

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 19.09.2024 10:01:28  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012aba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0f6

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Юго-Западный государственный университет»**  
**(ЮЗГУ)**

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



## **СТАТИКА**

Методические указания для практических работ  
по разделам дисциплин «Теоретическая механика»,  
«Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика»

Курск 2024

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В. Емельянова, С.Ф. Яцун

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Статика: методические указания для практических работ по разделам дисциплин «Теоретическая механика», «Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика» / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост.: О. В. Емельянова, С.Ф. Яцун, Е. В. Савельева. - Курск, 2024. - 47 с., ил. 41, табл. 3. - Библиогр.: с. 47.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Статика» курсов «Теоретическая механика», «Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика» для инженерных специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 04.04.2024.. Формат 60x84 1\16

Усл. печ. л. 2,7. Уч. изд. л. 2,5. Тираж 50 экз. Заказ 243. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Статика» курсов «Теоретическая механика», «Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика».

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам.

## Тема 1

Проекции сил на ось и на плоскость. Моменты сил относительно центра. Пара сил. Связи и реакции связей. Условия равновесия сходящейся системы сил

### 1.1. Понятие о силе. Распределенные и сосредоточенные силы

**Сила** – это мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия.

Действие силы на рассматриваемое тело определяется тремя факторами: *точкой приложения, направлением, численным значением*. В Международной системе единиц (СИ) в качестве единицы силы используется *ньютон* [Н].

Совокупность сил, приложенных к телу, называют **системой сил**. Если систему сил можно заменить одной силой так, что при этом движение тела не изменится, то такая сила называется **равнодействующей** системы сил.

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки объема или данной части поверхности, называются **распределенными**. При решении задач статики распределенную нагрузку  $q$  принято заменять сосредоточенной силой  $\bar{Q}$ . Случаи замены сосредоточенной силой равномерно распределенной по длине нагрузки представлены на рисунке 1.1 а, б, в.

Величину  $q$  называют **интенсивностью распределенной нагрузки**. Она измеряется в *ньютонах на метр* [Н/м].

Графическое изображение изменения интенсивности нагрузки  $q$  в механике принято называть *эпюрой* распределения нагрузки. Для рассмотренных случаев по *эпюре* распределения нагрузки  $q$  величину сосредоточенной силы  $\bar{Q}$ , заменяющей нагрузку, и положение линии её действия определяют в соответствии с простым правилом: ***величина силы равна площади эпюры, изображающей нагрузку, линия действия силы проходит через центр тяжести площади эпюры.***

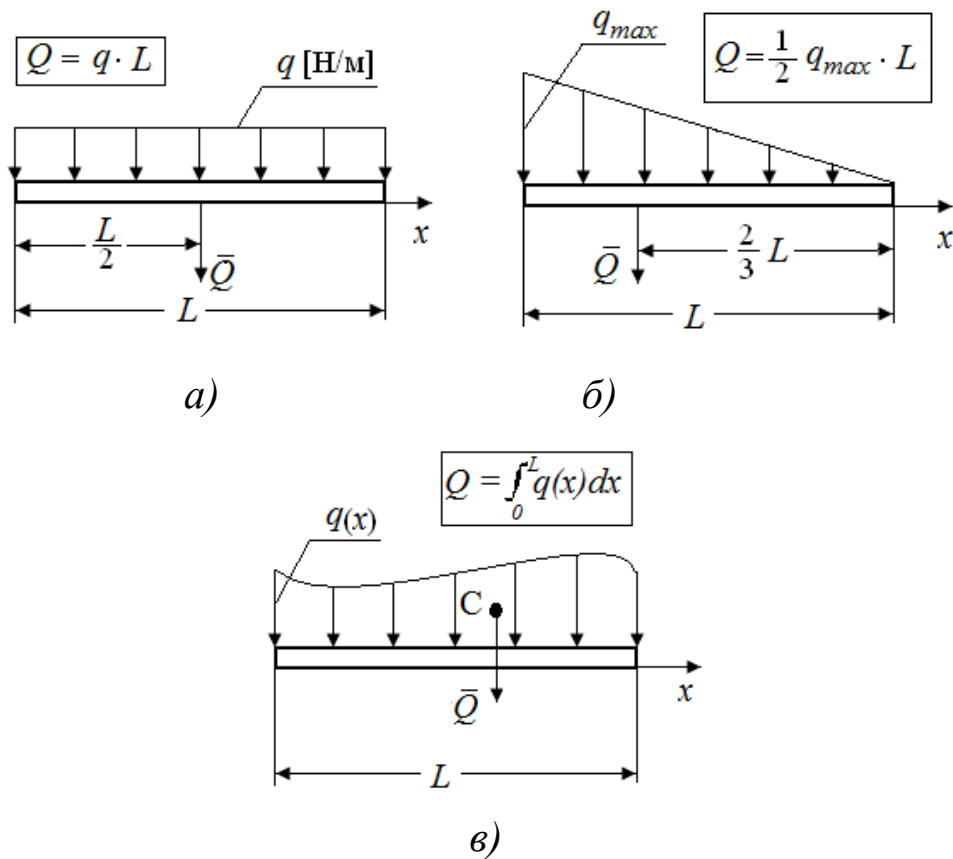


Рис. 1.1. Виды распределенных нагрузок

## 1.2. Проекция вектора на координатные оси

**Проекцией силы на ось** называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы (рис. 1.2):

$$F_x = AB_1 = ab.$$

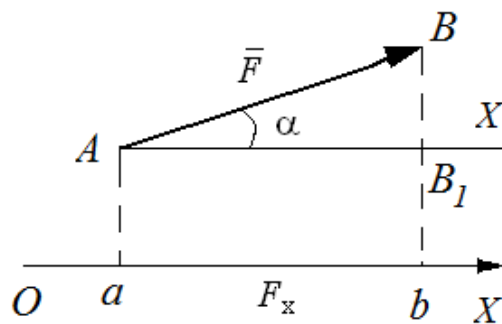


Рис. 1.2. Проекция силы на ось

Из чертежа видно, что  $F_x = F \cos \alpha$ , следовательно, проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

$F_x > 0$ , если  $\alpha$  – острый;  $F_x = 0$ , если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  $F_x < 0$ , если  $\alpha$  – тупой (рис.1.3).

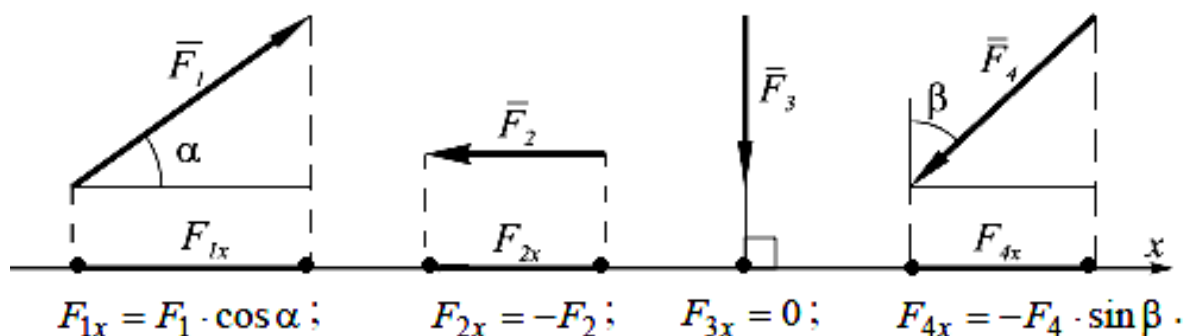


Рис. 1.3. Случаи нахождения проекций сил на ось координат

### 1.3. Сложение и разложение сил

Большинство задач статики связано с операцией сложения сил и разложения их на составляющие. Рассмотрим способы сложения сил.

#### 1. Геометрический способ сложения сил.

Если к телу приложены две силы, то сложить их можно по правилу параллелограмма (рис. 1.4, а) или треугольника (рис. 1.4, б):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} ; \quad (1.1)$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} . \quad (1.2)$$

Сумма системы сил определяется либо последовательным сложением сил по одному из описанных выше правил (рис. 1.4 а, б), либо построением силового многоугольника (рис. 1.4, в):

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i. \quad (1.3)$$

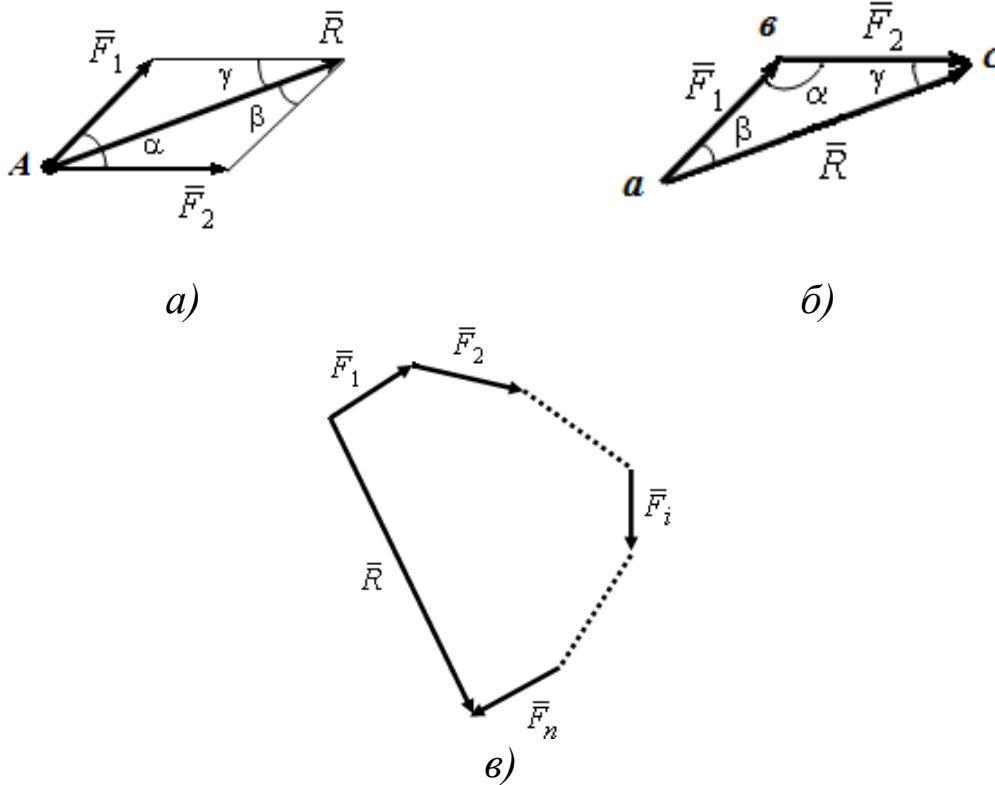


Рис. 1.4. Сложение сил: *а* – по правилу параллелограмма; *б* – по правилу треугольника; *в* – силовой многоугольник

## 2. Аналитический способ сложения сил.

Аналитический способ сложения сил основывается на понятии проекции силы на ось, и в его основе лежит одна из теорем геометрии: проекция вектора суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Если  $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$ , то

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz}. \quad (1.4)$$

Тогда модуль вектора

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (1.5)$$

а направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (1.6)$$

Задача разложения силы на составляющие сводится к нахождению нескольких сил, для которых исходная сила является равнодействующей. Эта задача имеет однозначное решение лишь при дополнительных условиях. Чаще всего сила раскладывается по заданным направлениям: на плоскости – по двум направлениям, в пространстве – по трем.

#### 1.4 Момент силы относительно точки

**Моментом силы относительно точки  $O$**  называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через точку  $O$  и линию действия силы в ту сторону, откуда сила видна направленной относительно точки  $O$  против хода часовой стрелки (рис. 1.5).

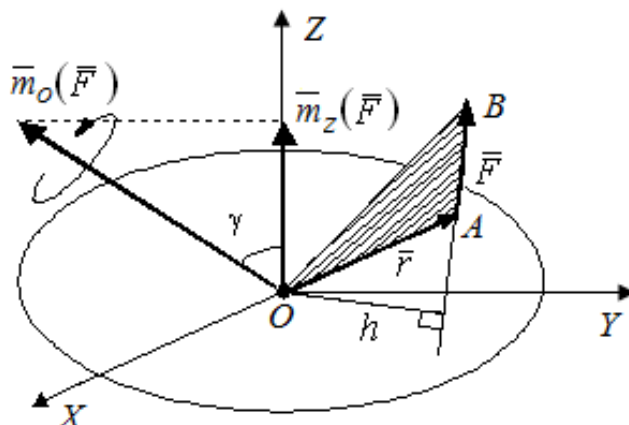


Рис. 1.5. Момент силы относительно центра и оси

Момент силы относительно центра:

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (1.7)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы;  $\bar{F}$  – сила.

Алгебраический момент силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо, т.е.

$$m_0(\bar{F}) = \pm Fh. \quad (1.8)$$



При этом момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра против часовой стрелки, а отрицательным – когда по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы пересекает эту точку.

### 1.5 Пара сил и ее момент

**Парой сил** называется система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны (рис. 1.6). Расстояние между линиями действия этих сил называется плечом пары.

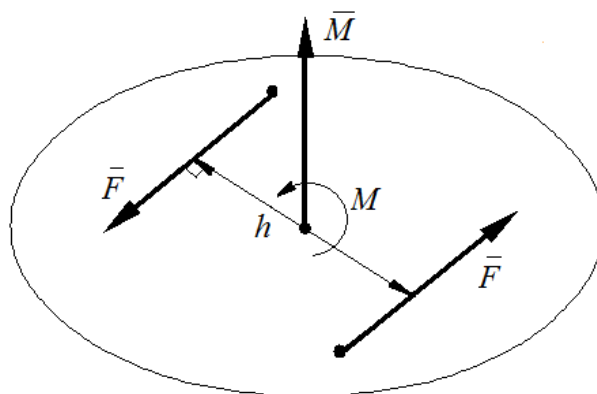


Рис. 1.6. Пара сил

Действие пары сил на тело характеризуется моментом. Вектор момента  $\bar{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежит пара, и направлен в ту сторону, откуда вращение под действием пары сил видно происходящим против часовой стрелки, а его модуль

$$M = \pm F h. \quad (1,9)$$

Пары сил, действующие на тело, можно складывать, а систему пар можно заменить одной равнодействующей парой, момент которой равен геометрической сумме векторов моментов всех пар системы.

Знак момента пары определяется по правилу: если пара сил стремится повернуть тело против часовой стрелки, то знак момента положительный, а если по часовой стрелке – отрицательный.

## Теорема об эквивалентности двух пар

Пару, не изменяя ее действие на твердое тело, можно:

- 1) переносить куда угодно в плоскости действия пары;
- 2) менять модули сил пары и длину плеча так, чтобы момент пары оставался неизменным;
- 3) переносить пару из данной плоскости в любую другую, параллельную данной.

## 1.6. Механические связи и их реакции

Все силы, действующие на тела, делятся на активные и силы реакций механических связей.

Под **активными** понимаются силы, побуждающие тела к движению (например, сила тяжести  $\bar{G}$ ).

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется *свободным*. В противном случае тело считается *несвободным*. Все, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называется **механической связью**.

Сила, с которой связь действует на тело, называется **реакцией связи**.

Рассмотрим направление реакций некоторых основных видов связей плоской системы сил (рис.1.7).

1. Гладкая плоскость или опора (см. рис. 1.7, а, б, в). Реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания.

2. Шарнирно-неподвижная опора (см. рис. 1.7, г). Реакция раскладывается на две составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ .

3. Шарнирно-подвижная опора (см. рис. 1.7, д). Реакция  $\bar{R}_A$  перпендикулярна опорной поверхности.

4. Жесткая заделка (см. рис. 1.7, е). Реакция раскладывается на две составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  и реактивный момент  $M_A$ .

5. Нить (см. рис. 1.7, ж). Реакция нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

6. Стержневая опора (см. рис. 1.7, з). Реакция стержня  $\bar{S}$  направлена вдоль стержня.

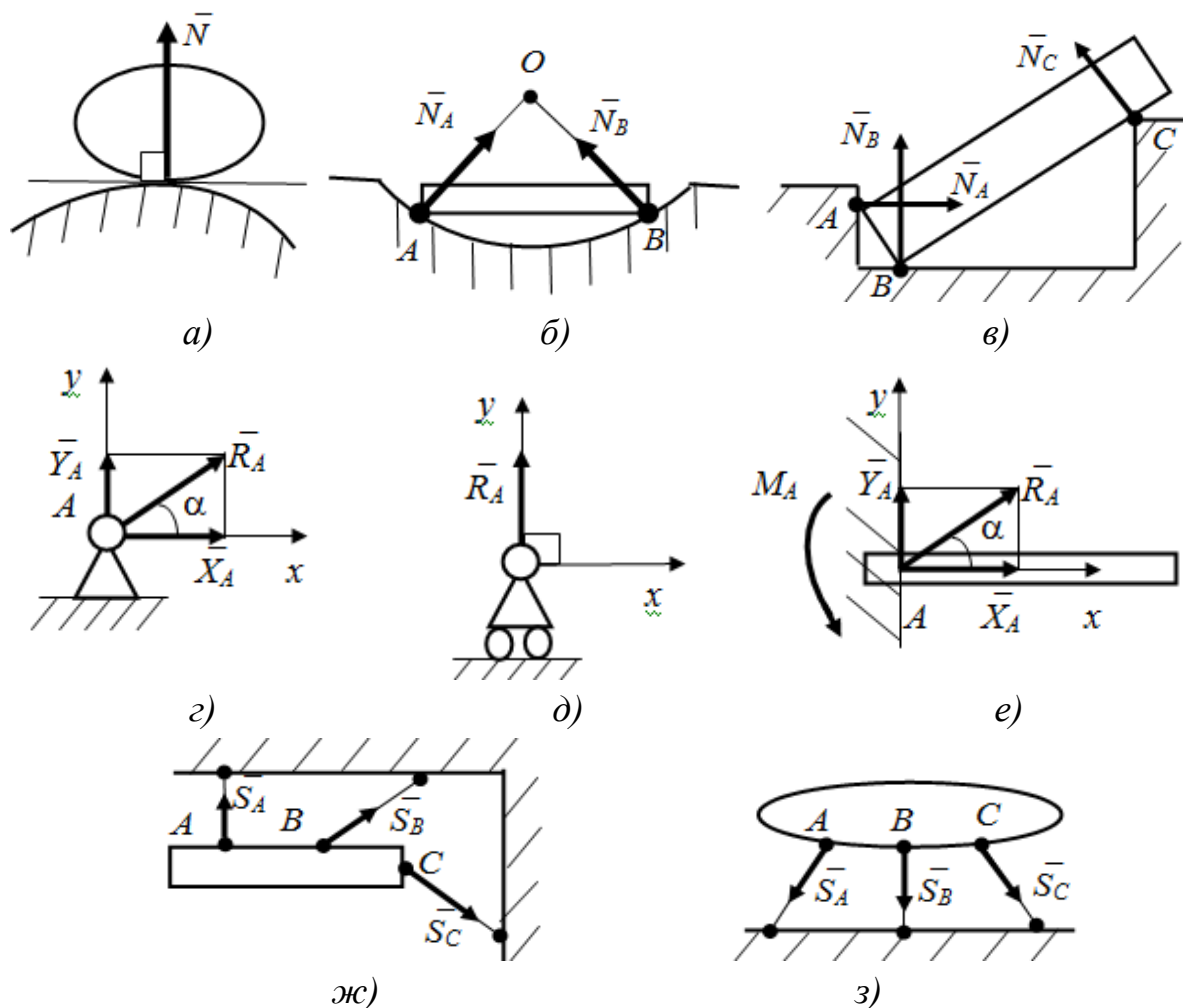


Рис. 1.7. Виды связей для плоской системы сил:  
*а, б, в* – гладкая поверхность; *г* – шарнирно-неподвижная опора;  
*д* – шарнирно-подвижная опора; *е* – жесткая заделка;  
*ж* – нить; *з* – стержневая опора

### 1.7. Система сходящихся сил

Силы называются **сходящимися**, если линии их действия пересекаются в одной точке (рис.1.8).

Система сходящихся сил имеет равнодействующую  $\bar{R}$ , равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия (рис.1.8, б, с):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i. \quad (1.10)$$

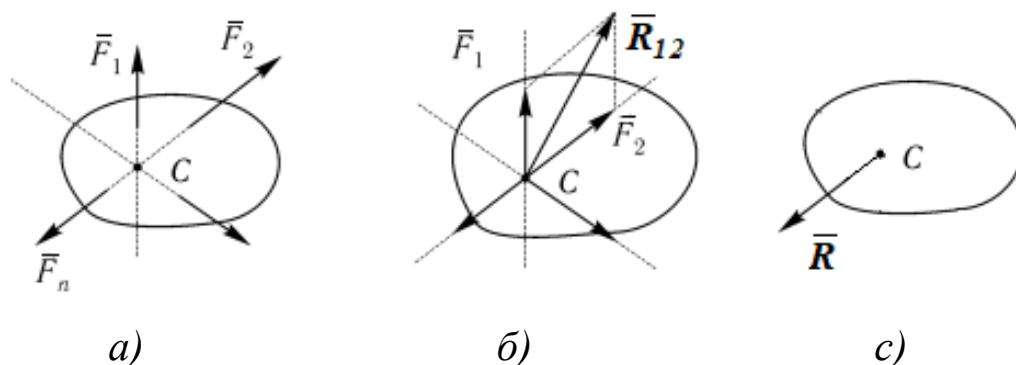


Рис.1.8. Система сходящихся сил: *a* - исходная система сил; *б* – сложение двух сил; *с* - эквивалентная система, приведенная к равнодействующей  $\bar{R}$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая  $\bar{R}$  этих сил была равна нулю.

Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

### 1. Геометрическое условие равновесия.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут (рис.1.9):  $\bar{R} = 0$ .

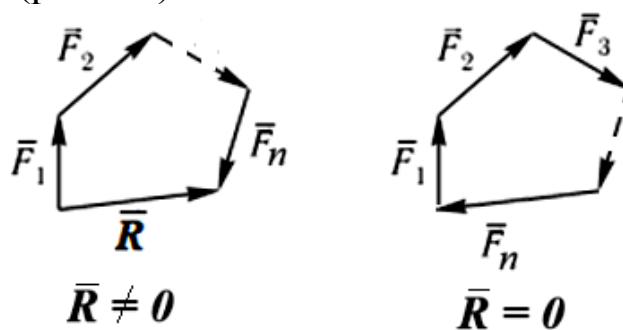


Рис.1.9. Геометрическое условие равновесия

2. Аналитические условия равновесия. Равнодействующая системы сходящихся сил:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} . \quad (1.11)$$

Т.к.  $\bar{R} = 0$ , то и  $R_x=0, R_y=0, R_z=0$ .

Отсюда условия равновесия произвольно расположенной в пространстве системы сходящихся сил:

$$\sum F_{ix}=0; \sum F_{iy}=0; \sum F_{iz}=0. \quad (1.12)$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенство нулю проекций всех сил на координатные оси.

Для плоской системы сходящихся сил количество независимых уравнений равно двум:

$$\sum F_{ix}=0; \sum F_{iy}=0. \quad (1.13)$$

Модуль и направление равнодействующей  $\bar{R}$  определим по формулам (1.5), (1.6).

### Теорема о трех силах

*Теорема:* Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис.1.10).

Доказательство. Так как силы не параллельны, то  $\bar{F}_{12} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ . По условию  $\{ \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \} \sim 0$ , следовательно,  $\{ \bar{F}_3, \bar{F}_{12} \} \sim 0$  и сила  $\bar{F}_3$  проходит через точку  $C$ . Теорема доказана.

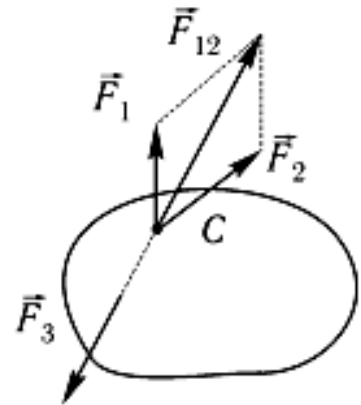


Рис. 1.10.

## Примеры решения задач по теме 1.

**Пример 1.** Определить модуль и направление равнодействующей плоской системы сил  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , приложенных в одной точке, если  $F_1 = F_4 = 100\text{Н}$ ,  $F_2 = 120\text{Н}$ ,  $F_3 = 80\text{Н}$ , углы:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 105^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$  (рис.1.11, а).

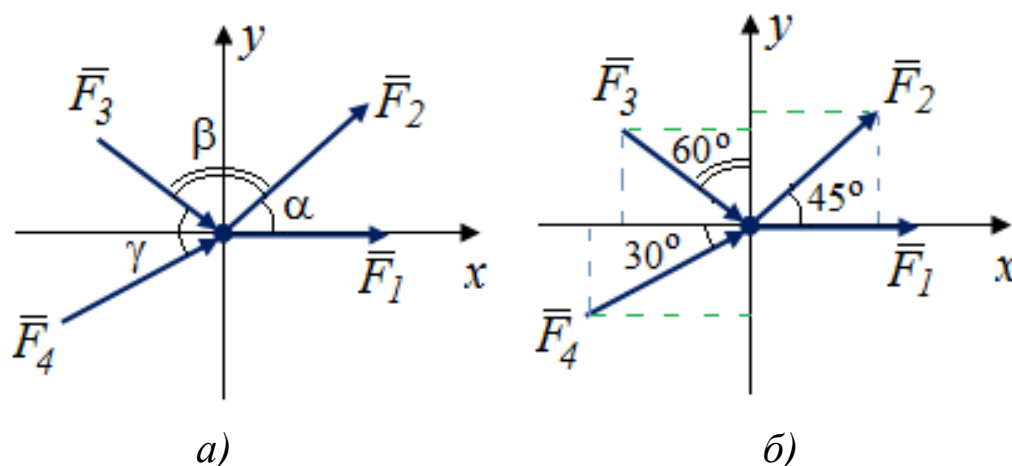


Рис.1.11. Схема к примеру 1: а – исходная схема; б – расчетная схема

### Решение:

Составляем уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил (рис.1.11, б):

$$R_x = \sum F_x = F_1 + F_2 \cos 45^\circ + F_3 \cos 30^\circ + F_4 \cos 30^\circ = 100 + 60\sqrt{2} + 90\sqrt{3} = 340,3 \text{ Н}$$

$$R_y = \sum F_y = F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 30^\circ + F_4 \sin 30^\circ = 60\sqrt{2} + 10 = 94,6 \text{ Н.}$$

Равнодействующую определяем по теореме Пифагора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 353,5 \text{ Н}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R} = \frac{340,3}{353,5} = 0,959$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R} = \frac{94,6}{353,5} = 0,266$$

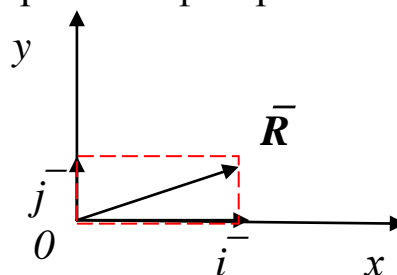


Рис.1.12.

**Пример 2.** Флагшток  $AO$  укрепляется на трех растяжках  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  (рис. 1.13). Конструкция устанавливается с помощью натяжения вручную каната  $ABK$ , продетого через кольцо  $B$ . Определить усилие в канатах  $AC$  и  $AD$  и в стержне  $AO$  в зависимости от натяжения  $F_Q$ .

**Решение:**

Рассматриваем равновесие узла  $A$ . Полагаем, что все силы, действующие на узел, направлены от узла. Если в результате расчетов окажется, что какие-то из сил имеют знак “минус”, то это будет означать, что соответствующие стержни работают на сжатие.

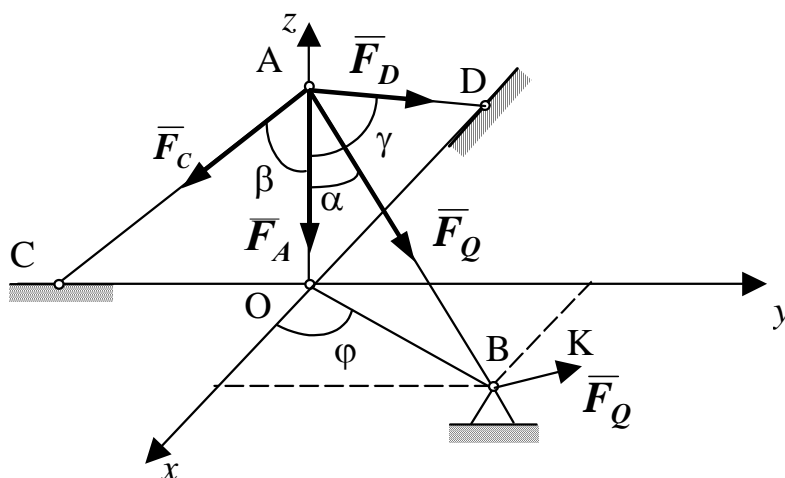


Рис. 1.13. Расчетная схема

Из условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = F_Q \sin \alpha \cos \varphi - F_D \sin \gamma = 0,$$

$$\sum F_{ky} = F_Q \sin \alpha \sin \varphi - F_C \sin \beta = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -F_A - F_C \cos \beta - F_D \cos \gamma - F_Q \cos \alpha = 0$$

определяем:

$$F_D = F_Q \sin \alpha \cos \varphi / \sin \gamma, \quad F_C = F_Q \sin \alpha \sin \varphi / \sin \beta,$$

$$F_A = -F_Q [\cos \alpha + \sin \alpha (\sin \varphi \operatorname{ctg} \beta + \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma)].$$

Знак минус для  $F_A$  означает, что распорка  $AO$  (флагшток) работает на сжатие.

**Пример 3.** Найти момент равнодействующей пары сил (рис.1.14).

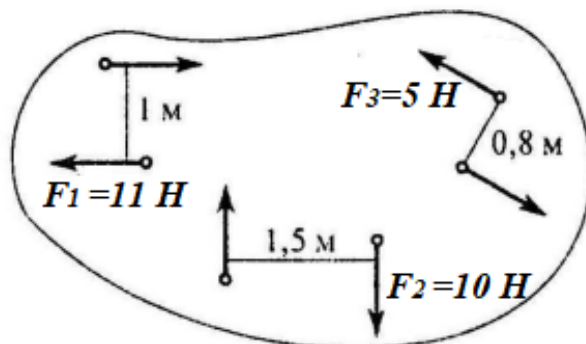


Рис. 1.14. Схема к примеру 3

**Решение:**

На тело действуют три пары сил, момент которых равен:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 = -11 \times 1 - 10 \times 1,5 + 5 \times 0,8 = -22 \text{ (Н м)}.$$

**Пример 4.** Какие из изображенных пар сил эквивалентны (рис.1.15)?

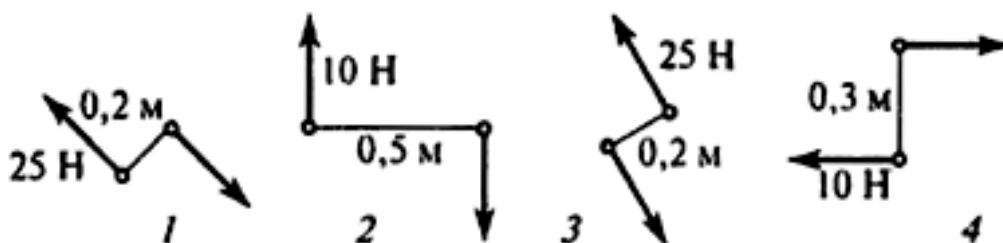


Рис. 1.15. Схема к примеру 4

**Решение:**

Две пары называют **эквивалентными**, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Пара сил на схеме 1 эквивалентна паре сил на схеме 2 (рис.1.16).



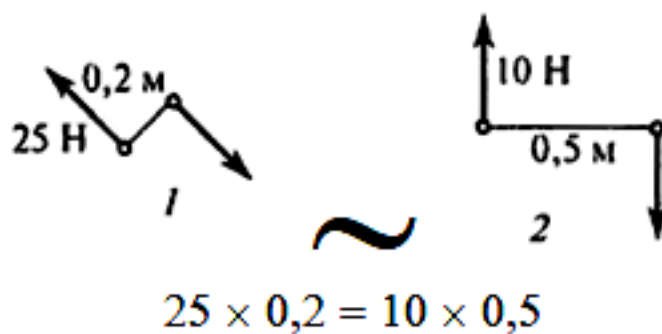


Рис. 1.16. Эквивалентные пары

**Пример 5.** Определить сумму моментов относительно точки  $A$ , если  $F_1 = 10\text{ Н}$ ,  $F_2 = 5\text{ Н}$ ,  $F_3 = 20\text{ Н}$  (рис.1.15).

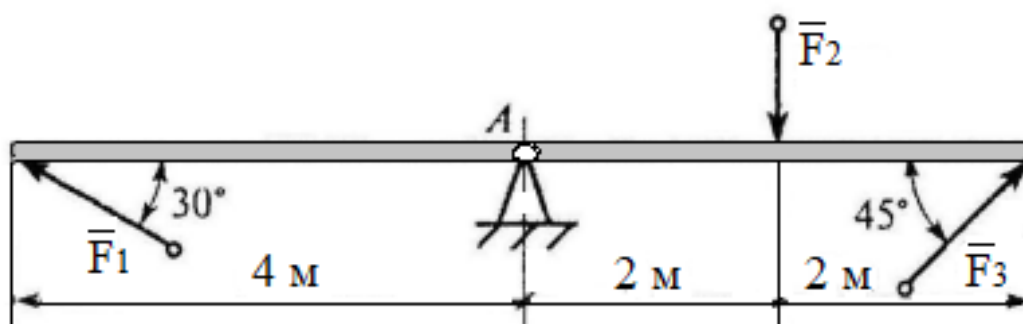


Рис.1.17. Схема к примеру 5

**Решение:**

$$\begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_i) &= -F_1 \sin 30^\circ \cdot 4 - F_2 \cdot 2 + F_3 \sin 45^\circ \cdot 4 = \\ &= -10 \cdot 0,5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 20 \cdot 0,7 \cdot 4 = 26 \text{ (Н м)} \end{aligned}$$

## Тема 2

Уравнения равновесия системы сил. Произвольная плоская и пространственная система сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие системы тел.

### 2.1. Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю, т.е.

$$\bar{R} = 0; \bar{M} = 0 \quad (2.1)$$

1) Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.

Два векторных равенства можно заменить шестью скалярными:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum F_{iz} = 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \sum M_y(\bar{F}_i) = 0, \sum M_z(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для равновесия тела в пространстве необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на координатные оси и суммы моментов всех сил относительно трех координатных осей равнялись нулю.

2) Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил:

а) ось  $z$  параллельна данным силам

$$\sum F_{iz} = 0; \sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \sum M_y(\bar{F}_i) = 0; \quad (2.3)$$

б) ось  $x$  параллельна данным силам

$$\sum F_{ix} = 0; \sum M_z(\bar{F}_i) = 0, \sum M_y(\bar{F}_i) = 0; \quad (2.4)$$

в) ось  $y$  параллельна данным силам

$$\sum F_{iy} = 0; \sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \sum M_z(\bar{F}_i) = 0; \quad (2.5)$$

3) Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую

координатную ось  $(x, y)$  и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

4) Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил. Если силы перпендикулярны какой-либо оси  $(x)$ , то уравнение  $\sum F_{ix} = 0$  обращается в тождество  $0 \equiv 0$ . Для определения неизвестных сил остается два уравнения равновесия, записанных в двух формах:

$$\begin{cases} \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек  $A$  и  $B$  равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.2. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

В случаях, когда нахождение плеча, в уравнениях моментов сил относительно точки (центра) или оси затруднено, целесообразно использовать **теорему Вариньона**: если система сил имеет равнодействующую  $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$ , то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки  $\bar{m}_0(\bar{R}) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i)$

Проиллюстрируем применение теоремы Вариньона на примере (рис. 2.1).

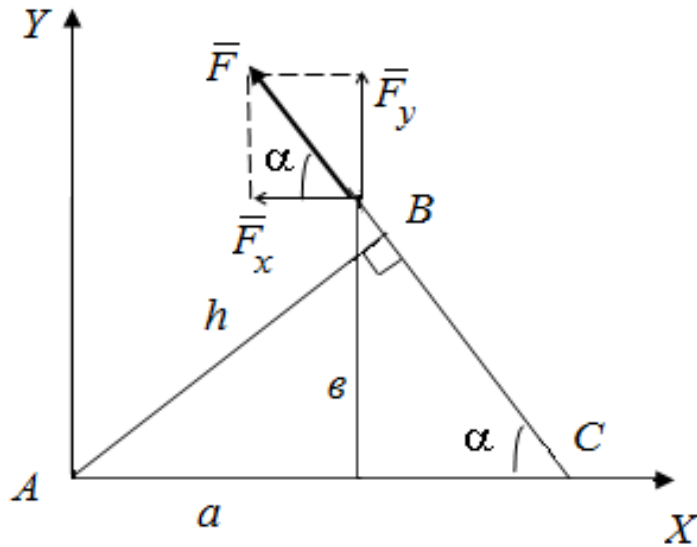


Рис. 2.1. Пример использования теоремы Вариньона

Момент силы  $F$  относительно точки  $A$ :

$$m_A(\bar{F}) = F \cdot h. \quad (2.9)$$

Из  $\Delta ABC$   $h = AB = AC \cdot \sin \alpha = \left( a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \sin \alpha = a \sin \alpha + b \cos \alpha$ ;

$$m_A(\bar{F}) = F a \sin \alpha + F b \cos \alpha, \quad (2.10)$$

с другой стороны, по теореме Вариньона

$$m_A(\bar{F}) = m_A(F_X) + m_A(F_Y), \quad (2.11)$$

где  $F_X = F \cos \alpha$ ;  $F_Y = F \sin \alpha$ .

Окончательно получим

$$m_A(\bar{F}) = F a \cos \alpha + F b \sin \alpha. \quad (2.12)$$

### 2.3. Равновесие системы тел

Под *системой тел* понимается конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой через какие-либо связи, допускающие относительные перемещения этих

тел (они могут соединяться шарнирами, гибкой нитью, опираться друг на друга и т.д.).

Силы, действующие на тела системы, делятся на внешние и внутренние.

*Внешними* называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих этой системе.

*Внутренними* называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Основным способом расчета систем твердых тел (составных конструкций) является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Примером составной конструкции является система, состоящая из двух однородных балок  $AB$  и  $CB$  (рис.2.2,  $a$ ).

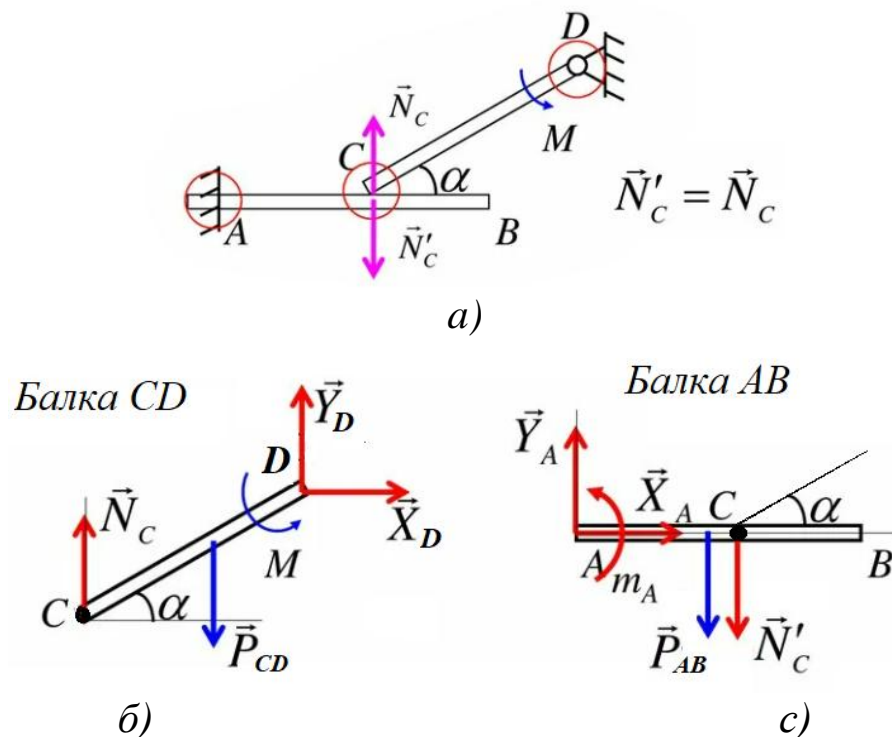


Рис. 2.2. Составная конструкция:  $a$  – исходная балка,  $b$ ,  $c$  – расчетные схемы балки  $CD$  и  $AB$  соответственно;

$P_{CD}$ ,  $P_{AB}$  – вес балок

Используя принцип освобожденности от связей получаем три реакции в жесткой заделке  $A$  ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, m_A$ ) и две реакции в шарнирной опоре  $D$  ( $\bar{X}_D, \bar{Y}_D$ ). Для их определения конструкцию можно разделить на две части в точке, допускающее относительные перемещение однородных балок  $AB$  и  $CB$ : точка  $C$ . При этом внутренняя сила давления в точке  $C$  на балку  $AB$  становится внешней и согласно аксиоме статики:  $\bar{N}_C = \bar{N}'_C$  равны по модулю, но направлены в противоположные стороны (рис.2.2, б, с).

В результате, для каждой их частей балок  $AB$  и  $CB$  можно составить по три уравнения равновесия (см. п.2.1) и определить неизвестные реакции.

Следует заметить, что при рассмотрении равновесия всей системы твердых тел, реакции связей между отдельными телами не должны учитываться, т.к. это взаимно уравновешивающие внутренние силы. При рассмотрении равновесия отдельного тела соответствующие реакции связей, которые были мысленно расчленены, становятся внешними и входят в уравнения равновесия.

*Задачи на равновесие системы твердых тел рекомендуется решать в следующем порядке:*

- 1) выделить систему тел и отдельно твердые тела, равновесие которых следует рассмотреть для определения искомых величин;
- 2) изобразить заданные силы;
- 3) применить принцип освобожденности от связей: мысленно отбросить связи, заменить их действие силами реакций связей;
- 4) сопоставить число неизвестных величин и количество независимых уравнений равновесия (для статически определимой системы эти числа должны быть равны);
- 5) выбрать систему декартовых координат, при этом для каждого тела и для системы тел можно взять одну и ту же, или для каждого тела (системы) свою наиболее удобную систему координат;

б) записать аналитические условия равновесия для каждого твердого тела (для системы тел) в соответствии с силами, которые к ним приложены;

7) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

## Примеры решения задач по теме 2

**Пример 1.** Жесткая рама (рис. 2.3, а) закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикреплена к шарнирной опоре на катках.

На раму действуют пара сил с моментом  $M=5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , горизонтальная сила  $P_1=4 \text{ Н}$  и сила  $P_2 = 5 \text{ Н}$ , расположенная под углом  $\alpha=30^\circ$  горизонтальной оси.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять  $l=4 \text{ м}$ ,  $a = 6 \text{ м}$ ,  $b = 8 \text{ м}$ .

### Решение:

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции. Проведем координатные оси  $X Y$  и изобразим действующие на раму активные силы: сосредоточенные силы  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , а также пара сил с моментом  $M$ . Отбросим связи, заменив их реакциями связей. Подвижную опору заменим вертикальной реакцией  $\bar{R}_B$ , а неподвижную опору  $A$  – горизонтальной  $\bar{X}_A$  и вертикальной  $\bar{Y}_A$ , (рис.2.3, б).

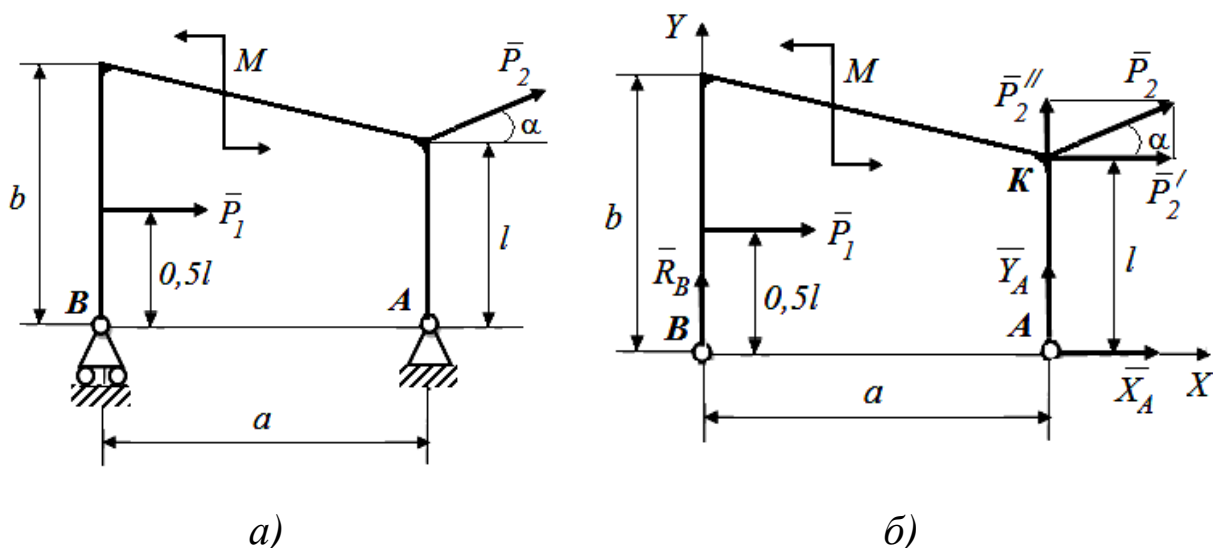


Рис.2.3. Схема рамы: а – исходная, б - расчётная

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\bar{P}$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $\bar{P}$  на составляющие  $\bar{P}'$ ,  $\bar{P}''$ , модули которых  $P' = P \cdot \cos \alpha$ ,  $P'' = P \cdot \sin \alpha$ , и учтем, что  $m_A(\bar{P}) = m_A(\bar{P}') + m_A(\bar{P}'')$ . Тогда получим:

$$\sum \bar{F}_{ix} = 0, \quad X_A + P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum \bar{F}_{iy} = 0, \quad Y_A + P_2 \cdot \sin \alpha + R_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad -P_1 \cdot 0,5l - P_2 \cdot \cos \alpha \cdot l + M - R_B \cdot a = 0 \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и, решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Из уравнения (1) определяем  $X_A = -8,33$  (Н).

Из уравнения (3) определяем  $R_B = -3,4$  (Н).

Из уравнения (2) определяем  $Y_A = 0,9$  (Н).

Отрицательные значения  $X_A$  и  $R_B$  означают, что в действительности они направлены в противоположные стороны.

Полная реакция опоры  $A$  найдется как геометрическая сумма сил  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . По модулю,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,4 \text{ (Н)}.$$

3. Для проверки правильности нахождения реакций связей составим уравнение моментов относительно точки  $K$ :

$$\sum M_K(\bar{F}_i) = 0, \quad X_A \cdot l + M - R_B \cdot a + P_1 \cdot 0,5 \cdot l = 0. \quad (4)$$

Подставляя сюда найденные величины  $X_A$  и  $R_B$ , убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют.

Следует иметь в виду, что при такой проверке можно не обнаружить ошибок, связанных с неправильным определением проекций или моментов сил, перпендикулярных оси  $AX$ . Поэтому надо или дополнительно проверить эту часть расчетов, или составить для проверки еще одно уравнение, например уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad Y_A \cdot a + M - P_1 \cdot 0,5 \cdot l - P_2 \cdot \cos \alpha \cdot l + P_2 \cdot \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (5)$$



Подставляя сюда найденную из уравнения (2) величину  $Y_A$ , убеждаемся, что она этому уравнению удовлетворяет.

**Пример 2.** Рама, изображенная на рисунке 1.9, а, шарнирно закреплена в точке  $A$ , а в точке  $B$  удерживается в равновесии с помощью стержня. Пренебрегая весом рамы, определить реакции механических связей, если  $q = 1$  Н/м,  $q_{\max} = 2$  Н/м;  $P = 10$  Н;  $M = 5$  Н·м. Размеры конструкции и действующие силовые факторы указаны на рисунке.

**Решение:**

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции. Проведем координатные оси  $X$   $Y$  и изобразим действующие на раму активные силы: сосредоточенная сила  $\bar{P}$ , равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью  $q_1$ , распределенная нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника с максимальной интенсивностью  $q_{\max}$ , а также пара сил с моментом  $M$ .

Отбросим связи, заменив их реакциями связей. Неподвижную опору  $A$  – горизонтальной  $\bar{X}_A$  и вертикальной  $\bar{Y}_A$ , реакцию невесомого стержня  $\bar{R}_B$  направляем вдоль стержня.

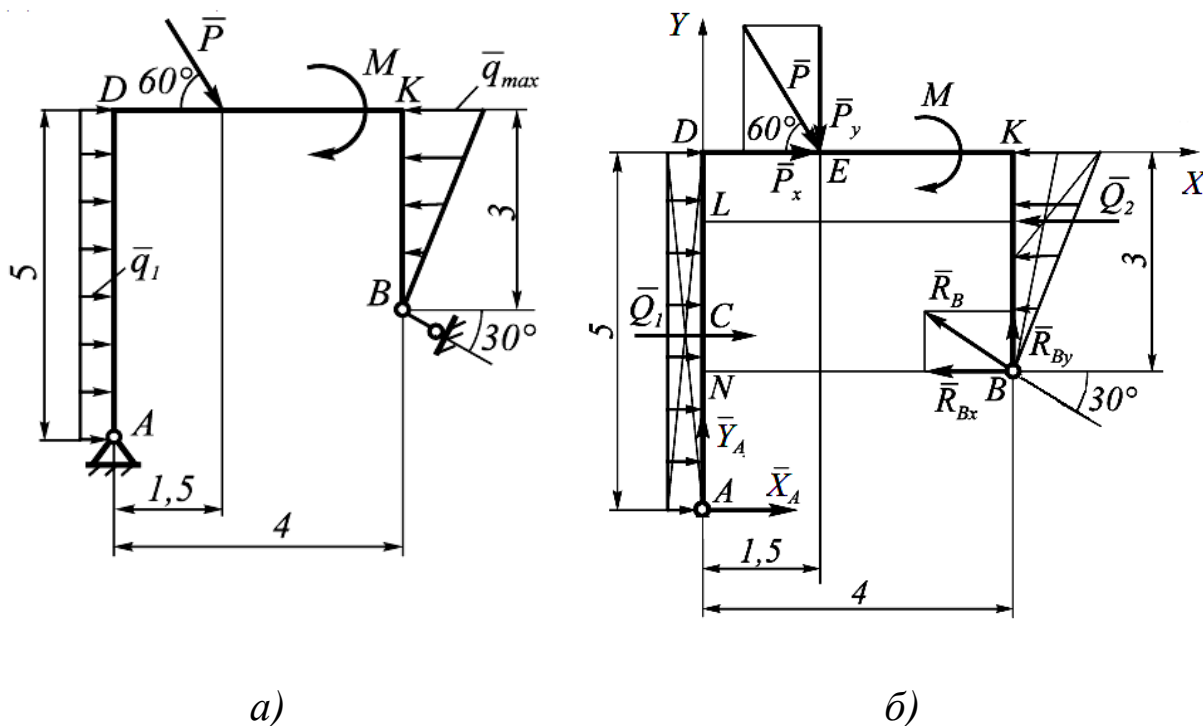


Рис.2.4. Схема рамы: а – исходная, б - расчётная

Распределенные силы заменим их равнодействующими. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q_1$  заменяем силой  $\bar{Q}_1$ , которую прикладываем в центре прямоугольника, изображающего эту нагрузку (рис.2.4 ,б):

$$Q_1 = q_1 \cdot AD = 15 = 5 \text{ Н.}$$

Распределенную нагрузку, изменяющуюся по закону треугольника, заменяем равнодействующей  $\bar{Q}_2$ . Ее прикладываем на расстоянии  $BK/3$  от места приложения  $q_{\max}$ :

$$Q_2 = q_{\max} \cdot BK/2 = 2 \cdot 3/2 = 3 \text{ Н.}$$

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\bar{P}$  и реакции связи  $\bar{R}_B$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $\bar{P}$  и реакцию связи  $\bar{R}_B$  на составляющие, модули которых:

$$\begin{aligned} P_x &= P \cdot \cos 60, & P_y &= P \cdot \sin 60, \\ R_{Bx} &= R_B \cdot \cos 30, & R_{By} &= R_B \cdot \sin 30, \end{aligned}$$

и учтем, что:

$$m_A(\bar{P}) = m_A(\bar{P}_x) + m_A(\bar{P}_y), \quad m_A(\bar{R}_B) = m_A(\bar{R}_{Bx}) + m_A(\bar{R}_{By}).$$

Тогда получим:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad X_A + Q_1 + P \cos 60^\circ - Q_2 - R_B \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad Y_A - P \sin 60^\circ + R_B \sin 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0, & \quad -Q_1 \cdot AC - P_x \cdot AD - P_y \cdot DE - M + Q_2 \cdot AL + \\ & \quad + R_{Bx} \cdot AN + R_{By} \cdot NB = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и, решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Из уравнения (3) определяем  $R_B = 11,65$  (Н).

Из уравнения (2) определяем  $Y_A = 2,83$  (Н).

Из уравнения (1) определяем  $X_A = 3,09$  (Н).

Полная реакция опоры  $A$  найдется как геометрическая сумма сил  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . По модулю,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 4,19 \text{ (Н).}$$

3. Для проверки правильности нахождения реакций связей составим уравнение моментов относительно точки  $E$ :

$$\begin{aligned} \Sigma M_E(\bar{F}_i) = 0, \quad Q_1 \cdot 2,5 - M - Q_2 \cdot 1 - R_{Bx} \cdot 3 + R_{By} \cdot 2,5 + \\ + X_A \cdot 5 - Y_A \cdot 1,5 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя сюда найденные величины  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $R_B$ , убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют.

### Тема 3

Расчет плоских ферм. Трение. Равновесие при наличии трения.  
Центр тяжести. Способы определения координат  
центров тяжести тел.

#### 3.1. Плоские фермы

**Ферма** - жесткая (геометрически неизменяемая) конструкция из стержней, соединенных между собой шарнирами. Шарнирные соединения называются **узлами** (рис. 3.1).

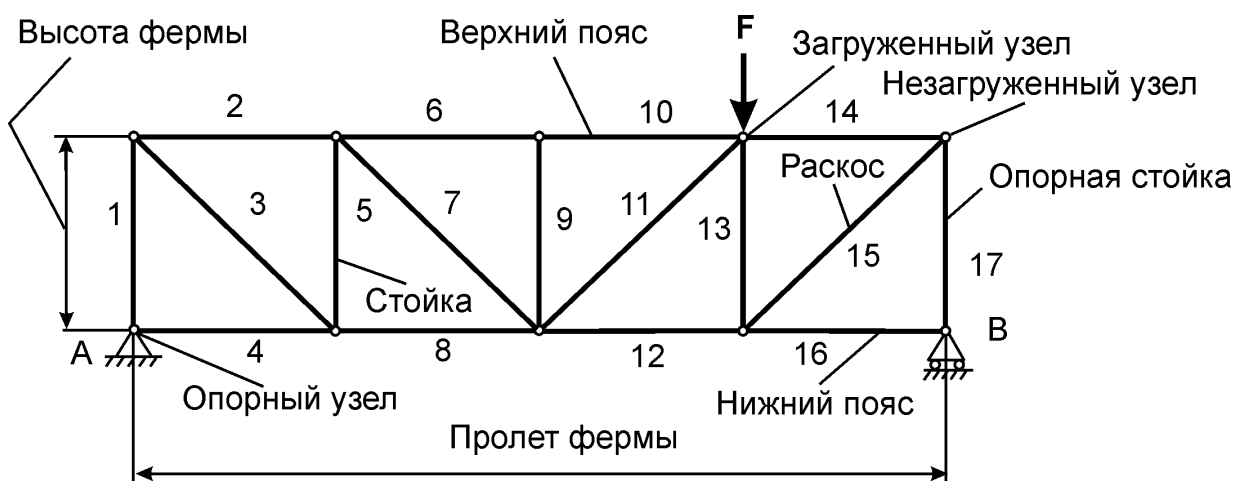


Рис. 3.1. Ферма

Задачей расчета ферм является определение реакций внешних связей и усилий в стержнях. Основные допущения – это идеальность стержней фермы и распределение внешней нагрузки по её узлам.

У статически определимых ферм количество стержней  $m$  и количество узлов  $n$  связаны соотношением:

$$m = 2n - 3.$$

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Усилия в стержнях рассчитываются одним из следующих методов.

1. Метод вырезания узлов: последовательно вырезаются узлы, в которых сходится не более двух стержней с неизвестными

усилиями, и составляются уравнения равновесия системы сходящихся сил;

2. Метод сечений (метод Риттера): производится сечение фермы по трем стержням с неизвестными усилиями и составляются уравнения равновесия одной части фермы.

### ***3.1.1 Случаи ненагруженных стержней фермы***

Рассмотрим случаи, когда в некоторых стержнях фермы усилия равны нулю. Такие стержни принято называть **нулевыми**. Нахождение нулевых стержней упрощает задачу вычисления усилий во всех остальных стержнях фермы. Рассмотрим леммы, пользуясь которыми можно определить нулевые стержни плоской фермы, не производя её расчета.

#### **Лемма 1.**

Если в узле сходятся только два стержня (под любым углом), и никакой нагрузки к узлу не приложено, то усилия  $S_1$  и  $S_2$  в этих стержнях будут нулевыми (рис.3.2,а).

#### **Лемма 2.**

Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, а третий примыкает к ним под любым углом и никакой нагрузки к узлу не приложено, то усилия в двух первых стержнях  $S_1$  и  $S_2$  будут одинаковыми  $S_1 = S_2$ , как по величине, так и по знаку, а третий стержень  $S_3$  будет нулевым (рис.3.2,б).

#### **Лемма 3.**

Если в узле сходятся только два стержня  $S_1$  и  $S_2$ , причём вдоль одного из них действует внешняя сила  $F$ , линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне будет равно самой силе по величине, но противоположно по направлению  $F = -S_1$ , а другой стержень  $S_2$  будет нулевым (рис.3.2,в).

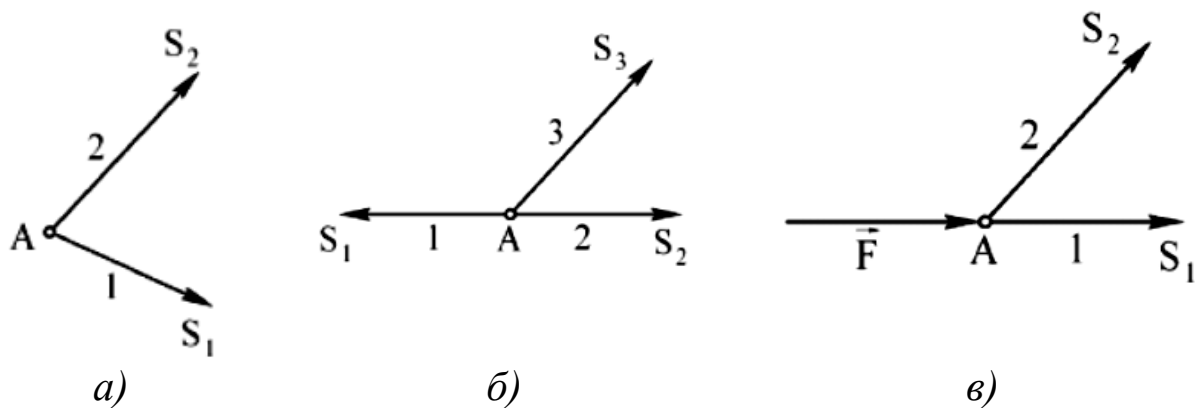


Рис. 3.2. Определение нулевых стержней фермы

### 3.2. Равновесие при наличии трения скольжения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого, в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой **трения** (рис.3.3).

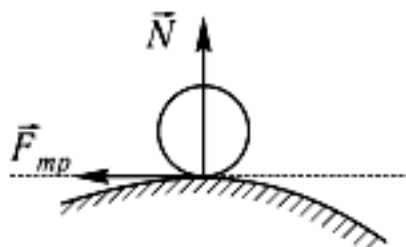


Рис.3.3. Трение скольжения

Она обусловлена шероховатостью поверхностей и наличием сцепления и принимает любые значения от нуля до значения  $\bar{F}_{\text{тр}}^{\text{пр}}$ , называемого **предельной силой трения**. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

Предельная (максимальная) сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения  $f_c$  и силы нормального давления  $N$ :

$$\bar{F}_{mp}^{np} = f_c \cdot N.$$

Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

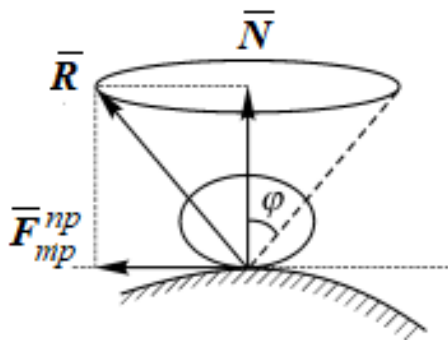
При равновесии  $\bar{F}_{mp}^{np} \geq \bar{F}_{mp}$ .

Сила трения достигает своего предельного значения лишь тогда, когда сдвигающая сила достигает такого значения, что при малейшем ее увеличении тело начинает двигаться. Равновесие, когда сила трения равна предельному значению, называется предельным равновесием.

При скольжении  $F_{mp} = fN$ ,  
где  $f$  - коэффициент трения скольжения.

Коэффициент трения скольжения, как правило, зависит от скорости скольжения и немного меньше коэффициента трения покоя.

**Конус трения** – поверхность, образованная линией действия максимальной реакцией  $\bar{R}$  при стремлении сдвинуть тело в различных направлениях. Пространство внутри конуса представляет собой совокупность возможных положений реакций опорной поверхности в состоянии покоя (рис.3.4).



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{np}}{N} = \frac{f N}{N} = f,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = f$$

Рис.3.4. Конус трения

Изучение равновесия тел с учетом трения скольжения в ряде случаев можно свести к рассмотрению предельного равновесия. При этом составляются уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство:

$$F_{mp}^{np} = f \cdot N.$$

### 3.3. Равновесие при наличии трения скольжения

**Трением качения** называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. В результате возникает деформация катка и плоскости; соприкосновение между ними происходит по некоторой плоскости, смещенной от нижней точки катка в сторону возможного движения (рис.3.5).

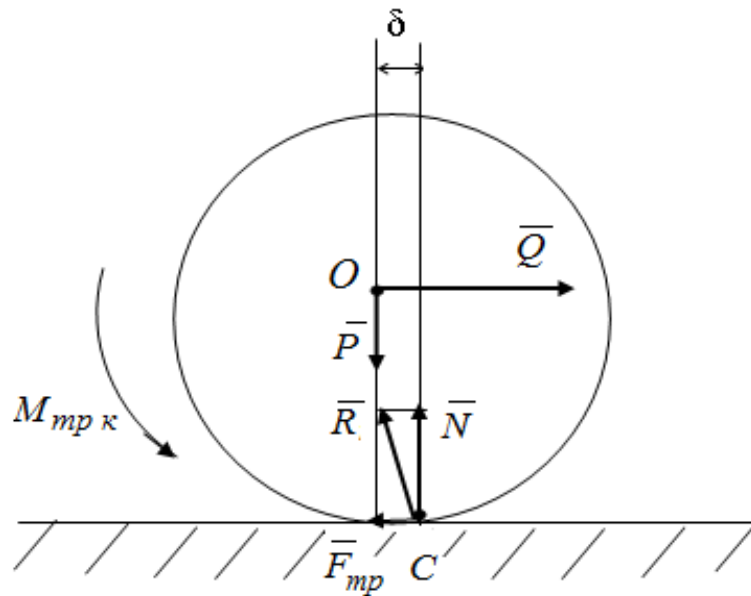


Рис.3.5.Трение качения

При равновесии тела момент сопротивления качению определяется из условия равновесия системы сил. При этом установлено, что момент сопротивления принимает значения от нуля до максимального значения. Максимальное значение момента сопротивления, соответствующее началу качения, определяется равенством:

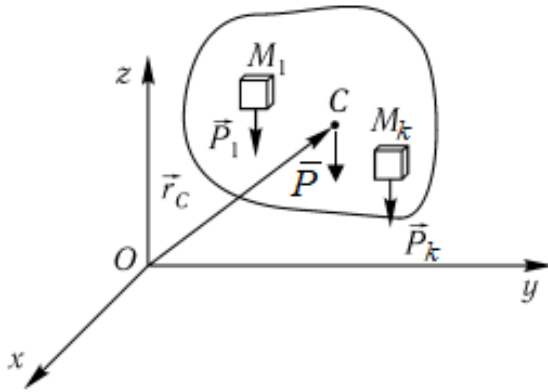
$$M_{тр.к} = \delta \cdot N,$$

где  $\delta$  - коэффициент трения качения, измеряемый в единицах длины, например в мм.



### 3.4. Центр тяжести твердого тела

Центр системы параллельных сил тяжести частиц тела  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k$  называется центром тяжести твердого тела (рис. 3.6):



$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{P}_k \bar{r}_k}{\bar{P}}$$

где  $\bar{P} = \sum \bar{P}_k$  - сумма сил тяжести всех материальных частиц называется **весом  $\bar{P}$**  твердого тела.

Рис.3.6. Центр тяжести твердого тела

Координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$X_C = \frac{1}{P} \sum P_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{P} \sum P_i Y_i; \quad Z_C = \frac{1}{P} \sum P_i Z_i,$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  - координаты точек приложения сил тяжести  $P_i$ , действующих на частицу.

Для однородного тела эти формулы имеют следующий вид:

$$X_C = \frac{1}{V} \sum V_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{V} \sum V_i Y_i; \quad Z_C = \frac{1}{V} \sum V_i Z_i, \quad (6.8)$$

где  $V$  - объем всего тела;  $V_i$  - объем  $i$ -й частицы.

Аналогичные формулы запишем для однородной тонкой пластины:

$$X_C = \frac{1}{S} \sum S_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{S} \sum S_i Y_i, \quad (6.9)$$

и для линии:

$$X_C = \frac{1}{L} \sum l_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{L} \sum l_i Y_i; \quad Z_C = \frac{1}{L} \sum l_i Z_i, \quad (6.10)$$

где  $S$  - площадь пластины;  $S_i$  - площадь  $i$ -й части;  $L$  - длина всей линии;  $l_i$  - длина  $i$ -й части.

## Способы определения координат центров тяжести тел:

### 1. Симметрия.

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси, или в центре симметрии.

### 2. Разбиение.

Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по вышеизложенным формулам.

### 3. Дополнение.

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

### 4. Интегрирование.

Когда тело нельзя разбить на составные части, центры тяжести которых известны, используют метод интегрирования, являющийся универсальным.

### 5. Экспериментальный.

Подвешивание и взвешивание.

## Примеры решения задач по теме 3.

**Пример 1.** Определить реакции опор и усилий в стержнях плоской фермы. К узлу  $C$  плоской фермы приложена нагрузка  $P=30$  кН; известны размеры фермы  $AE=EC=EF=FB=2$  м (рис.3.7). Вес стержней не учитывать.

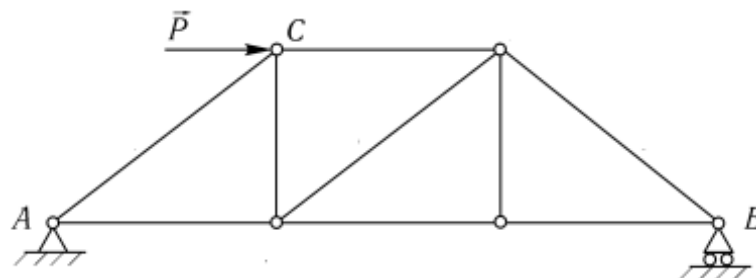


Рис. 3.7. Плоская ферма

**Решение:**

Пронумеруем стержни фермы цифрами, а узлы – буквами (рис. 3.8).

Установим, является ли данная ферма статически определимой.

Число стержней фермы  $m = 11$ , число узлов  $n = 7$ , по формуле:  $m = 2n - 3$ , получим тождество:  $11 = 11$ . Следовательно, ферма статически определима.

*1. Определение опорных реакций.*

Составляем расчетную схему (рис. 3.8). Рассматриваем ферму как твердое тело, к которому приложена уравновешенная плоская система сил. Мысленно отбрасываем внешние связи (шарнирно-неподвижная опора А и шарнирно-подвижная опора В) и заменяем их действие соответствующими реакциями. Поскольку направление реакции А шарнирно неподвижной опоры неизвестно, то эту реакцию раскладываем на составляющие  $X_A$  и  $Y_A$ , и ориентированные параллельно соответствующим координатным осям; реакцию В шарнирно подвижной опоры  $Y_B$  направляем перпендикулярно опорной поверхности.

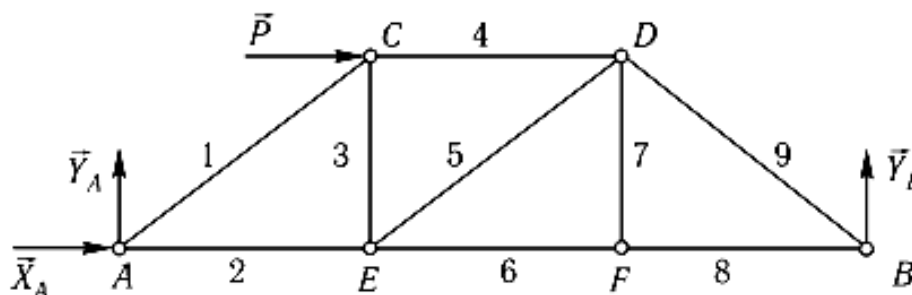


Рис. 3.8. Расчетная схема

Определяем реакции опор:  $X_A; Y_A; Y_B$ . Для этого записываем уравнение равновесия плоской системы сил.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} X_A + P &= 0, \\ Y_A + Y_B &= 0, \\ -P \cdot CE + Y_B \cdot 3AE &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $X_A = -30$  кН;  $Y_A = -10$  кН;  $Y_B = 10$  кН.

**Обязательна проверка реакций.**

Если в составлении уравнений или в расчетах на этом этапе решения допущена ошибка, все дальнейшие расчеты будут неверными. Для проверки записываем моментной точки D:

$$\begin{aligned} \sum M_D(\vec{F}_i) &= 0; X_A \cdot FD - Y_A \cdot (AE + EF) + Y_B \cdot BF = 0. \\ &- 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 0. \\ &- 20 + 20 = 0. \end{aligned}$$

Реакции найдены верно.

**2. Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.**

Последовательно рассматриваем условия равновесия систем сил, приложенных к каждому отдельному узлу фермы. Для этого мысленно вырезаем узлы вместе со сходящимися в них стержнями, а действие отброшенных частей конструкции заменяем усилиями  $S_i$ , направленными вдоль соответствующих стержней, предполагая, что все стержни работают на растяжение (рис.3.9). Если в результате расчетов значение усилия в каком-либо стержне получится отрицательным, то это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Именно поэтому принято приписывать растягивающим усилиям знак «+», а сжимающим знак «-». Это правило в процессе решения задач статики при расчетах усилий в стержнях ферм, а также различных кронштейнов используется определения вида напряжения в стержнях.

Из равновесия системы сходящихся сил в каждом узле можно записать два уравнения равновесия:  $\sum \vec{F}_{ix} = 0$ ;  $\sum \vec{F}_{iy} = 0$ .

Расчет необходимо начинать с узла, в котором сходятся только два неизвестных стержня, поскольку из уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Последовательность рассмотрения узлов для расчета данной фермы можно начинать либо с узла  $A$ , либо с узла  $B$ . Последовательность рассмотрения остальных узлов должна быть такой, чтобы каждый раз в уравнения равновесия входило не более двух неизвестных.

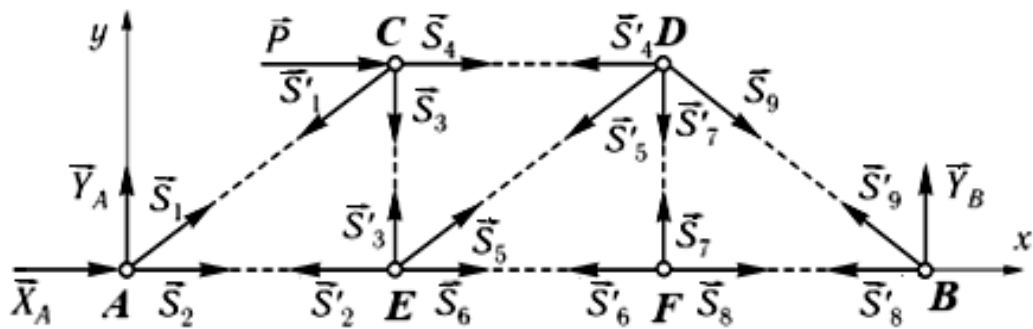
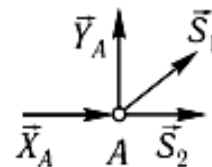


Рис. 3.9. Расчетная схема

а) Вырезаем узел  $A$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.10).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{aligned} X_A + S_1 \cos 45^\circ + S_2 &= 0, \\ Y_A + S_1 \sin 45^\circ &= 0, \end{aligned} \right.$$

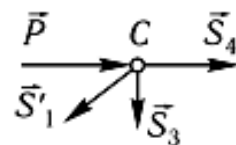


$$S_1 = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ кН}; S_2 = 20 \text{ кН}.$$

Рис.3.10. Узел  $A$

б) Вырезаем узел  $C$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.11).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{aligned} P - S'_1 \cos 45^\circ + S_4 &= 0, \\ -S'_1 \cos 45^\circ - S_3 &= 0, \\ S'_1 &= S_1, \end{aligned} \right.$$



$$S_3 = -S'_1 \cos 45^\circ = -10 \text{ кН}; S_4 = -20 \text{ кН};$$

Рис.3.11. Узел  $C$

в) Вырезаем узел  $E$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.12).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} S_6 + S_5 \cos 45^\circ - S_2' = 0, \\ S_3' + S_5 \cos 45^\circ = 0, \\ S_2' = S_2, \quad S_3' = S_3 \end{array} \right.$$

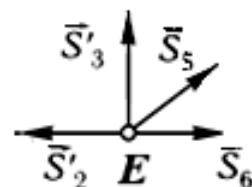
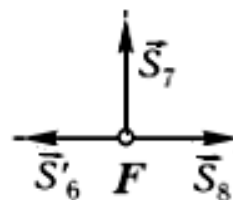


Рис.3.12. Узел  $E$

$$S_5 = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ кН}; \quad S_6 = 10 \text{ кН}.$$

г) Вырезаем узел  $F$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.13).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} S_6' = S_8 \\ S_7 = 0 \end{array} \right.$$

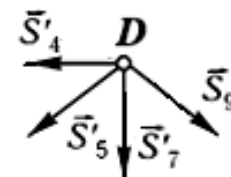


$$S_8 = 10 \text{ кН}.$$

Рис.3.13. Узел  $F$

г) Вырезаем узел  $D$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.14).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} S_9 \cos 45^\circ - S_4' - S_5' \cos 45^\circ = 0, \\ -S_9 \cos 45^\circ - S_7' - S_5' \cos 45^\circ = 0, \\ S_5' = S_5, \quad S_7' = S_7 \end{array} \right.$$



$$S_9 = -S_5' = -10\sqrt{2} = -14,14 \text{ кН}.$$

Рис.3.14. Узел  $D$

Для проверки правильности определения реакций в 8 и 9 стержней вырежем узел  $B$ .

д) Вырезаем узел  $B$  и запишем уравнения равновесия (рис.3.15).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -S'_8 - S'_9 \cos 45^\circ = 0, \\ S'_9 \cos 45^\circ + Y_B = 0, \\ S'_8 = S_8, \quad S'_9 = S_9 \end{array} \right.$$

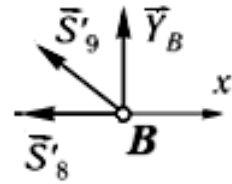


Рис.3.15. Узел B

$$S'_9 = -Y_B / \cos 45^\circ = -10\sqrt{2} = -14,14 \text{ кН - верно};$$

$$S'_8 = 10 \text{ кН - верно.}$$

### 3. Определение усилий в стержнях фермы способом Риттера.

Суть способа заключается в том, что ферму мысленно разделяют сечением на две части так, чтобы оно проходило не более чем через три стержня, в которых требуется определить усилия, и рассматривают одной из частей фермы. Действие отброшенной части фермы заменяют усилиями, направленными от узлов вдоль стержней, полагая, как и при использовании метода вырезания узлов, что все стержни работают на растяжение. Из уравнений равновесия для системы известных и трех неизвестных сил, действующих на одну из частей фермы, определяются неизвестные усилия в перерезаемых стержнях. Составлять уравнения равновесия можно для любой части фермы. Целесообразно же для расчета брать ту из частей, уравнения равновесия для которой приводят к более простым расчетам. На расчетной схеме разрезаем ферму по стержням 4, 5, 6 и отбрасываем левую часть фермы (рис. 3.16):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_D(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_E(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -S_5 \sin 45^\circ + Y_B = 0, \\ Y_B \cdot FB - S_6 \cdot FD = 0, \\ Y_B \cdot 2FB + S_4 \cdot FD = 0. \end{array} \right.$$

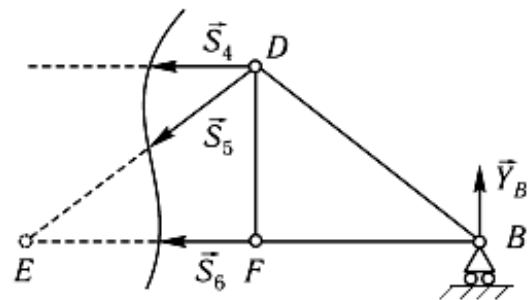


Рис.3.16. Расчетная схема

Получаем:

$$S_5 = 10\sqrt{2}; S_6 = 10 \text{ кН}; S_4 = -20 \text{ кН}.$$

Знак минус «-» означает, что соответствующий стержень работает на сжатие.

**Пример 2.** При каком максимальном значении угла  $\alpha$  груз под действием силы тяжести  $\bar{P}$  будет находиться в равновесии на шероховатой поверхности, если коэффициент трения скольжения равен  $f$  (рис. 3.17, а):

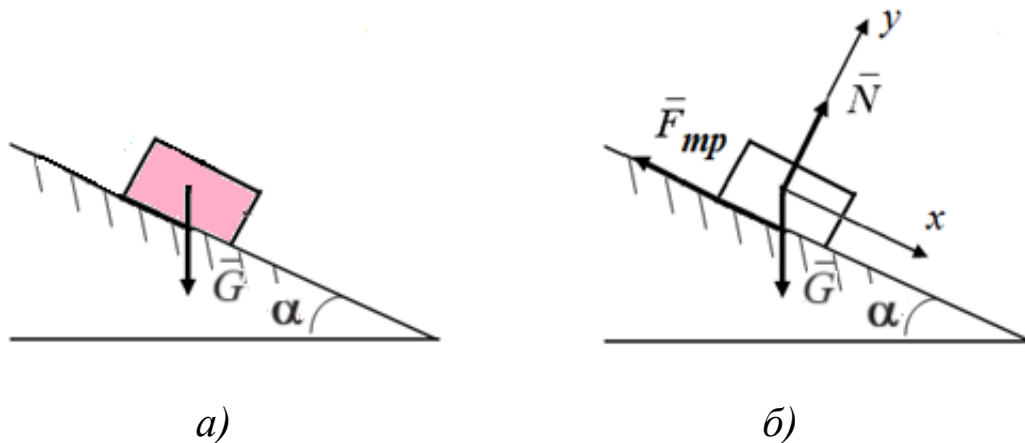


Рис. 3.17. Схема к примеру 2: а – исходная схема; б – расчетная схема

**Решение:**

Выбираем объект (груз), отбрасываем связи и заменяем его действие на поверхность нормальной реакцией  $\bar{N}$ , добавляем активную силу (силу тяжести  $\bar{G}$ ) и силу трения, направленную в сторону, противоположную возможному перемещению груза под действием активной силы  $\bar{G}$  (рис.3.17, б).

Груз находится в равновесии под действием сходящейся плоской системы сил. Введя декартовую систему координат  $Oxy$ , запишем уравнения равновесия груза:



$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad G \sin\alpha - F_{mp} = 0; \\ G \sin\alpha = F_{mp}, \quad \text{где } F_{mp} = f N. \\ \sum F_{iy} = 0; \quad N - G \cos\alpha = 0; \\ N = G \cos\alpha; \end{aligned}$$

Тогда из первого уравнения:  
 $G \sin\alpha = f G \cos\alpha,$   
 $\operatorname{tg} \alpha = f \rightarrow \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} f.$

**Пример 3.** При каком значении силы  $\bar{P}$  каток радиусом  $r$  находится в состоянии равновесия, если коэффициент трения качения равен  $\delta$  (рис.3,18, а)

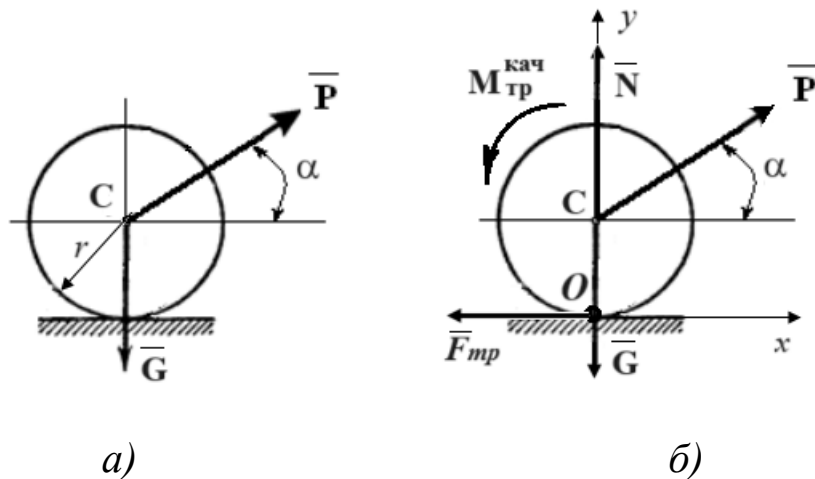


Рис. 3.18. . Схема к примеру 3: а – исходная схема; б – расчетная схема

**Решение:**

Выбираем объект (каток), отбрасываем связи и заменяем его действие на плоскость реакцией поверхности  $\bar{N}$  (рис.3.18, б).

Добавляем активную силу (силу тяжести  $\bar{G}$ ).

Добавляем момент трения качения, направленный в сторону, противоположную возможному качению катка под действием активной силы  $\bar{P}$ .

Каток находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. Введя декартовую систему координат  $Oxy$ , запишем аналитические условия равновесия:

$$\Sigma F_{iX} = 0; P \cos \alpha - F_{mp} = 0;$$

$$\Sigma F_{iY} = 0; N + P \sin \alpha - G = 0; \rightarrow N = G - P \sin \alpha$$

$$M_O(\bar{F}_i) = 0; M_{mp.кач} - Pr \cos \alpha = 0.$$

Учтем, что  $M_{mp.кач} = \delta \cdot N = \delta (G - P \sin \alpha)$ , тогда из уравнения моментов получим:

$$\delta G - \delta P \sin \alpha - P r \cos \alpha = 0,$$

$$P (\delta \sin \alpha + r \cos \alpha) = \delta G ,$$

$$P \geq \delta G / (\delta \sin \alpha + r \cos \alpha).$$

**Пример 4.** Определить центр тяжести плоской стержневой фермы ABCD, если длины стержней следующие:  $l_1=l_2=l_3=l_4=2,6$  м,  $l_5=4,5$  м (рис. 3.19, а).

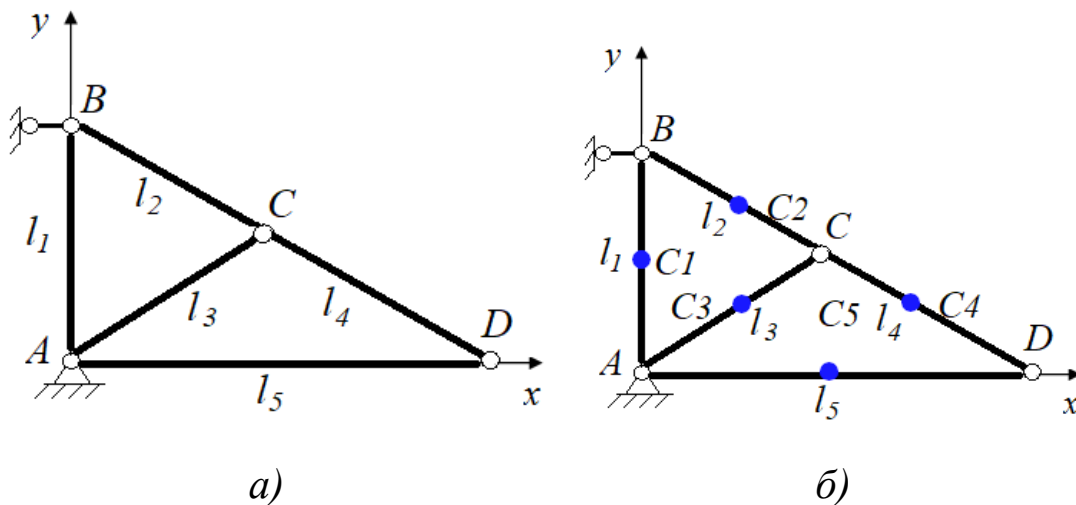


Рис. 3.19. Плоская ферма: а – исходная схема; б – расчетная схема

**Решение:**

1. Определим центры тяжести отдельных стержней:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  (рис. 3.19, б)..
2. Центр тяжести плоской стержневой фермы находим по формулам (6.10):

$$X_C = \frac{1}{L} \sum l_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{L} \sum l_i Y_i; \quad Z_C = \frac{1}{L} \sum l_i Z_i,$$

где  $L$  - длина всей линии;  $l_i$  - длина  $i$ -й части.

3. Расчеты выполним с помощью таблицы 3.1.

Таблица 3.1

№ стержня	$L_i$ , см	$X_i$ , см	$Y_i$ , см	$L_i \cdot X_i$ , см <sup>2</sup>	$L_i \cdot Y_i$ , см <sup>2</sup>
1	2,6	0	$l_1/2$	0	1,3
2	2,6	$\sin 60^\circ \cdot l_2/2$	$l_1 - \cos 60^\circ \cdot l_2/2$	1,13	1,95
3	2,6	$\sin 60^\circ \cdot l_3/2$	$\cos 60^\circ \cdot l_3/2$	1,13	0,65
4	2,6	$l_5 - \cos 30^\circ \cdot l_4/2$	$\sin 30^\circ \cdot l_4/2$	3,37	0,65
5	4,5	$l_5/2$	0	2,25	0
$\Sigma$	14,9			7,88	4,55

Координаты центра тяжести плоской стержневой фермы:

$$X_C = 0,53 \text{ см}; \quad Y_C = 0,3 \text{ см}.$$

**Пример 5.** Определить координаты центра тяжести составного сечения.

**Решение:**

1. Для нахождения координат центра тяжести этого сечения воспользуемся *способом дополнения*. Примем точку  $O$  сечения за начало декартовой системы координат  $Oxy$ . Рассматриваем фигуру составленную из трех частей: прямоугольника с центром тяжести  $C_1$  в точке пересечения диагоналей; выреза в виде круга радиусом  $R = 20$  см, с центром тяжести  $C_2$ , и треугольника с центром тяжести  $C_3$  в точке пересечения его медиан (рис.3.20).

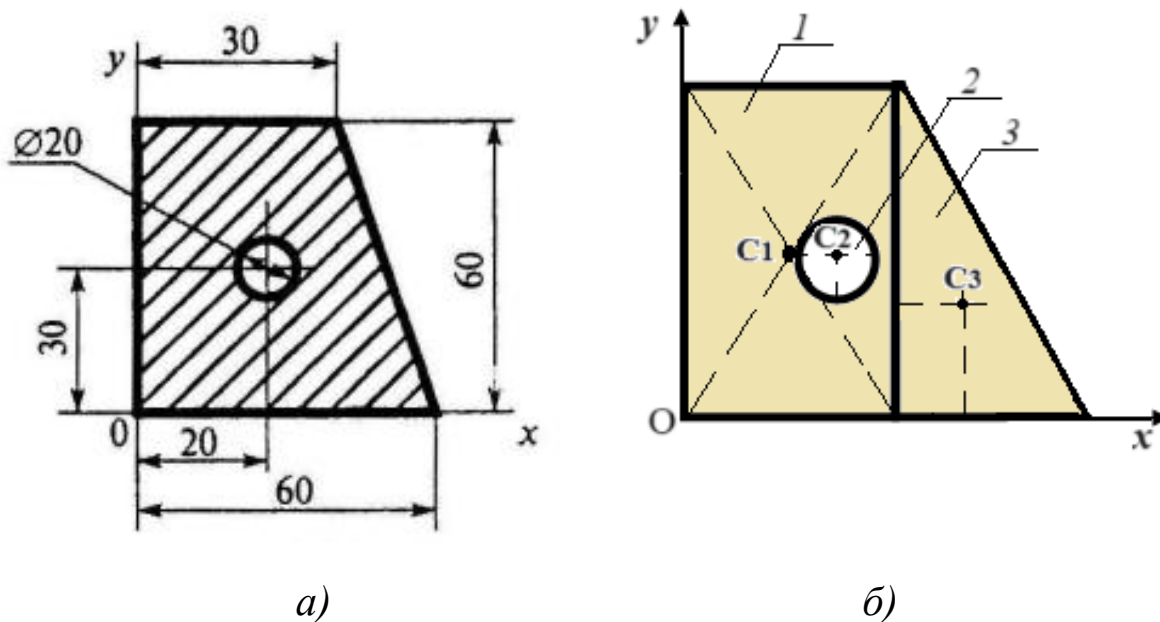


Рис. 3.20. Плоское сечение фигуры: *a* – исходная схема;  
*б* – расчетная схема

2. Центр тяжести плоского сечения фигуры находим по формулам (6.9):

$$X_C = \frac{1}{S} \sum S_i X_i; \quad Y_C = \frac{1}{S} \sum S_i Y_i,$$

Вычислим площади  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , подставляя данные задачи:

– площадь прямоугольника:  $S_1 = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ см}^2$ ;

– площадь круга радиусом  $R = 20$  см отрицательна, так как она вычитается из площади прямоугольника:

$$S_2 = - \frac{\pi R^2}{2} = - 628 \text{ см}^2,$$

– площадь треугольника:  $S_3 = \frac{1}{2} 30 \cdot 60 = 900 \text{ см}^2$ .

3. Остальные расчеты выполним с помощью таблицы 3.2.

Таблица 3.2

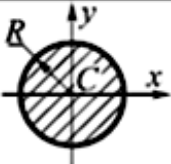
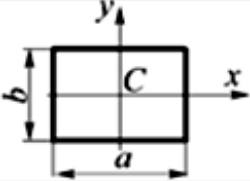
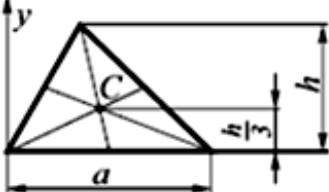
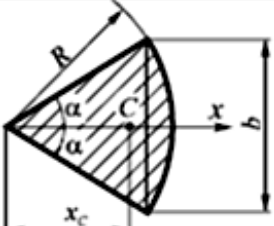
№ фигуры	$S_i, \text{см}^2$	$X_i, \text{см}$	$Y_i, \text{см}$	$S_i \cdot X_i, \text{см}^3$	$S_i \cdot Y_i, \text{см}^3$
1	1800	15	30	27 000	54 000
2	- 628	20	30	-12 560	- 18 840
3	900	40	20	36 000	18 000
$\Sigma$	2072			50 440	53 160

Координата центра тяжести сечения:  $X_C = 24,34 \text{ см}$ ;  $Y_C = 25,66 \text{ см}$ .

*Примечание:* площади и координаты центров тяжести плоских фигур, встречающихся в задании, приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Площади и координаты центров тяжести плоских фигур

Наименование	Расчетная схема	Площадь	Координаты центра тяжести
Круг		$S = \pi R^2$	$x_C = 0$ ; $y_C = 0$
Прямоугольник		$S = ab$	$x_C = \frac{a}{2}$ ; $y_C = \frac{b}{2}$
Треугольник		$S = \frac{1}{2} ah$	$y_C = \frac{1}{3} h$
Круговой сектор		$S = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3S}$

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое сила? Чем характеризуется действие силы?
2. В каком случае тело будет находиться в равновесии под действием двух сил?
3. Как определить проекцию силы на ось?
4. Как определить момент силы относительно точки?
5. В каких случаях момент силы относительно точки равен нулю?
6. Чему равен момент равнодействующей относительно точки?
7. Какая система сил называется парой сил?
8. Чем характеризуется действие на твердое тело пары сил?
9. В чем заключается принцип освобожденности от связей?
10. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакций известны.
11. Каковы условия равновесия произвольной плоской системы сил?
12. Что такое главный вектор и главный момент системы сил?
13. Как определяется величина и знак момента силы относительно оси? В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
14. Какая зависимость существует между моментом силы относительно Оси и моментом этой же силы относительно точки, взятой на той же оси?
15. При каких условиях модуль момента силы относительно точки равен моменту той же силы относительно оси, проходящей через эту точку?
16. Каковы аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей?
17. Как направлен вектор момента пары сил?
18. Чему равен главный момент сил, составляющих пару, относительно любой точки пространства?
19. Как определяются моменты сил, составляющих пару, относительно координатных осей?
20. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил и чем они отличаются от условий и уравнений равновесия такого же вида сил на

плоскости?

21. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей пространственной системы сил относительно точки и оси.
22. Какие системы называются составными?
23. Какие способы расчета составных конструкций вы знаете?
24. Какой порядок решения задачи на равновесие системы твердых тел?
25. Дать определение центра тяжести.
26. Как найти центр тяжести плоских фигур?
27. Методы определения центра тяжести тел?

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.
2. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Directmedia, 2016.
3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. - Текст : электронный
4. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.