Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 29.10.2026 13:57:10
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____ Т.Ю. Ткачева
«_01_» _____ 2026 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
к выполнению практических заданий
для направления подготовки 28.03.01 «Нанотехнология и микросистемная техника»,
направленность (профиль) «Микро- и наносистемы»

Курск 2026

УДК 51

Составитель: С.В. Кулишова

Рецензент
Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики
О.А. Бредихина

Высшая математика: методические рекомендации к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки ОПОП ВО 28.03.01 «Нанотехнология и микросистемная техника», направленность (профиль) «Микро- и наносистемы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Кулишова – Курск, 2026. – 56 с.

В методических рекомендациях имеется список изучаемых разделов, тематическое планирование практических занятий, шкала и критерии оценивания практических заданий для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации, список рекомендуемой литературы, приводятся примеры типовых заданий для проведения промежуточной аттестации и текущего контроля успеваемости. В указаниях также даны примеры выполнения наиболее трудных заданий.

Методические рекомендации соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки ОПОП ВО 28.03.01 «Нанотехнология и микросистемная техника», направленность (профиль) «Микро- и наносистемы».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 21.10.26 . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 3,3. Уч.-изд. л. 2,9. Тираж _100_экз. Заказ 692. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Цель дисциплины: Формирование высокой математической компетентности. Развитие умений и навыков использования математических методов в практической деятельности.

Планируемые результаты освоения основной профессиональной образовательной программы (компетенции, закрепленные за дисциплиной)

ОПК-1 Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.

ОПК-1.1 Владеет математическим аппаратом для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования и моделирования физических химических систем, явлений и процессов, использования в обучении и профессиональной деятельности

ОПК-1.5 Использует прикладные программы и средства автоматизированного проектирования при решении инженерных задач

ОПК-3 Способен проводить измерения и наблюдения, обрабатывать и представлять экспериментальные данные

ОПК-3.1 Составляет отчеты по учебно-исследовательской деятельности, включая анализ экспериментальных результатов, сопоставления их с известными аналогами

Разделы, изучаемые в курсе «Высшая математика» представлены в табл. 1.

Таблица 1

№	Раздел (тема) дисциплины
1	Матрицы. Действия над матрицами. Вычисление определителей квадратных матриц. Формулы Крамера.
2	Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Ранг матрицы.
3	Методы решения систем линейных уравнений
4	Линейные операции над векторами. Скалярное произведение. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве.
5	Вычисление длин, углов, площадей, объёмов средствами векторной алгебры.
6	Кривые и поверхности второго порядка
7	Комплексные числа
8	Операции над множествами

9	Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Раскрытие неопределенностей $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
10	Раскрытие неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$. Замечательные пределы. Непрерывные функции. Точки разрыва.
11	Производные. Правила дифференцирования. Производная сложной функции
12	Производная функции, заданной параметрически. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков
13	Применение производных к исследованию функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке
14	Первообразная. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования
15	Интегрирование рациональных, тригонометрических (гиперболических) и иррациональных функций. Интегрирование с помощью таблиц
16	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования. Несобственные интегралы
17	Приложения определённого интеграла
18	Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле
19	Функции нескольких переменных. Частные производные первого и второго порядков для функции двух переменных
20	Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции двух переменных
21	Исследование функций многих переменных средствами дифференциального исчисления
22	Дифференциальные уравнения 1-го порядка
23	Дифференциальные уравнения высших порядков
24	Числовые ряды
25	Функциональные ряды. Степенные ряды
26	Ряды Фурье
27	Гармонический анализ
28	Приложение кратных интегралов
29	Криволинейные и поверхностные интегралы
30	Основные понятия теории вероятностей.
31	Основные теоремы вероятности. Элементы комбинаторики: сочетания, размещения, перестановки.
32	Повторные испытания

33	Случайные величины, функции распределения. Числовые характеристики распределений.
34	Элементы математической статистики
35	Статистические оценки параметров распределения
36	Проверка статистических гипотез

Рабочая программа дисциплины «Высшая математика» предусматривает для проведения текущего контроля успеваемости выполнение двенадцати работ, называемых далее Т 1, Т 2, Т 3, Т 4, Т 5, Т 6, Т 7, Т 8, Т9, Т10, Т11, Т12.

Шкала оценивания - 10-ти балльная для каждой работы.

Критерии оценивания:

Каждый вопрос (задание) в тестовой форме оценивается по дихотомической шкале: выполнено – 1 балл, не выполнено – 0 баллов.

Применяется следующая шкала перевода баллов в оценку по 5-балльной шкале:

9, 10 баллов соответствуют оценке «отлично»;

7, 8 баллов – оценке «хорошо»;

5, 6 баллов – оценке «удовлетворительно»;

4 балла и менее – оценке «неудовлетворительно».

Для проверки знаний используются вопросы и задания в различных формах:

- закрытой (с выбором одного или нескольких правильных ответов),
- открытой (необходимо вписать правильный ответ),
- на установление соответствия,
- на установление правильной последовательности.

ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Задание в закрытой форме
(с выбором единственного ответа)

Одной из первообразных от функции $y = 2x - 3$ является функция…

1) $x^2 - 3 + C$ 2) 2 3) $2x^2 - 3 + C$ 4) $x^2 - 3x + C$ 5) $2 - 3x$

Задание в закрытой форме
(с выбором множественных ответов)

Интервальный вариационный ряд графически можно изобразить

1) полигоном 2) гистограммой 3) кумулятивной кривой

Задание в открытой форме

Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ равен …

Задание на установление правильной последовательности:

Определить последовательность действий при нахождении общего решения дифференциального уравнения $(1+x^2)y'+2xy=3x^2$.

1) $v=\frac{1}{1+x^2}$
2) $y=\frac{x^3+C}{1+x^2}$
3) $u'v+u\left(v'+\frac{2xv}{1+x^2}\right)=\frac{3x^2}{1+x^2}$
4) $y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{3x^2}{1+x^2}$
5) $u=x^3+C$

Задание на установление соответствия:

Установить соответствие между функцией $y=f(x)$ и способом нахождения ее первой производной y'.

1) $y=\sin(\ln x)$	1) логарифмическое дифференцирование
2) $y=x\cdot \operatorname{tg} x$	2) табличная производная
3) $y=(\log_2 x)^{\cos x}$	3) производная неявно заданной функции
4) $y=5^x$	4) производная произведения
	5) производная сложной функции

Компетентностно-ориентированная задача

Определить массу круглой пластины радиуса R с центром в начале координат, если поверхностная плотность материала пластины в точке $M(x;y)$ равна $\rho(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

Т 1 «Элементы линейной алгебры»

Вариант 1

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $C = 3 \cdot A + B \cdot A$. Элемент c_{23} матрицы С равен___.

1) –16 2) 1 3) 18 4) –7 5) 20

2. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ равен ____.

3. Найти x из уравнения $\begin{vmatrix} 1 & x & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

4. Найти x, если $A = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & -52 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$, $3A^2 - 2A + 3E = B$, где E − единичная матрица.

5. На предприятии изготавливают продукцию четырёх видов: P_1, P_2, P_3, P_4, при этом используют сырьё трёх типов: S_1, S_2 и S_3. Нормам расхода сырья соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij} (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3)$ показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции представлен матрицей $C = (150 \quad 120 \quad 90 \quad 100)$, а стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$. Определить общую стоимость сырья.

6. Установить соответствие.

Установите соответствие между матрицей и ее размерностью.

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$	а) $[2 \times 3]$ б) $[3 \times 3]$ в) $[3 \times 2]$ г) $[2 \times 2]$

7. После приведения системы уравнений $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ 10x + 7y + 4z = 7 \\ -5x + 4y + 2z = -7 \end{cases}$ к виду $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ y + mz = n \\ y + pz = q \end{cases}$ произведение n·q равно

1) –5/2 2) –40/15 3) 0 4) –4/25 5) –4/3

8. Найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$ 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$ 3) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$
4) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$ 5) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$

9. Найти собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $X_1 = \begin{pmatrix} 3C \\ 2C \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2C \\ -C \end{pmatrix}$ 2) $X_1 = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}$ 3) $X_1 = \begin{pmatrix} C \\ -3C \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}$
4) $X_1 = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2C \\ -5C \end{pmatrix}$ 5) $X_1 = \begin{pmatrix} C \\ 2C \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} C \\ -3C \end{pmatrix}$

10.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} \sqrt{3}x + 2y = 11, \\ 4x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ методом Крамера. Ответ представить в виде последовательности действий, например, 1, 2, 4, 5, 3. Замечание: вычисления производить в следующей последовательности 1) $\det A$ 2) $\det A_x$ 3) x 4) $\det A_y$ 5) y	1) $-11\sqrt{3}$ 2) 4 3) −44 4) $\sqrt{3}$ 5) −11	

Т 2 «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Найти $|\vec{c}|^2$, если $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a}(-1; 0; 5)$, $\vec{b}(2; -1; 1)$.

2. Найти сумму $m + n$, если вектор $\vec{b}(12; -2)$ можно разложить по векторам $\vec{a}(-4; -1)$ и $\vec{c}(1; -1)$, записав в виде $\vec{b} = m\vec{c} + n\vec{a}$

3. Даны векторы $\vec{a}(2m; 3; -1)$ и $\vec{b}(2; -3m; 5)$. Найти m, если известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

4. Установить соответствие.

1) нахождение скалярного произведения векторов 2) нахождение векторного произведения векторов 3) нахождение смешанного произведения векторов 4) нахождение длины вектора	а) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ б) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ г) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ д) $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

5.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при вычислении площади треугольника ABC, если $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$.	1) вычислить $\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert$ 2) найти определитель $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 3) вычислить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ 4) разделить модуль векторного произведения на два	

6. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(3; 4; 5)$, $B(1; 2; 1)$, $C(-2; -3; 6)$, $D(3; -6; -3)$.

7. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(6; 4)$, $B(-3; -8)$.

1) $\frac{x-6}{3} = \frac{y-4}{4}$ 2) $4x - 3y - 12 = 0$ 3) $y = \frac{4}{3}x - 4$

4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$ 5) $\begin{cases} x = 3t + 6, \\ y = 4t + 4 \end{cases}$

8. Найти расстояние от точки $M(2; 5)$ до прямой $4x - 3y + 8 = 0$.

9. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(6; 0; -5)$ параллельно векторам $\vec{p}(2; 1; -2)$ и $\vec{q}(1; 0; 3)$.

1) $3x - 8y - z - 23 = 0$ 2) $x + 4y - 3z - 14 = 0$

3) $3x - 8y - z - 14 = 0$ 4) $x + 4y - 3z - 23 = 0$ 5) $3x + 8y - z - 20 = 0$

10. Найти значение m, если уравнение прямой, проходящей через точки $M(1;2;3)$ и $N(-1;0;8)$, в параметрическом виде можно записать как систему $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + mt, \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$

Т 3 «Комплексные числа»

1. Установить соответствие действий с комплексными числами $z_1 = 5 - 3i$ и $z_2 = 2 + i$.

1) $z_1 \cdot z_2$ 2) $\frac{z_1}{z_2}$ 3) $\bar{z}_1^{\,2}$ 4) $z_1 + z_2$	а) $16 - 30i$ б) $7 - 2i$ в) $1{,}4 - 2{,}2i$ г) $13 - i$ д) $16 + 30i$

2. Сумма действительных решений уравнения

$(-2 + 5i)x + 2i = (1 - 2i)y + 3ix - 3$ равна

1) 9 2) −4 3) −9 4) 4 5) 5

3. Верно ли, что действительная часть $(2 + 3i)(1 - i) - \frac{i^{15}}{1+i}$ равна 5?

1) да, верно 2) нет, не верно

4. Найти мнимую часть решения уравнения $(-1 - i)\,z = 3 + i$.

5. Найти модуль комплексного числа $z = 1 + i$.

6. Найти аргумент комплексного числа $z = 1 + i$.

7.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Укажите последовательность действий при переводе комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую	1) подстановка ρ и φ в формулу 2) нахождения главного значения аргумента 3) вычисление модуля комплексного числа 4) вычисление $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ 5) определение значений действительной и мнимой частей	

8. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = 6 - 6i$ имеет вид

1) $6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 2) $6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 4) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

9. Вычислить z^{10}, если $z = \sqrt{3} - i$.

1) $2^9\left(\sqrt{3} - i\right)$ 2) $2^9\left(\sqrt{3} + i\right)$ 3) $2^9\left(-\sqrt{3} - i\right)$ 4) $2^9\left(-\sqrt{3} + i\right)$

10. Вычислить $\sqrt{-7 - 24i}$

1) $\{-3 + 4i; 3 - 4i\}$ 2) $\{3 + 4i; 3 - 4i\}$ 3) $\{-3 + 4i; 3 + 4i\}$ 4) $\{3 + 4i; 3 + 4i\}$

Т 4 «Введение в математический анализ»

1. Даны два множества $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $B = \{b, d, e, m, n, p\}$. Найти $A \cap B$.

1) $\{a, b, c, d, e, f, m, n, p\}$ 2) $\{a, b, b, c, d, d, e, e, f, m, n, p\}$

3) $\{b, d\}$ 4) $\{a, c, f\}$ 5) $\{b, d, e\}$

2. Найти $A \cap (B \cup C)$, если $A = (-3; 11], B = [-2; 5], C = (4; 9)$

1) $(4; 5]$ 2) $[-2; 9]$ 3) $(-3; 9]$ 4) $(-3; 4) \cup [5; 11]$

2. Даны числовые промежутки $A = [3; 5)$ и $B = [0; 3]$. Выполнить операции над множествами и установить соответствие

1) $A \cap B$	а) $[0; 5)$
2) $A \cup B$	б) $\emptyset$
3) $A \setminus B$	в) $(3; 5)$
4) $B \setminus A$	г) $[3; 5)$
	д) $\{3\}$

4. Ниже дано определение бесконечно малой числовой последовательности. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II)

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если _____ существует _____ такой, что если _____ , то выполняется условие _____

I. $|x_n| < \varepsilon$

II. $n > N(\varepsilon)$

III. для любого числа $\varepsilon > 0$

IV. номер $N(\varepsilon) > 0$

5. Установить соответствие между пределами и неопределенностями, обнаруженными в каждом из них

1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$	а) неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x^2+8}{3x^3+5x^2-10}$	б) неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	в) неопределённость (1^{∞})
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3-4x}$	г) неопределённость $(0\cdot\infty)$
	д) неопределённость $(\infty+\infty)$

6. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-6x^2+12}{x^3+4x}$ равен

7. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)-\sin(3x)}{\sin x+\sin(8x)}$ равен

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) –1 5) 0

8. Предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-7}{5-x}$ равен

1) 1 2) 0 3) ∞ 4) $-\infty$ 5) 0,8

9. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x}$ равен

1) 1 2) e^3 3) $\frac{3}{e}$ 4) $\frac{1}{e^3}$ 5) e

10. Предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$ равен.

Т 5 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Производная функции $y = x^2\cdot\sin(2x)$ равна...

1) $2x\cdot\cos(2x)$ 2) $4x\cdot\cos(2x)$ 3) $2x\cdot\sin(2x)+2x^2\cdot\cos(2x)$

4) $2x\cdot\sin(2x)+x^2\cdot\cos(2x)$ 5) $2x\cdot\sin(2x)-2x^2\cdot\cos(2x)$

2. Производная функции $y = x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^3}$ равна

1) $5x^4 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ 2) $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$ 3) $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

4) $5x + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ 5) $5x - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

3. Производная функции $y = x^2 \cdot sin(2x)$ равна

1) $2x \cdot \cos(2x)$ 2) $2x \cdot \sin(2x) + 2x^2 \cdot \cos(2x)$ 3) $4x \cdot \cos(2x)$

4) $2x \cdot sin(2x) + x^2 \cdot \cos(2x)$ 5) $2x \cdot \sin(2x) - 2x^2 \cdot \cos(2x)$

4.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении производной функции по определению	1) зафиксировать x, вычислить значение функции $f(x)$ 2) найти приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ 3) дать аргументу x приращение Δx и вычислить значение функции $f(x+\Delta x)$ 4) найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 5) определить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	

5. Установить соответствие между функцией $y = f(x)$ и способом нахождения ее первой производной y'.

1) $y = \sin(\ln x)$ 2) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$ 3) $y = (\log_2 x)^{\cos x}$ 4) $y = 5^x$	1) логарифмическое дифференцирование 2) табличная производная 3) производная неявно заданной функции 4) производная произведения 5) производная сложной функции

6. Уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, в точке с положительной абсциссой, параллельной прямой $y = -x$, имеет вид _____.

1) $y = -1$ 2) $y = -x + 1$ 3) $y = x + \sqrt{2}$

4) $y = -x + \sqrt{2}$ 5) $y = -x - \sqrt{2}$

7. Укажите, как должен выглядеть график функции $y(x)$ на отрезке [a;b], если в каждой точке указанного отрезка выполняются три условия: $y<0$, $y'<0$, $y''>0$.

1) график лежит ниже оси OX; $y(x)$ возрастает; выпуклость вниз
2) график лежит ниже оси OX; $y(x)$ убывает; выпуклость вверх
3) график лежит ниже оси OX; $y(x)$ возрастает; выпуклость вверх
4) график лежит ниже оси OX; $y(x)$ убывает; выпуклость вниз
5) график лежит выше оси OX; $y(x)$убывает; выпуклость вверх

8. Найти точку минимума функции $y = (2x + 1)^2 \cdot (x + 3) + 4$.

9. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+49}{x}$ на отрезке $[-9; -1]$

10. Выручка R от продажи некоторого товара определяется по формуле $R(Q) = 150Q - 0{,}2Q^2$, где Q – объём проданной продукции (тыс. ед.). Найти предельную выручку, если продано 120 тыс. ед.

Т 6 «Неопределенный интеграл»

1. Какая из указанных ниже функций является первообразной функции $f(x) = 3 - 8x - \frac{4}{x^2}$?

1) $F(x) = -8 + \frac{8}{x^3}$
2) $F(x) = 3x - 4x^2 + \frac{8}{x^3} - 2$
3) $F(x) = 3x - 4x^2 - \frac{4}{x} - 6$
4) $F(x) = 3x - 4x^2 + \frac{4}{x}$
5) $F(x) = 3x - 4x^2 + \frac{4}{x} - 5$

2. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла $\int (x+1) \cdot \sin x \, dx$.

1) Вычислить du и v
2) Установить, что нужно взять за u, а что за dv
3) Определить, относится ли интеграл к типу интегралов, интегрируемых по частям
4) Воспользоваться формулой $\int u\,dv = uv - \int v du$, подставив вместо u, dv, du и v их значения.

3. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$ равен

1) $-\frac{1}{4}ctg4x + C$
2) $\frac{1}{4}tg\,2x + C$
3) $-\frac{1}{2}ctg\,x + C$
4) $-\frac{1}{4}ctg\,2x + C$

4. Интеграл $\int \frac{xdx}{x^2 + 4}$ равен

1) $\frac{\ln|x^2+4|}{2}+C$ 2) $2\cdot\ln|x^2+4|+C$ 3) $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$

4) $\frac{x}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$ 5) $\ln|x^2+4|+C$

5. Установите соответствие между интегралом и способом его решения.

1) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln^5 x}$ 2) $\int 5^x dx$ 3) $\int\frac{3+x}{x}dx$	а) использование почленного деления б) подведение под знак дифференциала в) использование формулы $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}\int f(t)\,dt$ г) непосредственное интегрирование д) метод интегрирования по частям

6.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при вычислении неопределённого интеграла $\int\frac{(4-5x)^2}{x}dx$	1) используем таблицу неопределённых интегралов 2) используем формулу квадрата разности 3) добавляем постоянную С в конце записи 4) используем свойство неопределённого интеграла $\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ 5) используем почленное деление	

7. Указать вид разложения дроби $\frac{x-4}{x^3+6x^2+8x}$ на простейшие.

1) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+6x+8}$ 2) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6x+8}$ 3) $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+8}$

4) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+4}$ 5) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^2+6x+8}$

8. Все первообразные данной функции $f(x)=2x\,\mathrm{arctg}x$ могут быть представлены выражением_____

1) $\frac{x^2}{1+x^2}+C$ 2) $(x^2+1)\mathrm{arctg}x-x+C$ 3) $x^2\mathrm{arctg}x+C$

4) $2\mathrm{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}+C$ 5) $(x^2-1)\mathrm{arctg}x+C$

9. Представить подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей

$$\int \frac{6x^4 - 30x^2 + 30}{(x^2 - 1)(x + 2)}\,dx.$$

10. Интеграл $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-2x^2 + 4x - 1.5}}$ равен_____

Т 7 «Определенный интеграл и его приложения»

1. Указать равенства и утверждения, которые являются верными

1) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ 2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

3) $\int_a^b dx = a - b$ 4) Если $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

2. Установите соответствие между определенными интегралами, записанными в левой колонке, и равными им выражениями в правой колонке

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, если $f(x)$ – четная функция	а) 0
2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, если $f(x)$ – нечетная функция	б) $-\int_a^b f(x)dx$
3) $\int_b^a f(x)dx$	в) $\int_a^b f(x)dx$
4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	г) $2\cdot\int_0^a f(x)dx$
	д) $\int_0^a f(x)dx$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{6}{\pi\sqrt{4 - x^2}}dx$

4. Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sin x + 1}dx$

1) 1 2) 2 3) 0 4) $-ln\,2$ 5) $ln\,2$

5. Указать интегралы, которые являются несобственными

1) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 1}dx$ 2) $\int_0^2 e^{2x-1}dx$ 3) $\int_0^2 ln\,x\,dx$ 4) $\int_0^2 (x-2)xdx$

6. Указать интегралы, которые не являются несобственными:

1) $\int_0^3 \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 2) $\int_1^8 (x-1)(x-8)dx$ 3) $\int_0^e \ln x\;dx$ 4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (ctg\,x)dx$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt[3]{x}$ и прямой, проходящей через точки $A(1; 1)$ и $B(8;2)$.

8. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для нахождения площади фигуры, ограниченной линиями, задаваемыми уравнениями: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

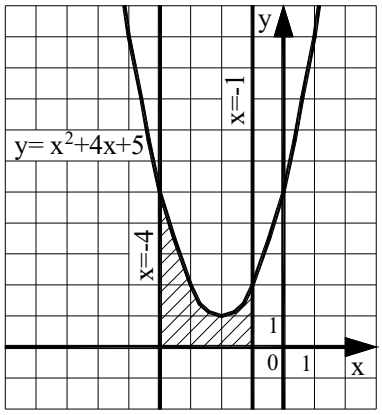
I. Построить указанные линии в прямоугольной декартовой системе координат.

II. Найти *a* и *b* – пределы интегрирования, для этого определить абсциссы точек пересечения указанных линий.

III. Определив, график какой из функций $y = x$ или $y = \frac{1}{x}$ лежит выше, воспользоваться формулой: $S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

IV. Вычислить определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница.

9. Вычислите площадь заштрихованной области. Ответ округлите до сотых.



10. Найти работу силы $F(x) = \frac{4}{x^2}$ по перемещению мат. точки вдоль оси *Ox* из точки $x = -2$ в точку $x = -1$.

Т 8 «Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

1. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = x - \frac{x}{y} + 1$ равна

1) $1 - \frac{x}{y^2}$ 2) $x - \frac{1}{y^2} + 1$ 3) $\frac{x}{y^2}$ 4) $1 - \frac{1}{y}$ 5) $-\frac{x}{y^2}$

2. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ от функции $z = e^{2x} \cdot \arcsin y^3$ равна

1) $e^{2x} \cdot \arcsin y^3$ 2) $2e^{2x} \cdot \arcsin y^3$ 3) $\frac{2y^3 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1-y^6}}$ 4) $\frac{2y^3 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1-y^2}}$ 5) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-y^6}}$

3. Вычислите значения частных производных функции $z = 4x^2 - xy^3 + 5y$ в точке $M_0(1; -1)$ и установите соответствие.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}\Big\|_{M_0}$ 2) $\frac{\partial z}{\partial y}\Big\|_{M_0}$ 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big\|_{M_0}$ 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big\|_{M_0}$ 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big\|_{M_0}$	а) −3 б) 8 в) 2 г) 6 д) 9 е) 1

4.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = \ln(3xy - x^3)$	1) $\frac{-6x(3xy-x^3)-(3y-3x^2)(3y-3x^2)}{(3xy-x^3)^2}$ 2) $\frac{(3xy-x^3)'}{3xy-x^3}$ 3) $(\ln(3xy - x^3))'_x$ 4) $\left(\frac{3y-3x^2}{3xy-x^3}\right)'_x$ 5) $\frac{(3y-3x^2)'(3xy-x^3)-(3y-3x^2)(3xy-x^3)'}{(3xy-x^3)^2}$ 6) $\frac{3y-3x^2}{3xy-x^3}$	

5. Частная производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ от функции $z = e^{x^2+2y^3}$ равна

1) $12xy^2 \cdot e^{x^2+2y^3}$ 2) $2 \cdot e^{x^2+2y^3}(2x^2 + 1)$ 3) $6y^2 \cdot e^{x^2+2y^3}$

4) $12y \cdot e^{x^2+2y^3}(1 + 3y)$ 5) $e^{x^2+2y^3}$

6. Найдите сумму $a + b + c$, где $(a; b; c)$ – это координаты вектора градиента функции $u = 5x^2 + 3y^2 + 3z^2$ в точке $M(0; -2; 3)$.

7. Исследуйте на экстремум функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$. В ответе запишите координаты стационарной точки (стационарных точек).

8. Исследуйте на экстремум функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$. В ответе запишите значение z_0, если исследование дало результат $z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$.

9. Найти полный дифференциал функции $z = ln(xy - y)$ в точке x = 4, y = 0,5.

10. Найти градиент функции $z = cos\, x \cdot log_5 y$ в точке x =4, y =0,5.

Т 9 «Дифференциальные уравнения»

1. Указать тип дифференциального уравнения $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

1) уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным уравнением
3) линейным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) уравнением в полных дифференциалах

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = xy^2$.

1) $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$ 2) $y = (x^2 + C)^{-1}$ 3) $y = \sqrt{x + C}$ 4) $y = -2(x^2 + C)^{-1}$

3. Найдите постоянную С в частном решении дифференциального уравнения $y \cdot y' = 4x^3$ при $y(5) = 2$.

4. При решении уравнения Бернулли $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2y^2$ было определено, что $v = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{3x+C}$. Найти значение C, если известно, что $y(1) = -\frac{1}{5}$.

5. Определить последовательность действий при нахождении общего решения дифференциального уравнения $(1 + x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

1) $v = \frac{1}{1+x^2}$
2) $y = \frac{x^3+C}{1+x^2}$
3) $u'v + u\left(v' + \frac{2xv}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2}{1+x^2}$
4) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{3x^2}{1+x^2}$
5) $u = x^3 + C$

6. Указать уравнение, к которому сводится уравнение $yy'' - y' = 0$ с помощью введения переменной $z = y'$.

1) $y^2dz = zdy$ 2) $ydz = z^2dy$ 3) $ydz = zdy$ 4) $ydz = dy$

7. Указать замену, целесообразную для понижения порядка дифференциального уравнения $y'y'' = y^2$.

1) $z(y) = y'$ 2) $z(x) = y$ 3) $z(y) = y'$ 4) $z(x) = y'$

8. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения $x^2y'' = 1$, если $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

1) $y = -ln|x| + 2x + 1$ 2) $y = ln|x| + 2$ 3) $y = x^2 + 2$ 4) $y = \frac{1}{x^2} + 3x$

9. Дифференциальное уравнение $(3x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ является

1) уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным уравнением
3) линейным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) уравнением в полных дифференциалах

10. Общее решение дифференциального уравнения $y' = \sqrt{xy}$.

1) $y = C\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)^2$ 2) $y = Cx - 3\sqrt{x}$ 3) $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ 4) $y = \left(\frac{x\sqrt{x}+C}{3}\right)^2$

Т 10 «Числовые ряды»

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}-8}{3^{2n}}$.

2. Найти частичную сумму S_2 ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{2n+1}$

3. Выбрать сходящиеся среди рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n+3}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-2}{n(n^2+1)^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n-1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n+n}$

4. Определите ряд для сравнения, если требуется узнать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5^n+3}$.

1) геометрическая прогрессия 2) гармонический ряд
3) обобщённый ряд Дирихле

5. При исследовании сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+8n}{4+5n}$ нужно воспользоваться

1) признаком Даламбера 2) радикальным признаком Коши
3) достаточным признаком расходимости 4) признаком Лейбница

6. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n^2}$ верным является утверждение

1) сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$ 2) сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e$
3) расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$ 4) расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^3$

7. Установить соответствие между числовыми рядами и признаками сходимости, которые целесообразно применять для исследования вопроса об их сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n-1}$	а) признак сравнений
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+1}$	б) необходимый признак сходимости
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{(n-1)!}$	в) радикальный признак Коши
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	г) признак Даламбера
	д) теорема Лейбница

8. Запишите последовательность действий, которую нужно применить при исследовании ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ на сходимость с помощью интегрального признака сходимости.

1) Ввести в рассмотрение функцию $f(x) = \frac{1}{x^3}$

2) Доказать, что функция $f(x)$ является положительной, непрерывной, убывающей на $[1, +\infty)$

3) Установить, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится

4) Сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

9. Выбрать верные утверждения для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2^n}$ и $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

1) оба сходятся абсолютно 2) оба сходятся условно

3) первый сходится абсолютно, а второй сходится условно

4) первый сходится условно, а второй сходится абсолютно

10. Какой вывод точно можно сделать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, расходится?

1) сходится условно 2) расходится

3) не является абсолютно сходящимся 4) сходится абсолютно

Т 11 «Функциональные ряды. Гармонический анализ»

1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2n+1}$.

2. Если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+1)^n$ сходится в точке $x = 6$, то он обязательно сходится и в точке

1) $x = -9$ 2) $x = 7$ 3) $x = -3$ 4) $x = -8$

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-1)^n$, если радиус сходимости ряда равен 4.

1) (–3;5) 2) (–4;4) 3) (–3;3) 4) (–5;3)

4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{3^n (n^2+1)}$.

1) [–3/2;3/2) 2) [–3/2;3/2] 3) (–3/2;3/2] 4) [–2/3;2/3]

5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot n!}{5n-2}$.

1) [0;∞) 2) (–∞;0] 3) (–∞;∞) 4) {0}

6. Установить соответствие между функциями и их разложением в степенной ряд

1) $(1+x)^m$ 2) $\sin x$ 3) $\cos x$ 4) $\frac{1}{1-x}$	а) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ б) $\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$ в) $1+x+x^2+x^3+\ldots,$ г) $1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots,$ д) $1-x+x^2-x^3+\ldots$

7. Определить значение выражения $ln\,0,6$, вычисленное с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

8. Найти коэффициент c_2, если решение $y = y(x)$ задачи Коши $y' = 2x - \sin y\ y(0) = \frac{\pi}{2}$ разложено в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

9. Найти коэффициент b_2 разложения функции $f(x) = x - 2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$.

10. Запишите верную последовательность действий при нахождении области сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 4^n}$.

1) Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости
2) Записать интервал сходимости ряда
3) Найти радиус сходимости ряда
4) Сделать вывод о том, входят ли концы интервала сходимости в область сходимости ряда

Т 12 «Интегральное исчисление функций многих переменных

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x-2y)dxdy$, где область D – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми x=2, y=5.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, где область D – круг $x^2+y^2\le\pi^2$.

3. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, область D – треугольник с вершинами в точках A(2;2), B(4;0), C (7;2). Ответ записать в виде одного двойного интеграла.

4. Результат расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x;y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$, $x=1$, имеет вид…

1) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{-\sqrt{x}} f(x;y)dy$ 2) $\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} dx\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dy$ 3) $\int_0^1 dx\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dy$

4) $\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$ 5) $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x;y)dy$

5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x;y)dx$ и записать результат.

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями с уравнениями $x + y = 1, z = 1 - y^2, x = 0, z = 0, y = 0$ $(y \geq 0)$.

7. Вычислить массу отрезка прямой, от точки A(3;0) до точки B(0;1), если плотность в каждой точке меняется по закону $\rho(x, y) = x + 3y$.

8. Установить соответствие при переходе от $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному интегралу и расставить пределы интегрирования, если D ограничена линиями:

а) $x = 1, y = 2, x + y = 6$ б) $y = \frac{x^2}{2}, y = 8$ в) $y = 2x^2, y = \sqrt{x}$ г) контуром треугольника ABC, где A(1;2), B(3;6), C(3;0) д) $x^2 + y^2 = 4$x	1)$\int_{0}^{4} dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy$ 2) $\int_{0}^{1} dx \int_{2x^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$ 3) $\int_{1}^{3} dx \int_{3-x}^{2x} f(x,y)dy$ 4) $\int_{1}^{4} dx \int_{2}^{6-x} f(x,y)dy$ 5) $\int_{-4}^{4} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} f(x,y)dy$

9. Вычислить $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$, где S – часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

10.

Расположите последовательность действий при вычислении $\iint\limits_D cos(x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0, y = x, y = \frac{\pi}{2}$	1) Перейти к двукратному интегралу $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dy$ 2) Вычислить $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (cosx - sin2x)dx = 0$ 3) Построить область $D: x = 0, y = x, y = \frac{\pi}{2}$ 4) Вычислить $\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dy = cosx - sin2x$	

Т 13 «Основные понятия теории вероятностей»

1. На железнодорожной станции имеется 10 путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 состава?

2. При испытании прибора оказалось, что относительная частота появления некачественного прибора равна 0,05. Найти число исправных приборов в партии из 500 приборов.

3. На площадку, покрытую кафельной плиткой в виде квадрата со стороной $a = 6$ см, случайно падает монета радиуса $r = 2$ см. Найдите вероятность того, что монета целиком окажется внутри квадрата.

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{9}$ 4) $\frac{\pi}{6}$ 5) $\frac{\pi}{18}$

4. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найти вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

5. Формула для вычисления вероятности события «при выборе 4 мячей из 7 красных и 5 синих выберут 4 синих» имеет вид

1) $\frac{C_{12}^4}{C_5^4}$ 2) $\frac{C_4^5}{C_4^{12}}$ 3) $\frac{C_5^4}{C_{12}^4}$ 4) $\frac{C_{12}^4}{C_{12}^5}$ 5) $\frac{4}{C_{12}^4}$

6. В урне находятся 3 белых и 5 черных шара. Из неё наугад вынимают (без возвращения) один за другим два шара. Какова вероятность того, что среди них будет ровно один чёрный шар?

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность получения чисел при решении задачи по предложенному алгоритму. Вычисляем 1) $P(\text{б})$ 2) $P(\text{ч})$ 3) $P(\text{ч}\backslash\text{б})$ 4) $P(\text{б}\backslash\text{ч})$ 5) $P(\text{ровно один чёрный шар})$	1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{3}{7}$ 3) $\frac{3}{8}$ 4) $\frac{15}{28}$ 5) $\frac{5}{7}$	

7. Вероятность «успешной зимовки» для розы равна 0,7, для дельфиниума 0,8, для пиона 0,9. Найти вероятность того, что только один цветок пропадет в результате зимних морозов.

8. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь с завода №1 стандартна, равна 0,8, а с завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что она стандартная.

1) 0,72 2) 0,84 3) 0,6 4) 0,86 5) 0,54

9. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады, равна 0,7, для второй – 0,8. Взятая наугад единица продукции оказалась нестандартной. Определить вероятность, что она из второй бригады.

1) ≈0,18 2) 0,725 3) 0,276 4) 0,275 5) 0,56

10. Установите соответствие между формулами из теории вероятностей и их названиями.

1) $P(A) = \frac{m}{n}$ 2) $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$ 3) $P(A) = P(B_1) \cdot P(A\backslash B_1) + \ldots$ $\ldots + P(B_2) \cdot P(A\backslash B_2) + \cdots +$ $+P(B_n) \cdot P(A\backslash B_n)$ 4) $P(B_i\backslash A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A\backslash B_i)}{P(A)}$	а) формула полной вероятности б) формула классической вероятности в) формула Байеса г) формула вероятности полной группы событий д) формула Бернулли

Т 14 «Основные понятия теории вероятностей»

1. Чему равно значение q в вероятностной схеме Бернулли, если p=0,4?

2. Стрелок производит 4 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы 1 раз.

1) 0,0729 2) 0,9999 3) 0,4095 4) 0,0081

3. Формула для определения вероятности того, что в семи независимых испытаниях событие В, вероятность которого равна в каждом испытании 0,3, произойдет три раза.

1) $P_7(3) = C_7^3(0{,}3)^3(0{,}7)^4$ 2) $P_7(3) = C_7^3(0{,}3)^4(0{,}7)^3$

3) $P_7(3) = (0{,}3)^3(0{,}7)^4$ 4) $P_7(3) = 7 \cdot (0{,}3)^3(0{,}7)^4$

4. Найти наивероятнейшее число успехов, если проводится 5 независимых испытаний, в каждом из которых фиксируется наступление некоторого события, вероятность которого в каждом испытании равна 0,7.

5. Определите последовательность получения чисел при вычислении вероятности того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз, если вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Предложен следующий порядок вычислений: 1) x'; 2) x''; 3) $\Phi(x')$; 4) $\Phi(x'')$; 5) $P_{100}(70, 80)$. Ответ представить в виде, например, 34521.

1) 0,7498
2) 1,1547
3) 0,3910

4) –1,1547
5) –0,3910

6. Указать номер формулы, которую целесообразно применять для нахождения вероятности в следующей задаче.
Торговый агент в среднем контактирует с 8 потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Чему равна вероятность того, что у агента будут хотя бы две продажи в течение дня?
1) Локальная формула Муавра-Лапласа
2) Формула Бернулли
3) Интегральная формула Муавра-Лапласа
4) Формула Пуассона
5) Формула полной вероятности

7. Указать номер формулы, которую целесообразно применять для нахождения вероятности в следующей задаче.
В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.
1) Локальная формула Муавра-Лапласа
2) Формула Бернулли
3) Интегральная формула Муавра-Лапласа
4) Формула Пуассона
5) Формула Байеса

8. Установить соответствие между условием задачи и способом ее решения.

1) Если вероятность наступления события А в каждом испытании равна 0,002, то для нахождения вероятности того, что событие А наступит 3 раза в 1000 испытаниях, вы воспользуетесь 2) Если вероятность некоторого события А в каждом испытании постоянна и равна 0,75, то для нахождения вероятности того, что того, что это событие в 192 испытаниях наступит 150 раз, вы воспользуетесь 3) Если вероятность некоторого события А в каждом испытании постоянна и равна 0,75, то для нахождения вероятности того, что это событие в 192 испытаниях наступит не менее 135 и не более 150 раз, вы воспользуетесь 4) Для нахождения вероятности того, что при 10 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз, вы воспользуетесь	а) формулой Бернулли б) формулой Пуассона в) локальной теоремой Муавра-Лапласа г) интегральной теоремой Муавра-Лапласа д) формулой Байеса

9. Установить последовательность действий для вычисления вероятности того, что про 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз, если вероятность ее поражения при одном выстреле равна 0,8.

1) Найти φ(x)
2) Найти P100(75)
3) Найти x
4) Определить, что необходимо воспользоваться локальной теоремой Лапласа

10. Вероятность появления положительного результата в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления положительного результата отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Т 15 «Основные понятия теории вероятностей»

1. Условие нормировки для дискретной случайной величины

1) $\sum_i x_i\, p_i = 1$ 2) $\sum_i p_i = 1$ 3) $\sum_i p_i = 0$
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$

2. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение 3, если дан закон распределения этой величины

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	?	0,1	0,1

1) 0,1 2) 0,2 3) 0,3 4) 0,4 5) 0,5

3. Найти вероятность того, что случайная величина ξ – число раз выпадения орла при двукратном подбрасывании монеты, принимает значение 1.

4. Дан закон распределения случайной величины ξ. Вычислите математическое ожидание.

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,6	0,1

5. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,1	0,6	0,2

Вычислите $D[X]$.

6. Найти моду, если закон распределения случайной величины X имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,02	0,08	0,12	0,12	0,15	0,35	0,06	0,04	0,04	0,02

7. Дискретная случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 0{,}3, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}5, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}8, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0{,}9, & \text{если } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{если } x>5.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что $\xi<4$.

8. Установить соответствие между характеристиками случайной величины и применяемыми формулами.

1) Математическое ожидание дискретной случайной величины 2) Математическое ожидание непрерывной случайной величины 3) Дисперсия дискретной случайной величины 4) Дисперсия непрерывной случайной величины	а) $\sum_i x_i p_i$ б) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx\right)^2$ в) $\sum_i x_i^2 p_i-\left(\sum_i x_i p_i\right)^2$ г) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$ д) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

9. Установить соответствие между случайной величиной и законом распределения.

1) Точка С делит отрезок АВ в отношении 2:1. Наудачу на отрезок АВ бросаются 4 точки. Случайная величина ξ – число точек, попавших на отрезок АС 2) Случайная величина ξ – ошибка измерительного прибора длины некоторого изделия 3) 400 изделий проходят контроль. Вероятность того, что изделие браковано, равна 0,001. Случайная величина ξ – число бракованных изделий 4) Вероятность попадания в цель 0,1. Случайная величина ξ – число выстрелов до первого попадания	а) Биномиальное распределение дискретной случайной величины б) Распределение Пуассона дискретной случайной величины в) Нормальное (гауссовское) распределение непрерывной случайной величины г) Геометрическое распределение дискретной случайной величины д) Показательное (экспоненциальное) распределение непрерывной случайной величины

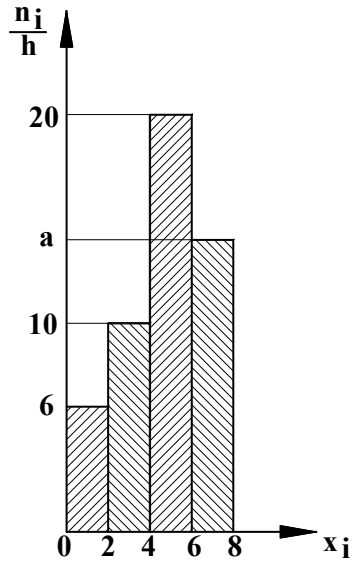
10. Установить последовательность действий для вычисления дисперсии случайной величины ξ, если ξ задана законом распределения

x_i	2	4	5
p_i	p_1	0,5	0,3

1) Вычислить M(ξ)
2) Вычислить M(ξ^2)
3) Вычислить M(ξ^2) – $M^2(\xi)$
4) Найти вероятность того, что ξ примет значение 2

Т 16 «Элементы математической статистики и корреляционного анализа»

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n = 100, гистограмма частот которой изображена на рисунке. Найти значение параметра a.



2. Интервальный вариационный ряд графически можно изобразить
1) полигоном 2) гистограммой 3) кумулятивной кривой

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Найдите несмещённую оценку математического ожидания.

x_i	3	5	9
n_i	2	7	1

4. Найти дисперсию для выборки

x_i	1	2	3
n_i	5	3	2

5.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при построении интервального вариационного ряда по данным выборки	1) составление таблицы, в которой в первой строке формируются границы интервалов, а число во второй строке – это общая сумма частоты встреч всех чисел дискретного ряда, попадающих в соответствующий интервал 2) формирование шкалы интервалов 3) нахождение величины интервала 4) построение дискретного вариационного ряда	

6. Для вариационного ряда 3, 4, 5, 9, 10, 10, 12, 12, 12 вычислить медиану.

7. Дан доверительный интервал (13,5; 17,3) для оценки математического ожидания нормально распределённого количественного признака. Найти точность этой оценки.

8. Основная гипотеза имеет вид $H_0: \sigma^2 = 3$. Тогда конкурирующей может явится гипотеза

1) $H_1: \sigma^2 > 2$ 2) $H_1: \sigma^2 \geq 3$ 3) $H_1: \sigma^2 < 6$ 4) $H_1: \sigma^2 < 3$ 5) $H_1: \sigma^2 \leq 3$

9. Правосторонняя критическая область может определяться из соотношения

1) $P(K > 2{,}2) = 0{,}05$ 2) $P(K < -2{,}2) = 0{,}05$

3) $P(K < -2{,}2) + P(K > 2{,}2) = 0{,}05$ 4) $P(-2{,}2 < K < 2{,}2) = 0{,}95$

10. Для вариационного ряда 4, 5, 5, 6, 10 вычислены числовые характеристики. Установите соответствие между их названиями и значениями.

1) 4 2) 33,2 3) 5,6 4) 5	а) мода б) среднее квадратическое в) среднее арифметическое г) дисперсия д) размах

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

№ 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $-3A + BC$.

Решение:

$$-3A + BC = -3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -12 & 6 & = 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ -25 & -14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -15 \\ -37 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

№ 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta = -2 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = -3.$$

№ 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Решение:

1 способ

Запишем систему в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

то есть в виде $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тогда $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 способ

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ – формулы Крамера, где i =1, 2, 3.

$\Delta = -9$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -45;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

3 способ

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ x_2 + 2x_3 = 6, \\ 9x_3 = 45. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 2x_2, \\ x_2 = 6 - 2x_3, \\ x_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -4, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ:

$x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 5$.

№ 4. При каком m векторы $\vec{a}(3,m)$ и $\vec{b}(-4,2)$ перпендикулярны?

Решение:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0,$ поэтому $\vec{a}\,\vec{b} = 3 \cdot (-4) + m \cdot 2 = 0 \Rightarrow m = 6.$

№ 5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-2,1,0)$ и $\vec{b}(1,4,-3)$.

Решение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b}\,(-3;-6;-9)$$

№ 6. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины: $A(1;-1;-1)$, $B(0;5;4)$, $C(2;-3;-4)$, $D(5;-4;-6)$.

Решение:

1) Найдем координаты векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

$\vec{AB}(-1,6,5)$, $\vec{AC}(1,-2,-3)$, $\vec{AD}(4,-3,-5)$.

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

$$\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -18$$

Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех рассматриваемых векторах, равен

$V = |-18| = 18$ (куб. ед.),

а искомый объем треугольной пирамиды

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ (куб. ед.).

Ответ: $V_{пир}$=3 куб.ед.

№ 7. Составить различные уравнения прямой p на плоскости, проходящей через точки $M_1(-4;2)$ и $M_2(5;1)$.

Решение:

1) Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$

Имеем: $\begin{cases} x = -4 + (5 - (-4)t, \\ y = 2 + (1 - 2)t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 9t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$

2) Выражая параметр t из параметрических уравнений прямой и приравнивая получающиеся выражения, приходим к каноническому уравнению прямой:

$$\frac{x+4}{9} = \frac{y-2}{-1}.$$

Заметим, что $\vec{a}(9;-1)$ – направляющий вектор прямой p.

3) Выразим y из канонического уравнения прямой и получим уравнение прямой p с угловым коэффициентом:

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x+4) \Rightarrow\ y = -\frac{1}{9}x - \frac{4}{9} + 2 \Rightarrow\ y = -\frac{1}{9}x + \frac{14}{9}.$$

4) Перенесем в предыдущем уравнении прямой все в одну сторону равенства:

$$\frac{1}{9}x + y - \frac{14}{9} = 0.$$

Получили общее уравнение прямой. Его можно также записать в виде:

$$x + 9y - 14 = 0.$$

Если прямая задана в п.д.с.к., то $\vec{n}(1;9)$ – нормальный вектор этой прямой.

5) Из общего уравнения прямой можно получить уравнение прямой “в отрезках”.

$$x + 9y = 14 \Rightarrow \frac{x}{14} + \frac{9}{14}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{14} + \frac{y}{14/9}y = 1.$$

Прямая р пересекает координатные оси в точках $A(14;0)$ и $B(0;14/9)$.

№ 8. Составить общее уравнение плоскости π, если π проходит через точки $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$ и $M_3(1;1;4)$.

Решение:

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому для плоскости π можем записать:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первой строке, имеем:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1) - 2(y+1) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y + z - 5 = 0.$$

Итак, общее уравнение плоскости π*:*

$$2x - y + z - 5 = 0.$$

№ 9. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

1) 1 января 2023 года – среда
2) Семеро одного не ждут
3) x+y – нечетное число
4) Сумма нечетных чисел – четное число

Решение:

1) Указанное предложение является высказыванием, причем ложным, так как 1 января 2023 года – воскресение.
2) Указанное предложение не является высказыванием, не ясно, о каких конкретно семерых идет речь.
3) Указанное предложение не является высказыванием, так как не сказано, что подразумевается под x и y.
4) Указанное предложение является высказыванием, причем истинным. Сумма нечетных чисел действительно является четным числом.

№ 10. Дано комплексное число $Z = \dfrac{4}{1 - i\cdot\sqrt{3}}$.

а) записать число Z в алгебраической и тригонометрической формах $z = a + bi$

$$z=\frac{4}{1-i\cdot\sqrt{3}}=\frac{4(1+i\cdot\sqrt{3})}{(1-i\cdot\sqrt{3})(1+i\cdot\sqrt{3})}=\frac{4(1+i\cdot\sqrt{3})}{1+3}=1+i\cdot\sqrt{3}$$ – алгебраическая форма записи

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{r};\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}$$

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right|\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ – тригонометрическая форма записи.

№ 11. Выполнить указанные действия:

$(-2+7\cdot i)^2-\frac{4-3\cdot i}{1+2\cdot i}+\frac{3-2\cdot i}{5\cdot i}+4\cdot i^3$.

б) Найти решение уравнения $3\cdot i-2\cdot z-8=3\cdot i\cdot z$.

в) Найти корни многочлена $P(x)=x^2+x+3\cdot i\cdot x-20+15\cdot i$ на множестве комплексных чисел и разложить его на множители.

Решение

а) $(-2+7\cdot i)^2-\frac{4-3\cdot i}{1+2\cdot i}+\frac{3-2\cdot i}{5\cdot i}+4\cdot i^3$.

1) $(-2+7\cdot i)^2=(7\cdot i-2)^2=49\cdot i^2-28\cdot i+4=$

$=49\cdot(-1)-28\cdot i+4=-45-28\cdot i$.

2) $\frac{4-3\cdot i}{1+2\cdot i}=\frac{(4-3\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)}{(1+2\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)}=\frac{4-3\cdot i-8\cdot i+6\cdot i^2}{1-4\cdot i^2}=\frac{4-11\cdot i+6\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}=\frac{-2-11\cdot i}{5}=$

$=-\frac{2}{5}-\frac{11}{5}\cdot i$.

3) $\frac{3-2\cdot i}{5\cdot i}=\frac{(3-2\cdot i)\cdot i}{5\cdot i^2}=\frac{3\cdot i-2\cdot i^2}{5\cdot i^2}=\frac{3\cdot i-2\cdot(-1)}{5\cdot(-1)}=\frac{3\cdot i+2}{-5}=\frac{3}{-5}\cdot i+\frac{2}{-5}=$

$=-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot i$.

4) $4\cdot i^3=4\cdot i^2\cdot i=4\cdot(-1)\cdot i=-4\cdot i$.

Тогда $(-2+7\cdot i)^2-\frac{4-3\cdot i}{1+2\cdot i}+\frac{3-2\cdot i}{5\cdot i}+4\cdot i^3=(-45-28\cdot i)-$

$-\left(-\frac{2}{5}-\frac{11}{5}\cdot i\right)+\left(-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot i\right)+(-4\cdot i)=-45-28\cdot i+\frac{2}{5}+\frac{11}{5}\cdot i-$

$-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot i-4\cdot i=-45-32\cdot i+\frac{8}{5}\cdot i=-45-30{,}4\cdot i$.

б) $3\cdot i-2\cdot z-8=3\cdot i\cdot z$.

Перенесём все слагаемые, содержащие z, в левую часть уравнения, остальное оставим справа, затем выразим z.

$-2 \cdot z - 3 \cdot i \cdot z = 8 - 3 \cdot i,$

$z \cdot (-2 - 3 \cdot i) = 8 - 3 \cdot i,$

$z = \frac{8-3 \cdot i}{-2-3 \cdot i},$

$z = \frac{3 \cdot i-8}{2+3 \cdot i}.$

Избавимся от мнимой единицы в знаменателе. Для этого необходимо умножить числитель и знаменатель на комплексное число, сопряжённое числу $(2 + 3 \cdot i)$, то есть на $(2 - 3 \cdot i)$.

$\frac{3 \cdot i-8}{2+3 \cdot i} = \frac{(3 \cdot i-8) \cdot (2-3 \cdot i)}{(2+3 \cdot i) \cdot (2-3 \cdot i)} = \frac{6 \cdot i-16-9 \cdot i^2+24 \cdot i}{4-9 \cdot i^2} = \frac{30 \cdot i-16-9 \cdot (-1)}{4-9 \cdot (-1)} = \frac{30 \cdot i-16+9}{4+9} =$

$= \frac{30 \cdot i-7}{13} = -\frac{7}{13} + \frac{30}{13} \cdot i.$

Таким образом, решением исходного уравнения является комплексное число $z = -\frac{7}{13} + \frac{30}{13} \cdot i.$

в) $P(x) = x^2 + x + 3 \cdot i \cdot x - 20 + 15 \cdot i.$

Корни этого многочлена можно найти, решив квадратное уравнение $x^2 + x + 3 \cdot i \cdot x - 20 + 15 \cdot i = 0.$

$x^2 + x \cdot (1 + 3 \cdot i) + (15 \cdot i - 20) = 0$, тогда

$D = (1 + 3 \cdot i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (15 \cdot i - 20) = 1 + 6 \cdot i + 9 \cdot i^2 - 60 \cdot i +$

$+80 = 81 - 54 \cdot i + 9 \cdot i^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot (3 \cdot i) + (3 \cdot i)^2 =$

$= (9 - 3 \cdot i)^2$. Тогда $\sqrt{D} = \sqrt{(9 - 3 \cdot i)^2} = |9 - 3 \cdot i| = 9 - 3 \cdot i.$

$x_1 = \frac{-(1+3 \cdot i)+(9-3 \cdot i)}{2 \cdot 1} = \frac{-1-3 \cdot i+9-3 \cdot i}{2} = 4 - 3 \cdot i;$

$x_2 = \frac{-(1+3 \cdot i)-(9-3 \cdot i)}{2 \cdot 1} = \frac{-1-3 \cdot i-9+3 \cdot i}{2} = -5.$

Формула разложения многочлена $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ на множители имеет вид $P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, значит в нашем случае $P(x) = (x - 4 + 3 \cdot i) \cdot (x + 5).$

№ 12. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{3x + 8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Решение:

Разделив числитель и знаменатель на x^2, имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} + \frac{8}{x^2}} = \left[\frac{1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{3 \cdot 0 + 8 \cdot 0}\right] = \infty$$

№ 13 Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Решение:

Введем новую переменную $y=x+2$, то при $x\to -2$, $y\to 0$.

Имеем

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{(y-2)^2-4}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y^2-4y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y(y-4)}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}.$$

№ 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение:

Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

№ 15. Найти производную $y=2x\cdot\sqrt[3]{x^5+3x}$.

Решение:

Для нахождения производной используем правила:

$$y'=(2x\cdot(x^5+3x)^{1/3})'=(2x)'\cdot(x^5+3x)^{1/3}+2x((x^5+3x)^{1/3})'=$$

$$=2(x^5+3x)^{1/3}+2x\cdot\frac{1}{3}(x^5+3x)^{1/3-1}\cdot(x^5+3x)'=2(x^5+3x)^{1/3}+$$

$$+\frac{2}{3}x(x^5+3x)^{-2/3}\cdot(5x^4+3)=2(x^5+3x)^{1/3}\cdot\left(1+\frac{5x^4+3}{3(x^5+3x)}\right)=$$

$$=2\sqrt[3]{x^5+3x}+\frac{2x}{3\sqrt{(x^5+3x)^2}}=\frac{3\cdot 2(x^5+3x)+2x}{3\sqrt[3]{(x^5+3x)^2}}=\frac{6x^5+20x}{3\sqrt[3]{(x^5+3x)^2}}$$

№ 16. Найти производную от функции $y=\sin(x^3-3x^2+5)$.

Решение:

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

№ 17. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2} \cdot (x^2 + 1)}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}$.

Решение:

Логарифмируем обе части равенства по основанию e

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2} \cdot (x^2 + 1)}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x^2 + x - 2) + \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{5}\ln(x^4 - 1).$$

Дифференцируем обе части, считая у сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x - 2} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4x^3}{x^4 - 1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1) + 30x(x^2-1)(x+2) - 12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{10x^4 + 15x^3 + 15x^2 + 15x + 5 + 30x^4 + 60x^3 - 30x^2 - 60x - 12x^4 - 24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{28x^4 + 51x^3 - 15x^2 - 45x + 5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2} \cdot (x^2 + 1)}{\sqrt[5]{x^4 - 1}} \cdot \frac{28x^4 + 51x^3 - 15x^2 - 45x + 5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{28x^4 + 51x^3 - 15x^2 - 45x + 5}{15(x^2-1)(x+2)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2}}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}.$$

№ 18. Найти интеграл $\int (2x + 3) \cdot \sin x \, dx$

Решение:

а) Пусть $u = 2x + 3$, тогда $du = 2 \cdot dx$; $dv = \sin x \, dx$, тогда $v = -\cos x$.

По формуле интегрирования по частям находим

$$\int (2x+3)\cdot \sin x\,dx = -(2x+3)\cdot \cos x - \int (-\cos x)\cdot 2\cdot dx =$$
$$= -(2x+3)\cdot \cos x + 2\sin x + C.$$

№ 19. Найти интегралы $\int \mathrm{x}\sin 2\mathrm{x}\ \mathrm{dx}$.

Решение.

$$\int x\sin 2x\ dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin 2xdx, v = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

№ 20. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Решение.

Преобразуем квадратный трехчлен

$x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1;\ x - 3 = t, x = t + 3, dx = dt.$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \begin{Bmatrix}\text{табличный}\\ \text{интеграл}\end{Bmatrix}$$
$$= ln\,|\,t + \sqrt{t^2-1}\,| + C = ln\,|\,x - 3 + \sqrt{x^2-6x+8}\,| + C.$$

№ 21. Найти интеграл $\int x\cdot e^{-x^2}dx$

Решение:

Сделаем замену переменной полагая $t = -x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t = -x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)'dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\tfrac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2dx} = \int e^{-x^2}\cdot xdx = \int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$
$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

№ 22. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение:

Пусть $\sqrt{1+x}=t$, тогда $t^2=1+\mathrm{x}$, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x=0$, $t^2-1=0, t=1$; при $x=15$, $15=t^2-1$; $t^2=16$, $t=4$.

Получим

$$\int_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t}=\int_1^4 (2t^2-2)dt=\left(\frac{2t^3}{3}-2t\right)\Big|_1^4=\frac{2}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4-\left(\frac{2}{3}-2\right)=36.$$

№ 23. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение:

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x^2 \\ du=2xdx \\ dv=\cos xdx \\ v=\sin x \end{vmatrix}=x^2\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int 2x\sin xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u_1=x \\ du_1=dx \\ dv_1=\sin xdx \\ v_1=-\cos x \end{vmatrix}=4\pi^2\sin 2\pi-0-2x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}\cos xdx=$$

$$=2\cdot 2\pi\cos 2\pi-0-2\sin x\Big|_0^{2\pi}=4\pi.$$

№ 24. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+9}$.

Решение:

Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $\mathrm{c}=-2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+9}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d(x+2)}}{(\mathrm{x}+2)^2+5}=\lim_{\mathrm{B}\to-\infty}\int_{\mathrm{B}}^{-2}\frac{\mathrm{d(x+2)}}{(\mathrm{x}+2)^2+5}+\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_{-2}^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d(x+2)}}{(\mathrm{x}+2)^2+5}=$$

$$=\lim_{\mathrm{B}\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{(\mathrm{x}+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{\mathrm{B}}^{-2}+\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{(\mathrm{x}+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{-2}^{\mathrm{A}}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

№ 25. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Решение:

Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \le x < +\infty).$$

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$ (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

№ 26. Вычислить площадь (рис.1), заключенную внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение:

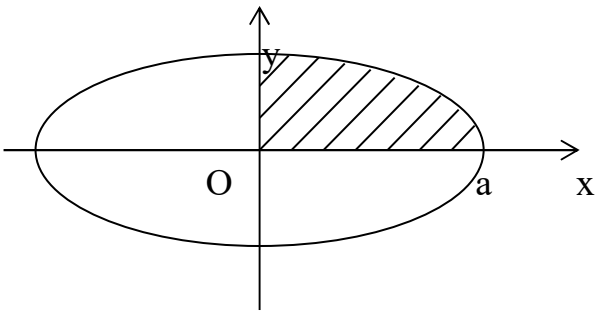


Рис. 1. Площадь эллипса

Уравнение части эллипса, удовлетворяющей условию x≥0, y≥0 можно записать в виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь четверти эллипса равна

$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\arcsin 1=\frac{\pi ab}{4}.$$

Полная площадь эллипса равна S=πab.

№ 27. Найти полный дифференциал функции $z=cos\,x\cdot log_5 y$ в точке $x=\frac{\pi}{6}$, $y=25$.

Решение:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)}\cdot dy=-1\cdot dx+\frac{\sqrt{3}}{50\cdot ln\,5}\cdot dy.$$

№ 28. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=cos\,x\cdot log_5 y$ в точке x $=\frac{\pi}{6}$, y = 25.

Решение:

Уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$(x-x_0)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)}+(y-y_0)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)}=z-z_0.$$

Вычислим предварительно z_0, подставив координаты $(x_0;y_0)$ в формулу функции.

$z_0=cos\frac{\pi}{6}\cdot log_5 2\,5=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$.

То есть, имеем $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot(-1)+(y-25)\cdot\frac{\sqrt{3}}{50\cdot ln\,5}=z-\sqrt{3}$;

$$-x+\frac{\sqrt{3}}{50\cdot ln\,5}\cdot y-z-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot ln\,5}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}=0.$$

Уравнение нормали к поверхности имеет вид: $\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}$.

$$\frac{x-\frac{\pi}{6}}{-1}=\frac{y-25}{\frac{\sqrt{3}}{50\cdot ln\,5}}=\frac{z-\sqrt{3}}{-1};$$

$$\frac{6x-\pi}{-6}=\frac{50\cdot ln\,5\cdot(y-25)}{\sqrt{3}}=\frac{z-\sqrt{3}}{-1}.$$

№ 29. Для функции $z=cos(3x-4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[y=const\right]=\left(\cos\left(3x-4y\right)\right)'=-\sin\left(3x-4y\right)\cdot\left(3x-4y\right)'=$$
$$=-\sin\left(3x-4y\right)\cdot\left(3\cdot x'-0\right)=-3\sin\left(3x-4y\right);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[x=const\right]=\left(\cos\left(3x-4y\right)\right)'=-\sin\left(3x-4y\right)\cdot\left(3x-4y\right)'=$$
$$=-\sin\left(3x-4y\right)\cdot\left(0-4\cdot y'\right)=4\sin\left(3x-4y\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[y=const\right]=\left(-3\sin\left(3x-4y\right)\right)'=-3\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(3x-4y\right)'=$$
$$=-3\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(3\cdot x'-0\right)=-9\cos\left(3x-4y\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[x=const\right]=\left(-3\sin\left(3x-4y\right)\right)'=-3\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(3x-4y\right)'=$$
$$=-3\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(0-4\cdot y'\right)=12\cos\left(3x-4y\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[x=const\right]=\left(4\sin\left(3x-4y\right)\right)'=4\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(3x-4y\right)'=$$
$$=4\cos\left(3x-4y\right)\cdot\left(0-4\cdot y'\right)=-16\cos\left(3x-4y\right).$$

№ 30. Решить дифференциальное уравнение

$$x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0.$$

Решение:

Перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения $x(1+y^2)dx=y(1+x^2)dy$ и разделим обе части уравнения на выражение $(1+y^2)(1+x^2)$, получим $\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{ydy}{1+y^2}$. Затем проинтегрируем обе части уравнения $\int\frac{xdx}{1+x^2}=\int\frac{ydy}{1+y^2}$, отсюда $\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dy^2}{1+y^2}$ будем иметь $ln(1+x^2)=ln(1+y^2)-lnC$ или $1+y^2=C(1+x^2)$.

№ 31. Решить дифференциальное уравнение $y'=2x+y$

Решение:

Положим *z=2x+y,* тогда *z′=2+y′,* но *y′=z,* следовательно, $z'=2+z$ или $\frac{dz}{dx}=2+z$, разделяя переменные, получим $\frac{dz}{2+z}=dx$. Проинтегрируем обе части этого уравнения $\int\frac{dz}{2+z}=\int dx$, будем иметь $\ln|2+z|=x+lnC$ или $z=Ce^x-2$,возвращаясь к прежним переменным, получим $y=Ce^x-2x-2$.

№ 32. Решить уравнение: $ydx = x(\ln\frac{x}{y}+1)dy$, где $\frac{x}{y} > 0$.

Решение:

Разделим исходное уравнение на ydy, получим $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}(\ln\frac{x}{y}+1)$. Положим $x/y=t$ или $x=t\cdot y$, тогда $\frac{dx}{dy} = t + y\frac{dt}{dy}$. Подставим данные обозначения в исходное уравнение, получим $t + y\frac{dt}{dy} = t(1+\ln t)$, $y\frac{dt}{dy} = t\ln t$. Разделим переменные $\frac{dt}{t\ln t} = \frac{dy}{y}$. Интегрируя последнее равенство $\int\frac{dt}{t\ln t} = \int\frac{dy}{y}$ или $\int\frac{d(\ln t)}{\ln t} = \int\frac{dy}{y}$, получим: $\ln|y| + \ln|C| = \ln|\ln t|$, где $C \neq 0$

$|Cy| = |\ln(x/y)|$ – общий интеграл.

№ 33. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y'' + 5y = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение:

Данное уравнение является неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения $k^2 - 2k + 5 = 0$, найдём корни этого квадратного уравнения $k_1=1+\sqrt{1-5}=1+2i$, $k_2=1-\sqrt{1-5}=1-2i$ – корни комплексные сопряжённые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{oo}=e^x(C_1cos2x+C_2sin2x)$. Составим вид частного решения, соответствующий виду правой части исходного уравнения $y_ч=(Ax+B)e^{2x}$. Т.к. это решение оно должно удовлетворять исходному уравнению. Подставим его в исходное уравнение, для этого найдём:

$y'_ч=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}$, $y''_ч = 2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x} = 4(Ax+B+A)e^{2x}$.

После подстановки уравнение примет вид:

$$4(Ax + B + A)e^{2x} - 2\big(A + 2(Ax + B)\big)e^{2x} + 5(Ax + B)e^{2x} = xe^{2x}$$

или $5Ax + 2A + 5B = x$, тогда $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{25}$ и $y_ч = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}$.

Следовательно,

$$y_{он} = e^x(C_1cos2x + C_2sin2x) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}.$$

Используем начальные условия $y(0)=1$, $y'(0)=1$ чтобы найти C_1 и C_2.

Итак

$y_{он}= e^x(C_1cos2x+C_2sin2x)+\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}$,

$y'_{он}= e^x(C_1cos2x+C_2sin2x)+ e^x(-2C_1\ sin\ 2x+2C_2\ cos2x)+$
$+\frac{1}{5}e^{2x}+2\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)e^{2x}$
или
$y'_{он}= e^x\left[(C_1+2C_2)\ cos2x+(C_2-2C_1)sin2x\right]+\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\right)e^{2x}$
тогда $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1-\frac{2}{25}=1 \\ C_1+2C_2+\frac{1}{25}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{27}{25} \\ C_2=-\frac{14}{25} \end{cases}$
окончательно $y_{он}= e^x\left(\frac{27}{25}cos2x-\frac{14}{25}sin2x\right)+\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)e^{2x}$.

№ 34. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\cos(3x)$

Решение:

$y''=\cos(3x),$

$y'=\int\cos(3x)dx,$

$y'=\frac{1}{3}\int\cos(3x)d(3x),$

$y'=\frac{1}{3}\sin(3x)+C_1,$

$y=\int\left(\frac{1}{3}\sin(3x)+C_1\right)dx,$

$y=\frac{1}{3}\int\sin(3x)dx+C_1\int dx,$

$y=\frac{1}{9}\int\sin(3x)d(3x)+C_1\int dx,$

$y=-\frac{1}{9}\cdot\cos(3x)+C_1\cdot x+C_2.$

Дифференциальные уравнения вида $F(x,y',y'')=0$ (или вида $y''=f(x,y')$) решаются с помощью замены $y'=p$, где $p=p(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y''=p'=\frac{dp}{dx}$. Исходное уравнение примет вид $p'=f(x,p)$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

№ 35. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера

$$a_n = \frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{2(n+1)+2}{(2(n+1)+5)\cdot 2^{n+1}} = \frac{2n+4}{(3n+8)\cdot 2^n \cdot 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)\cdot(3n+5)\cdot 2^n}{(3n+8)\cdot 2^n \cdot 2\cdot(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)(3n+5)}{(3n+8)\cdot 2\cdot(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+6n+10}{6n^2+6n+16n+16} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+11n+10}{6n^2+22n+16} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1,$$

№ 36. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}$, применяя признак Коши (с радикалом).

Решение:

Исследуемый ряд является рядом с положительными членами. Применим признак Коши (с радикалом).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2} = \left[2^{\infty}\right] = \infty,$$

т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+2} = 2$ и $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Итак, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, и по признаку Коши (с радикалом) исследуемый ряд расходится.

№ 37. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n+2^n}$, применяя признаки сравнения.

Решение:

Исследуемый ряд является рядом с неотрицательными членами, и для всех натуральных n выполняются неравенства

$$0 \le \frac{\sin^2 2^n}{n+2^n} \le \frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится, т.к. ее знаменатель $q = \frac{1}{2}$ меньше единицы. Таким образом, по признаку сравнения сходится и данный ряд.

№ 38. Исследовать область сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$.

Решение:

Применим признак Даламбера

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n2^n}$$

$$u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n2^n}{(n+1)2^{n+1}x^n}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+1/n}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|.$$

Ряд сходится, если

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1\Leftrightarrow|x|<2\Leftrightarrow-2<x<2.$$

Исследуем концы. Положим $x=2$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Получили гармонический ряд. Ряд расходится. Положим $x=-2$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Получили знакочередующийся ряд. По признаку Лейбница ряд сходится. Следовательно, область сходимости ряда

$$-2\le x<2.$$

№ 39. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+4)}$.

Решение:

Для нахождения области сходимости ряда воспользуемся формулой: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, тогда $|x-a|<R$. В нашем случае $a_n=\frac{1}{n+4}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+5}$, тогда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+5}{n+4}\right|=1$, следовательно,

$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$. Исследуем далее поведение ряда на концах интервала сходимости:

Пусть x=1, тогда получим числовой знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$, исследуем его по признаку Лейбница:

а) $\frac{1}{5} > \frac{1}{9} > \frac{1}{13} > \ldots$ - члены ряда по абсолютной величине образуют монотонно убывающую последовательность;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0$. Следовательно, ряд сходится при x=1.

Пусть x=3, тогда получим числовой знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$, исследуем его по второму признаку сравнения. Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – он расходится, найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = 1 \neq 0 \left(\neq \infty\right)$, следовательно, оба ряда ведут себя одинаково, т.е. наш ряд расходится при x=3. Окончательно имеем $1 \le x < 3$ – область сходимости исходного ряда.

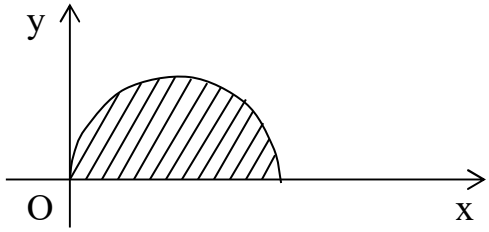
№ 40. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, где D область, граница которой задана линией и условием $x^2 + y^2 - 2x = 0; \quad y \ge 0.$

Решение:

Изобразим область (см. рис.) и перейдем к полярным координатам

$\rho = 2\cos\phi; \quad \alpha = 0; \qquad \beta = \pi/2.$

Получим



$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint\limits_{D'} \rho^2 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi d(\sin\varphi) = \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) = \frac{16}{9}.$$

№ 41. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS$, где S – треугольник ограниченный прямыми $y = 0,\ x = 2,\ y = \frac{x}{2}$.

Решение:

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} (x^2+y^2)\,dy = \frac{13}{6}.$$

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^2 (x^2+y^2)\,dx = \frac{13}{6}.$$

№ 42. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Решение:

Введем обобщенную полярную систему координат

$$\begin{cases} x = \arccos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr.$$

$$S = \iint\limits_S dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 abr\,dr = ab2\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \pi ab.$$

№ 43. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$.

Решение:

Предварительно найдём $y' = \left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{1}{4}\cdot 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{2}-\frac{1}{2x}.$

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int\limits_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = \int\limits_1^e \sqrt{1+\frac{x^2}{4}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}\,dx =$$

$$= \int\limits_1^e \sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx = \int\limits_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx = \int\limits_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}\,dx =$$

$$= \int\limits_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = \int\limits_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e + \frac{1}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^2-1\right)+\frac{1}{2}\left(\ln e-\ln 1\right) = \frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$$

№ 44**.** В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n – угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Решение.

Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины *n* – угольника, а каждым 4 вершинам *n* – угольника соответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди *n* вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Ответ: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ способов.

№ 45. Вероятность, что лампочка сгорит при включении равна 0,01. Найти вероятность того, что из 400 включенных лампочек сгорят ровно 5 штук.

Решение:

Воспользуемся локальной теоремой Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$n = 400, \quad k = 5, \quad p = 0{,}01, \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

$$x = \frac{5 - 400 \cdot 0{,}01}{\sqrt{400 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}96}} \approx 0{,}5025$$

$\varphi(0{,}5025) = 0{,}3503$ по табл. прил.1 уч.Гмурмана

$$P_{400}^5 = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} \cdot 0{,}3503 = 0{,}17603$$

№ 46. В корзине 4 синих и 3 красных шара. Два раза подряд наудачу вытаскивается шар. Найти вероятности следующих событий, если известно, что шары извлекаются без возвращения в корзину:

1) второй раз вытащен синий шар, если первый раз вытащили красный шар;

2) второй раз вытащен синий шар, если первый раз вытащили синий шар.

Решение:

Введем события:

A_1 – первый раз вытащили синий шар, тогда $\overline{A_1}$ – первый раз вытащили красный шар,

A_2 – второй раз вытащили синий шар, тогда $\overline{A_2}$ – второй раз вытащили красный шар,

1) Всего шаров 7: 4 синих и 3 красных. Если первый раз вытащили красный шар, то осталось 6 шаров: 4 синих и 2 красных. Следовательно, вероятность того, что второй раз вытащили синий шар

$$P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2) Если первый раз вытащили синий шар, то осталось 6 шаров: 3 синих и 3 красных. Следовательно, вероятность того, что второй раз вытащили синий шар:

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

№ 47. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число точных приборов в партии из 10 приборов.

Решение:

Наивероятнейшее число m_0 наступления события при повторении испытаний оценивается неравенством:

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Событие А состоит в сборке точного прибора. Вероятность того, что прибор точным не будет (это событие противоположно событию А), равна $q = 0,3$. Следовательно, вероятность события А равна $p = 1 - q = 1 - 0,3 = 0,7$.

По условию задачи $n = 10$, $p = 0,7$, $q = 0,3$.

$10 \cdot 0,7 - 0,3 \le m_0 \le 10 \cdot 0,7 + 0,7$

$6,7 \le m_0 \le 7,7$

Целым числом, принадлежащим данному интервалу, является число 7. Следовательно, наивероятнейшее число точных приборов в партии из 10 приборов равно $m_0 = 7$.

Ответ: $m_0 = 7$.

№ 48. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{x^2 - 1}{48}, & 1 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$ Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение:

Плотность распределения вероятностей $f(x) = F'(X)$, где

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{x}{24}, & 1 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_{1}^{7} x\cdot\frac{x}{24}dx+\int_{7}^{+\infty} x\cdot 0dx=\int_{1}^{7}\frac{x^2}{24}dx=$$

$$=\frac{x^3}{72}\Bigg|_1^7=\frac{343}{72}-\frac{1}{72}=\frac{342}{72}=\frac{171}{36}$$

Дисперсию случайной величины

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x^2\cdot 0dx+\int_{1}^{7} x^2\cdot\frac{x}{24}dx+\int_{7}^{+\infty} x^2\cdot 0dx=\int_{1}^{7}\frac{x^3}{24}dx=$$

$$=\frac{x^4}{96}\Bigg|_1^7=\frac{2401}{96}-\frac{1}{96}=\frac{2400}{96}=\frac{1200}{48}=25$$

$$D(X)=25-\left(\frac{171}{36}\right)^2=25-\left(\frac{19}{4}\right)^2=25-\frac{361}{16}=\frac{400-361}{16}=\frac{39}{16}.$$

№ 49. Составить закон распределения с.в. ξ – числа попаданий мяча в корзину при трех бросках, если вероятность попадания при одном броске p = 0,4.

Решение:

С.в. в. ξ – число попаданий мяча в корзину при трех бросках – дискретная с.в., так как множество ее значений $\{0, 1, 2, 3\}$ конечно.

Определим вероятность каждого значения с.в. Очевидно, имеет место вероятностная схема Бернулли с параметрами (3; 0,4), так как проводится 3 независимых испытания (броски мяча в корзину), в каждом из которых фиксируется попадание в корзину, вероятность которого $p=0{,}4.$

$$P_3(0)=C_3^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^3=0{,}216.$$

$$P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^2=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}36=0{,}432.$$

$$P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^1=3\cdot 0{,}16\cdot 0{,}6=0{,}288.$$

$$P_3(3)=C_3^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^0=0{,}064.$$

Заметим выполнимость условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=0{,}216+0{,}432+0{,}288+0{,}064=1.$$

Представим закон распределения в виде таблицы.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

№ 50. Из генеральной совокупности извлечена выборка: 1, 3, 4, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 1. Составить статистическое распределение частот и построить полигон частот.

Решение:

Статистическое распределение частот:

x_i	1	2	3	4
n_i	3	4	2	1

Построим полигон частот



Рекомендуемая литература

8 .1 Основная

1. Ильин В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2011. - 608 с.
2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. - 5-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2009. - Ч. 1. - 288 с.
3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. - М. : Физматлит, 2009. - Ч. 2. - 432с.
4. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. - М. : Физматлит, 2009. - Ч. 3. - 544с.
5. Магазинников, Л.И. Высшая математика: Дифференциальное исчисление [Электронный ресурс] : учебное пособие / Магазинников, Л.И., Магазинников А.Л.; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. Режим доступа http://biblioclub.ru/
6. Дорофеев, С.Н. Высшая математика : конспект лекций [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.Н. Дорофеев. – Москва : Мир и образование, 2011. – 591 с. Режим доступа http://biblioclub.ru/
7. Гусак, А.А. Высшая математика : учебник : в 2 томах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Том 1. – 544 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/

8.2. Дополнительная

1. Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. - М. : Наука, 1989. - 464 с.
2. Ильин В. А. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - Изд. 7-е, стер. - М. : Физматлит, 2009. - 224 с.
3. Ильин В. А. Линейная алгебра [Текст] : учебник для университетов по специальности "Прикладная математика" и "Физика". / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. - Москва : Наука, 1984. - 294 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. − 416 с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров. − М.: Высшая школа, 2012. − 479с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учебное пособие. −М.: Высшая школа, 2011. −404с.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] : учебное пособие / Д.В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. − СПб. : Лань, 2010. − 224 с.
8. Журавлева Е.В., Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие / Е.В.Журавлева, Е.А.Бойцова, Е.А.Панина, Л.И.Студеникина − Курск, 2015. − 178с.
9. Кочетков Е.С., Теория вероятностей в задачах и упражнениях [Текст]: учебное пособие / Е.С. Кочетков, С.О Смерчинская М.: Форум – Инфра – М, 2005. − 480с.
10. Тютюнов Д.Н., Неопределенный интеграл. Техника интегрирования. [Текст]: учебное пособие/ Д.Н. Тютюнов, Л.И. Студеникина – Старый Оскол: ТНТ, 2016.–116 с.
11. Тютюнов Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие/ Д.Н Тютюнов, Л.И. Студеникина., Скрипкина Е.В. –Курск: ЗАО "Университетская книга", 2016.–158 с.

8.3 Перечень методических указаний

1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс] : индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост.: Е. А. Бойцова, Т. В. Шевцова. - Курск : ЮЗГУ, 2016. - 26 с.
2. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению М-2 / А.В.Бойков − Курск. ЮЗГУ, 2014. −30с.
3. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / О.А.Бредихина, С.В.Шеставина. − ЮЗГУ. Курск. 2013. −18с.
4. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания / Е.В.Скрипкина. − Курск. ЮЗГУ, 2014.− 52с.
5. Интегрирование функций [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к М-5 / Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап. − Курск. ЮЗГУ, 2014. − 38с.
6.. Интегрирование функций одной переменной. Приложения. [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению модуля / Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап. − Курск. ЮЗГУ, 2014. − 53с
7. Дифференциальные уравнения. [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к М-7.1 / Курск. КГТУ. 2010. −51 с.

8. Определенный интеграл. [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к М-8 / Студеникина Л.И. Курск. ЮЗГУ. 2011.−33 с.
9. Расчет вероятностей случайных событий. [Электронный ресурс] методические указания и индивидуальные задания к М-11 / Журавлева Е.В., Панина Е.А. Курск. ЮЗГУ. 2011. −50 с.
10. Элементы математической статистики и корреляционного анализа. [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к М-15 / Журавлева Е.В., Панина Е.А. Курск. ЮЗГУ. 2012. − 35 с.
11. Метод наименьших квадратов. [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к ЛР-15 / Студеникина Л.И., Шевцова Т.В. Курск. ЮЗГУ. 2017. −52с.
12. Проверка статистических гипотез [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению ЛР-17 / Журавлева Е.В. ЮЗГУ. Курск. ЮЗГУ. 2013. −39с.
13. Повторные испытания. Случайные величины [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю 17 системы РИТМо / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. Курск, 2007. −55с.