («несущей») пропорционально мгновенным значениям напряжения или тока другого, более низкочастотного электрического сигнала (сообщения).

Пусть $U_c(t) = U_\Omega \cdot \cos(\Omega t)$ – низкочастотный информационный сигнал (сообщение), а $U_n(t) = U_{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t)$ – несущее колебание. Тогда под воздействием сообщения на амплитуду «несущей» $U_{ам}(t)$ образуется новое колебание, в котором изменяется только амплитуда (рисунок 1):

$$U_{амс}(t) = U_{ам}(t) \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Амплитуда «несущей» будет изменяться по линейному закону:

$$U_{ам}(t) = U_{\omega_0} + k \cdot U_c(t) = U_{\omega_0} + k \cdot U_\Omega \cos(\Omega t) = U_{\omega_0} \cdot (1 + m \cdot \cos(\Omega t)), \quad (2)$$

где k – коэффициент пропорциональности, а

$$m = k \cdot U_\Omega / U_{\omega_0} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} \quad (3)$$

– относительное изменение амплитуды «несущей», называемое **коэффициентом модуляции** или **глубиной модуляции**.

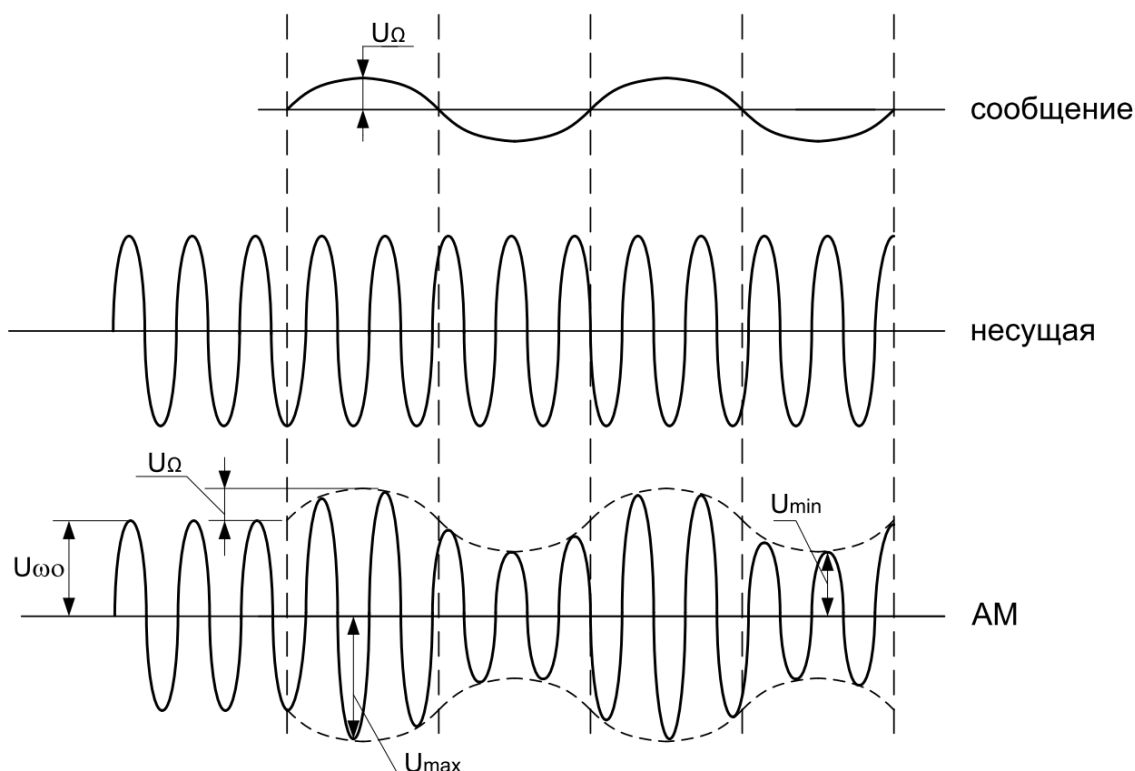


Рисунок 3 – Иллюстрация процесса амплитудной модуляции

Подставив в выражение (1) значение амплитуды «несущей» (2) получим:

$$U_{амс}(t) = U_{\omega_0} \cdot (1 + m \cdot \cos(\Omega t)) \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (4)$$

При амплитудной модуляции сигналов происходит перемножение: двух функций: высокочастотного колебания с частотой ω_0 и модулирующего гармонического сигнала с частотой Ω . Эту процедуру можно осуществить в нелинейной системе при задании на вход суммы несущего и модулирующего сигналов и выделении на выходе их произведения. Спектр выходного сигнала содержит составляющие с частотами, отсутствовавшими у исходных колебаний. Количество и частоты новых составляющих зависят от вида нелинейного элемента, и его вольт-амперной характеристики (ВАХ).

Перемножение двух функций в выражении (4) представляет собой произведение косинусов, которое удобно представить в виде косинуса суммы, что позволяет получить:

$$U_{амс}(t) = U_{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{mU_{\omega_0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{mU_{\omega_0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (5)$$

где $\frac{mU_{\omega_0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 + \Omega)t$ – верхняя боковая составляющая, $\frac{mU_{\omega_0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t$ – нижняя боковая составляющая.

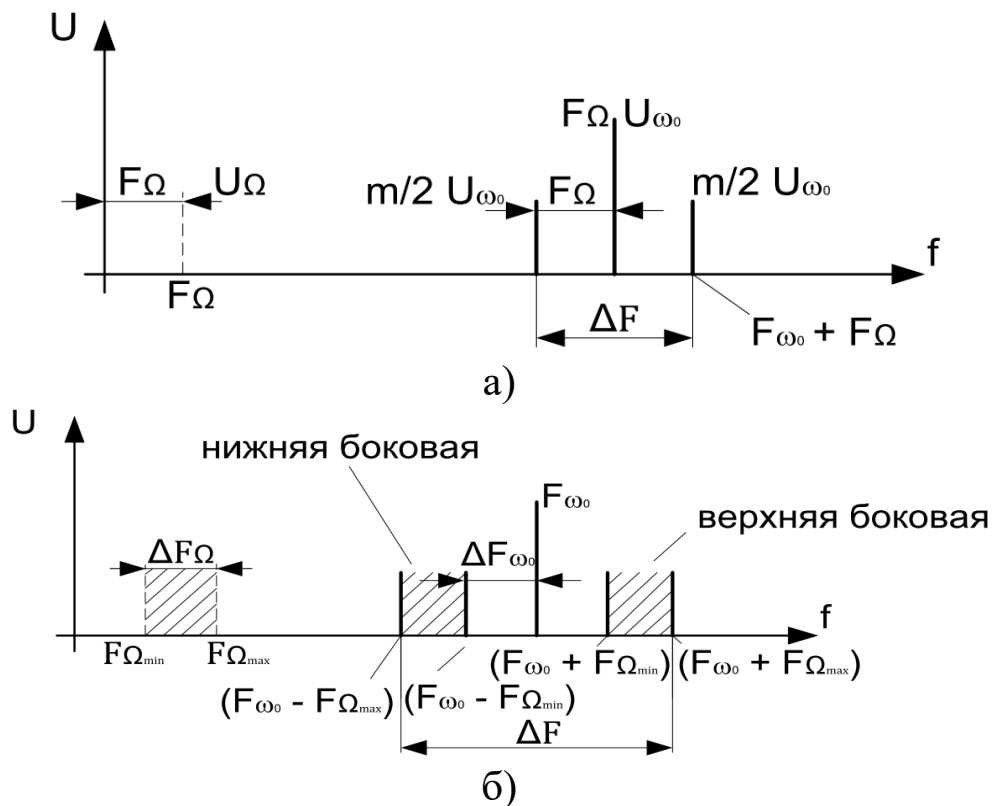


Рисунок 4 – Спектр частот при амплитудной модуляции: модулирующий сигнал занимает полосу частот от 0 до F_Ω (а) и модулирующий сигнал занимает полосу частот от $F_{\Omega_{min}}$ до $F_{\Omega_{max}}$ (б)

В зависимости от того, передаётся ли весь спектр АМ колебания или только его часть, различают два способа АМ:

1. **Амплитудная модуляция с двумя боковыми полосами (АМ с ДБП).** Передаётся весь спектр частот. В общем случае (передача сообщения в полосе частот $F_{\Omega_{\min}} \dots F_{\Omega_{\max}}$) в спектре появляются 2 боковые полосы и ширина полосы частот равна: $\Delta F_{AM} = 2 \cdot F_{\Omega}$.

2. **Однополосная амплитудная модуляция (АМ с ОБП).** При АМ с ОБП полоса частот передаваемого сообщения переносится в область высоких частот без расширения общей полосы пропускания, т.е.: $\Delta F_{общ} = \Delta F_{\Omega}$.

Преимущества АМ с ОБП:

1. Сокращение полосы частот $\rightarrow$ рост числа каналов.
2. Сокращение мощности передатчика и рост мощности в передаваемой полосе.

3. Большая помехоустойчивость.

Недостаток: сложность приёма, т.к. не передаётся «несущая».

Как следует из выражения (4) АМ сигнал образуется перемножением двух колебаний: сообщения и «несущей». В простейшем случае для перемножения можно использовать схему с нелинейным элементом (например, с диодом). Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента выглядит, как представлено на рисунке 5.

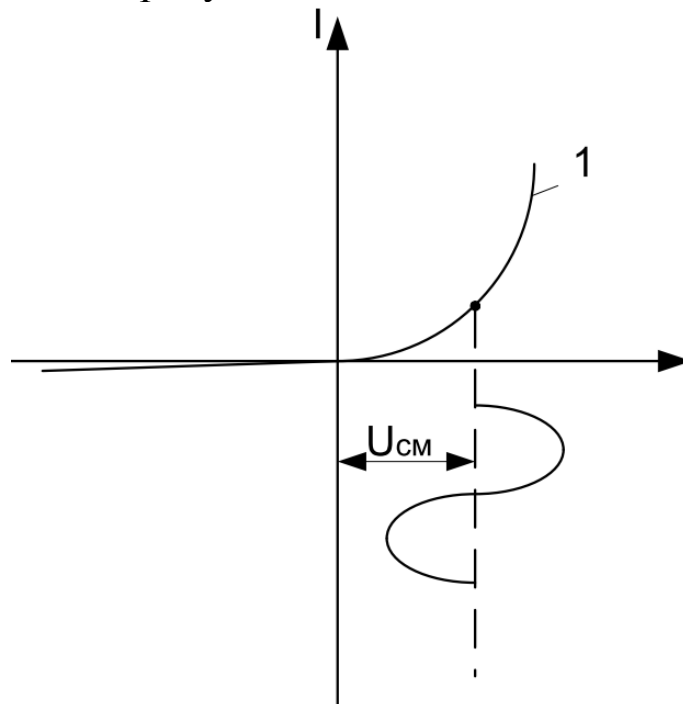


Рисунок 5 – Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

Наилучшей аппроксимацией ВАХ нелинейного элемента в амплитудном модуляторе является полином второй степени:

$$i = a_0 + a_1 U + a_2 U^2,$$

где I – ток, U – напряжение, a_0, a_1, a_2 – коэффициенты многочлена.

Если на вход нелинейного элемента подать бигармонический сигнал:

$$U = U_n + U_c = U_{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + U_{\Omega} \cos(\Omega t)$$

где $U_{\omega_0} \cos \omega_0 t$ – сигнал несущей частоты (модулируемый); $U_{\Omega} \cos \Omega t$ – модулирующий (низкочастотный) сигнал, то в спектре тока i , кроме гармоник входных сигналов, образуются комбинационные колебания второго порядка:

$$\begin{aligned} i &= a_0 + a_1 U + a_2 U^2 = a_0 + a_1 (U_c + U_n) + a_2 (U_c + U_n)^2 = a_0 + a_1 \cdot U_{\Omega} \cos(\Omega t) + \\ &+ a_1 \cdot U_{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + a_2 U_{\Omega}^2 \cos^2 \Omega t + 2a_2 U_{\Omega} U_{\omega_0} \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot U_{\omega_0}^2 \cos^2(\omega_0 t) = \\ &= a_0 + 0,5a_2 (U_{\Omega}^2 + U_{\omega_0}^2) + a_1 U_{\Omega} \cos \Omega t + \frac{a_2 U_{\Omega}^2}{2} \cos(2\Omega t) + a_2 U_{\Omega} U_{\omega_0} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ &+ a_1 U_{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + a_2 U_{\Omega} U_{\omega_0} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{a_2 U_{\omega_0}^2}{2} \cos(2\omega_0 t). \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что I содержит постоянную составляющую, составляющие нижних частот ($\Omega, 2\Omega$), составляющую несущей частоты (ω_0), составляющие двух боковых частот ($\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$) и вторую гармонику несущей частоты.

Для выделения из спектра тока полезных компонентов сигнала ($\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$) необходимо применить полосовой фильтр с центральной частотой ω_0 и полосой пропускания не уже 2Ω . В простейшем варианте таким полосовым фильтром может быть параллельный контур с $\omega_{рез} = \omega_0$ и невысокой добротностью. При высокой добротности контура в спектре выходного напряжения будут подавлены боковые частоты (рисунок 6).

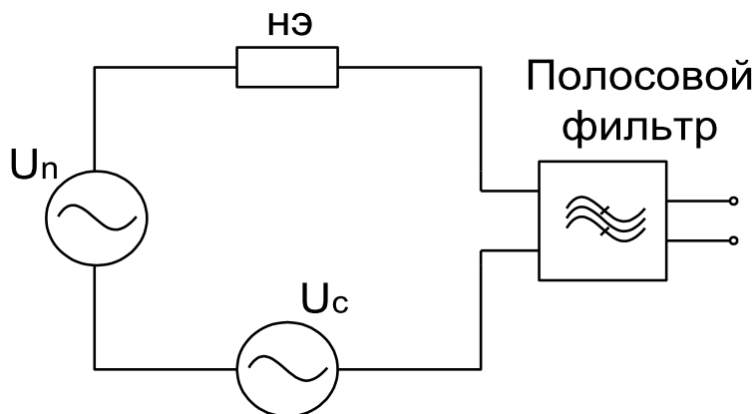


Рисунок 6 – Схема формирования АМ сигнала с помощью нелинейного элемента

3.2 Структурные схемы модуляторов АМ сигнала

На рисунке 7 представлена структурная схема простейшего пассивного АМ модулятора.

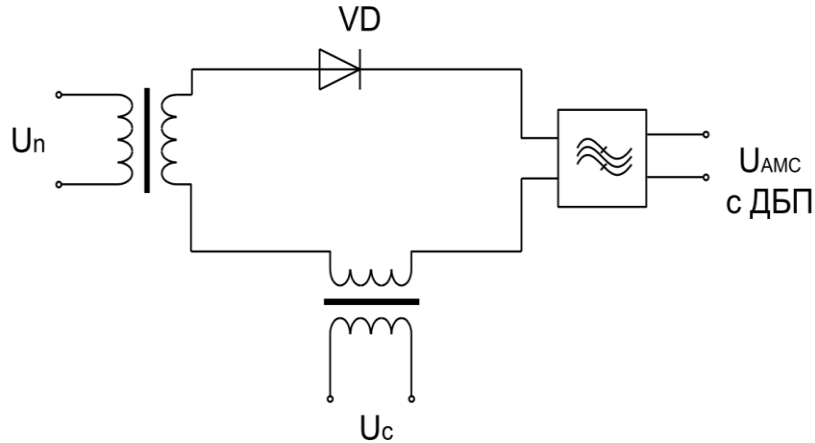


Рисунок 7 – Простейший пассивный модулятор

Модуляторы, в которых осуществляется подавление «несущей» и одной боковой полосы называют балансными (рисунок 8).

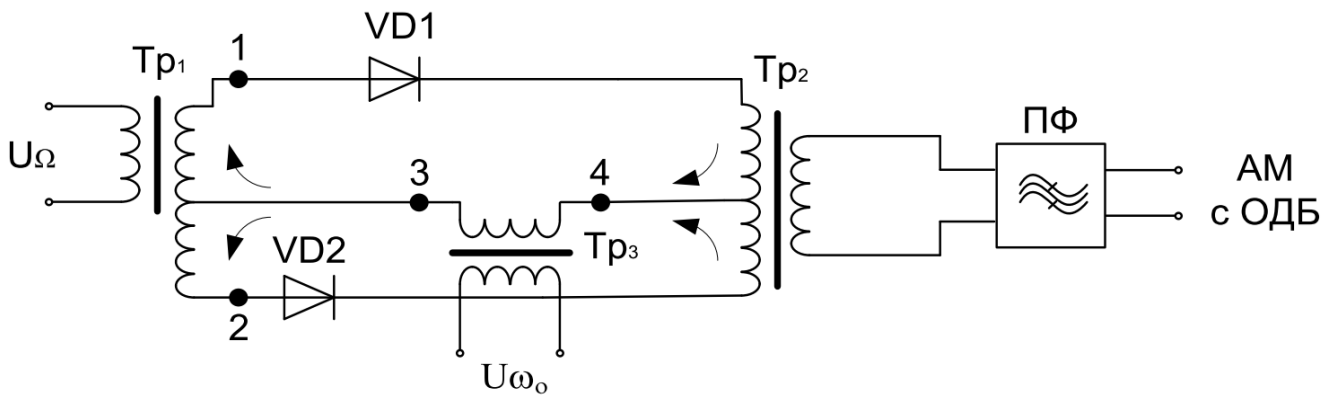


Рисунок 8 – Балансный модулятор

Сигнал U_Ω , подаваемый через трансформатор Tr_1 (рисунок 8), при отсутствии «несущей» не поступает на трансформатор Tr_2 , так как диоды $VD1$ и $VD2$ включены встречно. Когда положительная полуволна «несущей» поступает в точку «3» трансформатора Tr_3 ток поступает через диоды, как показано стрелками, и диоды открываются, в результате чего падение напряжения на них уменьшается почти до нуля. Это обеспечивает протекание тока через диоды от сигнала U_Ω .

Воздействуя на нелинейный элемент, сигнал и «несущая» согласно выражению:

$$i = a_0 + 0,5a_2(U_{\Omega}^2 + U_{\omega_0}^2) + a_1U_{\Omega}\cos\Omega t + \frac{a_2U_{\Omega}^2}{2}\cos(2\Omega t) + a_2U_{\Omega}U_{\omega_0}\cos(\omega_0 - \Omega)t +$$

$$+ a_1U_{\omega_0}\cos(\omega_0 t) + a_2U_{\Omega}U_{\omega_0}\cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{a_2U_{\omega_0}^2}{2}\cos(2\omega_0 t). \quad (7)$$

будут образовывать ряд колебаний (в том числе «несущую» и две боковых полосы). Так как несущая на фильтр ПФ не поступает, то с выхода трансформатора Tr_2 будут сниматься боковые частоты $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$.

Одна из этих частот с помощью фильтра выделяется (например, верхняя, как на рисунке 6), другая подавляется.

Между плечами балансного модулятора всегда имеется некоторая асимметрия, поэтому несущая частота не компенсируется полностью. Кроме того, на выходе трансформатора Tr_2 присутствует частота Ω и её гармоники.

Для избавления от гармоник частоты модуляции применяют специальную схему балансного модулятора, так называемый кольцевой модулятор. В кольцевом модуляторе используется амплитудная модуляция (в некоторых случаях с подавлением «несущей»), которая получается простым перемножением двух сигналов. Это перемножение дает новый сигнал, который содержит частоты, которых нет во входных сигналах, точнее результат перемножения дает сумму и разность частот входных сигналов (верхняя и нижняя боковые полосы).

Кольцевой модулятор состоит из кольца из четырех диодов и пары трансформаторов (рисунок 9).

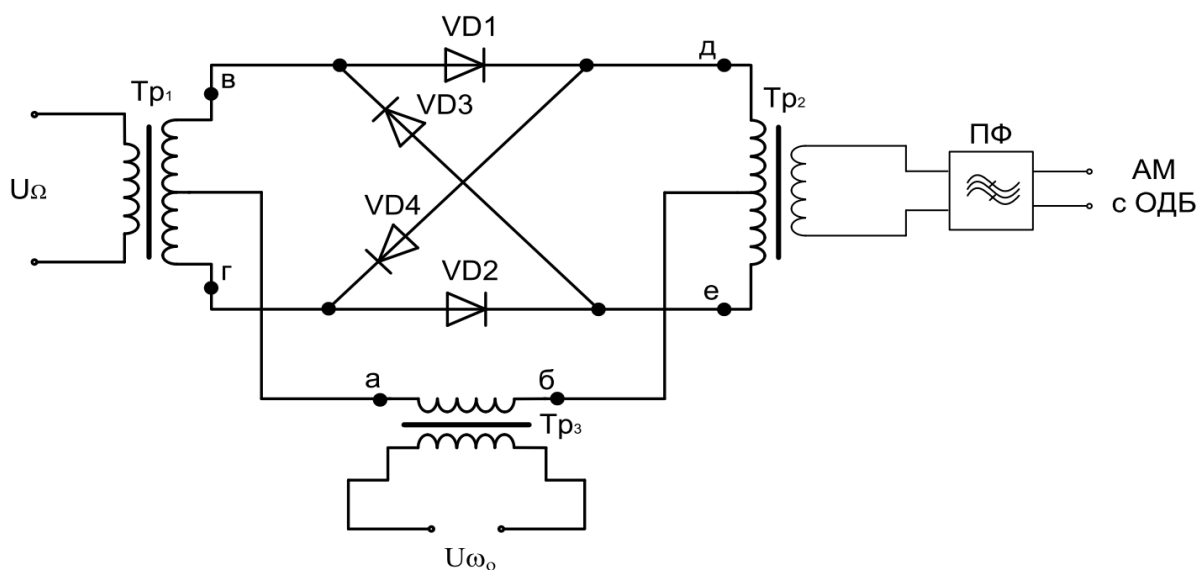


Рисунок 9 – Кольцевой модулятор

Кольцевой модулятор представленный на рисунке 9 состоит из параллельно включенных двух балансных модуляторов на диодах $VD1$ – $VD4$.

При положительных полуволнах несущего колебания работает только первый модулятор (диоды VD1, VD2 открыты, а диоды VD3, VD4 закрыты), при отрицательных – только второй модулятор (диоды VD3, VD4 открыты, а диоды VD1, VD2 закрыты).

Для нахождения оптимального режима работы модулятора необходимо получить (расчетным или экспериментальным путем) статическую модуляционную характеристику (СМХ) $I_{m1}=f(E_{cm})$ при $U_{\omega}=\text{const}$. Эта характеристика показывает возможности модулятора в изменении амплитуды сигнала.

Строятся несколько таких характеристик для разных амплитуд колебаний несущей частоты (U_{ω}) и из них выбирается та, которая имеет наибольший по протяженности линейный участок. Требование линейности СМХ вытекает из определения АМ. Тангенс угла наклона линейного участка СМХ (угла α на рис. 10) является коэффициентом пропорциональности K_{AM} .

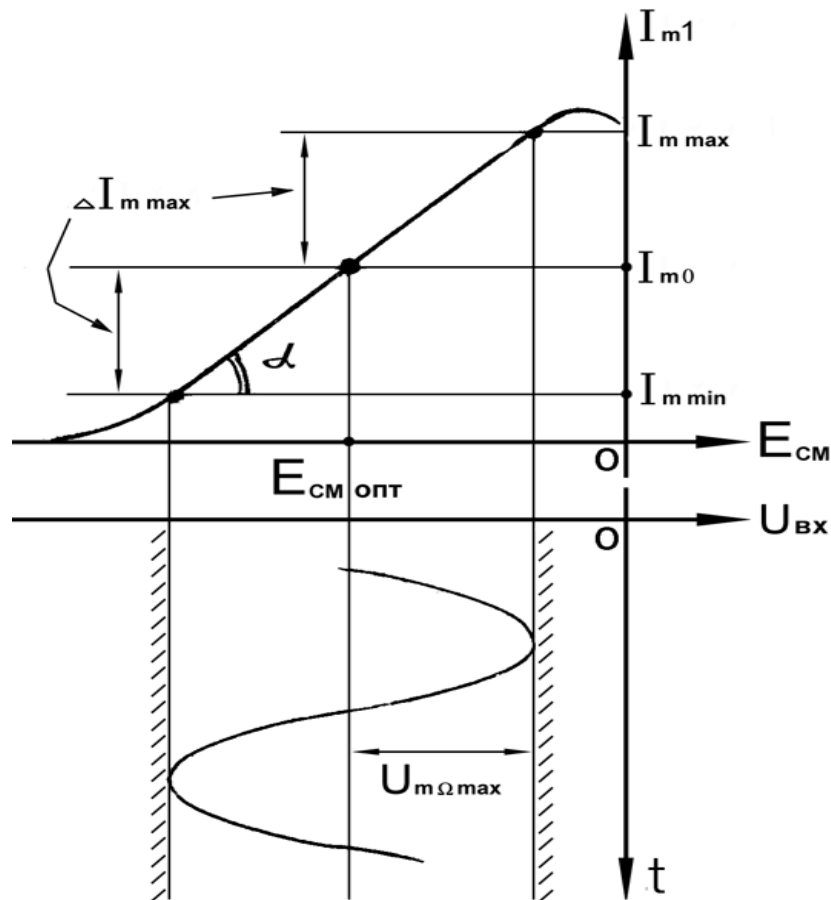


Рисунок 10 – Статическая модуляционная характеристика

С помощью СМХ можно определить оптимальный режим амплитудного модулятора и его параметры:

- оптимальную амплитуду несущей частоты U_{ω} (по максимальной протяженности линейного участка СМХ);
- границу линейного участка СМХ (средняя точка линейного участка соответствует оптимальному напряжению смещения и амплитуде несущей частоты (по вертикальной оси));
- максимальную амплитуду модулирующего сигнала U_{Ω} – половина проекции линейного участка СМХ на горизонтальную ось графика;
- максимальную девиацию амплитуды $\Delta I_{\max}$ – половина проекции линейного участка СМХ на вертикальную ось;
- максимально достижимую глубину модуляции $M_{AM_{\max}} = \Delta I_{m \max} / I_{m0}$.

3.3 Принцип детектирования АМ сигналов в нелинейной цепи

Пусть нелинейный элемент (НЭ) обладает квадратичной ВАХ. Такая аппроксимация соответствует любому НЭ при малых амплитудах входных сигналов. При гармоническом модулирующем сигнале спектр тока АМ детектора состоит из первых и вторых гармоник всех трех сигналов, а также комбинационных колебаний второго порядка между парами этих сигналов:

$$\begin{aligned}
 i = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 = a_0 + a_1 & \left(U_{\omega 0} \cos(\omega_0 t) + \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t \right) + \\
 + a_2 & \left(U_{\omega 0} \cos(\omega_0 t) + \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t \right)^2 = a_0 + \frac{a_2 U_{\omega 0}^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) + \\
 + a_2 U_{\omega 0}^2 m \cos \Omega t + a_1 \cdot \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t + a_1 \cdot U_{\omega 0} \cos(\omega_0 t) + a_1 \cdot \frac{m U_{\omega 0}}{2} \cdot \cos(\omega_0 + \Omega)t + \\
 + a_2 \cdot \frac{m^2 U_{\omega 0}^2}{4} \cos^2(2\Omega t) + a_2 \cdot \frac{m^2 U_{\omega 0}^2}{8} \cos(2\omega_0 - 2\Omega)t + a_2 \cdot \frac{m^2 U_{\omega 0}^2}{2} \cos(2\omega_0 - \Omega)t + \\
 + a_2 \cdot \frac{U_{\omega 0}^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \cos^2(2\omega_0 t) + a_2 \cdot \frac{m U_{\omega 0}^2}{2} \cos(2\omega_0 + \Omega)t + a_2 \cdot \frac{m^2 U_{\omega 0}^2}{8} \cos(2\omega_0 + 2\Omega)t
 \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что кроме «несущей» ω_0 и двух боковых частот ($\omega_0 - \Omega$, $\omega_0 + \Omega$), из которых состоял сигнал до детектирования, появился ряд частот ВЧ и НЧ, и постоянная составляющая, а также вторая гармоника сообщения.

Спектр частот в данном случае представлен на рисунке 11.

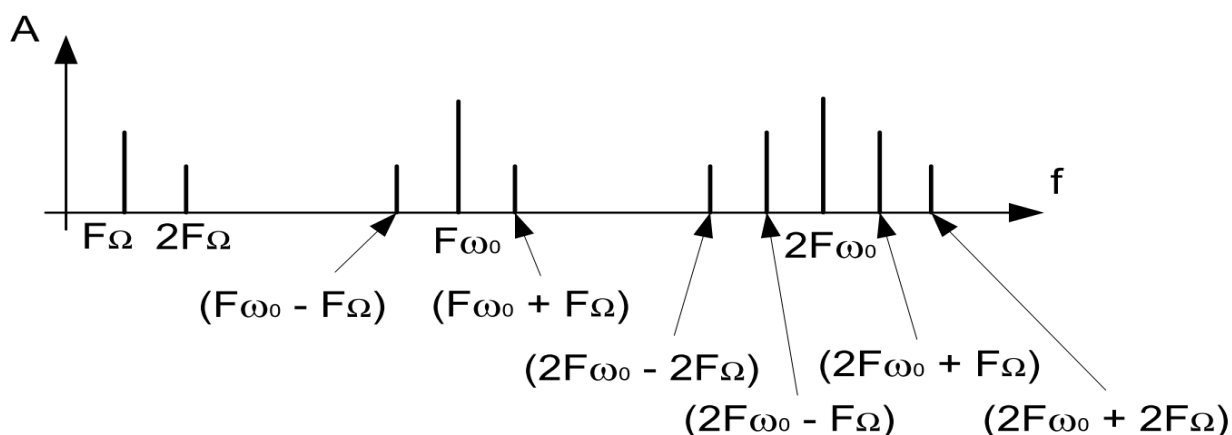


Рисунок 11 – Спектральный состав выходного тока напряжения детектора АМ при нормальных сигналах

Для выделения из всего спектра тока низкочастотных сигналов в качестве нагрузки НЭ применяют ФНЧ, а в простейшем случае – параллельное соединение R_n и C_n , сопротивление которых $z_n(\omega)$ велико на низких частотах и очень мало на частотах вблизи несущей ω_0 . Избавиться от второй гармоники 2Ω с помощью фильтра невозможно (кроме частных случаев), т.к. спектр модулирующего сигнала достаточно широк и рассматриваемый сигнал с частотой Ω и его гармоники могут оказаться в пределах полосы пропускания ФНЧ. Появление второй гармоники при детектировании связано с работой на квадратичном участке ВАХ НЭ, что соответствует малым амплитудам входных сигналов.

Для больших сигналов на входе детектора ВАХ НЭ может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией, причем напряжение отсечки U_1 для диода обычно считают равным нулю:

$$i = \begin{cases} S \cdot U, & \text{при } U \geq 0, \\ 0, & \text{при } U < 0. \end{cases} \quad (8)$$

В практических схемах детекторов с этой целью часто вводят смещение, компенсирующее напряжение отсечки.

Пусть на входе амплитудного детектора (АД) действует АМ сигнал $u_{\text{вх}} = U_m(t) \cos \omega_0 t$, где $U_m(t)$ является медленно меняющейся функцией времени (по сравнению с быстрым изменением текущей фазы $\omega_0 t$). За один период высокочастотного колебания $T_{\text{вч}} = 2\pi/\omega_0$ амплитуда (огибающая) АМ сигнала не успевает заметно измениться (при выполнении условия $\Omega \ll \omega_0$). Это позволяет считать форму АМ сигнала за один период $T_{\text{вч}}$ – гармонической (точнее – квазигармонической) и при выводе расчетных соотношений пользоваться методом угла отсечки. Напряжение на выходе цепи $u_{\text{вых}} = U_{\text{но}} + u_{\sim}$, состоящее из медленно меняющегося

слагаемого U_{HO} (будем считать его постоянным за время $T_{\text{вч}}$) и быстро меняющегося второго сигнала $u_{\approx}$, описывает переходной процесс перезаряда конденсатора C_{H} . При правильно выбранной емкости C_{H} $1/(\omega_0 R_{\text{H}}) \ll C_{\text{H}} \ll 1/(\Omega R_{\text{H}})$ $u_{\approx} \ll U_{\text{HO}}$, поэтому величиной $u_{\approx}$ для количественных расчетов можно пренебречь, т. е. $u_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{HO}}(t)$.

К диоду детектора (рис. 12) приложена разность напряжений между входом и выходом:

$$u = U_m(t) \cos \omega_0 t - U_{\text{HO}}(t). \quad (9)$$

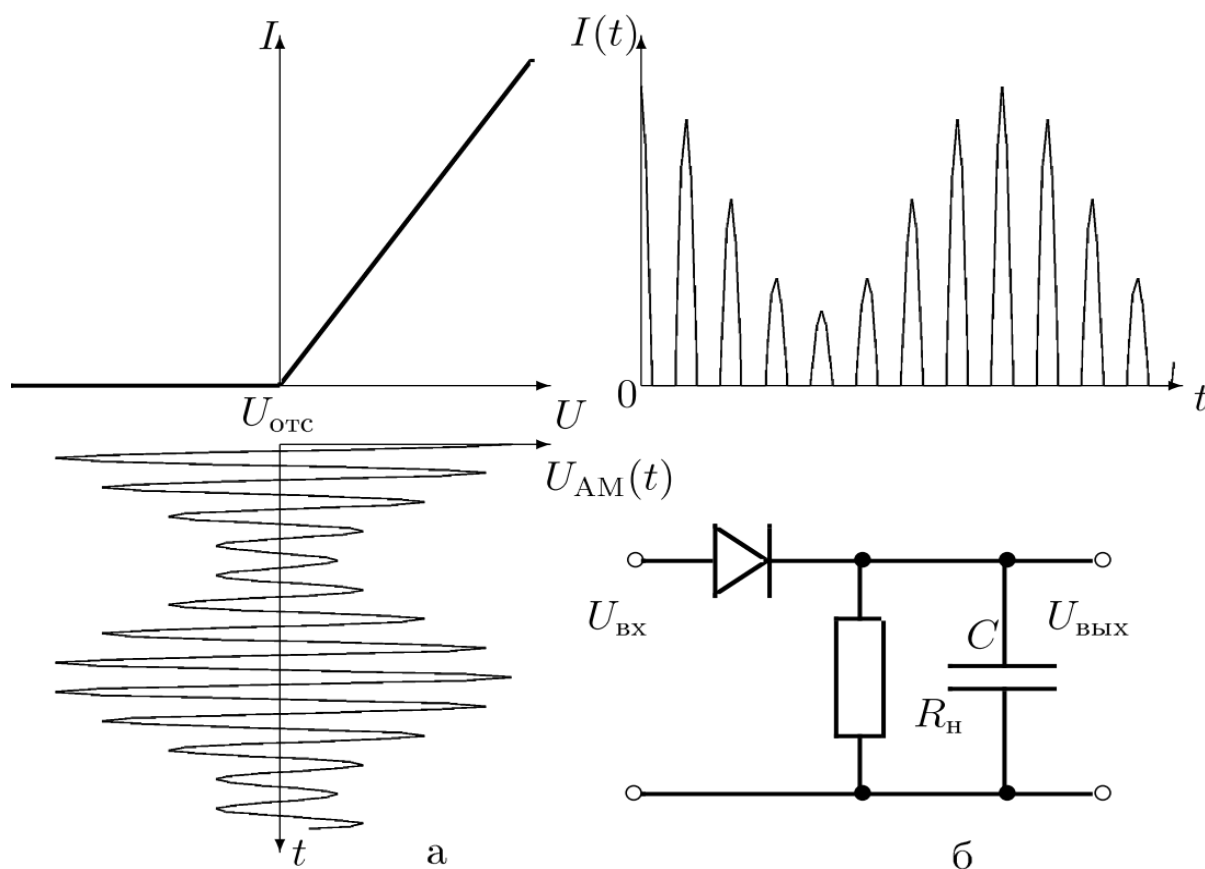


Рисунок 12 – Характеристика детектирования для больших сигналов (а) и схема диодного детектора (б)

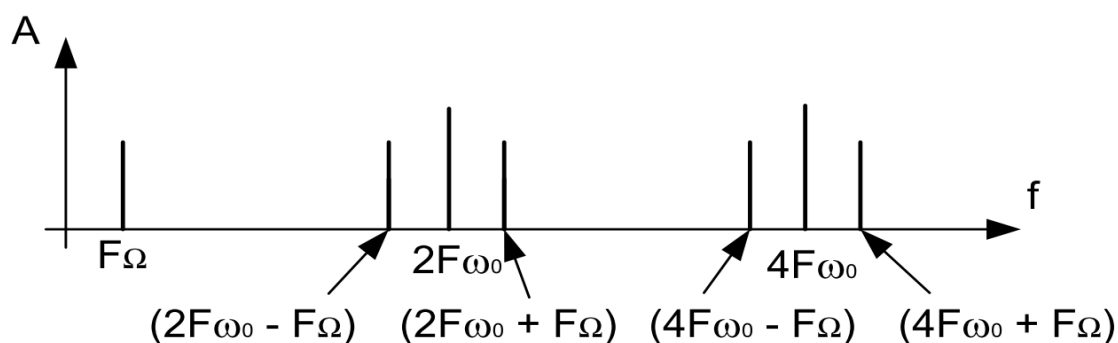


Рисунок 13 – Спектр частот после нелинейного элемента с линейно-ломанной вольт-амперной характеристикой

При $\omega_0 t = \theta$, $U_m(t) \cos \theta - U_{H0}(t) = 0$, откуда:

$$\cos \theta = \frac{U_{H0}(t)}{U_m(t)}. \quad (10)$$

При $\omega_0 t = 0$:

$$u_{\max} = U_m(t) - U_{H0}(t) = U_m(t)[1 - \cos \theta]. \quad (11)$$

Постоянная составляющая тока равна:

$$I_0 = \alpha_0(\theta) i_{\max} = \alpha_0(\theta) \frac{u_{\max}}{R_i} = U_m(t)[1 - \cos \theta] \frac{\alpha_0(\theta)}{R_i}.$$

Выходное напряжение детектора равно:

$$U_{H0}(t) = I_0 R_H = U_m(t)[1 - \cos \theta] \alpha_0(\theta) \frac{R_H}{R_i}.$$

Разделив обе части уравнения на $U_m(t)$, получим:

$$\cos \theta = (1 - \cos \theta) \alpha_0(\theta) \frac{R_H}{R_i} \quad \text{или} \quad \frac{R_H}{R_i} = \frac{\cos \theta}{\alpha_0(\theta)(1 - \cos \theta)}.$$

Из последнего выражения следует, что угол отсечки θ является сложной функцией отношения сопротивлений $\theta = f(R_H/R_i)$, причём нет никакой зависимости угла отсечки от амплитуды сигнала $U_m(t)$. Следовательно, при выбранных параметрах схемы детектора (R_H и $R_i = 1/S$) угол отсечки $\theta = \text{const}$ и $\cos \theta = \text{const}$. Из выражения (10) следует:

$$U_{H0}(t) = U_m(t) \cos \theta. \quad (12)$$

Из последнего выражения следует, что выходное напряжение детектора с точностью до постоянного коэффициента ($\cos \theta = \text{const}$) повторяет огибающую входного сигнала $U_m(t)$. Следовательно, в рассмотренном случае (больших сигналов) детектирование происходит без искажений.

Для определения границы между слабыми и сильными сигналами необходимо рассчитать или экспериментально определить характеристику детектирования $I_0 = \varphi(U_m)$ при $M_{AM} = 0$ (рис. 14).

Эта характеристика по смыслу обратна СМХ амплитудного модулятора: она показывает, как меняется ток I_0 (а, следовательно, и $U_{H0}(t) = I_0 R_H$) при изменении амплитуды входного сигнала (полезная информация в АМ сигнале заключена в его огибающей). Если последняя приходится на линейный участок характеристики детектирования, то искажения при детектировании отсутствуют. При малых сигналах (участок левее точки А на рис. 14) нет пропорциональности I_0 амплитуде входного сигнала, следовательно выходное напряжение детектора не соответствует огибающей входного сигнала, т.е. при малых сигналах детектирование сопровождается искажениями.

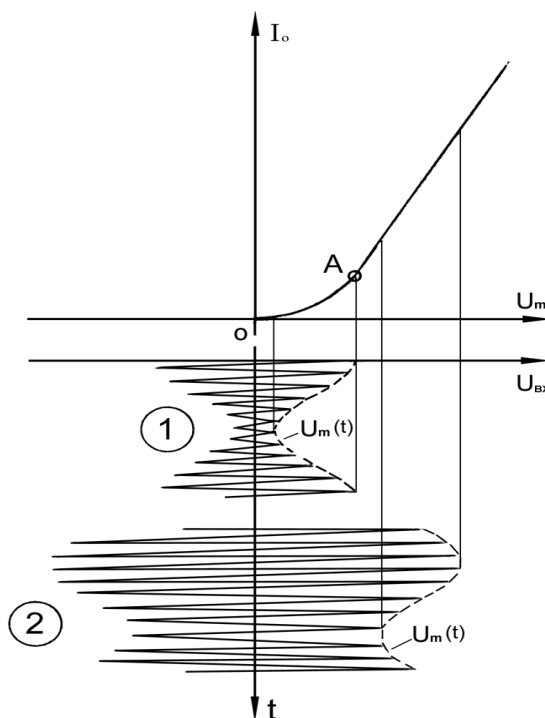


Рисунок 14 – Характеристика детектирования (режим малых (1) и больших (2) сигналов)

Граница линейного участка (точка А) характеристики детектирования соответствует границе слабых и сильных сигналов. Рассмотренная характеристика детектирования позволяет определять условия, при которых искажения отсутствуют – выбрать амплитуду несущей на входе детектора и максимально допустимую глубину модуляции $M_{AM \max}$.

При частотной модуляции (ЧМ) мгновенные значения сигнала сообщения (тока или напряжения) изменяют частоту переносчика («несущей»), оставляя неизменной его амплитуду (рисунок 15):

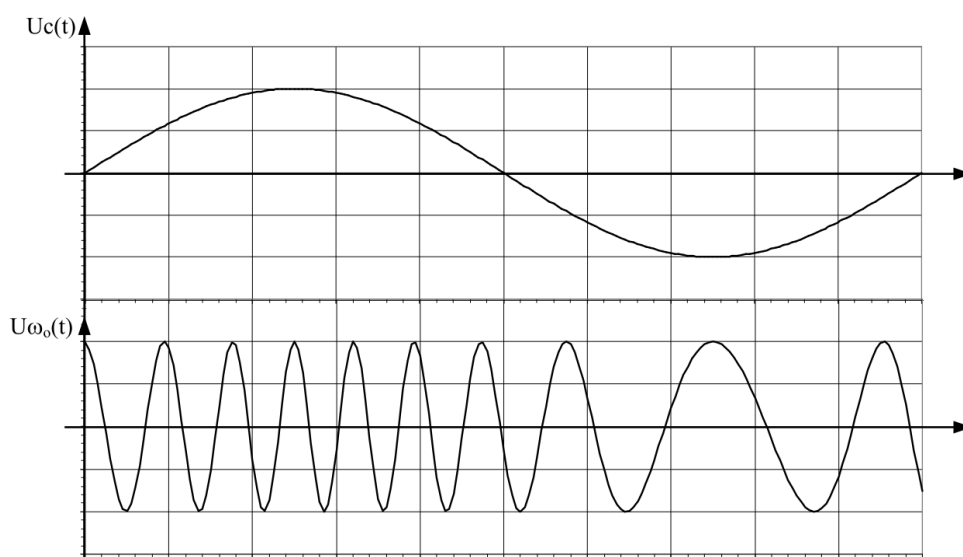


Рисунок 15 – Временная диаграмма частотной модуляции

Частота «несущей» изменяется в соответствии с выражением:

$$\omega = \omega_0 + m_q \Omega \cos(\Omega t), \quad (13)$$

где $m_q = \Delta\omega / \Omega$ – *коэффициент частотного отклонения*, или *индекс частотной модуляции*;

$\Delta\omega$ – *девиация угловой частоты*, или максимальное отклонение частоты переносчика (в одну сторону) от исходного значения;

ω_0 – среднее значение угловой частоты переносчика.

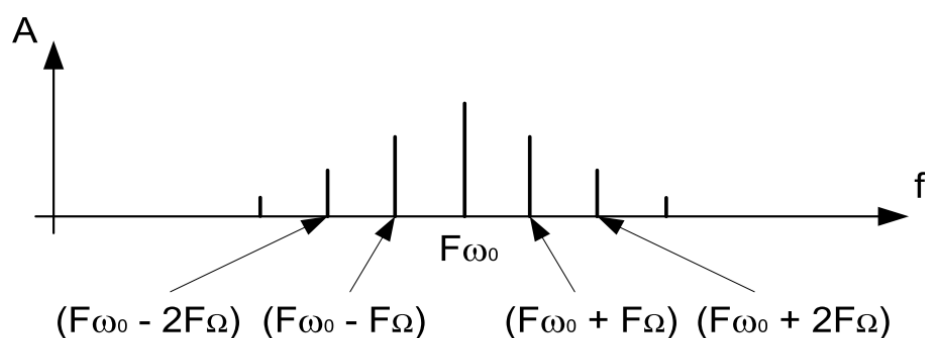
Девиация частоты зависит от амплитуды модулирующего сообщения. При увеличении амплитуды сообщения частота переносчика $F\omega_0$ возрастает, при уменьшении (отрицательная полуволна сообщения) – снижается.

Полагая, что начальная фаза равна нулю (при $t = 0$), можно записать уравнение сигнала при частотной модуляции:

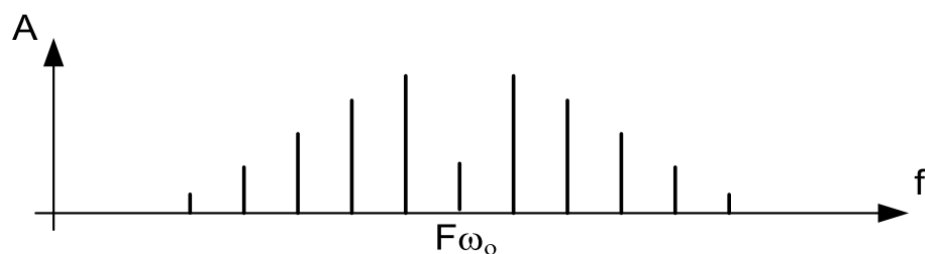
$$U_{чмс}(t) = U_{\omega_0} \cdot \cos\left[\left(\omega_0 + m_q \Omega \sin(\Omega t)\right)t\right]. \quad (14)$$

Спектр частот при ЧМ бесконечно велик, и для точного воспроизведения передаваемого сообщения нужна бесконечно большая ширина полосы. Полоса частот при ЧМ может быть приближённо определена из выражения:

$$\Delta F_{чм} = 2 \cdot F_{\Omega \max} \cdot (m_q + 1) \quad (15)$$



а)



б)

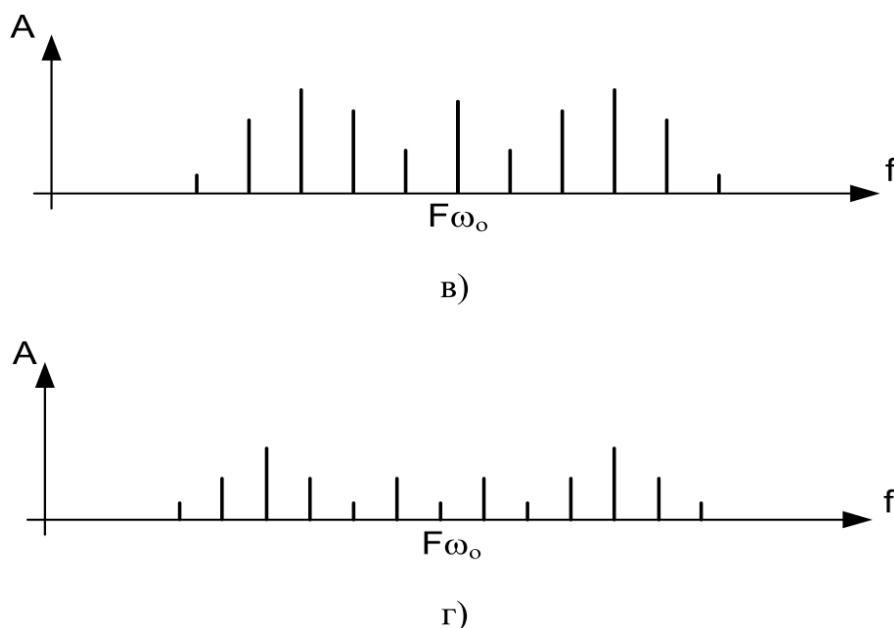


Рисунок 16 – Спектр частот при частотной модуляции: а – спектр частот ЧМ при $m_q=1$; б – спектр частот ЧМ при $m_q=2,5$; в – спектр частот ЧМ при $m_q=4$; г – спектр частот ЧМ при $m_q=5$.

Однако боковые частоты высших порядков имеют ничтожную интенсивность и ими можно пренебречь.

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Получите статическую модуляционную характеристику (СМХ) модулятора

Непосредственному выполнению лабораторного задания предшествует определение резонансной частоты контура. Для этого необходимо на один из входов сумматора подать сигнал от встроенного генератора НЧ напряжением около 0,5 В. Изменяя частоту генератора НЧ в диапазоне от 12 до 16 кГц, зафиксируйте частоту, соответствующую максимуму выходного напряжения на гнезде КТ2. Контроль выходного напряжения может осуществляться с помощью встроенного индикатора (микроамперметра стенда), встроенного комбинированного прибора или осциллографа. Точное значение резонансной частоты $f_{рез}$ вносится в таблицу 1.

Таблица 1 – Промежуточные результаты

$f_{рез} = \dots$ кГц ;	$U_{\omega} = \dots$ В;	$U_{\Omega} = 0$
$E_{см}, В$		

$U_{\text{ВЫХ}}, \text{ В}$	
$I_{\text{с1}}, \text{ мА}$	

СМХ $I_{\text{с1}}=f(E_{\text{см}})$ измеряются на резонансной частоте контура при отсутствии модулирующего сигнала ($U_{\Omega}=0$) для двух значений напряжения высокочастотного сигнала на выходе сумматора: $U_{\omega}=0,5 \text{ В}$ и $U_{\omega}=1,0 \text{ В}$. Изменяя напряжение смещения с шагом $0,5 \text{ В}$, измерьте выходное напряжение в КТ2. Данные эксперимента в обоих случаях внесите в две таблицы, аналогичные приведенной выше. Первая гармоника тока стока рассчитывается по формуле:

$$I_{\text{с1}} = U_{\text{ВЫХ}} / R_{\text{ЭО}},$$

где $R_{\text{ЭО}}=1\text{кОм}$ – сопротивление контура на резонансной частоте.

По таблицам на одном графике постройте обе зависимости $I_{\text{с1}}=f_1(E_{\text{см}})$ при $U_{\omega}=0,5 \text{ В}$ и $I_{\text{с1}}=f_2(E_{\text{см}})$ при $U_{\omega}=1,0 \text{ В}$.

Задание 2. Определение величины напряжений, необходимых для получения сигнала с наибольшей глубиной модуляции без заметных искажений

Оптимальный режим модулятора находится в два этапа. На первом этапе выбирается статическая модуляционная характеристика с наиболее протяженным линейным участком, на втором – определяется положение рабочей точки на этой характеристике. По этой же характеристике определяется максимальная амплитуда низкочастотного модулирующего напряжения $U_{\Omega\text{max}}$ так, чтобы модуляция осуществлялась без заметных искажений.

Соедините гнездо «1кГц» блока ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ со входом сумматора и ручкой регулятора выхода установите найденное значение $U_{\Omega\text{max}}$, помня, что вольтметры переменного напряжения показывают действующее значение $U_{\Omega}=U_{\Omega\text{max}}/\sqrt{2}$.

Установите смещение $E_{\text{см опт}}$, соответствующее середине линейного участка СМХ $I_{\text{с}}=f(E_{\text{см}})$. Установите на входе 1 сумматора выбранное значение U_{ω} ($0,5 \text{ В}$ или 1 В). Найденные величины занесите в таблицу 2.

Таблица 2 – Оптимальный режим модулятора

$f_0, \text{ кГц}$	$E_{\text{см опт}}, \text{ В}$	$U_{\omega}, \text{ В}$	$U_{\Omega\text{max}}, \text{ В}$	$R_{\text{ш}}$
				ВКЛ

В данном (оптимальном) режиме модулятор будет использован в следующей лабораторной работе как источник АМ сигналов. Поэтому чётко зафиксируйте условия эксперимента и схему соединений.

**Задание 3. Исследование формы и спектра АМ сигнала
в оптимальном режиме, а также при различных отклонениях
от этого режима**

Анализ временных диаграмм и спектров на входах и выходе модулятора при оптимальном режиме выполнять в следующей последовательности (масштаб по оси времени сохранить неизменным):

- 1) входной сигнал несущей частоты (ВХ1);
- 2) входной сигнал низкой частоты (ВХ2);
- 3) суммарный входной сигнал (КТ1);
- 4) выходное напряжение (КТ2);
- 5) форма тока стока $I_c(t)$ (КТ2, кнопка «R» нажата);
- 6) выходное напряжение при высокой добротности контура (КТ 2 при нажатой кнопке «LC» и отжатой «R_ш»).

Одновременно с осциллограммами зарисуйте спектры всех перечисленных сигналов с сохранением масштаба по оси частоты. По полученным осциллограммам определите и зафиксируйте в таблице 3 глубину модуляции M_{AM} .

Таблица 3 – Глубина модуляции

R _ш	Глубина модуляции, M_{AM}	
	по спектрограмме	по временной диаграмме
ВКЛ.		
ВЫКЛ.		

Проведите анализ и зарисуйте временные диаграммы сигналов с искажениями на выходе модулятора при режимах, отличных от оптимального («LC» и «R_ш» включены, напряжения отличны от найденных в задании 2): $E_{cm}=E_{cm\text{ опт}}+1\text{ В}$; $E_{cm}=E_{cm\text{ опт}}-1\text{ В}$; $E_{cm}=E_{cm\text{ опт}}$, $U_{\Omega} \cong 2U_{\Omega\text{max}}$.

**Задание 4. Исследование временных диаграмм и спектров сигналов
при амплитудном детектировании с различными постоянными
времени нагрузки АД**

Проведите анализ работы амплитудного модулятора при сложном модулирующем сигнале. Для этого подайте из блока «ИСТОЧНИКИ» на ВХ2 и ВХ3 сумматора низкочастотные сигналы с частотами соответственно

1 кГц и 2 кГц. Для сохранения оптимального режима модулятора амплитуду каждого из подаваемых сигналов установит равной половине $U_{\Omega\max}$. Зарисуйте осциллограммы и спектры сигналов:

- на входе модулятора (гнездо КТ1), для чего отключите источник несущей частоты ω от ВХ1;
- на выходе модулятора (гнездо КТ2) при восстановленном сигнале несущей частоты на ВХ1.

Установите оптимальный режим работы амплитудного модулятора. Зарисуйте друг под другом с сохранением масштаба осциллограммы и спектры:

- модулированного колебания на входе детектора (гнездо КТ3);
- напряжения на выходе детектора при всех значениях емкости нагрузки $C_H = 0, 3; 15; 30; 300$ нФ (гнездо КТ4).

Повторите задание (без анализа спектров) при детектировании АМ сигналов с высокой частотой несущего колебания ($f_{H2} \approx 110$ кГц). Для этого к гнездам КТ3 подключить внутренний источник АМ колебаний. Амплитуду несущей установит равной 1 В при $M_{AM} = 0,6 \dots 0,8$. Переключатель « C_H » установить вначале в положение «0». Переключатель R или LC (нагрузка полевого транзистора) установить в положение «R».

Задание 5. Исследование характеристики АД при малых и при больших амплитудах входного сигнала

Детектирование АМ сигналов с глубиной модуляции $M_{AM} > 1$. Сохраняя схему измерений, увеличьте до максимума глубину модуляции (ручку «m» установите в крайнее правое положение).

Зарисуйте осциллограммы на входе и выходе детектора при $C_H = 3$ нФ.

Измерение характеристики детектирования $I_0(U_\omega)$ произведите при действии немодулированного сигнала от встроенного генератора с частотой f_{H2} ($M_{AM} = 0$). Переключатель C_H установите в положение 15 нФ. Ток детектирования при изменении U_ω в пределах от 0 до 1 В измеряйте внутренним микроамперметром. Данные измерений занесите в таблицу 4.

Таблица 4 – Промежуточные результаты

$f_H = \dots$ кГц	$M_{AM} = 0$	$C_H = 15$ нФ
U_ω , В		
I_0 , мкА		

При этом особое внимание обратите на выявление общего вида характеристики и, в частности, её начального участка (определите U_ω при одном, двух и трех делениях шкалы микроамперметра).

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответственную численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Что такое АМ? Запишите аналитическое выражение АМ сигнала.
2. Какая форма ВАХ НЭ является наилучшей для получения АМ сигналов?
3. Что такое глубина модуляции?
4. Как измерить глубину модуляции по временной диаграмме и спектрограмме АМ сигнала?
5. Как связаны между собой ширина спектра модулирующего и модулированного сигнала при АМ?
6. Как распределяется мощность между составляющими АМ сигнала?
7. Какова роль нагрузки амплитудного модулятора?
8. Что такое СМХ? Как по СМХ выбрать режим работы модулятора?
9. Как по СМХ определить максимальную девиацию амплитуды и максимальную глубину модуляции?
10. Какова характеристика детектирования диодного детектора при подаче слабых сигналов?
11. Каковы условия линейного детектирования в схеме диодного детектора?
12. Изобразите схему диодного детектора. Поясните работу диодного детектора соответствующими временными диаграммами.
13. С каким углом отсечки работает диод в схеме диодного детектора? От чего зависит величина этого угла?
14. Из каких условий выбирается постоянная времени нагрузки при детектировании АМ сигналов?
15. Можно ли детектировать диодным детектором:
 - АМ колебания при $M_{AM} > 1$;
 - АМ колебания с подавленной несущей;
 - колебания с однополосной модуляцией?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «отлично») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «хорошо») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «удовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «неудовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №7

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ АМ, ЧМ, ФМ И ОФМ ДЕМОДУЛЯТОРОВ

1 Цель работы

– экспериментальное исследование оптимальных когерентных демодуляторов АМ, ЧМ и ФМ сигналов.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).
- двухканальный осциллограф Agilent DSO1002A (инв. ном. 434.168);
- комплект соединительных проводов;

В работе используется универсальный стенд со сменным блоком «МОДУЛЯТОР – ДЕМОДУЛЯТОР», функциональная схема которого приведена на рисунке 1.

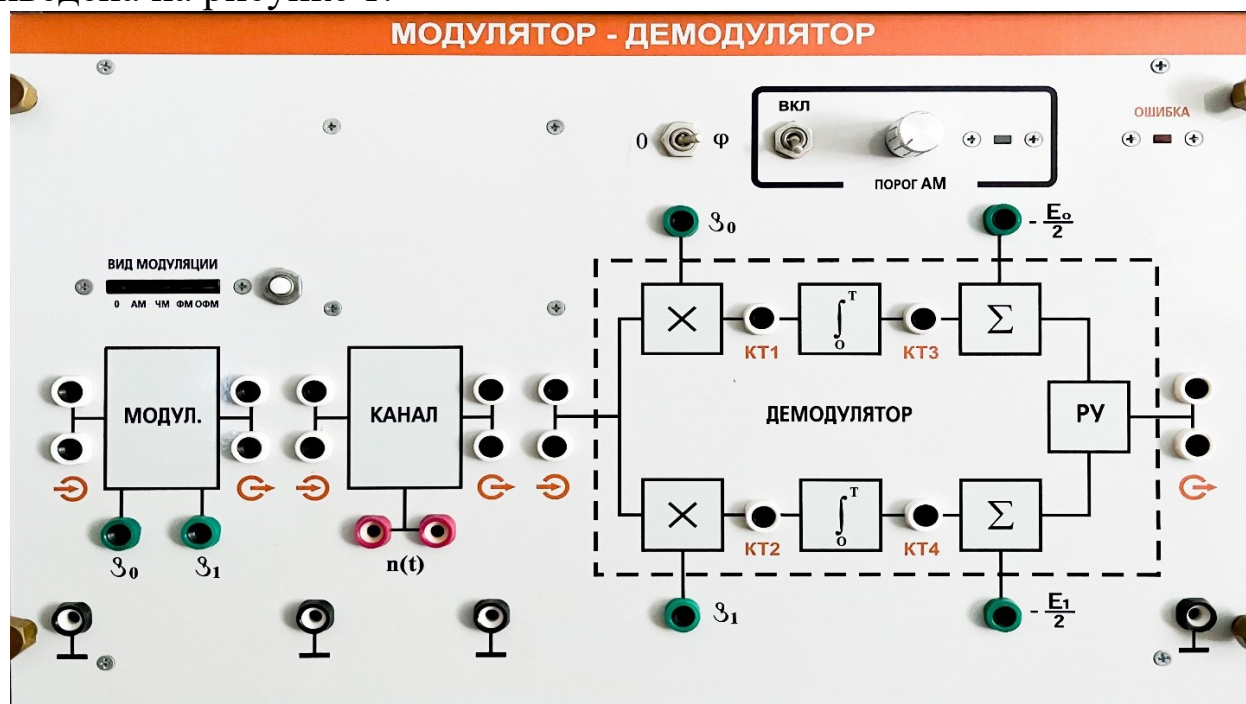


Рисунок 1 – Функциональная схема блока

Источником цифрового сигнала является КОДЕР-1, который выдает периодическую последовательность из пяти символов. С помощью тумблеров можно установить любую пятиэлементную кодовую комбинацию, которая индицируется линейкой из пяти светодиодных индикаторов с надписью «ПЕРЕДАНО». В блоке МОДУЛЯТОР происходит модуляция (манипуляция) двоичными символами «высокочастотных» колебаний по амплитуде, частоте или фазе, в зависимости от положения переключателя «ВИД МОДУЛЯЦИИ» – АМ, ЧМ, ФМ или ОФМ. При «нулевом» положении переключателя выход модулятора соединен с его входом (модуляция отсутствует).

КАНАЛ связи представляет собой сумматор сигнала с выхода модулятора и шума, генератор которого (ГШ) расположен в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ. Внутренний генератор квазибелого шума, имитирующий шум канала связи, работает в той же полосе частот, в которой расположены спектры модулированных сигналов (12÷28 кГц).

ДЕМОДУЛЯТОР выполнен по когерентной схеме с двумя ветвями; коммутация видов модуляции – общая с модулятором. Поэтому эталонные сигналы s_0 и s_1 и пороговые напряжения в контрольных точках стенда изменяются автоматически при смене вида модуляции.

Знаками (X) на функциональной схеме обозначены аналоговые перемножители сигналов, выполненные на специализированных ИМС. Блоки интеграторов выполнены на операционных усилителях. Электронные ключи (на схеме не показаны) разряжают конденсаторы интеграторов перед началом каждого символа.

Сумматоры (Σ) предназначены для введения пороговых значений напряжений, зависящих от энергии эталонных сигналов s_1 и s_0 .

Блок «РУ» – решающее устройство – представляет собой компаратор, то есть устройство, сравнивающее напряжения на выходах сумматоров. Само «решение», т. е. сигнал «0» или «1» подается на выход демодулятора в момент перед окончанием каждого символа и сохраняется до принятия следующего «решения». Моменты принятия «решения» и последующего разряда конденсаторов в интеграторах задаются специальной логической схемой, управляющей электронными коммутаторами.

Для демодуляции сигналов с ОФМ к схеме демодулятора ФМ добавляются блоки (на схеме не показаны), которые сравнивают предыдущее и последующее решения демодулятора ФМ, что позволяет сделать заключение о скачке фазы (или его отсутствии) в принимаемом символе. При нали-

чий такого скачка на выход демодулятора подается сигнал «1», в противном случае – «0». В сменном блоке предусмотрен тумблер, переключающий начальную фазу (φ) опорного колебания (0 или π) – только для ФМ и ОФМ. Для нормальной работы демодулятора тумблер должен быть в нулевом положении.

При амплитудной манипуляции предусмотрена возможность ручной установки порога с целью изучения его влияния на вероятность ошибки в приеме символа. Оценка вероятности ошибки производится в ПК путем подсчета числа ошибок за определенное время анализа. Сами сигналы ошибки (в символе или «букве») формируются в специальном блоке стенда («КОНТРОЛЬ ОШИБОК»), расположенном ниже блока ЦАП. Для визуального контроля ошибок в стенде имеются светодиодные индикаторы.

В качестве измерительных приборов используются двухканальный осциллограф, встроенный вольтметр и ПК, работающий в режиме подсчета ошибок.

3 Основные теоретические сведения

В современных системах передачи дискретных сообщений принято различать две группы относительно самостоятельных устройств: **кодеки** и **модемы**. Кодеком называются устройства, преобразующие сообщение в код (**кодер**) и код в сообщение (**декодер**), а модемом – устройства, преобразующие код в сигнал (**модулятор**) и сигнал в код (**демодулятор**).

При передаче **непрерывного сообщения** $a(t)$ оно сначала преобразуется в **первичный электрический сигнал** $b(t)$, а затем, как правило, с помощью модулятора формируется **сигнал** $s(t)$, **который посылается в линию связи**.

Принятое колебание $x(t)$ подвергается обратным преобразованиям, в результате которых выделяется первичный сигнал $b(t)$. По нему затем восстанавливается с той или иной точностью сообщение $a(t)$.

Общие принципы модуляции предполагаются известными. Остановимся кратко на особенностях дискретной модуляции.

При дискретной модуляции закодированное сообщение a , представляющее собой **последовательность кодовых символов** $\{b_i\}$, преобразуется в **последовательность элементов (посылок) сигнала** $\{s_i\}$. В частном случае дискретная модуляция сводится к воздействию кодовых символов на переносчик $f(t)$.

Посредством модуляции один из параметров переносчика изменяется по закону, определяемому кодом. При непосредственной передаче переносчиком может быть постоянный ток, изменяющимися параметрами которого являются величина и направление тока. Обычно же в качестве переносчика, как и в непрерывной модуляции, используется переменный ток (гармоническое колебание). В этом случае можно получить дискретную амплитудную (ДАМ), дискретную частотную (ДЧМ) и дискретную фазовую (ДФМ) модуляции.

Дискретную модуляцию часто называют *манипуляцией*, а устройство, осуществляющее дискретную модуляцию (дискретный модулятор), называют *манипулятором* или *генератором сигналов*.

На рисунке 2 приведены формы сигналов при двоичном коде для различных видов манипуляции.

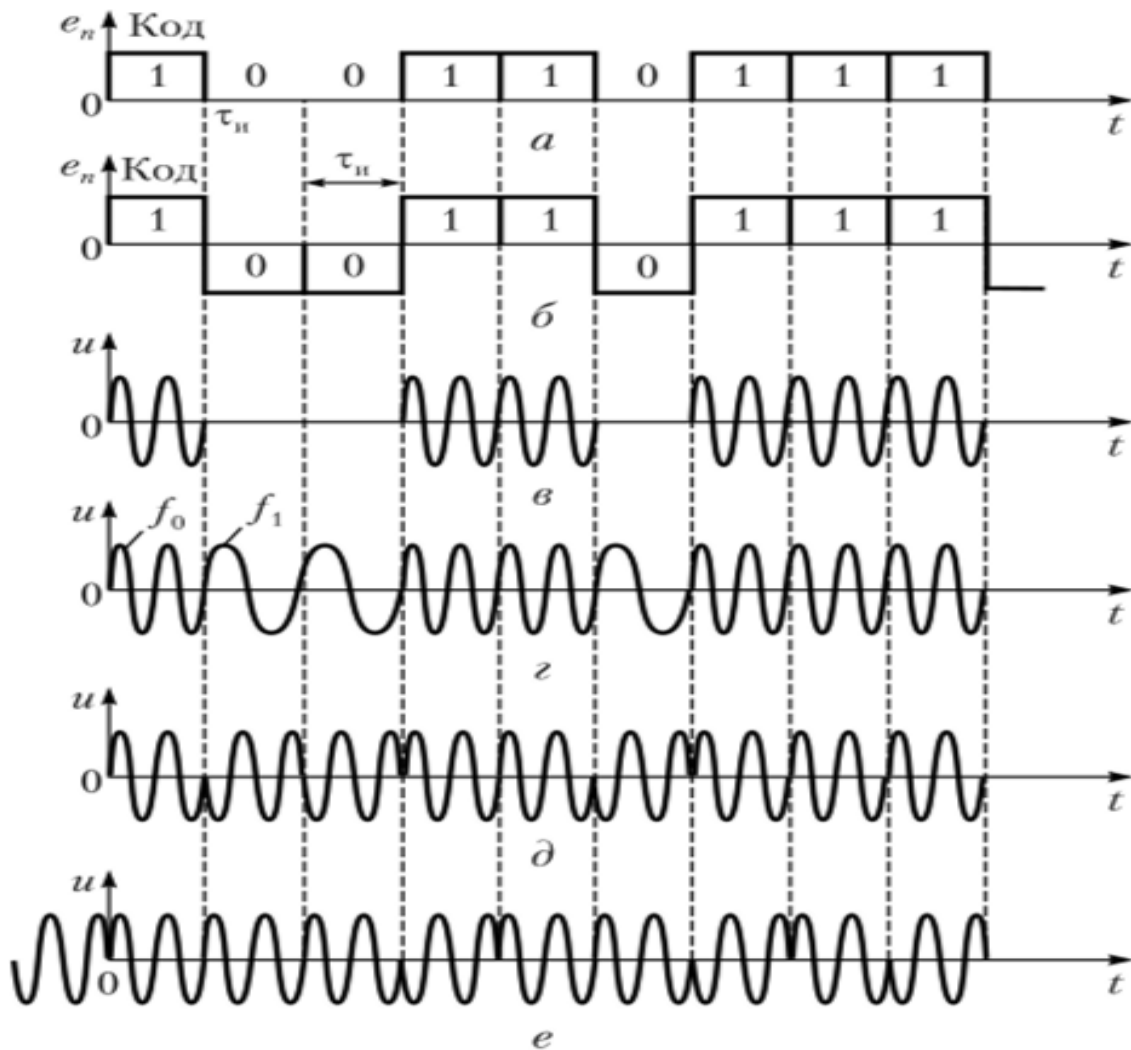


Рисунок 2 – Формы сигналов при разных видах дискретной модуляции двоичным кодом: а – униполярный код; б – биполярный код; в – ДАМ; г – ДЧМ; д – ДФМ; е – ДОФМ

При ДАМ символу 1 соответствует передача несущего колебания в течение времени T (посылка), символу 0 – отсутствие колебания (пауза). При ДЧМ передача несущего колебания с частотой f_1 соответствует символу 1, а передача колебания с частотой f_0 соответствует 0. При ДФМ меняется фаза несущей на 180° при каждом переходе от 1 к 0 и от 0 к 1.

На практике нашла применение система двоичной относительной фазовой модуляции (ОФМ). В отличие от ФМ, при ОФМ фаза сигналов отсчитывается не от некоторого эталона, а от фазы предыдущего элемента сигнала. В двоичном случае символ 0 передается отрезком синусоиды с начальной фазой предшествующего элемента сигнала, а символ 1 – таким же отрезком с начальной фазой, отличающейся от начальной фазы предшествующего элемента сигнала на π . При ОФМ передача начинается с посылки одного, не несущего информации элемента, который служит опорным сигналом для сравнения фазы последующего элемента.

Восстановление переданного сообщения в приемнике обычно осуществляется в следующей последовательности. Сначала производится **демодуляция** сигнала. В системах передачи непрерывных сообщений в результате демодуляции восстанавливается первичный сигнал, отображающий переданное сообщение.

В системах передачи дискретных сообщений в результате демодуляции последовательность элементов сигнала превращается в последовательность кодовых символов, после чего эта последовательность преобразуется в последовательность элементов сообщения. Это преобразование называется **декодированием**.

Та часть приемного устройства, которая осуществляет анализ входящего сигнала и принимает решение о переданном сообщении, называется **решающей схемой**.

В системах передачи дискретных сообщений решающая схема обычно состоит из двух частей: первой – **демодулятора** и второй – **декодера**.

На вход демодулятора с выхода канала связи поступает сигнал искаженный **аддитивными** и **мультипликативными** помехами. На выходе же демодулятора формируется дискретный сигнал, т.е. последовательность кодовых символов. Обычно некоторый отрезок (элемент) непрерывного сигнала преобразуется модемом в один кодовый символ (поэлементный прием). Если бы этот кодовый символ всегда совпадал с передаваемым (поступившим на вход модулятора), то связь была бы безошибочной. Но

как уже известно, помехи приводят к невозможности с абсолютной достоверностью восстановить по принятому сигналу переданный кодовый символ.

Каждый демодулятор математически описывается законом, по которому поступивший на его вход непрерывный сигнал превращается в кодовый символ. Этот закон называется правилом решения, или решающей схемой. Демодуляторы с различными правилами решения будут выдавать, вообще говоря, различные решения, из которых одни будут *верными*, а другие *ошибочными*.

Будем полагать, что свойства источника сообщения и кодера известны. Кроме того, известен модулятор, т.е. задано, какая реализация элемента сигнала соответствует тому или иному кодовому символу, а также задана математическая модель непрерывного канала. Требуется определить, каков должен быть демодулятор (*правило решения*), чтобы обеспечить оптимальное (т.е. *наилучшее из возможных*) качество приема.

Такая задача была впервые поставлена и решена (для гауссовского канала) в 1946 г. выдающимся советским ученым В. А. Котельниковым. В этой постановке качество оценивалось вероятностью правильного приема символа. Максимум этой вероятности при заданном виде модуляции В.А. Котельников назвал *потенциальной помехоустойчивостью*, а демодулятор, обеспечивающий этот максимум, – идеальным приемником.

Из этого определения следует, что ни в одном реальном демодуляторе вероятность правильного приема символа не может быть больше, чем в идеальном приемнике.

На первый взгляд принцип оценки качества приема вероятностью правильного приема символа кажется вполне естественным и даже единственно возможным. Ниже будет показано, что это не всегда так и что существуют и другие критерии качества, применимые в тех или иных частных случаях.

Обычно способ передачи (способ кодирования и модуляции) задан и нужно определить помехоустойчивость, которую обеспечивают различные способы приема. Какой из возможных способов приема является оптимальным? Указанные вопросы являются предметом рассмотрения *теории помехоустойчивости*, основы, которой разработаны академиком В.А. Котельниковым.

Помехоустойчивостью системы связи называется способность системы различать (восстанавливать) сигналы с заданной достоверностью.

Задача определения помехоустойчивости всей системы в целом весьма сложная. Поэтому часто определяют помехоустойчивость отдельных звеньев системы: приемника при заданном способе передачи, системы кодирования или системы модуляции при заданном способе приема и т. д.

Предельно достижимая помехоустойчивость называется, по Котельникову, *потенциальной помехоустойчивостью*. Сравнение потенциальной и реальной помехоустойчивости устройства позволяет дать оценку качества реального устройства и найти еще неиспользованные резервы. Зная, например, потенциальную помехоустойчивость приемника, можно судить, насколько близка к ней реальная помехоустойчивость существующих способов приема и насколько целесообразно их дальнейшее усовершенствование при заданном способе передачи.

Сведения о потенциальной помехоустойчивости приемника при различных способах передачи позволяют сравнить эти способы передачи между собой и указать, какие из них в этом отношении являются наиболее совершенными.

При отсутствии помех каждому принятому сигналу x соответствует вполне определенный сигнал s . При наличии помех это однозначное соответствие нарушается. Помеха, воздействуя на передаваемый сигнал, вносит неопределенность относительно того, какое из возможных сообщений было передано, и по принятому сигналу x только с некоторой вероятностью можно судить о том, что был передан тот или иной сигнал s . Эта неопределенность описывается апостериорным распределением вероятностей $P(s/x)$.

Если известны статистические свойства сигнала s и помехи $w(t)$, то можно создать приемник, который на основании анализа сигнала x будет находить апостериорное распределение $P(s|x)$. Затем по виду этого распределения принимается решение о том, какое из возможных сообщений было передано. Решение принимается оператором или самим приемником по правилу, которое определяется заданным критерием.

Задача состоит в том, чтобы воспроизвести передаваемое сообщение наилучшим образом в смысле выбранного критерия. Такой приемник называется *оптимальным*, а его помехоустойчивость будет *максимальной* при заданном способе передачи.

Несмотря на случайный характер сигналов x , в большинстве случаев имеется возможность выделить множество наиболее вероятных сигналов

$\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,m$, соответствующих передаче некоторого сигнала s_i . Вероятность того, что переданный сигнал принят правильно, равна $P(x_i/s_i)$, а вероятность того, что он принят ошибочно, равна $1 - P(x_i / s_i) = \sum_{j \neq i} P(x_j / s_i)$.

Условная вероятность $P(x_j|s_i)$ зависит от способа формирования сигнала, от помех, имеющих в канале, и от выбранной решающей схемы приемника. **Полная вероятность ошибочного приема элемента сигнала**, очевидно, будет равна:

$$P_0 = \sum_{i=1}^m P(s_i) [1 - P(x_i / s_i)],$$

где $P(s_i)$ – априорные вероятности передаваемых сигналов.

Для того чтобы определить, какая из решающих схем является оптимальной, необходимо прежде всего установить, в каком смысле понимается оптимальность. Выбор критерия оптимальности не является универсальным, он зависит от поставленной задачи и условий работы системы.

Пусть на вход приемника поступает сумма сигнала и помех $x(t)=s_k(t)+w(t)$, где $s_k(t)$ – сигнал, которому соответствует кодовый символ a_k , $w(t)$ – аддитивная помеха с известным законом распределения. Сигнал s_k в месте приёма является случайным с априорным распределением $P(s_k)$. На основании анализа колебания $x(t)$ приемник воспроизводит сигнал s_i . При наличии помех это воспроизведение не может быть совершенно точным. По принятой реализации сигнала приемник вычисляет апостериорное распределение $P(s_i/x)$, содержащее все сведения, которые можно извлечь из принятой реализации сигнала $x(t)$. Теперь необходимо установить критерий, по которому приемник будет выдавать на основе апостериорного распределения $P(s_i/x)$ решение относительно переданного сигнала s_k .

При передаче дискретных сообщений широко используется **критерий Котельникова (критерий идеального наблюдателя)**. Согласно этому критерию принимается решение, что передан сигнал s_i , для которого апостериорная вероятность $P(s_i/x)$ имеет наибольшее значение, т.е. регистрируется сигнал s_i если выполняются неравенства

$$P(s_i/x) > P(s_j/x), \quad j \neq i \quad (1)$$

При использовании такого критерия полная вероятность ошибочного решения P_0 будет минимальной. Действительно, если по сигналу x принимается решение о том, что был передан сигнал s_i , то, очевидно, вероятность правильного решения будет равна $P(s_i/x)$, а вероятность ошибки выразится как $1 - P(s_i/x)$. Отсюда следует, что максимуму апостериорной вероятности $P(s_i/x)$ соответствует минимум полной вероятности ошибки

$$P_0 = \sum_{i=1}^m P(s_i) [1 - P(x_i / s_i)],$$

где $P(s_i)$ – априорные вероятности передаваемых сигналов.

На основании формулы Байеса:

$$P(s_i / x) = \frac{P(s_i) p(x / s_i)}{p(x)}.$$

Тогда неравенство (1) можно записать в другом виде

$$P(s_i) \cdot p(x/s_i) > P(s_j) \cdot p(x/s_j) \quad (2)$$

или

$$\frac{p(x / s_i)}{p(x / s_j)} > \frac{P(s_j)}{P(s_i)}. \quad (3)$$

Функцию $p(x/s)$ часто называют **функцией правдоподобия**. Чем больше значение этой функции при данной реализации сигнала x , тем правдоподобнее, что передавался сигнал s . Отношение, входящее в неравенство (3),

$$\Lambda = \frac{p(x / s_i)}{p(x / s_j)} \quad (4)$$

называется **отношением правдоподобия**. Пользуясь этим понятием, правило решения (3), соответствующее критерию Котельникова, можно записать в виде:

$$\Lambda > \frac{P(s_j)}{P(s_i)}. \quad (5)$$

Если передаваемые сигналы равновероятны $P(s_i) = P(s_j) = 1/m$, то это правило решения принимает более простой вид

$$\Lambda > 1. \quad (6)$$

Таким образом, критерий идеального наблюдателя сводится к сравнению отношений правдоподобия (5). Этот критерий является более общим и называется критерием максимального правдоподобия.

Рассмотрим бинарную систему, в которой передача сообщений осуществляется с помощью двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, соответствующих двум кодовым символам a_1 и a_2 . Решение принимается по результату обработки принятого колебания $x(t)$ пороговым методом: регистрируется s_1 , если $x < x_0$, и s_2 , если $x \geq x_0$, где x_0 – некоторый пороговый уровень x . Здесь могут быть ошибки двух видов: воспроизводится s_1 , когда передавался s_2 , и s_2 , когда передавался s_1 . Условные вероятности этих ошибок (вероятности переходов) будут равны:

$$P_{12} = P(s_1 / s_2) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x / s_2) dx, \quad (7)$$

$$P_{21} = P(s_2 / s_1) = \int_{x_0}^{\infty} p(x / s_1) dx, \quad (8)$$

Значения этих интегралов могут быть вычислены как соответствующие площади, ограниченные графиком плотностей условного распределения вероятностей (рисунок 3).

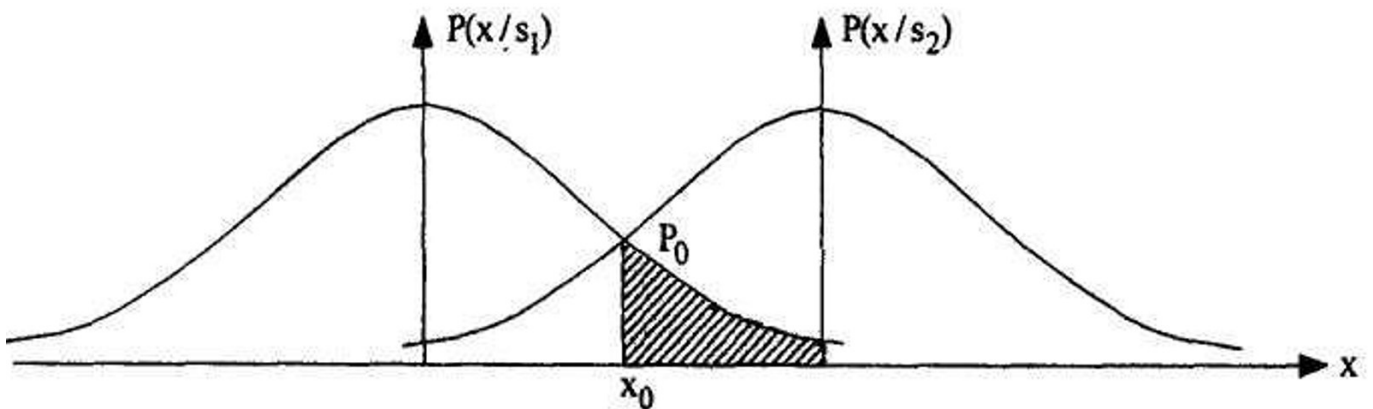


Рисунок 3 – График плотности условного распределения вероятностей при передаче сигналов s_1 и s_2

Вероятности ошибок первого и второго вида соответственно:

$$P_I = P(s_2)P(s_1 | s_2) = P_2 P_{12},$$

$$P_{II} = P(s_1)P(s_2 | s_1) = P_1 P_{21}.$$

Полная вероятность ошибки при этом

$$P_0 = P_I + P_{II} = P_2 P_{12} + P_1 P_{21}.$$

Пусть $P_1 = P_2$, тогда $P_0 = 1/2(P_{12} + P_{21})$. Нетрудно убедиться, что в этом случае минимум P_0 имеет место при $P_{12} = P_{21}$, т.е., при выборе порога в соответствии с рисунком 3. Для такого порога $P_0 = P_{12} = P_{21}$. На рисунке 3 значение P_0 определяется заштрихованной площадью. При любом другом значении порога величина P_0 будет больше.

Несмотря на естественность и простоту, критерий Котельникова имеет недостатки. Первый заключается в том, что для построения решающей схемы, как это следует из соотношения (2), необходимо знать априорные вероятности передачи различных символов кода. Вторым недостатком этого критерия является то, что все ошибки считаются одинаково нежелательными (имеют одинаковый вес). В некоторых случаях такое допущение не является правильным. Например, при передаче чисел ошибка в первых значащих цифрах более опасна, чем ошибка в последних цифрах. Пропуск

команды или ложная тревога в различных системах оповещения могут иметь различные последствия.

Следовательно, в общем случае при выборе критерия оптимального приема необходимо учитывать те потери, которые несет получатель сообщения при различных видах ошибок. Эти потери можно выразить некоторыми весовыми коэффициентами, приписываемыми каждому из ошибочных решений. Оптимальной решающей схемой будет такая, которая обеспечивает минимум среднего риска. Критерий минимального риска относится к классу так называемых байесовых критериев.

В радиолокации широко используется критерий Неймана-Пирсона. При выборе этого критерия учитывается, во-первых, что ложная тревога и пропуск цели не являются равноценными по своим последствиям, и, во-вторых, что неизвестна априорная вероятность передаваемого сигнала.

Алгоритмы работы оптимального приёмника для часто встречающегося на практике случая передачи двоичных первичных сигналов b_1 и b_2 длительностью t_s сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$, сформированными методами амплитудной, частотной и фазовой дискретной (цифровой) модуляции (манипуляции), в канале с аддитивным гауссовским шумом приведены в таблице 1. Оптимальный приёмник реализует поэлементный приём, когда решение о переданном сигнале принимается отдельно для каждого сигнала, независимо от принятого ранее. Все алгоритмы таблицы 1 представляют собой неравенства, указывающие последовательность операций, которые необходимо выполнить с суммой сигнала и помехи $z(t) = s(t) + n(t)$ и правило определения переданного первичного сигнала b_i .

Таблица 1 – Алгоритмы оптимального приёма

Вид манипуляции	Алгоритм
АМн	$\int_0^{t_s} z(t)s_1(t)dt \begin{matrix} \geq b_1 \\ < b_2 \end{matrix} 0,5E_s \quad E_s - \text{энергия сигнала } s_1(t)$
ЧМн	$\int_0^{t_s} z(t)s_1(t)dt \begin{matrix} \geq b_1 \\ < b_2 \end{matrix} \int_0^{t_s} z(t)s_2(t)dt$
ФМн	$\int_0^{t_s} z(t)s_1(t)dt \begin{matrix} \geq b_1 \\ < b_2 \end{matrix} 0$

При ЧМн принятый сигнал с помехой $z(t)$ необходимо умножить отдельно на копии передаваемых сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, произведения проинтегрировать на интервале длительности сигнала t_s и далее сравнить результаты интегрирования. Решение какой первичный сигнал передавался выносится по большему из них.

Для сигналов с АМн и ФМн в алгоритмах производятся такие же операции, но сравнение результатов интегрирования проводится с величиной, равной половине энергии сигнала $s_1(t)$ для АМн сигналов и с нулем – для ФМн сигналов.

Устройство, непосредственной вычисляющее скалярное произведение или корреляционный интеграл вида $\int_0^T z(t)s(t)dt$ называют **активным фильтром** или **коррелятором**. Поэтому приёмник, реализующий алгоритмы таблицы 1 называют **корреляционным**.

Структурные схемы оптимальных приёмников, построенные по алгоритмам таблицы 1, показаны на рисунке 4.

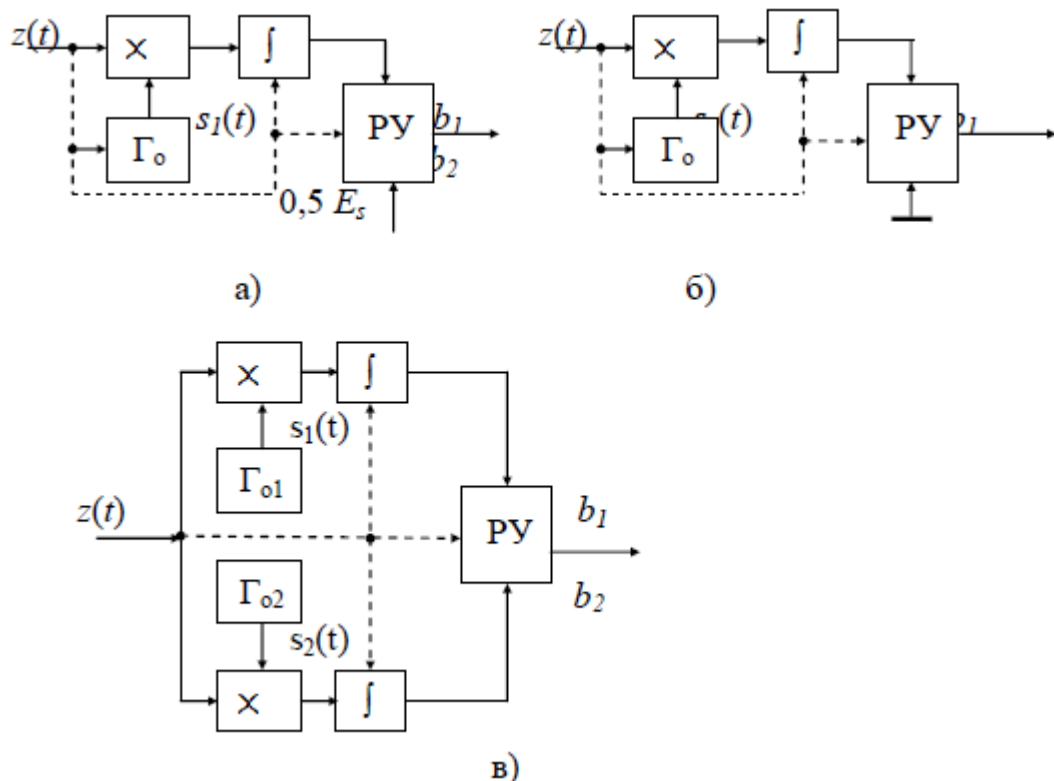


Рисунок 4 – Структурные схемы оптимальных когерентных приёмников (демодуляторов):

а – АМн сигналов, б – ФМн сигналов, в – ЧМн сигналов
 ($\times$ – перемножители, $\int$ – интеграторы, Γ_0 – генераторы опорных сигналов, РУ – решающее устройство, ----- синхронизация)

Расчётные формулы вероятности ошибки при оптимальном приёме равновероятных сигналов с АМн, ЧМн и ФМн в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (БГШ), полученные в теории потенциальной помехоустойчивости, приведены в таблице 2, где использованы следующие обозначения: $\Phi_0(z)$ – табулированный интеграл вероятности, который рассчитывается по формуле:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-y^2/2) dy.$$

Таблица 2 – Вероятность ошибки при оптимальном приёме

Вид манипуляции	Тип приёма	
	Когерентный	Некогерентный
АМн	$0,5 - \Phi_0(h/\sqrt{2})$	$0,5 \exp(-h^2/4)$
ЧМн	$0,5 - \Phi_0(h)$	$0,5 \exp(-h^2/2)$
ФМн	$0,5 - \Phi_0(\sqrt{2}h)$	-----
ОФМн	$\approx 1 - 2\Phi_0(\sqrt{2}h)$	$0,5 \exp(-h^2)$
$h^2 = E_s/N_0$ – отношении энергии сигнала на входе демодулятора к спектральной плотности мощности шума.		

Из формул таблицы 2 следует, что вероятность ошибки при оптимальном приёме зависит от вида дискретных сигналов, их энергии, способа приёма, спектральной плотности мощности шума.

Вероятность ошибки при когерентном приёме для АМн, ЧМн и ФМн сигналов в практических приложениях можно рассчитать, используя более удобную приближительную формулу (с точностью 1...2%):

$$p_{\text{ош}} \approx 0,65 \exp[-0,44(\gamma h + 0,75)^2],$$

где $\gamma = 1/\sqrt{2\pi}$ – для АМн; $\gamma = 1$ – для ЧМн; $\gamma = \sqrt{2}$ – для ФМн.

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Получение осциллограмм сигналов в различных точках схемы демодулятора при отсутствии шума в канале

Соберите схему проведения измерений, представленную на рисунке

5.

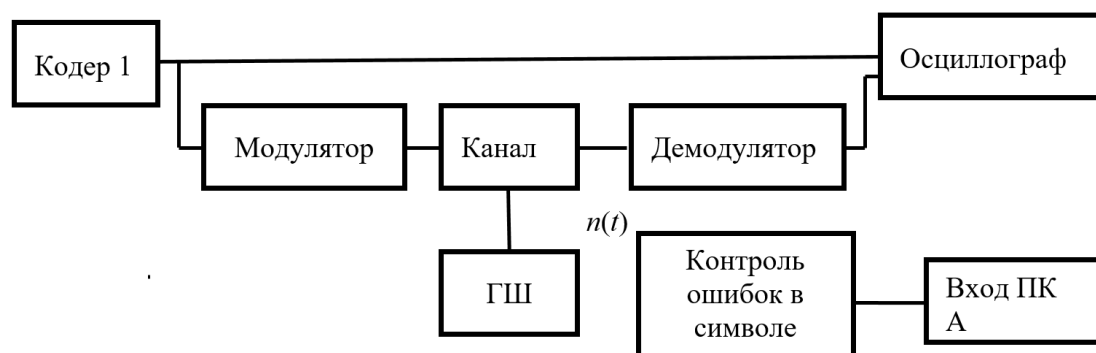


Рисунок 5 – Структурная схема проведения измерений

Тумблерами КОДЕРА-1 наберите любую двоичную комбинацию из 5 элементов. Ручку регулятора «ПОРОГ АМ» установите в крайнее левое положение. При этом регулятор выключен и порог устанавливается автоматически при смене вида модуляции. Тумблер фазировки опорного колебания ДЕМОДУЛЯТОРА установите в положение «0⁰». Соедините выход генератора шума (ГШ) в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ со входом $n(t)$ КАНАЛА связи. Потенциометр выхода генератора шума установите в крайнее левое положение (напряжение шума отсутствует). Вход внешней синхронизации осциллографа соедините с гнездом С2 в блоке ИСТОЧНИКИ, а усилители вертикального отклонения лучей переведите в режим с открытым входом.

Кнопкой переключения видов модуляции установите вариант «0», соответствующий сигналу на входе МОДУЛЯТОРА. Снимите осциллограмму этого сигнала и, не меняя режим развёртки осциллографа, установите амплитудную манипуляцию (АМн). Зарисуйте осциллограммы в контрольных точках демодулятора:

- на входе демодулятора;
- на выходах перемножителей (в одном масштабе по вертикальной оси);
- на выходах интеграторов (также в одном масштабе);
- на выходе демодулятора.

На всех полученных осциллограммах отметьте положение оси времени (т.е. положение нулевого уровня сигнала). Для этого зафиксируйте положение линии развёртки при замыкании входных зажимов осциллографа.

Повторите задание для ЧМ и ФМ.

Задание 2. Исследование работы демодулятора в условиях помех

Переключателем «ВИД МОДУЛЯЦИИ» установите ФМн. Подключите один из входов двухлучевого осциллографа ко входу модулятора, а второй – к выходу демодулятора. Получите неподвижные осциллограммы этих сигналов. Плавно увеличивая уровень шума (потенциометром ГШ) добейтесь появления редких «сбоев» на выходной осциллограмме или на входном табло «ПРИНЯТО».

С помощью осциллографа измерьте установленное отношение сигнал/шум. Для этого, последовательно отключая источник шума, измерьте на входе демодулятора размах сигнала (в делениях на экране) – $2a$ (т. е. двойная амплитуда сигнала), а отключив источник сигнала от входа канала и восстановив шумовой сигнал – измерьте размах шума (также в делениях) – 6σ . Найденное отношение a/σ внести в таблицу 3.

Таблица 3 – Зависимость вероятности ошибок от вида манипуляции

Время анализа - ...с		$a/\sigma =$	
Вид модуляции	ФМ	ЧМ	АМ
Оценка вероятности ошибки			

Переключателем «ВИД МОДУЛЯЦИИ» установите последовательно АМн, ЧМн, ФМн и ОФМн, наблюдая по вспышкам светодиода «ОШИБКА» или по осциллограмме выходного сигнала демодулятора частоту появления ошибок. Результаты наблюдений внесите в отчет.

Не изменяя уровень шума в канале, измерьте вероятность ошибки демодулятора в приёме символа за конечное время анализа (т.е. оценку вероятности ошибки). Для этого переведите ПК в режим измерения вероятности ошибки и установите время анализа $10 \div 30$ с. Начиная с ФМн, (а затем – ЧМн и АМн) определите число ошибок за время анализа и оценку вероятности ошибки. Полученные данные внести в таблицу 3.

Наблюдайте появление ошибок в работе демодулятора при наличии шума в канале. Оцените вероятность ошибки для АМн, ЧМн и ФМн при фиксированном значении отношения сигнал/шум.

Получите зависимость вероятности ошибок при АМн от порогового напряжения.

Задание 3. Исследование зависимости вероятности ошибки от порогового напряжения в демодуляторе при АМн

Переключателем «ВИД МОДУЛЯЦИИ» установите АМн. Потенциометр выхода генератора шума установите на минимум. С помощью осциллографа, подключенного к выходу нижнего интегратора, измерьте размах пилообразного напряжения по вертикали в вольтах – $U_{\max}$.

Заготовьте таблицу 4.

Таблица 4 – Оценка вероятности ошибки в зависимости от порога

Время анализа – ...с							
$U_{\text{пор}}$	0			$0,5U_{\max}$			$U_{\max}$
$p_{\text{ош}}$							

Потенциометром «ПОРОГ АМ» установите значение порога $U_{\max}/2$ (измеряя напряжение « $E_1/2$ » в контрольной точке демодулятора с помощью вольтметра постоянного напряжения). Увеличьте уровень шума в канале до появления редких сбоев. Не меняя уровень шума, измерьте оценку вероятности ошибки для этого порога ($U_{\max}/2$), а затем и для всех остальных значений $U_{\text{пор}}$. Постройте график зависимости $p_{\text{ош}} = \varphi(U_{\text{пор}})$.

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;
- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответствующую численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Назначение демодулятора в цифровой системе связи. В чем его основное отличие от демодулятора аналоговой системы?
2. Что такое скалярное произведение сигналов? Как оно используется в алгоритме работы демодулятора?
3. Можно ли в оптимальном демодуляторе применять согласованные фильтры?
4. Поясните критерий идеального наблюдателя?
5. Поясните правило максимума правдоподобия?
6. Как выбирается порог решающего устройства? Что происходит при его изменении?
7. Поясните алгоритм принятия решения в РУ.
8. Объясните назначение каждого блока демодулятора.
9. Как можно рассчитать $p_{\text{ош}}$ теоретически и измерить экспериментально?

10. Алгоритм оптимального демодулятора и его функциональная схема для АМн, ЧМн и ФМн.

11. Объясните разницу в помехоустойчивости систем связи с разными видами модуляции.

12. Объясните осциллограммы, полученные в разных контрольных точках демодулятора (для одного из видов модуляции).

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «**отлично**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «**хорошо**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «**удовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «**неудовлетворительно**») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Лабораторная работа №8

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО И ЦИФРО-АНАЛОГОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

1 Цель работы

- изучение принципов действия преобразователей аналогового сигнала в цифровой и цифрового в аналоговый;
- снятие статических характеристик преобразователей и наблюдение осциллограмм преобразованных сигналов при разных частотах дискретизации и разрядности цифрового сигнала.

2 Необходимые материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы необходимо следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
- программный продукт Libreoffice (свободно распространяемое ПО для некоммерческих целей).

Для проведения этой работы требуется только универсальный лабораторный стенд; сменные блоки не используются. В число используемых сигналов входят:

- постоянное регулируемое напряжение U_1 (или U_2), выходное гнездо и регулятор напряжения которого расположены над выключателем питания стенда;
- нерегулируемый низкочастотный сигнал сложной формы S_4 (крайнее правое гнездо в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ). Сигнал состоит из первой и третьей гармоник (частоты около 23 и 69 Гц).

Блок АЦП, расположенный в левой части стенда, имеет два входа: вход 1 ($\sim$) – «закрытый» – для подачи переменных напряжений и вход 2 ($\cong$) – «открытый» – для подачи постоянного напряжения при снятии статической характеристики. Нижнее выходное гнездо $S(k \cdot \Delta t)$ – служит для наблюдения дискретизированного сигнала, а основной выход (гнездо

справа) – для наблюдения цифрового сигнала (ИКМ-сигнала). В стенде использован восьмиразрядный АЦП параллельного типа. С помощью переключателя РАЗРЯДНОСТЬ можно изменять число разрядов выходного кода от 3 до 5, а при всех отжатых кнопках происходит восьмиразрядное кодирование.

Переключатель частоты дискретизации имеет два положения $f_{д1}$ (порядка 150 Гц) и $f_{д2}$ (порядка 2,3 кГц). При изучении системы АЦП+ЦАП возможны обе частоты дискретизации, но при работе со сменным блоком МОДУЛЯТОР-ДЕМОДУЛЯТОР возможно только первое значение ($f_{д1}$).

Блок ЦАП, расположенный в правой части стенда, имеет один вход и два выхода. На выходе 1 формируется ступенчатый сигнал, на выходе 2 – тот же сигнал после сглаживающего фильтра (ФНЧ с частотой среза около 80 Гц).

Переключатель «0 V т» в данной работе должен быть в положении «0». (Второе положение используется при работе со сменным блоком МОДУЛЯТОР-ДЕМОДУЛЯТОР).

В качестве измерительных приборов в работе используются двухлучевой осциллограф и вольтметр постоянного напряжения (тестер в правой части стенда).

3 Основные теоретические сведения

На рисунке 1 представлена структурная схема цифровой системы передачи непрерывных сообщений.

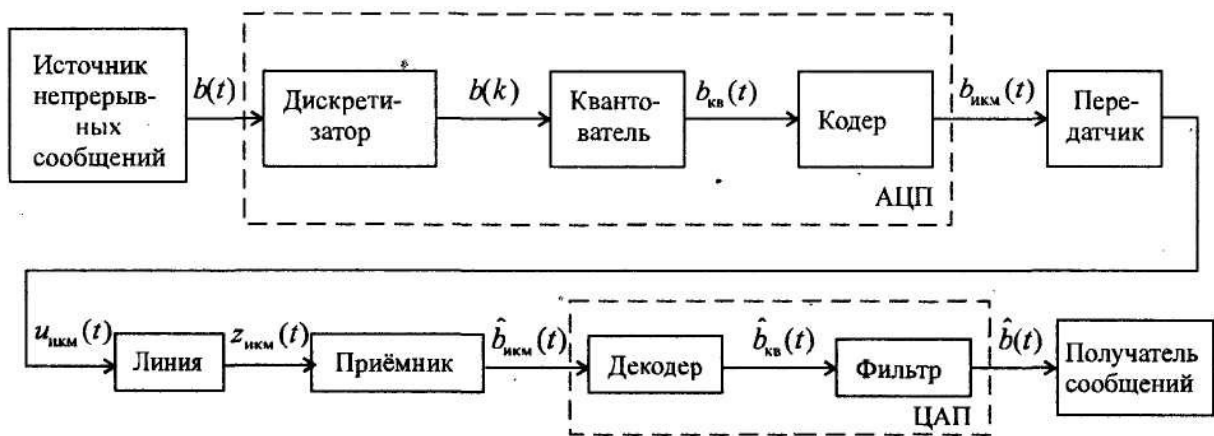


Рисунок 1 – Структурная схема цифровой системы передачи непрерывных сообщений

Преобразование на передающей стороне непрерывного сообщения в цифровую форму и обратное преобразование на приёмной стороне осуществляются в аналого-цифровом (АЦП) и цифро-аналоговом (ЦАП) преобразователях. АЦП осуществляет три вида операций: дискретизацию непрерывного сообщения по времени с интервалом Δt – представление непрерывного во времени сигнала рядом периодических дискретных значений на основе теоремы В.А. Котельникова (рисунок 2, а), квантование отсчётов мгновенных значений $b(k\Delta t)$ – округление мгновенных значений сигнала до ближайших разрешённых значений (рисунок 2, б) и их кодирование m -ичным кодом (рисунок 2, в). Двоичным кодом кодируется, как правило, номер уровня квантования. Такое преобразование называется импульсно - кодовой модуляцией (ИКМ).

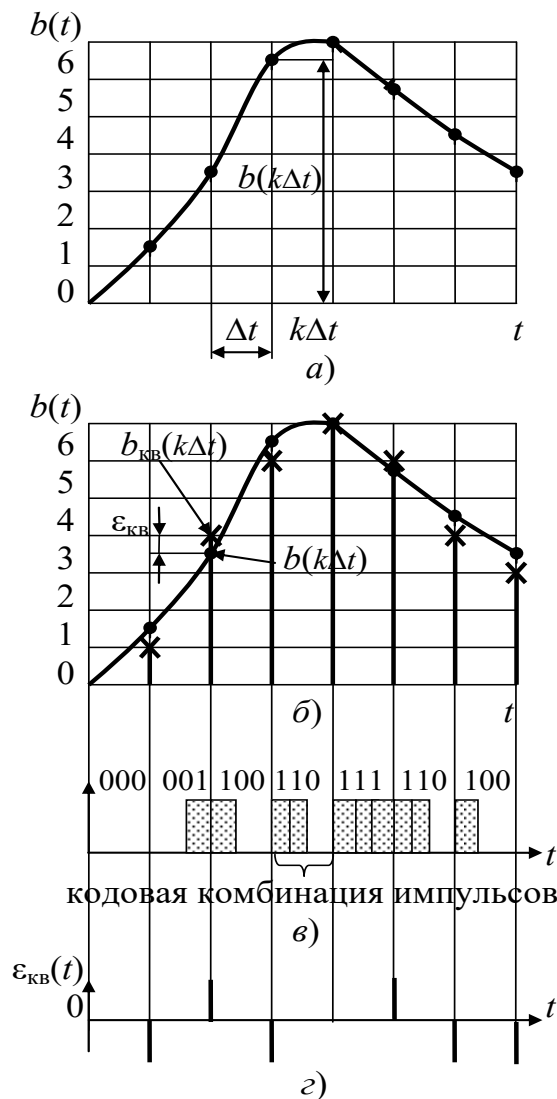


Рисунок 2 – Преобразование непрерывных сообщений в цифровую форму

Операции АЦП на передаче должны соответствовать обратные операции на приёме. В результате декодирования восстанавливаются мгновенные значения сигнала, которые после прохождения фильтра нижних частот с частотой среза F_v превращается в непрерывный исходный сигнал. Восстановленный сигнал всегда отличается от исходного вследствие операции квантования (сигнал восстанавливается не точно по исходным мгновенным значениям, а по округлённым до разрешённых). Уменьшая шаг квантования, теоретически можно достигнуть сколь угодно малого отличия восстановленного сигнала от исходного.

Дискретизация сигнала во времени реализуется посредством амплитудно-импульсной модуляции импульсного переносчика (АИМ). В качестве переносчика используется периодическая импульсная последовательность с частотой следования F_d , длительностью импульсов τ_n и скважностью $q = T_d / \tau_n$, где $T_d = 1/F_d$ – период следования импульсов. Спектр такого сигнала равен

$$u(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi k}{q} \right) \cos k \omega_1 t \right],$$

где A – амплитуда импульса, $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$.

Типовой амплитудный спектр периодической импульсной последовательности представлен на рисунке 3.

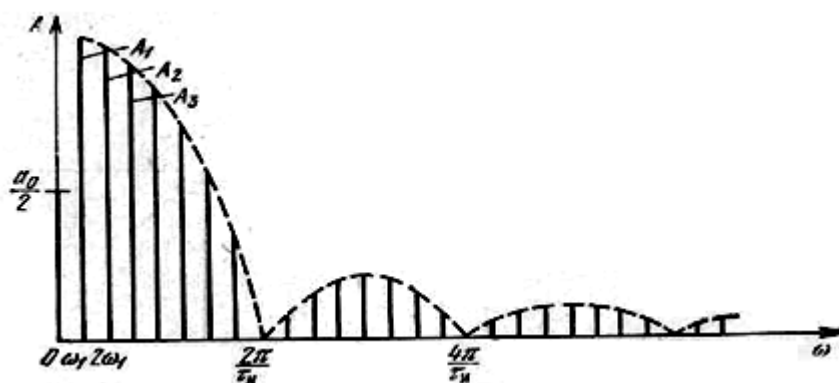


Рисунок 3 – Типовой амплитудный спектр периодической импульсной последовательности

Спектр переносчика состоит из постоянной составляющей и гармоник частоты $\omega_1 = 2\pi F_d$, причём гармоники с номерами, кратными q , отсутствуют.

При выборе частоты дискретизации в соответствии с теоремой В.А. Котельникова учитывается только верхняя частота спектра исходного сигнала.

Типовой спектр АИМ сигнала представлен на рисунке 4. Он состоит из спектра исходного сигнала и спектров импульсной последовательности.



Рисунок 4 – Типовой спектр АИМ сигнала

Квантование сигнала по уровню является главной операцией АЦП. Возникающая при этом погрешность представления $\varepsilon_{\text{кв}}(t)$ (рисунок 2, в) является неустранимой, но контролируемой (не превышает половины шага квантования) (рисунок 2, б). Выбором шага квантования, можно обеспечить эквивалентность по заданному ε - критерию исходного и квантованного сообщений. Ошибку квантования, представляющую собой разность между исходным сообщением и сообщением, восстановленным по квантованным отсчётам, называют шумом квантования.

Шум квантования не связан с помехами в канале и целиком определяется выбором числа уровней квантования. Его можно сделать сколь угодно малым, увеличивая число уровней. При этом увеличивается число символов в кодовой комбинации, а, следовательно, сокращается длительность символа и расширяется спектр сигнала в канале.

Шум квантования представляет собой стационарный случайный процесс $\varepsilon_{\text{кв}}(t)$ с независимыми значениями отдельных отсчётов $\varepsilon_{\text{кв}}(k) = b_{\text{кв}}(k\Delta t) - b(k\Delta t)$. Если в качестве квантованного (округлённого) значения $b(k\Delta t)$ принимается ближайший дискретный уровень, то шум квантования $\varepsilon_{\text{кв}}(k)$ при равномерном квантовании с шагом $\Delta_{\text{кв}}$ находится в пределах $[-\Delta_{\text{кв}}/2, \Delta_{\text{кв}}/2]$. При большом числе уровней квантования $N_{\text{кв}}$ можно принять, что шум квантования имеет равномерное распределение

$$w(\varepsilon_{\text{кв}}) = \begin{cases} 1/\Delta_{\text{кв}}, & |\varepsilon_{\text{кв}}| < \Delta b/2, \\ 0, & |\varepsilon_{\text{кв}}| > \Delta b/2. \end{cases}$$

Тогда $\overline{\varepsilon_{\text{KB}}(t)} = 0$, а дисперсия шума квантования (средняя мощность) равна

$$\overline{\varepsilon_{\text{KB}}^2(t)} = P_{\varepsilon} = \int_{-\Delta_{\text{KB}}/2}^{\Delta_{\text{KB}}/2} \varepsilon_{\text{KB}}^2 w(\varepsilon_{\text{KB}}) d\varepsilon_{\text{KB}} = (\Delta_{\text{KB}})^2 / 12.$$

Отношение средних мощностей сообщения и шума квантования равно

$$P_b / P_{\varepsilon} = \overline{b^2(t)} / \overline{\varepsilon_{\text{KB}}^2(t)} = 12 \frac{b^2(t)}{\Delta_{\text{KB}}^2}.$$

Для нормированного сообщения $-1 < b(t) < +1$ шаг квантования Δ_{KB} равен

$$\Delta_{\text{KB}} = \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{N_{\text{KB}} - 1} = \frac{2}{N_{\text{KB}} - 1}.$$

С другой стороны:

$$\overline{b^2(t)} = P_b = 1/\Pi^2,$$

где Π – пик-фактор сообщения.

Тогда

$$P_b / P_{\varepsilon} = \frac{12}{(\Pi \Delta_{\text{KB}})^2} = \frac{3(N_{\text{KB}} - 1)^2}{\Pi^2} = \frac{3(2^n - 1)^2}{\Pi^2},$$

где n – разрядность двоичного безызбыточного кода.

Из этого выражения следует, что изменяя число уровней квантования, можно уменьшить относительное значение шума квантования до любого допустимого значения.

Важной особенностью шума квантования, отличающей его от аддитивных шумов, является то, что он возникает только одновременно с появлением сообщения $b(t)$. Поэтому влияние шумов квантования на качество передачи оценивают величиной защищённости сигнала от шума квантования

$$A_{\text{з KB}} = 10 \lg(P_b / P_{\varepsilon}), \quad (7)$$

где P_b и P_{ε} – мощность сигнала (сообщения) и шума квантования.

При равномерном шаге квантования защищённость сигнала от шумов квантования существенно зависит от уровня входного сигнала

$$A_{\text{з KB}} = 10 \lg(12 P_b / \Delta_{\text{KB}}^2). \quad (8)$$

4 Задание на лабораторную работу

Задание 1. Снятие статических характеристик АЦП и ЦАП

Соедините «открытый» вход (вход 2) АЦП с источником постоянного напряжения U_1 (или U_2). Регулятор выбранного напряжения установите в крайнее правое положение. Установите частоту дискретизации $f_{д2}$. На вход внешней синхронизации осциллографа подайте синхронизирующий сигнал C_1 (в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ). Подключите вход 1 осциллографа к нижнему выходу АЦП $S(k \cdot \Delta t)$. Получив неподвижное изображение ряда точек (отсчетов постоянного напряжения), установите длительность развёртки такой, чтобы на экране располагались не более 2-х отсчетов (точек). Подключите второй вход осциллографа к выходу АЦП; усиление по второму входу осциллографа установите на минимум.

Переключатель разрядности АЦП поставьте в положение «3» (трехразрядное кодирование). Частота дискретизации – $f_{д2}$.

Плавно уменьшая постоянное напряжение на входе, наблюдайте на осциллографе изменение высоты отсчетов и цифрового кода на выходе АЦП, как это показано на рисунке 5. Отрегулируйте положение лучей и масштабы так, чтобы при изменении постоянного напряжения отсчеты не выходили за пределы экрана.

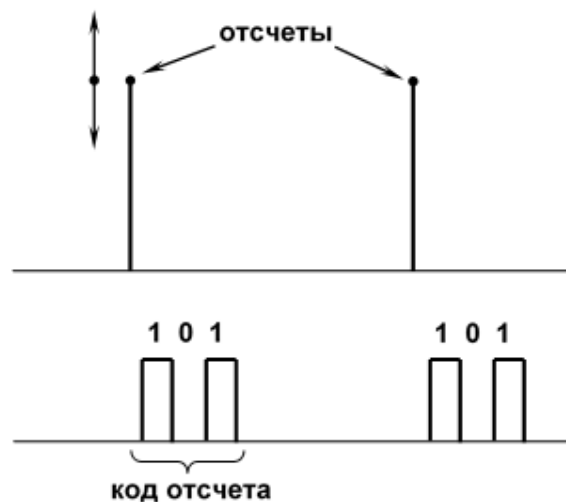


Рисунок 5 – Осциллограммы отсчетов постоянного входного напряжения (верхний луч) и соответствующие коды на выходе АЦП (нижний луч).

Подготовьте тестер (в правой части стенда) для измерения постоянных напряжений. Подготовьте таблицу 1.

Таблица 1 – Число разрядов $n = 3$

$U_{\text{вх}}$ (АЦП)	В								
код	-	000	001	010	011	100	101	110	111
$U_{\text{вых}}$ (ЦАП)	В								

Плавнo регулируя постоянное напряжение на входе АЦП, добейтесь появления на экране одной из кодовых комбинаций таблицы 1. Следует устанавливать минимальное значение $U_{\text{вх}}$, при котором существует требуемая кодовая комбинация; после этого следует измерить напряжение $U_{\text{вх}}$. Для этого, отключив вход АЦП от источника постоянного напряжения, подключите к нему вольтметр. Измеренное значение $U_{\text{вх}}$ внесите в верхнюю строку таблицы 1. Таким образом заполните всю верхнюю строку таблицы.

Переключателем разрядности установите $n = 4$ (четырёхразрядное кодирование). Подготовьте таблицу 2, подобную таблице 1, но для 16 кодовых комбинаций (от 0000 до 1111). Повторите задание для новых данных.

Снятие статической характеристики ЦАП. Соберите схему измерений согласно рисунку 6.

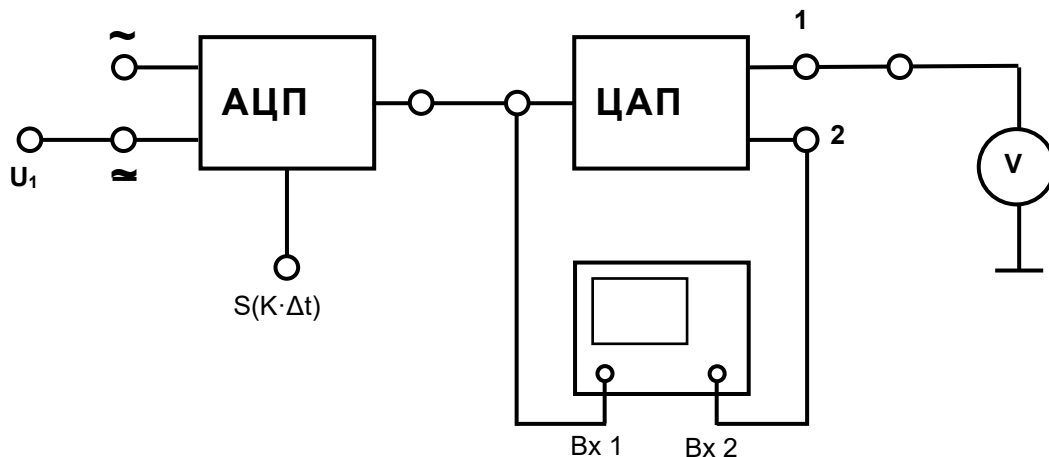


Рисунок 6 – Схема измерений

Установите число разрядов $n = 3$; частоту дискретизации $f_{\text{д2}}$; тумблер «0 V τ » в положении «0».

Для наблюдения на экране осциллографа постоянных напряжений на выходе ЦАП обеспечьте режим «открытого» входа (для входа 2 осциллографа).

Настройку синхронизации и развертки сохраните прежней.

Регулируя востоянное входное напряжение, наблюдайте изменение кода на входе ЦАП и скачкообразное изменение напряжения на его выходе. Отрегулируйте положение лучей и масштабы изображения так, чтобы при изменении входного напряжения осциллограмма оставалась в пределах экрана.

Плавно изменяя входное напряжение, добейтесь появления на экране одной из кодовых комбинаций таблицы 1 (при этом нет необходимости искать минимальное значение $U_{\text{вх}}$). Показания вольтметра на выходе ЦАП внесите в нижнюю строку таблицы.

Заполнив таблицу 1, постройте графики $U_{\text{вых.цап}} = \varphi_1(U_{\text{вх.ацп}})$ и $U_{\text{шк}}$ – напряжение «шума квантования» - погрешность двойного преобразования «аналог-цифра-аналог»:

$$U_{\text{шк}} = U_{\text{вых.цап}} - U_{\text{вх.ацп}} = \varphi_2(U_{\text{вх.ацп}}).$$

Установите число разрядов $n=4$ и повторите измерения.

Задание 2. Получение осциллограммы исходного сложного сигнала, отсчетов этого сигнала и сигнала, восстановленного в ЦАП

Установите частоту дискретизации $f_{\text{д1}}$ и разрядность $n=3$. Соедините вход 1 АЦП с источником сигнала S_4 . Ко второму входу АЦП подключите первый вход осциллографа. Установите режим внутренней синхронизации по первому входу. Отрегулируйте усиление и период развертки так, чтобы один период входного сигнала занимал верхнюю половину экрана (эту картинку следует сохранить до конца работы).

На второй вход осциллографа подайте сигнал с нижнего выхода АЦП (дискретизированный сигнал $S_4(k \cdot \Delta t)$). Отрегулировав масштаб изображения, зарисуйте обе осциллограммы (одну под другой) в одинаковом масштабе времени. В последующих пунктах работы под этими осциллограммами предстоит разместить еще пять, в том же временном масштабе, отмечая на каждой из них условия эксперимента.

Задание 3. Изучение влияния частоты дискретизации, разрядности кода и сглаживающего фильтра на точность преобразования

Изменив частоту дискретизации на $f_{\text{д1}}$, зарисуйте новую осциллограмму дискретизированного сигнала.

Подключив второй вход осциллографа на первый выход ЦАП, зафиксируйте осциллограммы $U_{\text{вых1}}(t)$ для двух значений $f_{\text{д}}$.

Переключив второй вход осциллографа на второй выход ЦАП (после сглаживающего фильтра), зафиксируйте две осциллограммы $U_{\text{вых1}}(t)$ для разных частот дискретизации.

Установите $f_{\text{д2}}$ и разрядность $n=3$. Второй вход осциллографа подключите на первый выход ЦАП. Для более удобного наблюдения ступенчатой структуры выходного сигнала ЦАП можно уменьшить период развертки на $1 \div 2$ ступени и увеличить усиление обоих каналов так, чтобы «ступеньки» выходного сигнала стали более заметными. На осциллограммах этого пункта покажите именно эти фрагменты сигналов при неизменном временном масштабе.

Изобразите ряд фрагментов сигнала на выходе 1 ЦАП в следующем порядке:

- исходный сигнал $S_4(t)$;
- выходной сигнал ЦАП $U_{\text{вых1}}(t)$ для числа разрядов $n = 3, 4, 5, 8$;
- выходной сигнал ЦАП $U_{\text{вых2}}(t)$ (после фильтра) при такой же разрядности ($n=3, \dots, 8$).

5 Требования к оформлению отчёта по выполнению лабораторной работы

Отчёт набирается на компьютере в формате .doc или .rtf и печатается на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210×297).

Размеры полей:

- верхнее поле – 2 см;
- нижнее поле – 2 см;
- левое поле – 3 см;
- правое поле – 1,5 см;
- переплет – 0 см.

Выравнивание текста – по ширине. Шрифт – Times New Roman. Цвет шрифта – чёрный, размер шрифта – 14. Текст работы печатается с абзацного отступа 1,25 см. Междустрочный интервал – 1,5. Дополнительные отступы до и после абзацев не применяются.

Несложные формулы должны быть набраны с использованием команды «Вставка→Символ». Сложные формулы должны быть набраны в редакторе MathType любой версии.

Отчёт по выполнению лабораторной работы должен содержать:

- название предмета, номер и название лабораторной работы;
- фамилию и инициалы автора, номер группы;

- фамилию и инициалы преподавателя;
- цель работы;
- перечень используемого оборудования;
- последовательность действий при проведении исследований, результаты выполнения теоретических расчетов и экспериментального исследования;
- вывод о проделанной работе;
- ответы на контрольные вопросы;
- дату выполнения и личную подпись.

Результаты различных измерений необходимо представить в виде нескольких самостоятельных таблиц (графиков). Каждая таблица и каждый график должны иметь свой заголовок и исходные данные эксперимента.

При выполнении численных расчетов надо записать формулу определяемой величины, сделать соответствующую численную подстановку и произвести вычисления.

6 Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите функциональную схему цифровой системы связи для передачи аналоговых сигналов.
2. Каково назначение АЦП?
3. Какое отношение к работе АЦП имеет теорема В.А. Котельникова?
4. Какое влияние на работу АЦП и ЦАП оказывает разрядность?
5. Какой вид имеет статическая характеристика системы АЦП+ЦАП?
6. Что такое шум квантования? Каково его происхождение?
7. Какую функцию выполняет ЦАП?
8. Какова роль ФНЧ на выходе ЦАП? Как выбрать его частоту среза?
9. Является ли обратимым преобразование аналог-код-аналог?
10. Линейно ли это преобразование?

7 Шкала оценивания выполненной лабораторной работы

4 балла (или оценка «отлично») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **85% и более**.

3 балла (или оценка «хорошо») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **70-84%**.

2 балла (или оценка «удовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, и доля правильных ответов на «защите» составила **50-69%**.

0-1 балл (или оценка «неудовлетворительно») выставляется обучающемуся, если работа выполнена не полностью или доля правильных ответов на «защите» составила **менее 50%**.

Приложение А**Пример оформления отчёта по выполнению лабораторной работы
МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности
(ИБ)

Отчёт по выполнению лабораторной работы №1
по дисциплине «Общая теория связи»
на тему «Исследование временного и спектрального представления сигналов»

Выполнил:

студент группы ИТ-416

Иванов И.И.

(подпись)

«__»_____2026

Проверил:

ст. преподаватель кафедры КПиСС

Коптев Д.С.

(подпись)

«__»_____2026

1 Цель работы

– исследование...

2 Используемое материально-техническое оборудование и материалы

Для выполнения лабораторной работы использовалось следующее материально-техническое оборудование:

- учебная установка «Теория электрической связи» (инв. ном. 104.3058; 434.171);
- персональный компьютер с предустановленным специальным программным обеспечением «Теория электрической связи»;
-

3 Последовательность выполнения лабораторной работы и полученные результаты исследований

3.1 Исследование моногармонического сигнала

.....

3.2 Исследование сложных гармонических сигналов

.....

3.3 Исследование импульсных последовательностей

.....

4 Вывод о проделанной работе

В ходе выполнения лабораторной работы изучил (проанализировал/выполнил/провёл исследование...) ...

Получены следующие результаты....

5 Ответы на контрольные вопросы

Вопрос №1. Какова математическая связь формы периодического сигнала и его спектра?

Ответ:

Вопрос №2. Какова математическая связь формы непериодических (однократных) сигналов и их спектров?

Ответ: