МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«_8_» 05 _______ 2024 г.

КИНЕМАТИКА

Методические указания для практических работ
по разделам дисциплин «Теоретическая механика»,
«Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика»

Курск 2024 г

УДК 531.8(075.8)

Составители: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Кинематика: методические указания для практических работ по разделам дисциплин «Теоретическая механика», «Механика», «Механика роботов», «Прикладная механика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун, Е.В.Савельева. Курск, 2024. 38с., ил. 27, табл. 0. Библиогр.: с. 38.

В методических указаниях приведены краткие теоретические положения и разобраны примеры решения задач по разделу «Кинематика» курсов «Теоретическая механика», «Механика", «Механика роботов», «Прикладная механика» для инженерных специальностей всех форм обучения высших учебных заведений.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 7.05.24. Формат 60x84 1\16
Усл. печ. л. 2,2. Уч.изд.л. 2. Тираж 50 экз. Заказ.30 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель данных методических указаний – изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач по основным темам раздела «Кинематика» курсов «Теоретическая механика», «Механика", «Механика роботов», «Прикладная механика».

Поскольку при изучении курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить учащимся навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам.

Тема №1
Кинематика точки. Частные случаи движения точки. Простейшее движение твердого тела

1.1. Кинематика точки

Кинематика точки – раздел кинематики, в котором исследуется механическое движение материальных точек.

Основными задачами кинематики точки являются определение способов задания движения точки и кинематических характеристик движения точки (скорости, ускорения) по заданному закону движения.

Скоростью точки называется векторная величина, характеризующая быстроту движения точки по траектории.

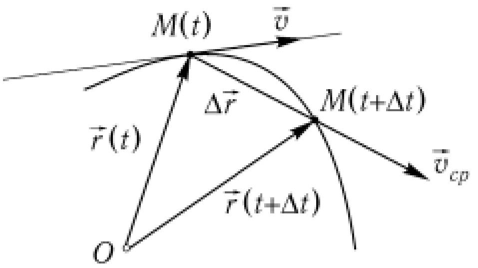


Рис.1.1. Средняя скорость точки за промежуток времени Δt

Рассмотрим перемещение точки за малый промежуток времени Δt:

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t).$$

Тогда $\upsilon_{\text{ср}} = \Delta\bar{r}/\Delta t$ – средняя скорость точки за промежуток времени Δt.

Скорость точки в данный момент времени:

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t},$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}, \qquad [м/с]. \qquad (1.1)$$

Скорость точки направлена по касательной к траектории.

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

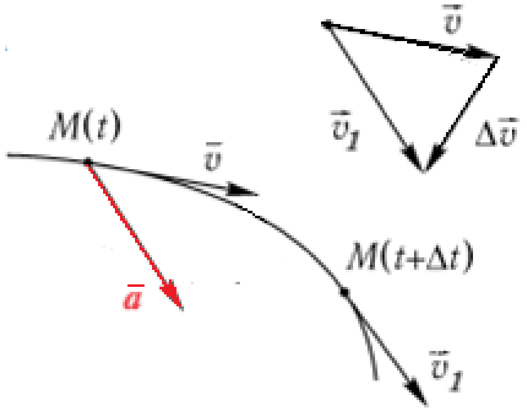


Рис.1.2. Среднее ускорение точки за промежуток времени Δt

Среднее ускорение:

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t},$$

характеризует изменение вектора скорости за малый промежуток времени Δt.

Ускорение точки в данный момент времени:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt}.$$

Вектор истинного ускорения точки в момент времени *t*, *лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.*

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}, \qquad [\text{м/с}^2]. \qquad (1.2)$$

1.2. Способы задания движения точки

Векторный способ. Положение точки задаётся радиус-вектором, проведенным из неподвижной точки в выбранной системе отсчета (рис.1.3).

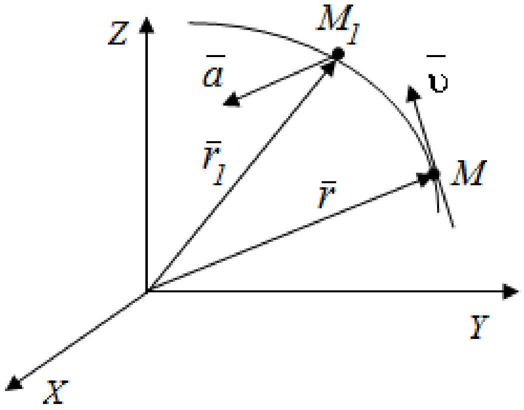


Рис.1.3. Векторный способ задания движения точки

Уравнение движения: $\bar{r} = \bar{r}(t)$

Скорость точки:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \qquad (1.3)$$

Ускорение точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \qquad (1.4)$$

Координатный способ. Задаются координаты точки как функции времени (рис. 1.4):

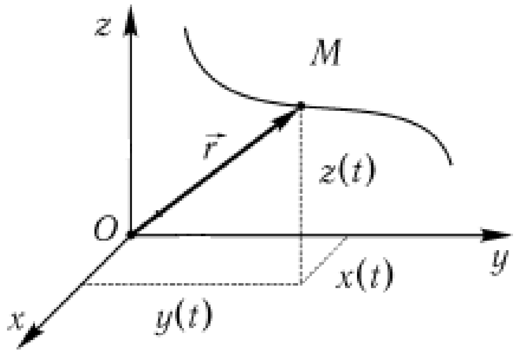


Рис.1.4. Координатный способ задания движения точки

Уравнение движения:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t)$$

Связь векторного способа задания движения и координатного дается соотношением:

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}.$$

Из определения скорости:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Проекции скорости на оси координат равны производным соответствующих координат по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (1.5)$$

Модуль скорости точки:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \qquad (1.6)$$

а направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}; \quad \cos\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}; \quad \cos\gamma = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}. \qquad (1.7)$$

Из определения ускорения:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}\right) = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}.$$

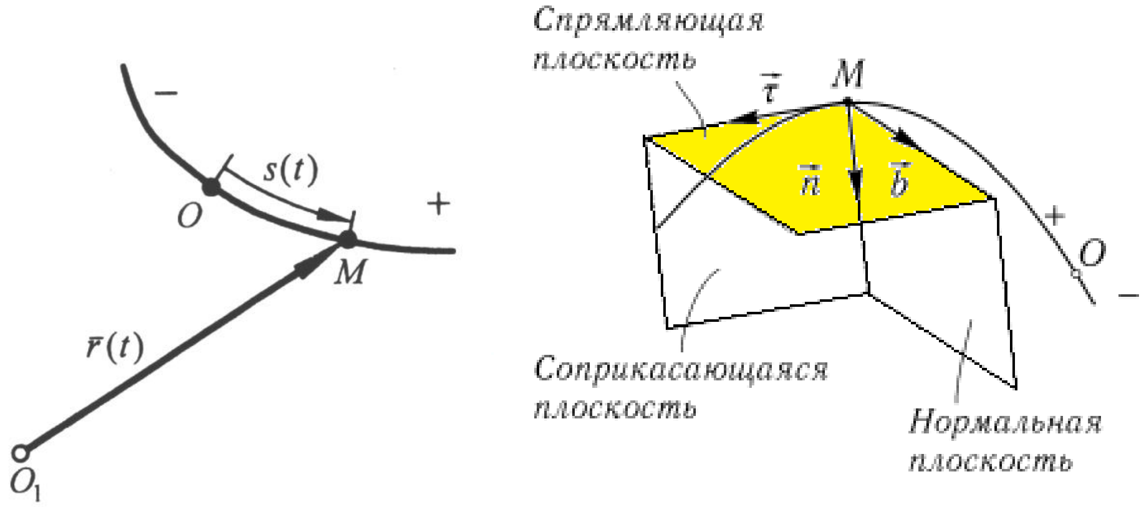
Проекции ускорения на оси координат равны вторым производным соответствующих координат по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \qquad (1.8)$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.9}$$

Естественный способ. При естественном способе известно начало отсчета на траектории, направление движения и закон движения точки вдоль траектории в виде $S = f(t)$ (рис.1.5, а).



а б

Рис. 1.5. Естественный способ задания движения точки:
а – положение точки M; б – естественные оси

Радиус-вектор точки M можно представить в виде функциональной зависимости от параметра s

$$\bar{r} = \bar{r}(s).$$

Для нахождения скорости и ускорения точки определим оси естественной системы координат: касательная $\bar{\tau}$, главная нормаль $\bar{n}$, бинормаль $\bar{b}$, расположенные в соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостях и образующие естественный трехгранник, который перемещается вместе с движущейся точкой M, как твердое тело. Его движение в пространстве определяется траекторией и законом изменения дуговой координаты (рис. 1.5, б).

Скорость точки:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\dot{s}\,,$$

с учетом того, что $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$, $[\bar{\tau}] = 1$ – единичный вектор, получим:

$$\bar{\upsilon} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}.$$

Проекция скорости точки на касательную ось

$$\upsilon_\tau = \dot{s}. \qquad (1.10)$$

Алгебраическая скорость равная производной от дуговой координаты по времени. Если производная положительна, то точка движется в положительном направлении отсчета дуговой координаты.

Ускорение представляет собой сумму касательной $\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}$ и нормальной $\bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}$ составляющих (рис. 1.6).

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \qquad (1.11)$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.12)$$

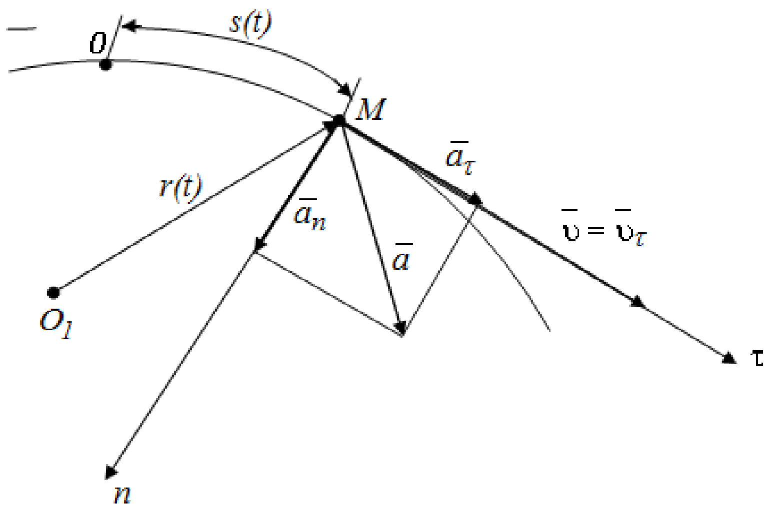


Рис. 1.6. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения точки

Вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости и проекция ускорения на бинормаль равна нулю ($a_b = 0$).

Движение точки ускоренное, если знаки проекций векторов скорости и ускорения на касательную совпадают

1.3. Частные случаи движения точки

1.3.1. Прямолинейное движение.

Так как траектория точки - прямая линия, то $\rho=\infty$, $a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = 0$

и полное ускорение $a = a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$.

1.3.2. Равномерное криволинейное движение.

υ = const и $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$.

Полное ускорение $a = a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$.

1.3.3. Равномерное прямолинейное движение

υ = const, $a_n = a_\tau = 0$ и $a = 0$.

1.3.4. Равнопеременное криволинейное движение.

В этом случае a_τ = const. Законы движения:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t; \tag{1.13}$$

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{1.14}$$

1.4. Простейшее движение твердого тела

К простейшим видам движения твердого тела относятся поступательное и вращательное движение.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной самой себе при перемещении.

Теорема: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В любой момент времени выполняется равенство (рис.1.7):

$$\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \overline{AB}, \ \bar{r}\ \overline{AB} = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени дважды, установим равенство скоростей и ускорений:

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\bar{r}_B}{dt}, \quad \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_B}{dt^2}.$$

Теорема доказана.

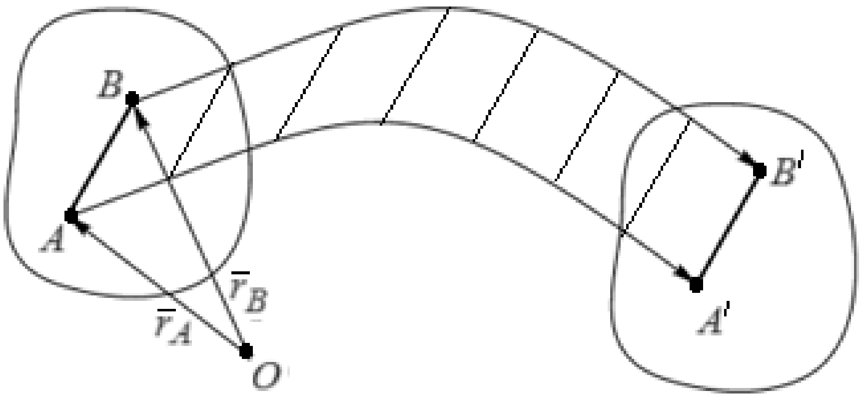


Рис. 1.7. Поступательное движение твердого тела

Для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек:

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \\ z_A &= z_A(t). \end{aligned}}$$ – уравнения поступательного движения твердого тела

Вращательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется **осью вращения *AB*** (рис. 1.8). Положение тела определено, если задан угол φ между плоскостями π_1 и π_2, одна из которых неподвижна, а другая жестко связана с телом.

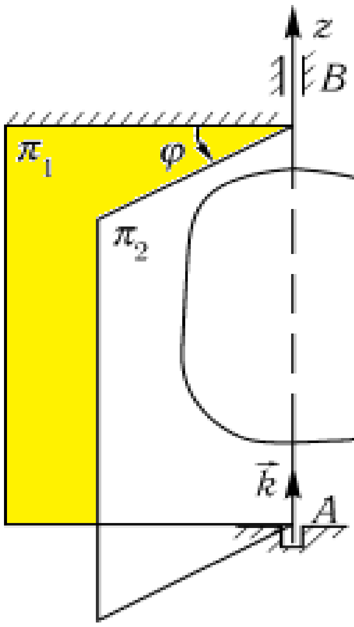


Рис. 1.8. Вращательное движение твердого тела

Уравнение вращательного движения:

$$\varphi = \varphi\,(t),\ \text{рад}.$$

За положительное направление отсчета принимается вращение против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения *z*.

Модуль угловой скорости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},\ \text{рад/с}. \qquad (1.15)$$

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда оно видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.9, а).

В технической литературе часто используется величина угловой скорости *n*, измеряемая в оборотах в минуту. Между величинами ω и *n* при этом легко установить следующую связь:

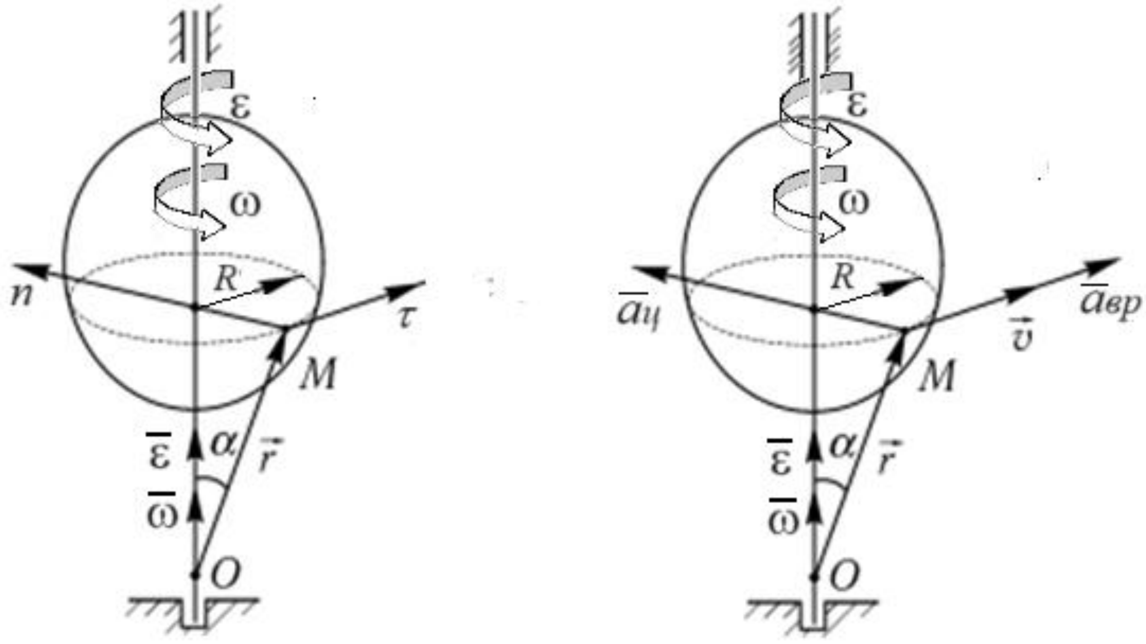
$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30, \qquad (1.16)$$

поскольку один оборот составляет 2π радиан, а минута состоит из 60 секунд.

Модуль углового ускорения равен:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},\quad \text{рад/с}^2. \qquad (1.17)$$

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения, причем если вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\bar{\omega}$, то вращение тела **ускоренное** (рис. 1.9, а).



а б

Рис. 1.9. Направление угловой скорости $\bar{\omega}$ и ускорения $\bar{\varepsilon}$ при вращательном движении твердого тела: а – ускоренное движение; б – направление скорости и ускорений при ускоренном движении

Вектор скорости точки *M* вращающегося тела (рис. 1.9, б):

$\boxed{\bar{\upsilon} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$ – формула Эйлера.

В результате векторного произведения получим выражение для модуля скорости:

$$\upsilon = \omega\, r \sin\alpha = \omega\, R$$

Направление скорости совпадает с направлением векторного произведения

Для получения векторных формул для ускорений точек вращающегося тела продифференцируем формулу Эйлера по времени:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\upsilon}\,.$$

Воспользовавшись определением векторного произведения, нетрудно убедиться в том, что первое слагаемое — вращательное, а второе — центростремительное ускорения. Т. е.

$$\boxed{\overline{a}_{вр} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}, \qquad \overline{a}_{ц} = \overline{\omega} \times \overline{\upsilon}.}$$

Ускорение точки тела M, совершающего вращательное движение, раскладывается на центростремительное и вращательное ускорения.

Вращательное ускорение:

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R, \tag{1.18}$$

Центростремительное ускорение:

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 \cdot R. \tag{1.19}$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_{\text{ц}}^2 + a_{\text{вр}}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{1.20}$$

Вращательное и центростремительное ускорения при вращательном движении твердого тела называют также <u>касательным</u> и <u>нормальным</u>: $\overline{a}_{\tau} = \overline{a}_{\text{вр}}$, $\overline{a}_{\text{n}} = \overline{a}_{\text{ц}}$.

Примеры решения задач по теме 1.

Общие указания к решению задач

I. При решении задач по определению скорости, ускорению точки и радиуса кривизны её траектории в заданный момент времени при **координатном способе** задания движения рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1) по уравнениям движения точки определить её траекторию посредством исключения из них параметра времени t и установления зависимости между декартовыми координатами точки;

2) изобразить точку на траектории в заданный момент времени;

3) по уравнениям движения точки вычислить проекции скорости на оси координат и определить скорость точки по величине и направлению;

4) по проекциям скорости точки на декартовые оси найти проекции ускорения точки на эти оси, затем определить модуль и направления вектора ускорения точки;

5) вычислить значения касательного, нормального ускорений точки и радиус кривизны траектории по формулам:

$$a_\tau = \frac{\left|\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z\right|}{\upsilon}, \ a_n = \sqrt{a_a^2 - a_\tau^2}, \ \rho = \frac{\upsilon^2}{a_n}.$$

II. Если движение точки задано **естественным способом**, то для определения её скорости и ускорения целесообразна следующая последовательность действий:

1) найти положение точки на траектории в заданный момент времени;

2) вычислить значение скорости точки дифференцированием заданного уравнения движения по времени и изобразить вектор скорости $\upsilon = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$, направленный по касательной к траектории в соответствии со знаком $\dot{s}$;

3) определить проекции ускорения точки на оси естественного трехгранника и величину полного ускорения:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \ddot{s}\,; \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\,.$$

Пример 1.1. Точка движется по дуге *AB* согласно уравнению $S = 0{,}1t^3 + 0{,}3t$. Определить начальную скорость и полное ускорение через 2 с движения, если радиус дуги 0,45 м.

Решение.

Движение точки задано естественным способом.

Найдем значение скорости точки дифференцированием заданного уравнения движения по времени, в соответствии с (1.10):

$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$, $\upsilon = 0{,}3\ t^2 + 0{,}3$ – закон изменения скорости, причем $\upsilon_0 = 0{,}3$ м/с. При t = 2 с, $\upsilon = 1{,}5$ м/с.

Определим проекции ускорения точки на оси естественного трехгранника, а так же величину её полного ускорения:

$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \ddot{s} = 0{,}6\ t$, при t = 2 с, $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2;

$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = (1{,}5)^2/0{,}45 = 5$ м/с^2, $a = 5{,}14$ м/с^2.

Пример 1.2. По графику скоростей определить вид движения на всех участках (рис.1. 10).

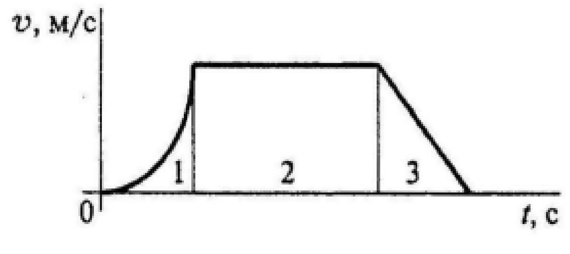


Рис.1.10. График к примеру 2.

Решение.

Движение на участке 1: неравномерное;

на участке 2: равномерное;

на участке 3: равнозамедленное.

Пример 1.3. Тело, двигаясь из состояния покоя равноускорено, достигло скорости υ = 50 м/с за 25 с. Определить путь, пройденный телом за это время.

Решение.

По условию задачи тело движется равноускоренно, поэтому его касательное ускорение будет постоянным по величине (a_τ = const). Для определения пути воспользуемся формулами (1.13), (1.14) для случая равноускоренного криволинейного движения:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t;$$

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Так как движение происходит из состояния покоя, то $S_0 = 0$, υ_0=0, тогда $50 = 25\, a_\tau$; $\rightarrow a_\tau = 2$ м/с^2.

$$S = 2 \cdot 25^2 / 2 = 625 \text{ м.}$$

Пример 1.4. Точка M движется по окружности радиуса R = 60 см по закону: $s = \cup OM = \frac{\pi R}{6}\left(3t - t^2\right)$, где s в см, t в с. (рис.1.11). Определить скорость и ускорение точки в момент времени t = 1 с.

Решение.

Движение точки задано естественным способом. Найдем положение точки M_1 на окружности при t = 1 с:

$$s_1 = \cup OM_1 = \frac{\pi R}{6}\left(3 - 1^2\right) = \frac{\pi R}{2}, \text{ см.}$$

Вычислим центральный угол $\varphi_1 = \angle OCM$, стягивающий дугу OM_1, ($\varphi = \frac{s}{R} = \frac{\pi}{3} = 60^0$) и изобразим точку M_1 в этом положении на рис. 1.11.

Определим численное значение скорости точки:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R}{6}\left(3t - t^2\right)\right) = \frac{\pi R}{6}\left(3 - 2t\right),$$

при $t = 1$ с, $\quad \upsilon_1 = \dfrac{\pi R}{6} = 31{,}4 \quad$ см/с.

Модуль $\upsilon_1 > 0$, вектор скорости $\overline{\upsilon}_1$ направим по касательной к окружности в точке M_1 в направлении положительного отсчета s (см. рис. 1.11).

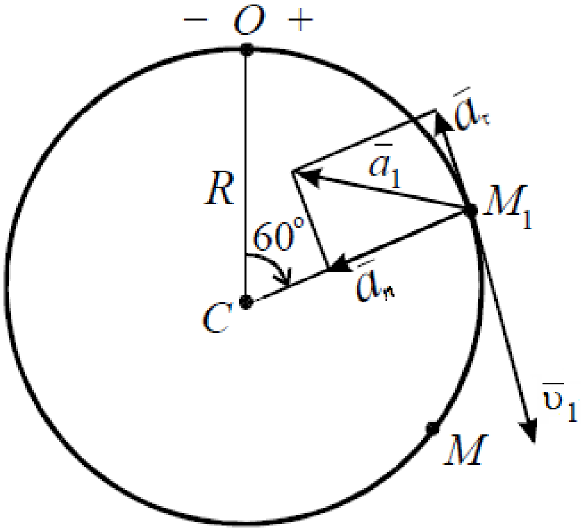


Рис. 1.11. Иллюстрация к примеру 1.4

Для определения ускорения точки вычислим численные значения её нормального и касательного ускорений:

$$a_n = \frac{\upsilon_1^2}{R} = 16{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi R}{6}(3 - 2t)\right] = -\frac{\pi R}{3} = -62{,}8 \quad \text{см/с}^2.$$

Модуль $a_\tau < 0$, вектор касательного ускорения $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к окружности противоположно вектору скорости $\overline{\upsilon}_1$, так как в данный момент времени точка движется замедленно ($\upsilon_1 > 0$, $a_\tau < 0$), а вектор нормального ускорения $\overline{a}_n$ направим из точки M_1 по радиусу, к центру C окружности (рис. 1.11).

Определим величину полного ускорения точки M_1 по формуле:

$$a_1 = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(-62{,}8)^2 + 10{,}4^2} = 64{,}9 \quad \text{см/с}^2.$$

Вектор полного ускорения $\bar{a}_1$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ как на сторонах.

Пример 1.5 Поезд движется равнозамедлено по дуге окружности радиуса R и проходит путь s, имея начальную скорость υ_0 и конечную υ_1. Определить полное ускорение $\bar{a}$ поезда в начале и в конце пути, а также время движения t_1 по дуге.
Решить задачу при следующих данных: R = 800 м, s = 800 м,
$\upsilon_0 = 15$ м/с, $\upsilon_1 = 5$ м/с.

Решение.

Примем поезд за материальную точку M и изобразим ее на дуге окружности радиусом R в начальный момент времени $t = 0$ – точка M_0 и в момент t_1 – точка M_1 (рис.1.12, причем длина дуги $\cup M_0M_1 = s = 800$ м .

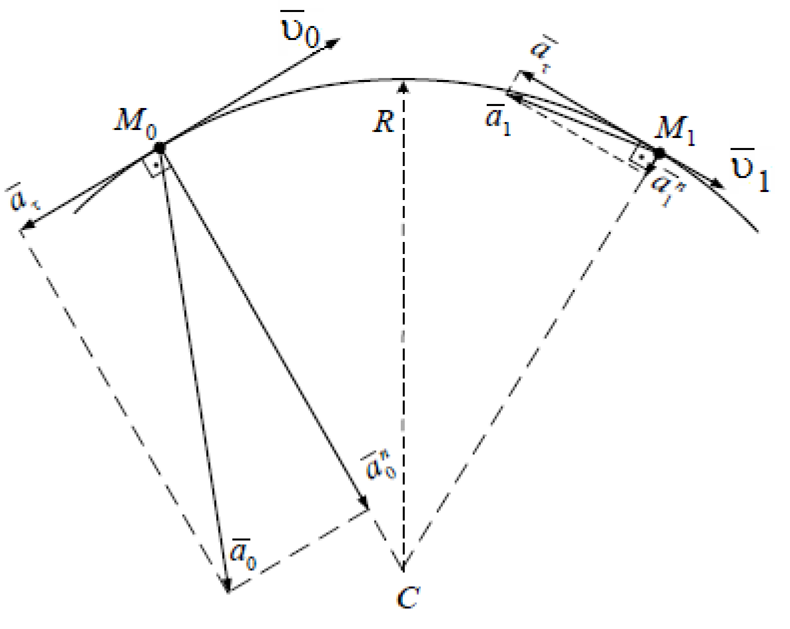


Рис. 1.12. Иллюстрация к примеру 1.5

Поскольку поезд движется по криволинейной траектории, то его полное ускорение определяется по формуле: $\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$.

Вычислим нормальное ускорение поезда в начале и конце дуги $\cup M_0M_1$ получим:

при t=0 $\quad a_0^n = \dfrac{\upsilon_0^2}{R} \approx 0{,}281$ м/с^2;

при t=t_1 $\quad a_1^n = \dfrac{\upsilon_1^2}{R} \approx 0{,}031$ м/с^2;

Изобразим на рис. 1.12 векторы $\bar{a}_0^n$ и $\bar{a}_1^n$ в точках M_0 и M_1 , направив их по соответствующим главным нормалям к центру кривизны C дуги $\cup M_0M_1$.

Так как по условию задачи поезд движется равнозамедленно, то его касательное ускорение будет постоянным по величине (a_τ = const). Для его определения воспользуемся формулами для случая равнозамедленного криволинейного движения:

$$\begin{cases} \upsilon = \upsilon_0 + a_\tau t \\ s = s_0 + \upsilon_0 t - \dfrac{a_\tau t^2}{2} \end{cases},$$

или, подставив сюда s_0 = 0, t = t_1, υ = υ_1, получим систему двух уравнений относительно неизвестных a_τ и t_1:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \upsilon_0 - a_\tau t_1 \\ s = \upsilon_0 t_1 - \dfrac{a_\tau t_1^2}{2} \end{cases}.$$

Решая данную систему уравнений, находим:

$$a_\tau = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2}{2s} = 0{,}125 \text{ м/с}^2;$$

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_1}{a_\tau} = 80 \text{ с}.$$

Изобразим на рис. 1.12 вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ по касательной к дуге в точках M_0 и M_1. Сложив в этих точках векторы касательного и нормального ускорений, получим векторы полного ускорения поезда $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$ в начале и конце дуги $\cup M_0M_1$ соответственно. Вычислим модули этих ускорений:

$$\mathrm{a}_0 = \sqrt{\left(\mathrm{a}_0^n\right)^2 + \left(\mathrm{a}_\tau\right)^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}281^2} = 0{,}308 \text{ м/с}^2,$$

$$\mathrm{a}_1 = \sqrt{\left(\mathrm{a}_1^n\right)^2 + \left(\mathrm{a}_\tau\right)^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}031^2} = 0{,}129 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, за 80 секунд движения поезда по дуге $\cup M_0M_1$ величина его полного ускорения $\bar{a}$ уменьшилась с 0,308 м/с^2 до 0,129 м/с^2.

Пример 1.6. Груз *F* начинает двигаться вверх из состояния покоя с постоянным ускорением a = 1,26 м/с. Определить частоту вращения колеса через 5 с после начала движения (рис. 1.13).

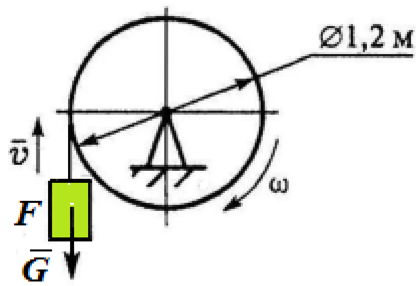


Рис. 1.13. Иллюстрация к примеру 1.6

Решение:

По условию задачи груз движется с постоянным ускорением, тогда вращательное ускорения точек на ободе колеса $a_{вр}$ = a = const). Из формулы вращательного движения определим угловое ускорение колеса:

$$\varepsilon = a_{вр} / r = 1{,}26 / 0{,}6 = 2{,}1 \text{ рад/с}^2.$$

Для случая равнопеременного вращения:

$$\omega = \varepsilon \cdot t = 2{,}1 \cdot 5 = 10{,}5 \text{ рад/с},$$

или, в технических единицах частота вращения:

$$n = 30\ \omega / \pi = 100{,}3 \text{ об/мин}.$$

Пример 1.7. Маховое колесо r = 0,1 м вращается равномерно и в момент времени t = 13 с имеет угловую скорость ω = 130 рад/с. Определить полное ускорение точек на ободе колеса в этот момент.

Решение:

Полное ускорение при вращательном движении в соответствии с (1.20):

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.$$

При равномерном вращении ω = const, ε = 0, тогда

$$a = a_n = \omega^2 r = 130^2 \cdot 0{,}1 = 1690 \text{ м/с}^2.$$

Пример 1.8. Скорость ротора менялась согласно графику и за 120 оборотов достигла ω = 50,2 рад/с. Определить время разгона до указанной скорости (рис.1.14).

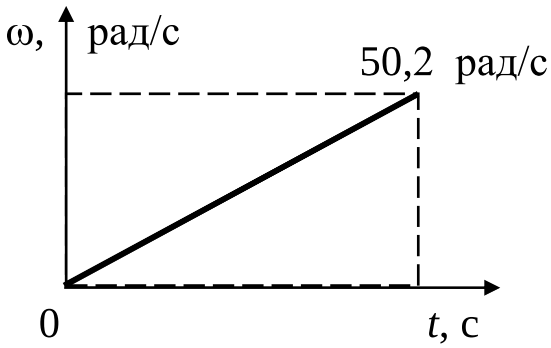


Рис. 1.14. Иллюстрация к примеру 1.8

Решение.

Воспользуемся формулами равнопеременного вращения:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot t^2 / 2. \end{cases}$$

В соответствии с графиком $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$, тогда

$$\begin{cases} \omega = \varepsilon \cdot t, \\ \varphi = \varepsilon \cdot t^2 / 2. \end{cases}$$

Выразим угловое ускорение ε из первого уравнения системы и подставим во второе. Получим:

$$\varphi = \omega \cdot t / 2 \Longrightarrow \quad t = 2\varphi/\omega = 480\pi / 50{,}2 = 30 \text{ с},$$

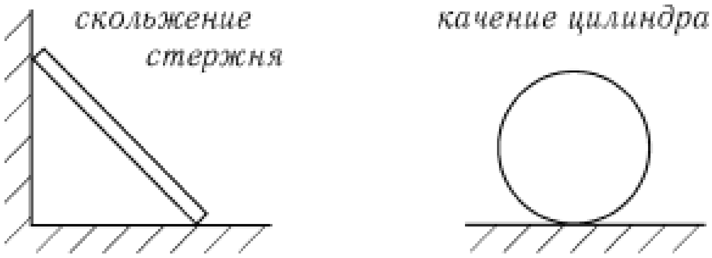
где φ = 120 об = 240π рад/с (1 оборот = 2π радиан).

Тема №2
Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек при плоском движении.

2.1. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела — движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Примеры плоскопараллельного движения:



Для задания движения плоской фигуры введем подвижную систему координат $Ax'y'$, совершающую поступательное движение с точкой A. Движение плоской фигуры рассмотрим как сложное, при этом переносное движение — это поступательное движение подвижной системы координат вместе с точкой A (полюсом). Относительное движение — это вращение вокруг полюса.

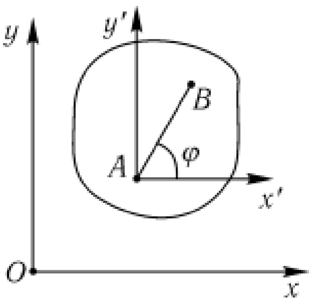


Рис. 2.1. Сечение твердого тела

Положение плоской фигуры можно задать двумя координатами полюса и одним углом между отрезком, жестко связанным с телом, и направлением одной из неподвижных осей:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t) \quad - \qquad (2.1)$$

уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

2.1.1. Определение скоростей точек тела при плоском движении

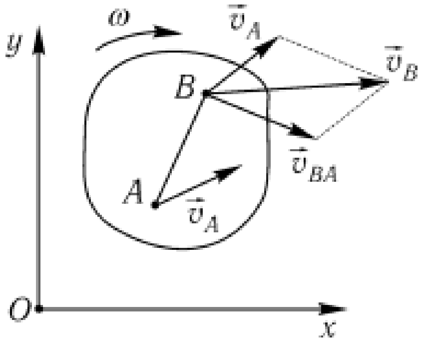


Рис. 2.2. Теорема о сложении скоростей

Теорема о сложении скоростей: скорость любой точки тела при плоском движении находится как сумма скорости полюса и скорости данной точки во вращательном движении вокруг полюса (рис. 2.2):

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}, \qquad (2.2)$$

где $\upsilon_{BA} = \omega \cdot BA$; $\bar{\upsilon}_{BA} \perp BA$.

Следствие. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на правление вектора, соединяющего эти точки, равны между собой (рис. 2.3):

$$\upsilon_{B_x} = \upsilon_{A_x} + \upsilon_{BA_x} = \upsilon_A \cdot \cos\alpha + 0 = \upsilon_B \cdot \cos\beta$$

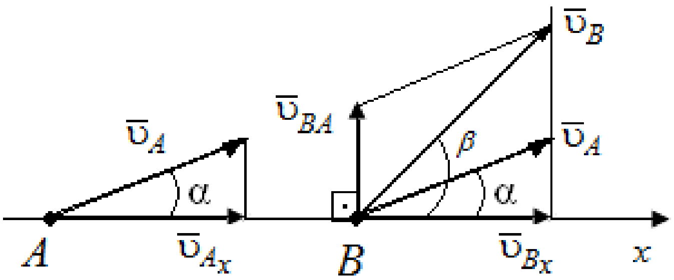


Рис. 2.3. Теорема о проекции скоростей двух точек тела

2.1.2. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

При непоступательном движении плоской фигуры существует жестко связанная с ней точка, скорость которой в данный момент движения равна нулю. Эта точка является **мгновенным центром скоростей (МЦС)**.

Выбирая мгновенный центр скоростей за полюс, нетрудно убедиться, что скорость любой точки плоской фигуры находится как скорость во вращательном движении вокруг МЦС (рис.2.4).

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{BP},$$
$$\bar{\upsilon}_P = 0,$$
$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_{BP} = \omega\, BP,$$
$$\bar{\upsilon}_C = \bar{\upsilon}_{CP} = \omega\, CP,$$
$$\frac{\upsilon_C}{\upsilon_B} = \frac{CP}{BP}, \qquad \boxed{\omega = \frac{\upsilon_C}{CP} = \frac{\upsilon_B}{BP}}.$$

Через МЦС проходит мгновенная ось вращения тела

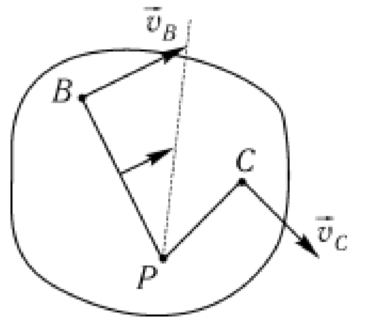


Рис. 2.4. Пример нахождения МЦС

2.1.3. Способы нахождения МЦС

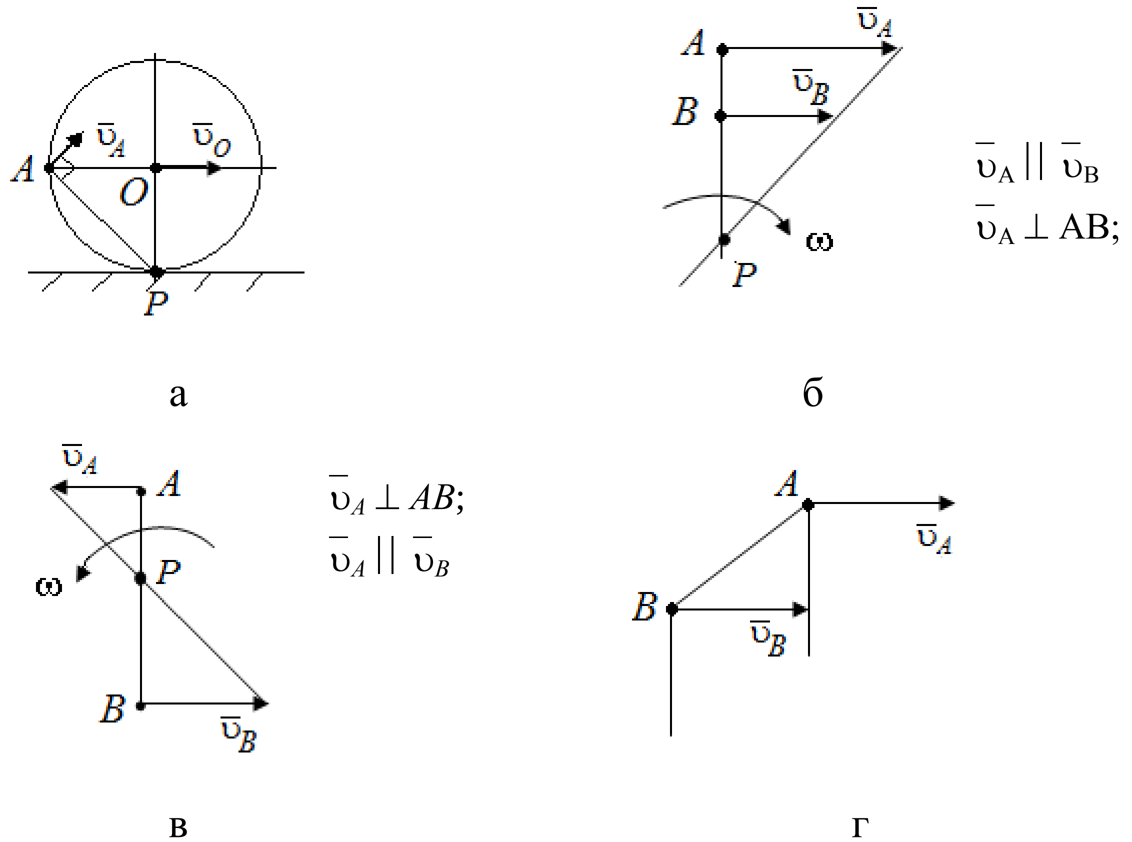


Рис. 2.5. Способы нахождения МЦС: а - качение без скольжения; б - $\bar{\upsilon}_A \,||\, \bar{\upsilon}_B$ и направлены в одну сторону; в - $\bar{\upsilon}_A \,||\, \bar{\upsilon}_B$ и направлены в противоположные стороны; г - $\bar{\upsilon}_A \,||\, \bar{\upsilon}_B$, $\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_B$, МЦС находится в бесконечности

2.1.4. Определение ускорений точек тела при плоском движении

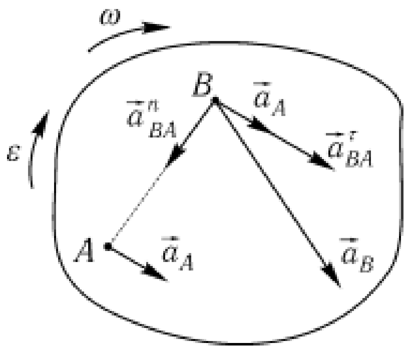


Рис. 2.6. Теорема о сложении ускорений

Теорема о сложении ускорений: ускорение точки плоской фигуры B равно сумме ускорения полюса A и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса (рис. 2.6):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^\tau_{BA} + \bar{a}^n_{BA}. \qquad (2.3)$$

где

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon\, BA; \quad a^n_{BA} = \omega^2\, BA.$$

2.1.5. Мгновенный центр ускорений (МЦУ)

При любом непоступательном движении плоской фигуры существует жестко связанная с ней точка, ускорение которой в данный момент движения равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений (МЦУ)**.

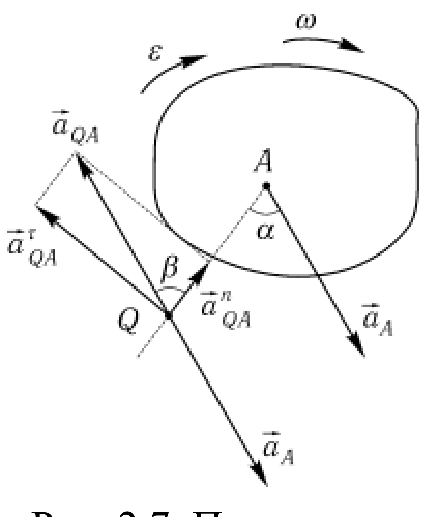


Рис. 2.7. Пример нахождения МЦУ

Положение МЦУ (точка Q) определяется углом α, откладываемым от направления вектора ускорений и отрезком AQ:

$$tg\,\alpha = \varepsilon/\omega^2, \quad AQ = a_A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

В соответствии с (2.3) $\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}$,

так как $\bar{a}_Q = 0$, $\bar{a}_{QA} = \bar{a}_A$, $\alpha = \beta$.

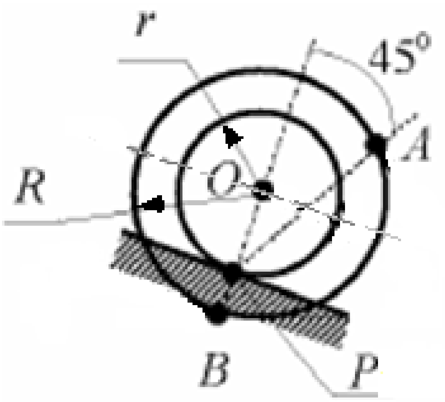
Выбирая МЦУ за полюс, находим, что при плоскопараллельном движении ускорение любой точки можно найти как ускорение во вращательном движении вокруг МЦУ:

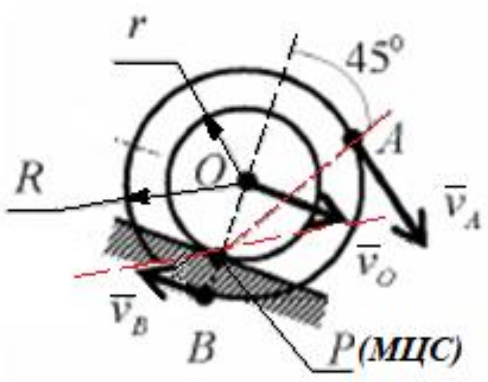
$$\bar{a}_{QA} = \bar{a}^\tau_{QA} + \bar{a}^n_{QA}, \qquad (2.4)$$

где $a^\tau_{QA} = \varepsilon\, QA; \quad a^n_{BA} = \omega^2\, QA.$

Примеры решения задач по теме 2.

Пример 2.1. Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути (рис. 2.8, а). Найти угловую скорость катушки, скорости точек *O* и *B*, если в рассматриваемый момент времени υ_A =2м/с, r = 0,6 м, R = 1 м.





а б

Рис.2.8. Иллюстрация к примеру 2.1: а – исходная схема;

б – расчетная схема

Решение.

Катушка совершает плоско-параллельное движение. Так как качение происходит без скольжения, то скорость точки *P* касания катушки с неподвижной поверхностью υ_P=0**,** следовательно это точка является **м**гновенны<u>м</u> **ц**ентром **с**коростей (МЦС). Тогда, вектор скорости точки *A* – $\bar{\upsilon}_A \perp AP$ и направлен в сторону качения катушки (рис. 2.8, б), а модуль скорости вычислим по формуле:

$$\upsilon_A = \omega \cdot AP,$$

где $$AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos\left(180^0 - 45^0\right)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cos 135^0} = 1{,}49 \text{ м}.$$

Угловая скорость катушки:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = 1{,}35 \text{ рад/с}.$$

Так как скорости точек O и B катушки также пропорциональны их расстояниям до точки P (МЦС), то

$$\upsilon_O = \omega \cdot OP = \omega \cdot r = 0{,}81 \text{ м/с},$$

$$\upsilon_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (R - r) = 0{,}54 \text{ м/с}.$$

Направление вращения катушки, а следовательно, и направление скоростей точек B и O, определяются направлением вектора скорости $\bar{\upsilon}_A$ по отношению к МЦС.

Пример 2.2. Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью υ_A =1м/с. Найти в положении, указанном на рис.2.9 угловую скорость стержня, скорость точек B и C, если AB = 1,2 м, AC=BC (рис. 2.9).

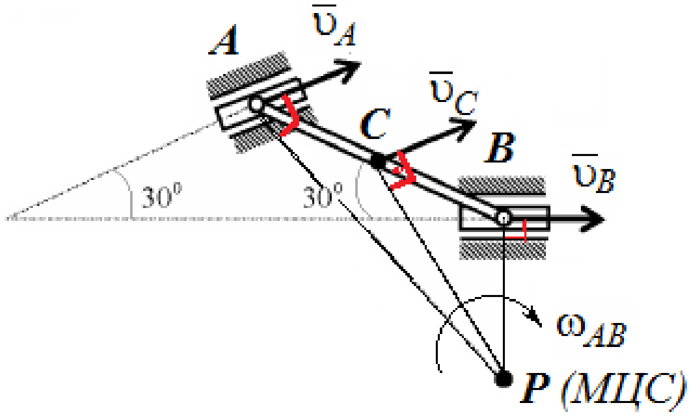


Рис. 2.9. Расчетная схема

Решение.

Стержень AB совершает плоскопараллельное движение. Так как скорости точек A и B направлены параллельно соответствующим направляющим, вдоль которых скользят ползуны, то, восстанавливая из точек A и B перпендикуляры к скоростям этих точек, определим положение мгновенного центра скоростей стержня AB – точка P. Треугольник ABP является равнобедренным, следовательно $AB = BP$ = 1,2 м.

Скорость точки A пропорциональна расстоянию от этой точки до точки P:

$$\upsilon_A = \omega_{AB} \cdot AP,$$

где $AP = 2AB \cos 30^0 = 2{,}08$ м.

Вычислим угловую скорость стержня AB:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{10}{20{,}8} = 0{,}48 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B определим по формуле:

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0{,}48 \cdot 1{,}2 = 0{,}58 \text{ м/с.}$$

Для определения скорости точки C найдем расстояние PC с помощью теоремы косинусов:

$$CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2BP \cdot BC \cos 120^0} = 1{,}59 \text{ м.}$$

Скорость точки C:

$$\upsilon_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0{,}48 \cdot 1{,}59 = 0{,}76 \text{ м/с.}$$

Пример 2.3. Кривошип OA, длинной r = 1 м, вращается с угловой скоростью ω_{OA} = 2 рад/с, приводя в движение шатун AB длиной l = 4 м. Определить скорость ползуна B, угловую скорость шатуна ω_{AB} в двух положениях механизма, когда угол поворота кривошипа $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^0$ (рис. 2.10, а, б).

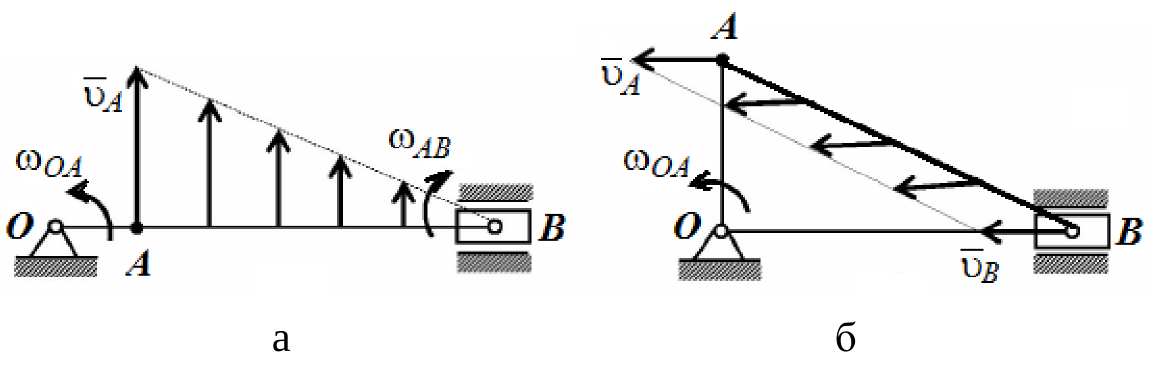


Рис. 2.10. Расчетная схема: а – при $\varphi = 0$, б – $\varphi = 90^0$

Решение.

Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. При этом $\bar{\upsilon}_A \perp OA$, так как точка A принадлежит кривошипу OA, совершающему вращательное движение. Скорость ползуна B параллельна направляющим. Численное значение скорости точки A:

$$\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot r = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с.}$$

Найдем положение мгновенного центра скоростей (МЦС), восстанавливая перпендикуляры к скоростям A и B из этих точек.

При угле $\varphi = 0$ (рис. 2.10, а) перпендикуляр к скорости $\bar{\upsilon}_A$ и перпендикуляр к направлению $\bar{\upsilon}_B$ пересекаются в точке *B*. Следовательно, точка В является в этом положении механизма мгновенным центром скоростей (МЦС) и $\bar{\upsilon}_B = 0$. Это положение называется «мертвым». Найдем угловую скорость шатуна:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_A}{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot r}{l} = 0{,}5 \text{ рад/с.}$$

На рис. 2.10, а показано распределение скоростей точек шатуна.

При угле поворота $\varphi = 90^0$ скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ направлены параллельно, а перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности. Следовательно в данный момент времени имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей, то есть все точки шатуна *AB* имеют одинаковые скорости, равные $\bar{\upsilon}_A$, при этом угловая скорость шатуна ω_{AB}=0 (рис. 2.10, б).

Пример 2.4. Стержень *AB* длиной 40 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки *A* и *B* стержня имеют ускорения $a_A = 2$ м/с^2, $a_B = 4$ м/с^2. Определить угловое ускорение и угловую скорость стержня (рис. 2.8, а).

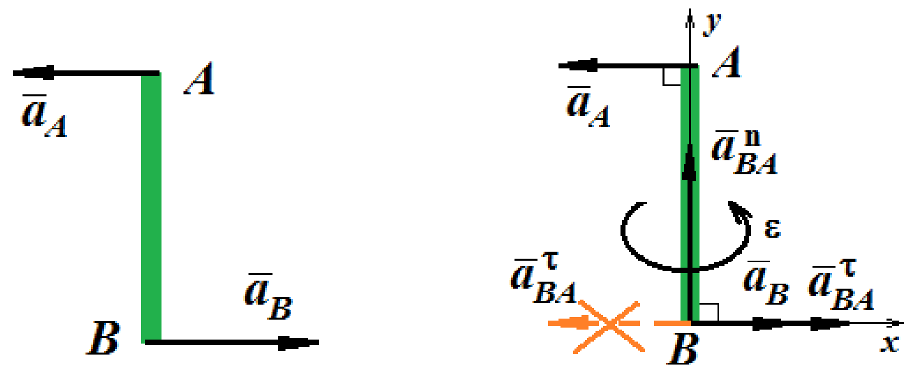


Рис.2.8. Иллюстрация к примеру 2.4: а – исходная схема;

б – расчетная схема

Решение.

Стержень *AB* совершает плоскопараллельное движение. Выберем за полюс любую точку. Пусть т. *A* - полюс, тогда в соответствии с теоремой о сложении ускорений и уравнением (2.3):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}.$$

где $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon\, BA;\quad a^{n}_{BA} = \omega^2\, BA.$

Вектор $\bar{a}^n_{BA}$ направлен от точке *B* к полюсу *A*, вектор $\bar{a}^{\tau}_{BA} \perp \bar{a}^n_{BA}$ (рис. 2.8, б). Выберем направление $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ (пунктирная линия), оси координат *x* и *y* и спроецируем векторное уравнение на оси:

$$x:\quad a_B = -a_A - a^{\tau}_{BA}\ , \qquad\qquad y:\quad a^n_{BA} = 0,$$

$$a^{\tau}_{BA} = -6 \quad \text{м/с}^2. \qquad\qquad \omega = 0.$$

Отрицательное значение модуля ускорения, показывает, что направление вектора $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно выбранному.

Угловое ускорение звена *AB*:

$$\varepsilon = \frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{BA} = \frac{6}{0{,}4} = 15 \quad \text{рад/с}^2.$$

Пример 2.5. Кривошип *OA* планетарного механизма вращается с постоянной угловой скоростью ω_{OA} = 1 рад/с. Определить ускорение точки, являющейся мгновенным центром скоростей подвижного колеса, если радиус *R* = 0,1 м (рис. 2.9, а).

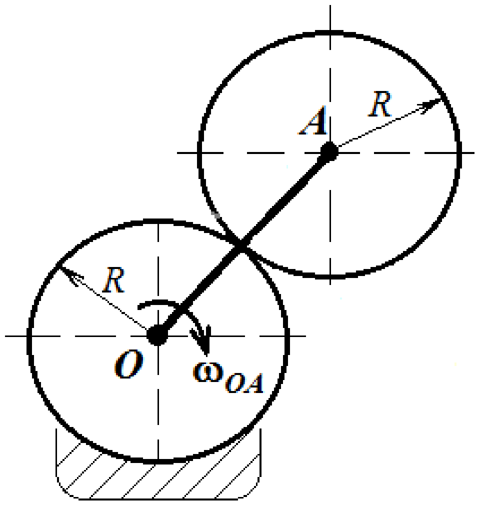
Решение.

Кривошип *OA* совершает вращательное движение, вовлекая в движение подвижное колесо, которое совершает плоское движение, причем т. *P* является мгновенным центром скоростей (υ_P=0, см. пример 2.1). Скорость т. *A* определим как:

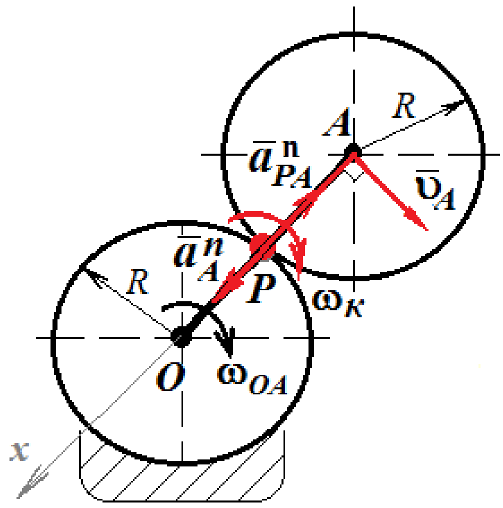
$$\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot 2R = 0{,}2 \quad \text{м/с}\ .$$

С другой стороны, т. *A* является центром подвижного колеса, угловую скорость которого найдем как:

$$\omega_к = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_A}{R} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2 \quad \text{рад/с}.$$



а



б

Рис.2.9. Иллюстрация к примеру 2.5: а – исходная схема;

б – расчетная схема

Для определения ускорения т. P (МЦС) примем за полюс т. A, тогда в соответствии с теоремой о проекции ускорений (рис. 2.9, б):

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A + \bar{a}_{PA}^{\tau} + \bar{a}_{PA}^{n} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{PA}^{\tau} + \bar{a}_{PA}^{n},$$

где $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0$, т.к. $\omega_{OA} = \mathrm{const}$;

$a_{PA}^{\tau} = \varepsilon \cdot PA = 0$, т.к. $\omega_{к} = \mathrm{const}$;

$a_A^{n} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = \omega_{OA}^2 \cdot 2R = 0{,}2$ м/с^2;

$a_{PA}^{n} = \omega_{к}^2\, PA = \omega_{к}^2\, R = 0{,}4$ м/с^2.

Вектор $\bar{a}_A^{n}$ направлен от т. A к т. O кривошипа OA; вектор $\bar{a}_{PA}^{n}$ направлен от т. P к полюсу т. A (рис. 2.9, б).

Так как вектора $\bar{a}_A^{n}$ и $\bar{a}_{PA}^{n}$ направлены вдоль одной прямой, проецируя векторное уравнение на ось x определим ускорение т. P:

$$a_{Px} = a_A^{n} - a_{PA}^{n} = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2 \quad \text{м/с}^2.$$

Тема № 3
Сложное движение точки

Сложное движение точки (или тела) — движение, которое рассматривается одновременно в разных системах отсчета.

$O_1x_0y_0z_0$ — основная система координат.

$Oxyz$ — подвижная система координат.

M — движущаяся точка.

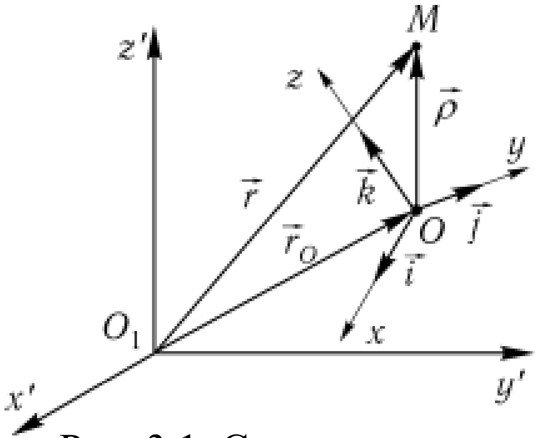


Рис. 3.1. Сложное движение точки

Движение точки M по отношению к основной системе координат называется **абсолютным движением**.

Движение точки M по отношению к подвижной системе координат называется **относительным движением**.

Переносное движение — движение подвижной системы координат по отношению к основной.

Абсолютная скорость и абсолютное ускорение:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad \bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{3.1}$$

Теорема о сложении скоростей

При сложном движении точки абсолютная скорость равна сумме ее относительной и переносной скоростей.

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e. \tag{3.2}$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки находится как сумма трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \tag{3.3}$$

Ускорение Кориолиса учитывает изменение относительной скорости, вызванное переносным движением, и изменение переносной скорости, вызванное относительным движением.

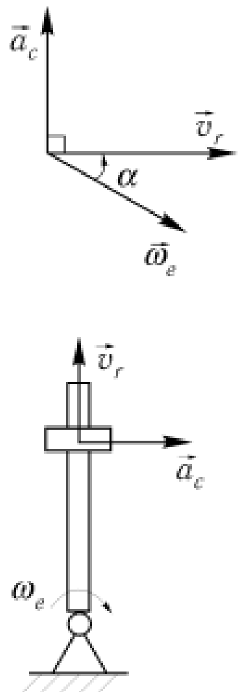


Рис.3.2. Направление ускорения Кориолиса

Способы вычисления ускорения Кориолиса:

1. По правилу векторного произведения

$$\bar{a}_c = 2\left(\bar{\omega}_e \times \bar{\upsilon}_r\right), \qquad (3.4)$$

Модуль ускорение Кориолиса:

$$\bar{a}_c = 2\omega_e \upsilon_r \sin\left(\bar{\omega}_e \,\hat{}\, \bar{\upsilon}_r\right), \qquad (3.5)$$

где ω_e — угловая скорость переносного вращения.

2. По правилу Жуковского.

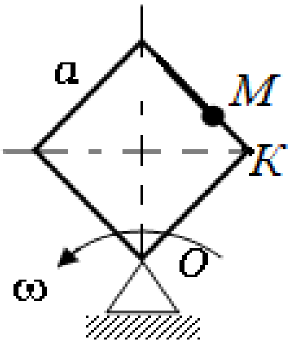
Для определения направления ускорения Кориолиса надо вектор относительной скорости υ_r спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси вращения ω_e, и повернуть в сторону вращения на угол 90°.

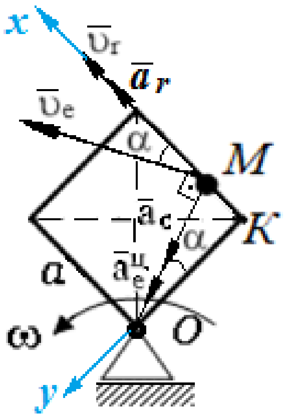
Примеры решения задач по теме 3.

Пример 3. 1. По стороне квадрата (a = 2 м), вращающегося в своей плоскости, движется точка M по закону $KM = 0{,}7t^2$. Найти и показать направление абсолютной скорости и ускорения точки M, в момент времени t = 1 с, если ω = 4 с$^{-1}$ (рис. 3.3, а).

Решение.

Относительным движением является прямолинейное движение точки M по стороне квадрата, а переносным – вращение т. M вместе с квадратом вокруг оси O.





а б

Рис. 3.3. Иллюстрация к задаче 3.1: а – исходная схема; б – расчетная схема

1. Абсолютную скорость определим по формуле 3.2:

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e.$$

Относительная скорость:

$$\upsilon_r = \frac{d(KM)}{dt} = \left(0{,}7t^2\right)' = 1{,}4t\,,$$

при t = 1 с, υ_r = 1,4 м/с.

Вектор $\bar{\upsilon}_r$ направлен в сторону увеличения перемещения (рис. 3.3, б).

Переносная скорость:

$$\upsilon_e = \omega\, MO = 4 \cdot 2{,}12 = 8{,}48 \text{ м/с},$$

где $MO = \sqrt{OK^2 + KM^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}7^2} = 2{,}12$ м.

Вектор $\bar{\upsilon}_e \perp$ OM и направлен в сторону вращения (рис. 3.3, б).

Абсолютную скорость найдем по правилу параллелограмма:

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e \sin\alpha} = \sqrt{1{,}4^2 + 8{,}48^2 + 7{,}83} = 9{,}04 \text{ м/с},$$

где угол α определим из треугольника OKM: $\sin\alpha = MK/OM = 0{,}33$.

2. Абсолютное ускорение определим по формуле 3.3:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c.$$

Относительное ускорение:

$$a_r = d\upsilon_r/dt = (1{,}4t)' = 1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Переносное ускорение при вращательном движении:

$$\bar{a}_e = \bar{a}^{ц}_e + \bar{a}^{вр}_e,$$

где $a^{ц}_{e} = \omega^2 MO = 4^2\,2{,}12 = 33{,}9$ м/с^2

$a^{вр}_{e} = \varepsilon\, MO = 0$, так как $\omega = const$.

Вектор $\bar{a}^{ц}_{e}$ направлен в сторону переносного вращения (рис. 3.3, б).

Ускорение Кориолиса определяем по формуле 3.5:

$$a_c = 2\omega_e \upsilon_r \sin\left(\bar{\omega}_e \,\hat{}\, \bar{\upsilon}_r\right) = 2\cdot 4\cdot 1{,}4 \sin 90^0 = 11{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\bar{a}_c$ определён по правилу Жуковского и показан на рис. 3.3, б.

Модуль абсолютного ускорения найдем из уравнений проекций на оси x и y:

$$a_{ax} = a_r - (a_{eц} + a_c)\sin\alpha = 1{,}4 - (33{,}9 + 11{,}2)\,0{,}33 = -13{,}5;$$

$$a_{ay} = (a_{eц} + a_c)\cos\alpha = (33{,}9 + 11{,}2)\,0{,}94 = 42{,}4;$$

причем $\cos\alpha = OK/OM = 0{,}94.$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{13{,}5^2 + 42{,}4^2} = 44{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3.2. Кольцо, радиуса R, вращается вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью. По ободу колеса движется точка M по закону $S=OM=3t$, с. Чему равно абсолютное ускорение точки (рис. 3.4).

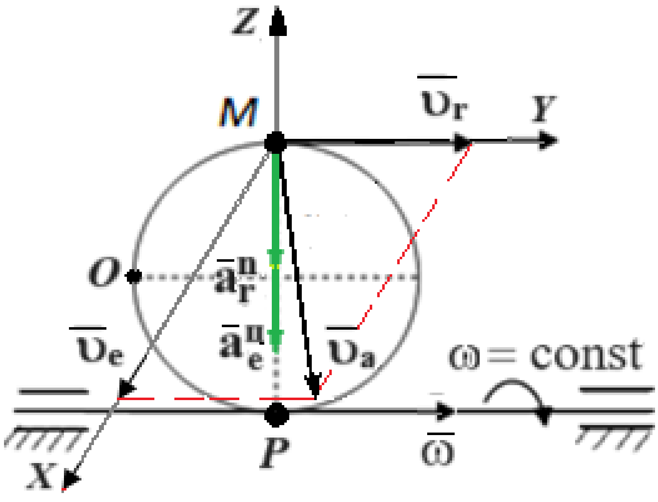


Рис. 3.4. Иллюстрация к задаче 3.2

Решение.

Относительным движением является движение точки *M* по ободу кольца в соответствии с законом *S* = *OM* = *f*(*t*), а переносным – вращение кольца вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω.

1. Абсолютную скорость определим по формуле 3.2:

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e.$$

Относительная скорость:

$$\upsilon_r = \frac{d(OM)}{dt} = (3t)' = 3 \quad \text{м/с}.$$

Вектор $\bar{\upsilon}_r$ направлен в сторону увеличения перемещения.

Переносная скорость:

$$\upsilon_e = \omega\, 2R,$$

Так как $\bar{\upsilon}_r \perp \bar{\upsilon}_e$, то модуль абсолютной скорости найдем по теореме Пифагора: $\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2} = \sqrt{9 + 4\omega^2 R^2}$, м/с

2. Абсолютное ускорение определим по формуле 3.3:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c.$$

Относительное ускорение:

$$\bar{a}_r = \bar{a}^n_r + \bar{a}^\tau_r ,$$

где

$$a^n_r = \upsilon_r^2/R = 9/R; \qquad a^\tau_r = d\upsilon_r/dt = (3)' = 0 .$$

Вектор $\bar{a}^n_r$ направлен с центру относительного движения (рис. 3.4).

Переносное ускорение при вращательном движении:

$$\bar{a}_e = \bar{a}^ц_e + \bar{a}^{вр}_e,$$

где

$$a^ц_e = \omega^2 MP = \omega^2\, 2R; \qquad a^{вр}_e = \varepsilon\, MO = 0, \text{ так как } \omega = \text{const}.$$

Вектор $\bar{a}^ц_e$ направлен к оси переносного вращения (рис. 3.4).

Ускорение Кориолиса определяем по формуле 3.5:

$$a_C = 2\omega\upsilon_r \sin\left(\bar{\omega} \wedge \bar{\upsilon}_r\right) = 0, \text{ т.к. } \bar{\omega} \,||\, \bar{\upsilon}_r .$$

Так как $\bar{a}^n_r \,||\, \bar{a}^ц_e$, то модуль абсолютного ускорения:

$$a = a^n_r + a^ц_e = 9/R + \omega^2\, 2R \ (\text{м}^2/\text{с})$$

Вопросы для самоконтроля

Тема 1. Кинематика точки. Частные случаи движения точки. Простейшее движение твердого тела

1 Какие способы задания движения точки существуют, и в чем заключается особенность каждого из этих способов?

2 Основные кинематические характеристики поступательного движения.

3 Как определяется скорость точки для различных способов задания движения.

4 Как определяется ускорение точки при естественном и координатном способах задания движения.

5 Частные случаи движения точки.

6 В каких случаях нормальное ускорение равно нулю?

7 В какие моменты времени касательное ускорение при криволинейном движении равно нулю.

8 Простейшие виды движения твердого тела и их основные кинематические характеристики.

9 Какое движение называется поступательным? Примеры.

10 Вращательное движение твердого тела. Примеры

11 Основные кинематические характеристики вращательного движения? Связь между ними.

12 Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении твердого тела.

13 Как находятся модули скоростей и ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Тема 2. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек при плоском движении.

1 Какое движение твердого тела называется плоским? Примеры.

2 Как находится скорость любой точки плоской фигуры.

3 Что такое мгновенный центр скоростей (МЦС)? Частные случаи нахождения МЦС.

4 Как находится ускорение любой точки плоской фигуры?

5 Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма.

6 Теорема о проекциях скоростей и ускорений двух точек.

Тема 3. Сложное движение точки.

1. Что такое относительное, переносное и абсолютное движение точки.
2. Как определяется абсолютная скорость точки в сложном движении.
3. Как определяется абсолютное ускорение точки в сложном движении.
4. Что такое ускорение Кориолиса, в каких случаях оно возникает.
5. Как найти величину и направление ускорения Кориолиса? (Правило Жуковского).
6. При каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, Семен Михайлович. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. - Изд. 20-е, стер. - Москва : Высшая школа, 2010. - 416 с. - Текст : непосредственный.
2. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Directmedia, 2016.
3. Локтионова, О. Г. Лекции по теоретической механике : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 185, [3] с. -Текст : электронный
4. Учаев Н.П., Емельянов С.Г., Учаева К.П., Алтухов А.Ю. Теоретическая механика: учебник / Н.П. Учаев, С.Г. Емельянов, К.П. Учаева [и др.]: под общ. ред. проф. Н.П. Учаев. – Старый Оскол: ТНТ, 2016.-352 с. - Текст : непосредственный.