МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«_1_» 03 ________ 2022 г.

ПОНЯТИЙНЫЙ АППАРАТ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Понятийный аппарат математики»
для направления подготовки
45.03.03 Фундаментальная и прикладная лингвистика

Курск 2022

УДК 51

Составитель: Т.В. Шевцова

Рецензент

Кандидат тех. наук,
Доцент кафедры высшей математики
Жилина К.В.

Понятийный аппарат математики: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Понятийный аппарат математики» для направления подготовки 45.03.03 Фундаментальная и прикладная лингвистика / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова – Курск, 2022. – 72 с.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий содержат описание методов, применяемых при решении математических задач, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 45.03.03 Фундаментальная и прикладная лингвистика

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ_____. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Самостоятельная работа является высшей формой учебной деятельности студента, без нее невозможно успешное освоение дисциплины. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия.

Данная работа содержит методические указания по следующим разделам дисциплинам: элементы теории множеств, числовые множества; линейная алгебра; векторная алгебра и аналитическая геометрия; введение в математический анализ; дифференциальное исчисление функции одной переменной, функции нескольких переменных; интегральное исчисление функции одной переменной; дифференциальные уравнения; числовые и функциональный ряды.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Далее предложены индивидуальные задания. В конце представлен список контрольных вопросов.

Практическая работа № 1-2.
Элементы теории множеств. Числовые множества

Краткая теория и примеры

Под множеством понимают совокупность объектов, мыслимую как единое целое. Объекты, составляющие множества – элементы множества.

Множества обозначаются большими латинскими буквами.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называется пустым.

Если каждый элемент множества A является элементом множества В, то говорят, что A – подмножество множества B.

Основными операциями над множествами являются *объединение, пересечение и разность*.

Пусть A и B – некоторые множества.

Объединением (или суммой) множеств A, B называется множество, состоящее из всех объектов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B. Обозначается $A \cup B$.

Итак, $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (*рис*. 1)

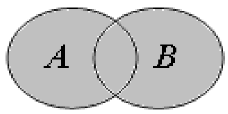


Рис. 1

Пример

Пусть $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, тогда $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A, B называется множество, состоящее из всех объектов, принадлежащих каждому из множеств A, B. Обозначается $A \cap B$.

Итак, $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (*рис*. 2)

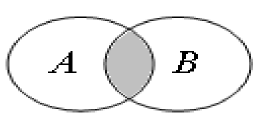


Рис. 2

Пример

Пусть A={1, 3, 5}, B={1, 3, 7, 9}, тогда $A \cap B$={1, 3}.

Множества A и B называются не пересекающимися, если они не имеют общих элементов.

Итак, A и B – не пересекающиеся $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ (*рис*. 3).

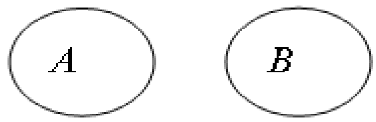


Рис. 3

Пример

Множества A={1, 5, 18} и B={1, 7, 9} – не пересекающиеся множества.

Разностью множеств A, B называется множество, состоящее из всех объектов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих B. Обозначается $A \backslash B$.

Итак, $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (*рис*. 4).

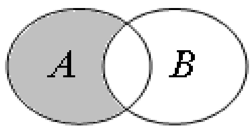


Рис. 4

Пример

Пусть A={1, 3, 5, 18}, B={1, 3, 7, 9}, тогда

$A \backslash B$={5, 18}, $B \backslash A$={7, 9}.

В случае, когда B – подмножество A, разность $A \backslash B$ называют дополнением множества B до множества A. Обозначается $C_A B$.

Если в качестве множества A выступает универсальное множество U, то дополнение B до U называют просто дополнением множества *B* или абсолютным дополнением множества *B*. Обозначается $\overline{B}$ или *B'*, или *CB*.

Итак, $B \subset A \Rightarrow A \backslash B = C_A B$ (*рис.* 5а), $C_U B = \overline{B} = \{x \mid x \notin B\}$ (*рис.* 5б).

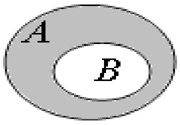


Рис. 5а

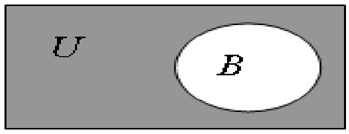


Рис. 5б

Пример

Пусть $A=\{1, 3, 5, 18\}$, $B=\{1, 3\}$, тогда $A \backslash B = \overline{B} = \{5, 18\}$.

Симметрической разностью множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех объектов, принадлежащих только одному из данных множеств. Обозначается $A \Delta B$ или $A \oplus B$ или, $A \dot{-} B$.

Очевидно, симметрическая разность есть объединение множества всех элементов множества *A*, не являющихся элементами множества *B*, и множества всех элементов множества *B*, не являющихся элементами *A*.

Итак, $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (*рис.* 6)

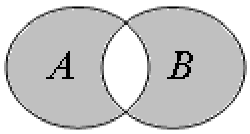


Рис. 6

Пример

Пусть $A=\{1, 3, 5, 18\}$, $B=\{1, 3, 7, 12\}$, тогда $A \Delta B = \{5, 7, 12, 18\}$.

Пример

Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B$, если $A = (-5; 6]$, $B = (1; 8)$

Решение:

$A \cup B = (-5; 8)$, $A \cap B = [1; 6)$,

$A \backslash B = (-5; 1]$, $B \backslash A = (6; 8)$,

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (-5; 1] \cup (6; 8)$.

Пример

Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cup C$, $A\cap C$, если

A – множество целых решений неравенства $|2x+1|<4$,

В – множество положительных решений этого неравенства,

C – множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству.

Решение:

Решим неравенство:

$|2x+1|<4 \Leftrightarrow -4<2x+1<4 \Leftrightarrow -5<2x<3 \Leftrightarrow -2{,}5<x<3{,}5$

Следовательно, $A=\{-2,-1,0,1\}$, $B=(0;1{,}5)$, $C=\{-2,0\}$.

$A\cup B=(0;1{,}5)\cup\{-2,-1,0\}$

$A\cap B=B=\{1\}$ – множество целых положительных решений неравенства $|2x+1|<4$

$C\subset A\Rightarrow A\cup C=A=\{-2,-1,0,1\}$, $A\cap C=C=\{-2,0\}$.

Любое подмножество множества действительных чисел называют числовым множеством.

Числовые множества задаются на оси действительных чисел R. На этой оси выбирают масштаб и указывают начало отсчета и направление. Наиболее распространенные числовые множества:

- N - множество натуральных чисел;
- Z - множество целых чисел;
- Q – множество рациональных или дробных чисел;
- R - множество действительных чисел.

Часто используемые подмножества множества R: интервалы, отрезки, полуинтервалы, конечные, бесконечные, ε-окрестности.

Множество, получаемое из множества действительных чисел путем добавления +∞, -∞ и ∞ называется расширенной числовой осью и обозначается $\bar{R}$

Индивидуальные задания

Задание 1.

Для данных множеств A и B найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\Delta B$, $A\times B$

n	Задание	*n*	Задание
1.	$A=(-3;8)$, $B=[1;\ 11]$	11.	$A=(-12;8)$, $B=[-10;\ 5]$
2.	$A=(-1;6)$, $B=[-1;\ 3]$	12.	$A=(-7;8)$, $B=[-4;\ 11]$
3.	$A=(-7;5)$, $B=[0;\ 9]$	13.	$A=(11;15)$, $B=[10;\ 29]$
4.	$A=(-6;5)$, $B=[1;\ 7]$	14.	$A=(-9;6)$, $B=[-11;\ 8]$
5.	$A=(-2;8)$, $B=[-1;\ 11]$	15.	$A=(7;18)$, $B=[0;\ 13]$
6.	$A=(-1;5)$, $B=[-1;\ 4]$	16.	$A=(6;28)$, $B=[11;\ 23]$
7.	$A=(-7;-1)$, $B=[-9;\ 9]$	17.	$A=(14;26)$, $B=[-1;\ 31]$
8.	$A=(-3;2)$, $B=[-1;\ 11]$	18.	$A=(-7;5)$, $B=[0;\ 9]$
9.	$A=(-11;6)$, $B=[-9;\ 3]$	19.	$A=(-13;18)$, $B=[-11;\ 11]$
10.	$A=(-7;3)$, $B=[-10;\ 9]$	20.	$A=(-9;6)$, $B=[-15;\ 3]$

Задание 2.

Доказать справедливость тождеств, используя определения и свойства операций над множествами.

n	Задание
1.	$A\cap(B\setminus A)=\varnothing$
2.	$A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$
3.	$A\cup B=B\cup(A\setminus B)$
4.	$A\cup B=(A\bigcap B)\Delta(A\Delta B)$
5.	$\overline{(\overline{\overline{A}\cup B})\bigcup(A\cup\overline{B})}=B\setminus \grave{A}$
6.	$A\Delta(A\Delta C)=C$
7.	$A\setminus B=A\Delta(A\cap B)$
8.	$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$
9.	$A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

10.	$B\cup(A\setminus(B\cap C)=A\cup B\setminus(A\cap C)$
11.	$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
12.	$\overline{(\overline{\overline{A}\cup B})\bigcup(A\cup\overline{B})}=B\setminus\grave{A}$
13.	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$
14.	$A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$
15.	$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$
16.	$(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
17.	$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=A\cap(B\Delta C)$
18.	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$
19.	$A\cup B=A\cup(B\setminus A)$
20.	$(A\setminus B)\cup(A\cap C)=A\setminus(B\setminus C)$

Задание 3.
Построить множество точек плоскости, заданное условием

n	Задание	n	Задание
1.	$-2\le y+2x\le 4$	11.	$\lvert 3x-y\rvert\ge 6$
2.	$x^2-y^2=0$	12.	$xy\ge -1$
3.	$\lvert 2x-y\rvert>3$	13.	$0\le y-2^x\le 1$
4.	$xy>0$	14.	$\lvert x-y\rvert\le 1$
5.	$-x^2\le y\le x^2$	15.	$(2x-1)(y+3)\ge 0$
6.	$(x+1)(y-2)<0$	16.	$\lvert (x-1)^2+y\rvert\ge 1$
7.	$\lvert 5x+2y\rvert>10$	17.	$2\le y-3x\le 5$
8.	$xy>2$	18.	$(y-4x+1)(y+3x)\ge 0$
9.	$\lvert x^2+y\rvert\ge 1$	19.	$\lvert x+2y\rvert<2$
10.	$xy\le 1$	20.	$(x-3)(y+4)\le 0$

Практическая работа № 3-4.
Линейная алгебра

Краткая теория и примеры

Понятия матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера m×n, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами. Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Количество строк и столбцов матрицы наз. её размерами. Говорят, что матрица имеет размеры m x n, если она имеет m строк и n столбцов.

К алгебраическим операциям над матрицами относятся

1. Сложение матриц
2. Умножение матрицы на число
3. Умножение матрицы на матрицу

Суммой (разностью) двух матриц *A* и *B* размера m×n называется матрица C, элементы которой определяются равенствами:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \ (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),}$$

где i = 1, 2, …, m, j =1,2, …, n.

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы А на число λ.

Пример

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -8\end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы А размера $s\times n$ на матрицу В размера $n\times k$ называется матрица С размера $s\times k$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца равен сумме произведений элементов i-той строки первого сомножителя на элементы j-того столбца второго сомножителя, т.е.:

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}}$$

Таким образом, операция умножения двух матриц определена, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пример

Найти произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица А имеет размер 2×3, матрица В имеет размер 3×2, следовательно, можно найти произведение $A\cdot B$ (потому что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В и равно 3), полученная матрица $A\cdot B$ будет иметь размер 2×2, и можно найти произведение $B\cdot A$ (потому что число столбцов матрицы В равно числу строк матрицы А и равно 2); полученная матрица $B\cdot A$ будет иметь размер 3×3.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+(-2)\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 0+3\cdot 1 \\ 0\cdot 5+1\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-2)+3\cdot 1 & 5\cdot 3+3\cdot 4 \\ 2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-2)+0\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot 4 \\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot(-2)+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 27 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители

Для квадратных матриц вводится особое число, называемое определитель матрицы.

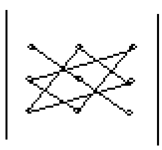
Определитель $2^{го}$ порядка

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

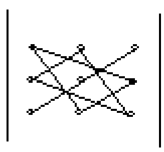
Определитель $3^{го}$ порядка

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Для вычисления определителей $3^{го}$ порядка удобно воспользоваться правилом треугольника. На рисунке справа показаны члены, произведения которых берутся со знаком “+”, на рисунке слева − со знаком “–”.



+



−

Пример Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

Решение

$$\Delta = -2\cdot 2\cdot 3 + 6\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 0 - (-1)\cdot 6\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot(-2) = 3.$$

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i- номер строки, а j- номер столбца, на пересечении которых находится элемент. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

<u>Пример</u> Найти алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{22} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-23) = -23, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 17 = 17.$$

Теорема

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

<u>Пример</u> Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = -2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(6+1) - 6\cdot(-3) + 1\cdot(-1) = 3.$$

Обратная матрица

Пусть A − квадратная матрица, тогда квадратная матрица, обозначаемая символом A^{-1} и удовлетворяющая условиям:

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E,$$

называется обратной матрицей матрицы A.

Квадратная матрица, определитель которой равен 0, называется вырожденной. Вырожденная матрица не обратима (т.е. не имеет обратной).

Алгоритм нахождения обратной матрицы A^{-1}

1. Вычислить определитель $|A|$. Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную. Если $|A| = 0$, то
   матрица A не имеет обратной.
2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A.
3. Заменить все элементы матрицы A на их алгебраические дополнения и транспонировать
   полученную матрицу (то есть поменять местами строки и столбцы).
4. Разделить все элементы полученной матрицы на определитель матрицы A.

Таким образом, $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u>

1. Вычислим $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow$$ матрица А имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы А.

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Заменим все элементы матрицы А на их алгебраические дополнения и транспонируем полученную матрицу, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Разделим все элементы полученной матрицы на $|A| = -9$, получим A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/9 & -2/9 \\ 5/9 & -2/9 & 1/9 \\ -7/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

<u>Системы линейных уравнений</u>

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тогда систему (I) можно записать в следующей матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Легко получить, что $X = A^{-1}B$.

Можно показать формулы Крамера решения систем уравнений:

что $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = |A|$ – определитель матрицы A,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$ – определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Матрица, получаемая из матрицы A в результате приписывания справа столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы и обозначается $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$ – расширенная матрица системы.

Сущность метода Гаусса заключается в последовательном исключении из всех уравнений системы, начиная со второго, переменной x_1, затем исключении переменной x_2 из всех уравнений системы, начиная с третьего и т.д.

<u>Пример</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$.

Решение:

1 способ

Запишем систему в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

то есть в виде $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тогда $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/9 & -2/9 \\ 5/9 & -2/9 & 1/9 \\ -7/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/9 & -2/9 \\ 5/9 & -2/9 & 1/9 \\ -7/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Итак, $x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 5$.

2 способ

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \Delta = -9$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -45;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

3 способ

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ x_2 + 2x_3 = 6, \\ 9x_3 = 45; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 - 2x_2, \\ x_2 = 6 - 2x_3, \\ x_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -4, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Индивидуальные задания

Задание 1.

Найти значение выражения $(n-10)\cdot A + B\cdot C$, если n нечетно,
и значение выражения $C\cdot B - (n-10)\cdot A$, если n четно.

n	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 7 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -6 & -2 & 3\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3\\ -8 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -4 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 3\\ -2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -6\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ -4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 6\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

16	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 2.

Записать систему линейных уравнений, соответствующую уравнению в матричной форме:

$A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Решить полученную систему методом Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса.

n	A	B	n	A	B
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Практическая работа № 5-7.
Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Краткая теория и примеры

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>число</u>, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\,\vec{b}$.

Итак, $\vec{a}\,\vec{b} \overset{def}{=} \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).$

<u>Пример.</u>

Треугольник ABC равносторонний с длиной стороны 3 см. Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

$$\vec{AB}\,\vec{AC} = \left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right| \cdot \cos\left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right)$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AC}\right| = 3.$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \angle BAC = 60^0.$$

$$\vec{AB}\,\vec{AC} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^0 = 4{,}5.$$

<u>Теорема</u>

Пусть в ортонормированном базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ вектор $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, тогда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

<u>Пример</u>

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(-2,1,0)$ и $\vec{b}(1,4,-3)$.

$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = -2\cdot 1 + 1\cdot 4 + 0\cdot(-3) = 2.$

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0.$$

При этом нулевой вектор можно считать перпендикулярным любому вектору.

Угол между векторами вектор $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, определяется равенством:

$$\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
3. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – правая тройка.

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то их векторное произведение равно $\vec{0}$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$.

<u>Теорема</u>

Пусть в правом ортонормированном базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ векторы вектор

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, тогда векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

<u>Пример</u>

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-2,1,0)$ и $\vec{b}(1,4,-3)$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{b}(-3;-6;-9)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах $S_{OABC} = OA\cdot OB\cdot\sin(\angle AOB) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

.

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется <u>число</u>, которое равно скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначается $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Итак, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \overset{def}{=} \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

<u>Теорема</u>

Пусть в правом ортонормированном базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ векторы

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, тогда смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Пример.</u>

Найти смешанное произведение векторов

$\vec{a}(-2,1,0)$, $\vec{b}(1,4,-3)$ и $\vec{c}(5,-1,\ 2)$.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 0 = -2\cdot 5 - 1\cdot 17 = -27.$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V_{пар-да} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен половине модуля их смешанного произведения (рис.25).

$$V_{призмы} = \frac{1}{2}V_{пар-да} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен шестой модуля их смешанного произведения (рис.26).

$$V_{призмы} = \frac{1}{6}V_{пар-да} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно 0.

Индивидуальное задание

На плоскости даны точки $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$, $C(x_3;\, y_3)$. Координаты точек взять в таблице. Сделайте чертёж треугольника *ABC* и найдите:

а) периметр треугольника,

б) уравнение прямой, содержащей сторону *BC*,

в) косинус угла *A*,

г) высоту, проведенную к стороне *BC*, и её уравнение прямой, содержащей высоту.

Координаты точек *A*, *B*, *C*

n	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	14	-1	-1	7	-7	-1
2	-1	-1	2	-1	2	3
3	-7	-2	7	-2	2	10
4	-1	-1	4	1	-5	-1
5	-5	-2	3	13	-5	7
6	-1	6	-1	-2	5	-2
7	8	-6	8	1	-4	10
8	-5	-6	11	6	0	6
9	-2	1	2	-2	6	1
10	-3	-11	5	4	-3	10
11	5	-7	5	7	-7	2
12	9	-4	-3	5	-3	1
13	8	7	-1	7	-7	-1
14	15	9	8	9	-1	-3
15	1	-9	1	2	-11	7
16	4	2	-5	14	-14	2
17	-3	-1	12	7	-9	7
18	9	9	-5	9	0	-3
19	-9	3	-9	-5	6	-5
20	-7	-3	-7	1	5	6

Практическая работа № 8-9.
Введение в математический анализ

Краткая теория и примеры

Число А называется пределом функции f(x) в точке a, если для любого ε>0 найдётся такое число δ>0, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число А называется правым (левым) пределом функции f(x) в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что из неравенства $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$

Для обозначения правого (левого) предела функции f(x) в точке a используют следующую символику: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=B$).

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a(\infty)}[f(x)]^{\varphi(x)}=C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)=B$, то $C=A^B$;

2) если $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела C решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a(\infty)}\varphi(x)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$, то используем 2-ой замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

<u>Пример</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение:

Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}=3^1=3$.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение: Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение:

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^\infty\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e^{3}}=e^{-4}.$$

Функция f(x) называется непрерывной в точке a, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a;

2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Индивидуальные задания

Задание 1

Найти образ множества *M* при функциональном отображении *f*.

№	Задание	№	Задание
1.	$M=[-2;3]$, $f: x\mapsto x^2+2x$	11.	$M=[-6;0]$, $f: x\mapsto -x^2-10x$
2.	$M=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, $f: x\mapsto -\cos x$	12.	$M=\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{9}\right]$, $f: x\mapsto \lvert x\rvert$
3.	$M=[2;4]$, $f: x\mapsto -x^2+6x-1$	13.	$M=[-2;4]$, $f: x\mapsto 2\lvert x\rvert-1$
4.	$M=\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$, $f: x\mapsto 2\sin x$	14.	$M=\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, $f: x\mapsto \cos x$

5.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto x^2-4x+3$	15.	$M=[-1;2]$, $f: x \mapsto -x^4+1$
6.	$M=[-5;-3]$, $f: x \mapsto x^2+8x+7$	16.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto x^2-4x+5$
7.	$M=[-1;1]$, $f: x \mapsto x^6-2$	17.	$M=[-1;1]$, $f: x \mapsto -3x^2+3$
8.	$M=[-5;-1]$, $f: x \mapsto -\lvert x+3\rvert$	18.	$M=[-2;1]$, $f: x \mapsto 2\lvert x+1\rvert$
9.	$M=[0;5]$, $f: x \mapsto x^2-8x+8$	19.	$M=[0;4]$, $f: x \mapsto -x^2+4x-3$
10.	$M=[-\pi;0]$, $f: x \mapsto -\sin x+2$	20.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto (x-2)^4$

Задание 2

Вычислить предел функции, числовой последовательности, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	11	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3+2n^2+n}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	13	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	15	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$

6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$	17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^5}+1}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3+1}$	19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x+1}{2x^5+3x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^3-3x^2}$

Задание 3

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$	12	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$
6	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$	16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$
7	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

8	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$
9	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	19	$\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$
10	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	20	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

Задание 4

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации.

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to -\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot \mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\mathrm{tg}2x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-1}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{x}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi/2-x}$	20	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{ctg}x}{x-\pi/2}$

Практическая работа № 6-9.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Краткая теория и примеры

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции f(x) в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\Big|_{x=x_0}$. Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Так как дифференцирование функций с использованием только таблицы производных элементарных функций и основных правил дифференцирования не вызывает особых затруднений, то мы остановимся лишь на приемах вычисления производных сложных функций.

Рассмотрим некоторую сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

В этой цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним и поэтому его называют независимой переменной. Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть $y = \sqrt{z}$ и $z = \cos x$. Здесь z есть аргумент функции y, но z, не будет независимой переменой. В результате, производная сложной функции $y = f[\varphi(z)]$ равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot y'_x.$$

Пример Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение: Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \frac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример Найти производную от функции

$y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение:

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение:

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + x - 1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2 + x - 1}} \cdot (x^2 + x - 1)' =$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

Индивидуальные задания

Задание 1

Найти производную функции.

№	Задание	№	Задание
1	$y = x + \ln\frac{x-1}{x+1}$	11	$y = x^3 \ln x - x^2$
2	$y = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$	12	$y = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x}$

3	$y = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg}x$	13	$y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$
4	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	14	$y = \dfrac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
5	$y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$	15	$y = \dfrac{\cos x}{1+\ln\cos x}$
6	$y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$	16	$y = \dfrac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
7	$y = \ln\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$	17	$y = (x^3+4)\ln(x^3+4)$
8	$y = \ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$	18	$y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
9	$y = \operatorname{arctg}(x-1) + \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$	19	$y = \sqrt{3x+1}(\ln(3x+1)-3)$
10	$y = (3x^3-2x^2+3x)e^{-x}$	20	$y = \dfrac{4x-x^4}{1-3x^2}$

Задание 2

Найти производную функции.

№	Задание	№	Задание
1	$y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$	11	$y = \ln(x\sin x)$
2	$y = \ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$	12	$y = \log_2\dfrac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$

3	$y=3\ln(2x^3-4x)^2$	13	$y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}$
4	$y=\ln\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$y=5^{x^3}\cdot\ln^2 x$
5	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$	15	$y=\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$
6	$y=(xe^{2x}+3)^5$	16	$y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
7	$y=\sqrt{\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$	17	$y=\log_3(x^3-1)$
8	$y=x\ln(3x^2+\sqrt{9x^4+1})$	18	$y=\log_2[\log_3(x^2-3)]$
9	$y=\sin(x^2+2^x)$	19	$y=\ln\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}$
10	$y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$	20	$y=\sqrt[3]{\ln\cos\dfrac{x+2}{3}}$

Задание 3

Исследовать функции $f(x)$ методами дифференциального исчисления и построить график функции.

N	f(x)	N	f(x)
1	$\dfrac{x^3+4}{x^2}$	11	$(2x+3)e^{-2(x+1)}$
2	$\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	12	$\dfrac{e^2(x+1)}{2(x+1)}$
3	$\dfrac{2}{x^2+2x}$	13	$3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$
4	$\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	14	$(3-x)e^{x-2}$
5	$\dfrac{12x}{9+x^2}$	15	$\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$

6	$\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	16	$\ln\frac{x}{x-2}+1$
7	$\frac{4-x^3}{x^2}$	17	$(x-2)e^{3-x}$
8	$\frac{x^2-4x+1}{x-4}$	18	$\frac{e^2(x-1)}{2(x-1)}$
9	$\frac{2x^3+1}{x^2}$	19	$3-3\ln\frac{x}{x+4}$
10	$\frac{(x-1)^2}{x^2}$	20	$-(2x+1)e^{2(x+1)}$

Практическая работа № 12. Функции нескольких переменных

Краткая теория и примеры

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определённая и непрерывная в некоторой области D. Полагая, например, $y = const$, получим производную $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной x. Она также может обозначаться $f'_x(x, y)$.

Аналогично, полагая $x = const$, получим производную $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной y. Она также может обозначаться $f'_y(x, y)$.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y).$$

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

<u>Пример</u> Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=[y=const]=(\cos(3x-4y))'=-\sin(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-\sin(3x-4y)\cdot(3\cdot x'-0)=-3\sin(3x-4y);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=[x=const]=(\cos(3x-4y))'=-\sin(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-\sin(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=4\sin(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=[y=const]=(-3\sin(3x-4y))'=-3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-3\cos(3x-4y)\cdot(3\cdot x'-0)=-9\cos(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[x=const]=(-3\sin(3x-4y))'=-3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-3\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=12\cos(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=[x=const]=(4\sin(3x-4y))'=4\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=4\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=-16\cos(3x-4y).$$

Индивидуальное задание

Для функции z = f(x,y) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$ и найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

№	f(x,y)	x_0	y_0	a	b	c	d
1	$\frac{x^2}{y^2}\cdot\sin(x-y)$	0.1	1.2	-4	1	1	2
2	$\frac{x}{y^2}\cdot\cos(x+y)$	-0.2	1.8	-2	2	1	2
3	$\frac{x}{y^2}\cdot\ln(x^2+y)$	-1	1.8	-2	3	1	3

4	$\dfrac{y-4}{\sqrt{y+2x^2}}\cdot(3+x+y)$	-2	4.5	-3	3	1	5
5	$\dfrac{\sin(y+x^2)}{\sqrt{y+2x^2}}$	-2	4.5	-3	2	0	5
6	$\dfrac{\cos(y^2x)}{y+2x^2}$	-2	1	-3	1	0.5	2
7	$\sin(x+2y)\cdot\cos(x^2)$	-0.2	1	-1	1	0.5	1.5
8	$\dfrac{\sin(x-y)}{2+\cos(xy)}$	-0.6	1.2	-2	0	0	1.5
9	$\dfrac{e^{x-y}}{1.25-\cos(xy)}$	-0.5	1	-0.7	0	0.5	1.3
10	$\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\cos(x^2+y^2)}$	-0.6	1.6	-0.7	0	1.4	1.9
11	$\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2y)-1}{\sin(y-x)}$	0.6	0	0.5	0.7	-0.1	0.1
12	$\arcsin(0.1\cdot xy)\cdot\sin y$	0.1	3	-1	2	2	4
13	$\ln(x+0.2y)\cdot\sin(y-x)$	0	3	-0.2	1	2	4
14	$\sqrt{x+y}\cdot\sin(2y+x)$	1	1	-0.3	1.4	0.4	2
15	$\sqrt{x+y^2}\cdot\cos(2y+x)$	1	1	-0.5	1.5	0.8	2
16	$\operatorname{tg}(xy)\cdot\cos(x+y)$	0.4	0.3	-0.6	0.9	0.1	0.8
17	$\operatorname{tg}(2x+y^2)\cdot\cos(x^2y)$	0.4	0.3	0.3	0.5	0.1	0.6
18	$\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[5]{x-y}$	1	2	0	1.2	-0.1	2.3
19	$\sqrt[3]{\sin(x^2+y)}\cdot x$	-1	1	-2	-0.5	-2	2
20	$\sqrt[5]{\sin(x-y)}\cdot y^2$	-1.5	1	-1.5	-0.5	0.8	2

Практическая работа № 13-15.
Интегральное исчисление функции одной переменной

Краткая теория и примеры

Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразной для функции y=f(x) на данном интервале (a,b) называется функция y=F(x) такая, что для всех $x \in (a,b)$ выполняется условие:

$$F'(x) = f(x).$$

Пример

Функция F(x)= x^3/ 3 является первообразной для функции f(x)=x^2 на интервале (-∞,∞), так как выполняется условие ((x^3/ 3)′=x^2).

Если функции F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b], то функция F(x)+C, где C=const называется неопределенным интегралом для функции f(x) на интервале [a,b]. Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Пример

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$

2. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1);$

10. $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$

3. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

11. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C;$

4. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C;$

12. $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C;$

5. $\int e^x dx=e^x+C;$

13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$

6. $\int\cos x dx=\sin x+C;$

14. $\int \operatorname{sh}x\, dx=\operatorname{ch}x+C;$

7. $\int\sin x dx=-\cos x+C;$

15. $\int \operatorname{ch}x\, dx=\operatorname{sh}x+C;$

8. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;$

16. $\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C;$

17. $\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C;$

18. $\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right|+C;$

19. $\int\dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right|+C.$

Методы интегрирования

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

Пример

Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int\dfrac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx;$ б) $\int\dfrac{2\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx;$

в) $\int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx$; г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x}dx$.

Решение: Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

$$а)\ \int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx =$$

$$= \int (x+2\sqrt{x}+4)\,dx = \int xdx + 2\int x^{1/2}dx + 4\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

$$б)\ \int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= 2\cdot(-\mathrm{ctg}x) + 3\cdot\mathrm{tg}x + C = 3\cdot\mathrm{tg}x - 2\cdot\mathrm{ctg}x + C.$$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

$$в)\ \int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx = \int\left(\frac{4}{9-x^2} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}\right)dx =$$

$$= -4\int\frac{dx}{x^2-9} - \int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = -4\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

$$г)\ \int \frac{5^x\cdot e^x - 3^x}{2^x}dx = \int\left(\frac{5^x\cdot e^x}{2^x} - \frac{3^x}{2^x}\right)dx = \int\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}dx - \int\frac{3^x}{2^x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{5 \cdot e}{2}\right)^x dx - \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5 \cdot e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5 \cdot e}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C =$$

$$= \frac{\frac{5^x \cdot e^x}{2^x}}{\ln 5 + \ln e - \ln 2} - \frac{\frac{3^x}{2^x}}{\ln 3 - \ln 2} + C =$$

$$= \frac{5^x \cdot e^x}{2^x \cdot (\ln 5 + 1 - \ln 2)} - \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины a справедливо равенство:

$$d(x + a) = dx,$$

поэтому $\int f(x)dx = \int f(x)d(x + a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a \cdot x) = a \cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d(a \cdot x), \qquad (a \neq 0)$$

поэтому $$\int f(x)dx = \frac{1}{a} \cdot \int f(x)d(a \cdot x).$$

Пример

Найти интегралы:

а) $\int \sin(7x+2)dx$;   б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{4x+3}$;   г) $\int e^{-2x+7}dx$;

д) $\int 5^{7x-3}dx$;   е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)}$.

Решение: Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x+2)dx = \frac{1}{7}\cdot\int \sin(7x+2)d(7x+2) = -\frac{1}{7}\cdot\cos(7x+2)+C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k \neq 0$ имеют место формулы

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C$$

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C$$

б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = -\int (3-x)^{1/3}d(3-x) = -\frac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C =$

$= -\frac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n \neq -1, k \neq 0)$$

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{d(4x+3)}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\ln|4x+3|+C.$

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot\ln|kx+b|+C.$$

г) $\int e^{-2x+7}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x+7}d(-2x+7) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+7} + C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b} + C.$$

д) $\int 5^{7x-3}dx = \frac{1}{7}\int 5^{7x-3}d(7x-3) = \frac{1}{7}\cdot\frac{5^{7x-3}}{\ln 5} + C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot\int \frac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot \mathrm{tg}\left(4-\frac{x}{3}\right) + C$

(см. табличный интеграл 8).

Пример

Найти интегралы

а) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$;   б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}}dx$;

в) $\int x^3(2+x^4)^5dx$;   г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{3^x}{4+3^x}dx$;   е) $\int (x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx$.

Решение:

а) сделаем замену переменной полагая $t = -x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t = -x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)'dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2dx}=\int e^{-x^2}\cdot xdx=\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int e^t dt=$$

$$=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos xdx=d(\sin x)=d(\sin x+2)$, тогда обозначим $t=\sin x+2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x+2}}d(\sin x+2)=\int\frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt=\int t^{-1/3}dt=$$

$$=\frac{t^{2/3}}{2/3}+C=\frac{3}{2}\cdot t^{2/3}+C=\frac{3}{2}(\sin x+2)^{2/3}+C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t=2+x^4$.

Тогда $dt=d(2+x^4)=(2+x^4)'dx=4x^3dx$, т.е. $dt=4x^3dx$, откуда $x^3dx=\frac{1}{4}\cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3(2+x^4)^5dx=\int(2+x^4)^5\cdot x^3dx=\int t^5\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^5dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{24}\cdot t^6+C=\frac{1}{24}\cdot(2+x^4)^5+C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)$ и заменой $t=\arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^3d(\arcsin x)=$$

$$=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\cdot\arcsin^4 x+C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t=4+3^x$. Тогда $dt=(4+3^x)'dx=3^x\cdot\ln 3dx$, откуда $3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int \frac{3^x}{4+3^x} dx = \int \frac{1}{4+3^x} \cdot 3^x dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln 3} dt = \frac{1}{\ln 3} \cdot \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln|4+3^x| + C = \log_3(4+3^x) + C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t = x^2 + 6x$. Тогда $dt = d(x^2+6x) = (x^2+6x)'dx = (2x+6)dx = 2(x+3)dx$, т.е. $dt = 2(x+3)dx$ и $(x+3)dx = \frac{1}{2} dt.$

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int (x+3) \cdot \cos(x^2+6x) dx = \int \cos(x^2+6x) \cdot (x+3) dx =$$

$$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2+6x) + C.$$

Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Теорема

Пусть функция F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b]. И пусть $x=\varphi(t)$ дифференцируемая монотонная функция на интервале $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение: Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1 + x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$; при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

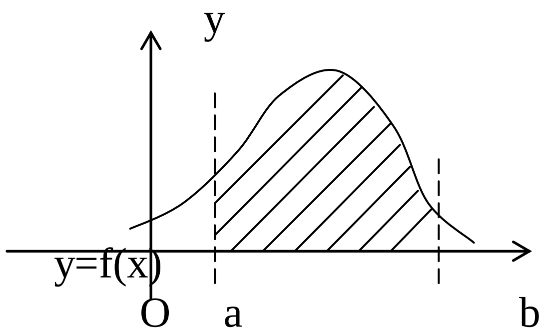
$$\int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int\limits_1^4 (2t^2 - 2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Если на интервале [a,b] задана непрерывная функция y=f(x), причем f(x)≥0 и a<b, то из геометрической иллюстрации видим, что

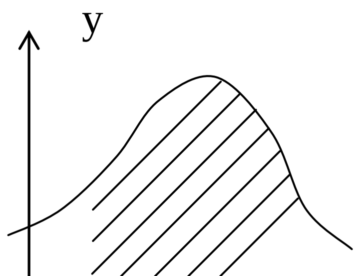
$$\int_a^b f(x)dx = S.$$

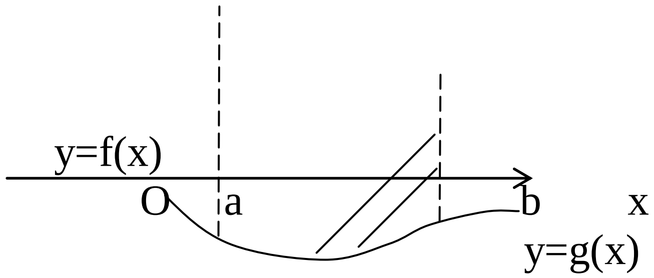
где S площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, с боков прямыми x=a и x=b и сверху графиком функции y=f(x)



Вычисление площади криволинейной трапеции

Если условие f(x)≥0 не выполняется, то нужно разбить интервал [a,b] на части корнями уравнения f(x)=0, выделить интервалы знакопостоянства функции, вычислить интегралы на каждом из интервалов и просуммировать по модулю полученные значения. Получим площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции y=f(x), с боков прямыми x=a и x=b.





Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть на интервале [a,b] заданы непрерывные функции y=f(x) и y=g(x), причем f(x)≥ g(x) для x∈[a,b]. Если нужно найти площадь фигуры, ограниченной с боков прямыми x=a и x=b и графиками функций y=f(x) и y=g(x), то (см. рис.2) площадь равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Индивидуальные задания

Задание 1.

Найти интегралы из таблицы, результат проверить дифференцированием.

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{3dx}{\sqrt{4-x^2}}$	11	$\int \frac{5x^8+3}{x^3}dx$
2	$\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	12	$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$
3	$\int \frac{2^x - 3^x}{4^x}dx$	13	$\int \frac{2dx}{x^2-9}$
4	$\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx$	14	$\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx$
5	$\int \frac{2^x \cdot e^x - 1}{2^x}dx$	15	$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
6	$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$	16	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}dx$

7	$\int \frac{x^2+5x+6}{x+2}\,dx$	17	$\int \frac{1+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$
8	$\int \frac{7\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$	18	$\int \frac{2x\sin^2 x+3}{\sin^2 x}\,dx$
9	$\int \left(\sin x+\frac{e^x}{2}+\sqrt[6]{x}\right)dx$	19	$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$
10	$\int \frac{3^x+4^x}{2^x}\,dx$	20	$\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\,dx$

Задание 2.

Найти интегралы из таблицы, результат проверить дифференцированием.

N	Задание	N	Задание
1	$\int x\cos x^2\,dx$	11	$\int x\cdot e^{1-x^2}\,dx$
2	$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$	12	$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
3	$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x}\,dx$	13	$\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x}\,dx$
4	$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$	14	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
5	$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$	15	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$
6	$\int 2^{x^2}\cdot x\,dx$	16	$\int e^x\cos(e^x)\,dx$
7	$\int x\cdot e^{4-x^2}\,dx$	17	$\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$
8	$\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx$	18	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
9	$\int x^2(2+x^3)^4\,dx$	19	$\int (x^3-4x)^{10}(3x^2-4)\,dx$

10	$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$	20	$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx$

Задание 3

Найти интегралы из таблицы, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

N	Задание	N	Задание
1	$\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$	11	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
2	$\int \mathrm{arctg}\,2x\,dx$	12	$\int \ln x\,dx$
3	$\int \arcsin(x+1)\,dx$	13	$\int (1-3x)\cdot 2^x dx$
4	$\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$	14	$\int \ln(1-x)\,dx$
5	$\int (2x-1)\cos x\,dx$	15	$\int x\ln 2x dx$
6	$\int (2x+1)\cdot e^{2x}dx$	16	$\int x\cdot 2^{-x}dx$
7	$\int (x+1)\mathrm{arctg}x\,dx$	17	$\int \arcsin(x+2)\,dx$
8	$\int (1-x)\ln x\,dx$	18	$\int \ln(1-3x)\,dx$
9	$\int (2x-3)\cos 3x\,dx$	19	$\int (x+1)\cdot\sin 5x\,dx$
10	$\int x\cdot e^{1-x}dx$	20	$\int \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$

Задание 4

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_1^2\left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int_1^3\left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int_1^4\left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int_1^2\left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int_0^1\left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int_2^4\left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int_2^5\left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int_0^1\left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int_1^2\frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int_1^2\left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int_{-2}^{-1}\left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int_1^2\left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int_1^2\left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int_1^3\frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int_0^1\left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17	$\int_2^3\left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2\left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$
19	$\int_1^2\left(\frac{5}{x}-e^{2x+1}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$	20	$\int_1^9\left(\frac{x^{3/2}+x+5}{x}+\cos 2x\right)dx$

Задание 5

Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь.

№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$	№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$
1	$y=x^2-4x+3$ $y=x+3$	2	$y=x^2-8x+7$ $y=-5x+5$
3	$y=x^2+4x$ $y=x+4$	4	$y=9x^2+6x+1$ $y=-x+1$
5	$y=(x-2)^2$ $y=4x-8$	6	$y=-(x+3)(x-2)$ $y=x-2$
7	$y=3x-x^2$ $y=-x$	8	$y=2x^2-4x+1$ $y=2x-3$
9	$y=-x^2-8x+1$ $y=-x-2$	10	$y=x^2-2x$ $y=\frac{1}{2}x+5$
11	$y=(x+1)(x-4)$ $y=5x-4$	12	$y=x^2+6x+1$ $y=2x+1$
13	$y=2x^2+8x+1$ $y=6x+1$	14	$y=(x-1)^2$ $y=x+1$
15	$y=-x^2+x+5$ $y=-2x+7$	16	$y=x^2+3x+1$ $y=4x+1$
17	$y=-2x^2+5x-3$ $y=-3x-3$	18	$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ $y=4x+1$
19	$y=(x+5)(x-1)$ $y=3.5x-3.5$	20	$y=x^2+x+6$ $y=4x+6$

Практическая работа № 16
Дифференциальные уравнения

Краткая теория и примеры

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее функцию y(x), аргумент x и производные функции y', $y'',\ldots,y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x,y',y',\ldots,y^{(n)})=0$.

Так как искомая функция $y=y(x)$, фигурирующая в уравнении, есть функция одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют в этом случае *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид: $y' = f(x,y)$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

***Задача Коши*:** Среди всех решений дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ найти такое решение $y = y(x)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента принимает заданное значение y_0: $y(x_0) = y_0$

Равенство $\Phi(x,y,C) = 0,$ неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида $f_2(y)dy = f_1(x)dx$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Его решение имеет вид: $\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C,$

Пример Решить дифференциальное уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение*:* Перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения $xdx = -ydy$ и проинтегрируем обе части уравнения $\int xdx = -\int ydy$, получим $x^2/2=-y^2/2+C$ или $x^2/2+y^2/2=C.$

Дифференциальное уравнение вида

$$M_2(x)N_2(y)dy = M_1(x)N_1(x)dx$$

также называется уравнением с разделяющимися переменными, так как оно может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменного могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких уравнений относятся уравнения вида

$$y' = f(ax+by),$$

где a, b – $const$.

Сделаем замену переменной $z=ax+by$, тогда $z' = a + by'$, но $y' = f(z)$, следовательно, $z' = a + b \cdot f(z)$, а это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dz}{a+b\cdot f(z)} = dx$.

Интегрируя его, получим $x = \int \frac{dz}{a+b\cdot f(z)} + C$.

Понятие дифференциального уравнения n-го порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x,y',y',y'',\ldots,y^{(n)})=0\ ,$$

где производная n - го порядка входит явно.

Уравнения вида $y^{(n)}=f(x,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$, т. е. уравнения явно не содержащие искомой функции. Рассмотрим решение таких уравнений на примере уравнения второго порядка

$$y''=f(x,y')$$

Подстановка $y'=p(x)$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу $p'=f(x,p)$. Его общее решение $p(x)=\varphi(x,C)$, но $p=y'$. Следовательно, $y'=\varphi(x,C)$,а это уравнение с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное однородное уравнение второго порядка

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q – постоянные действительные числа.

Будем искать частное решение в виде $y=e^{kx}$, $k-const$, тогда $y'=ke^{kx}$; $y''=k^2e^{kx}$. Подставим полученные выражения в уравнение, получим $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$. Так как $e^{kx}\neq 0$, то значит

$$k^2+pk+q=0.$$

Это уравнение называется характеристическим. Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны следующие случаи:

1) k_1 и k_2 - действительные и неравные, т. е. $k_1 \neq k_2$.

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}.$$

Индивидуальные задания

Задание 1

Проверьте, что указанная функция $y = y(x)$ является решением уравнения

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
1	$y = \dfrac{C\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}-Cx}$	$y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$
2	$y = -\ln(C-e^x)$	$y' = e^{x+y}$
3	$y = C\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \dfrac{-xy}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$y = C\sqrt{1+e^{2x}}$	$y'(1+e^{2x}) = ye^{2x}$
5	$y^3+y-x^2+C=0$	$y'(3y^2+1) = 2x$

6	$y=\sqrt{Cx^2-1}$	$yx\cdot y'=1+y^2$
7	$y=\dfrac{C+x}{1-Cx}$	$y'(1+x^2)=1+y^2$
8	$y=1+\dfrac{Cx}{1+x}$	$y-1=(x^2+x)\,y'$
9	$y=\sqrt{C(1-x^2)-1}$	$y'y(x^2-1)=x(y^2+1)$
10	$y=\dfrac{C}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}$	$y'(1+x^2)+(2y+1)\,x=0$
11	$y=\sqrt{C-1-\dfrac{C}{x^2+1}}$	$xy(1+x^2)\,y'=1+y^2$
12	$y=\ln(C(1+x^2)-1)$	$e^y(1+x^2)\,y'=2x(1+e^y)$
13	$y=(x+C)\,e^x$	$y'-y=e^x$
14	$y=Ce^x-x-1$	$y'=x+y$
15	$y=1+C\cdot e^{-x^3/3}$	$y'+x^2y=x^2$
16	$y=e^{C\cdot \mathrm{tg}(x/2)}$	$y'\cdot\sin x=y\cdot\ln y$
17	$y-x=C(1+xy)$	$1+y^2=(1+x^2)\,y'$
18	$x^2(1+y^2)=C$	$1+y^2+xy\cdot y'=0$
19	$y=\mathrm{tg}\ln Cx$	$1+y^2=xy'$
20	$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$

Задание 2

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

№	Уравнение
1.	$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2.	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
3.	$\sqrt{4+y^2}\,dx-ydy=x^2ydy$

4.	$\sqrt{3+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$
5.	$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
6.	$(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$
7.	$x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$
8.	$y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$
9.	$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
10.	$x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$
11.	$y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$
12.	$\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
13.	$2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$
14.	$x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$
15.	$(e^x+8)dy - ye^xdx = 0$
16.	$\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$
17.	$6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$
18.	$y\ln y + xy' = 0$
19.	$(1+e^x)\,y' = ye^x$
20.	$\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$

Задание 3

Найдите общее решение дифференциального уравнения

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	11	$y'' + 3y' - 4y = (10x+7)e^x$
2	$y'' - 3y' - 4y = (-10x-3)e^{-x}$	12	$y'' - 2y' + y = 2e^x$

3	$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$	13	$y'' + 5y' + 4y = (6x - 1)e^{-x}$
4	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	14	$y'' - 5y' + 4y = (-6x - 1)e^{x}$
5	$y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$	15	$y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{-2x}$
6	$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$	16	$y'' - 5y' + 6y = (3 - 2x)e^{2x}$
7	$y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x}$	17	$y'' + 5y' - 6y = (14x - 5)e^{x}$
8	$y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$	18	$y'' - 5y' - 6y = (9 - 14x)e^{-x}$
9	$y'' + 10y' + 25y = 2e^{-5x}$	19	$y'' + 2y' + y = 4x \cdot e^{x}$
10	$y'' - 10y' + 25y = 2e^{5x}$	20	$y'' - 2y' + y = (x + 1)e^{2x}$

Практическая работа № 17-18
Числовые и функциональные ряды

Числовые ряды

Выражение вида: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом. Ряд − это сумма бесконечного числа слагаемых.

Сумма конечного числа слагаемого $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется частичной суммой ряда.

Если существует и конечен предел последовательности частичных сумм, то говорят, что ряд сходится, а предел называется суммой ряда, т. е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример Исследовать на сходимость ряд: $1+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots$

Решение: а) пусть $|q|\neq 1$. Составим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, т.к. члены ряда являются членами геометрической прогрессии, то $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{если } |q|<1 \\ -\infty, & \text{если } |q|>1 \end{cases}$$

Итак, при $|q|<1$ ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

б) пусть $q=1$, то ряд примет вид: 1+1+…+1+… Нетрудно заметить, что этот ряд расходится.

в) пусть $q=-1$, то ряд примет вид: $1-1+1+\ldots+(-1)^{n-1}+$ как мы установили (см. пример выше) расходится.

Необходимый признак сходимости рядов

Если ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$. сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие: (достаточный признак расходимости ряда).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1.1)

$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ (1.2)

где $a_n>0,\ b_n>0$. Если начиная с некоторого члена (скажем для $n>N$) выполняется неравенство $a_n\le b_n$, то

1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2)

Второй признак сравнения

Пусть даны ряды (1.1) и (1.2) с положительными членами, т.е. $a_n>0$ и $b_n>0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k$, тогда если

1) $k=\infty$, то из сходимости ряда (1.1) вытекает сходимость ряда (1.2), а из расходимости ряда (1.2) вытекает расходимость ряда (1.1);

2) $k\neq 0$ и является конечным числом, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно;

3) $k=0$, то из сходимости ряда (1.2) вытекает сходимость ряда (1.1), а из расходимости ряда (1.1) вытекает расходимость ряда (1.2).

Применяя данные признаки, следует сравнивать исходный ряд с разными стандартными рядами или рядами эталонами, заведомо сходящимися или расходящимися. Часто в качестве ряда эталона используется гармонический ряд, ряд Дирихле и ряды, членами которых являются члены бесконечной геометрической прогрессии и т. д.

Признак Даламбера: Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n>0$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, если

1) $l<1$, то ряд сходится,
2) $l>1$, то ряд расходится.

Замечание: Если $l=1$, то вопрос о сходимости или расходимости признак Даламбера не решает.

Пример. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$.

Решение: Так как $a_n=\frac{2^n}{n}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$, то

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n}{(n+1)\cdot 2^n}=2>1,$ значит, ряд расходится.

Радикальный признак Коши: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n>0$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, если

1) $l<1$, то ряд сходится,
2) $l>1$, то ряд расходится.

Замечание: Если $l=1$, то вопрос о сходимости или расходимости радикальный признак Коши не решает.

Пример: Пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Решение: Так как $a_n=\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$, то

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$ значит ряд сходится.

Интегральный признак Коши**:** Пусть дан ряд $a_1+a_2+\ldots+a_{n+\ldots}$, где $a_n>0$, и пусть $f(x)$ непрерывная, монотонно убывающая на $[1,\infty)$ функция и такая, что $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, ..., $f(n)=a_n$, ... тогда данный ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ и расходится, если расходится несобственный интеграл.

<u>Пример</u> Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который называется рядом Дирихле или обобщенным гармоническим рядом, при α=1 это гармонический ряд. Исследуем данный ряд на сходимость, используя интегральный признак Коши.

Решение:

Составим функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ и найдем несобственный интеграл:

a) пусть $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha<1 \text{ интеграл расходится}\\ \frac{1}{1\text{-}\alpha}, \text{ если } \alpha>1 \text{ интеграл сходится}\end{cases}$$

b) пусть $\alpha=1$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$$

интеграл, а, следовательно, и ряд расходятся.

Итак, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1\\ \text{расходится, если } \alpha\leq 1\end{cases}$$

Если членами ряда являются функции, то ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ называется функциональным рядом. Совокупность значений x, при которых ряд сходится, называется областью сходимости данного ряда.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \quad ,$$

где a_0, a_1, $a_2,\ldots,a_n,\ldots-$ постоянные числа называемые коэффициентами, если $x_0=0$, то $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда и вычисляется по формулам: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал (-R, R), такой, что во всех точках внутри его ряд сходится, а во всех точках вне его ряд расходится.

На концах интервала ($-R$, R), т. е. при $x = -R$ и $x = R$ вопрос о сходимости или расходимости решается для каждого конкретного ряда особо.

У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку (R=0), у других охватывает всю числовую ось ($R=\infty$).

Пример: Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^n$.

Решение: Найдем $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n}\right|=3$, т.е. ряд сходится при $|x|<3$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-3$, тогда получим числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, он сходится на основании признака Лейбница, так как 1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Пусть теперь x=3, тогда получим числовой знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является гармоническим рядом и расходится. Следовательно, исходный ряд сходится на полуинтервале $[-3;3)$.

Ряды Тейлора и Маклорена

Степенной ряд вида

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции *f(x)*.

Коэффициенты $c_0 = f(x_0),\ c_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$ - называются коэффициентами Тейлора.

Если в ряде Тейлора x_0=0, то получится ряд:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots ,$$

который называется рядом Маклорена.

Разложение элементарных функций в степенные ряды

I. *Ряд Маклорена для функции* $y=e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad \text{для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

II. *Ряд Маклорена для функции* $y=\sin x$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{\kappa-1}\frac{x^{2\kappa-1}}{(2\kappa-1)!}+\ldots \text{ для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

III. *Ряд Маклорена для функции* $y=\cos x$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{\kappa}\frac{x^{2\kappa}}{2\kappa!}+\ldots \quad \text{для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

IV. *Ряд Маклорена для функции* $y=(1+x)^m$.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots$$

для $\forall x\in(-1;1)$. Это так называемый биномиальный ряд и при $x=\pm 1$ поведение этого ряда зависит от *m*.

V. *Ряд Маклорена для функции* $y=\ln(1+x)$.

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+... \quad \text{для } \forall x\in(-1;1).$$

Эти разложения часто называют основными разложениями.

Пример: Пользуясь основными разложениями и свойствами степенных рядов, разложить по степеням x функцию $y=\frac{x}{9+x^2}$ и указать интервал сходимости.

Решение: Представим функцию в виде:

$$y=\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{9}\cdot\left[1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^{-1}$$

и воспользуемся разложением IV:

$$(1+z)^{-1}=1+\frac{-1}{1!}z+\frac{-1(-1-1)}{2!}z^2+...+\frac{-1(-1-1)...[-1-(n-1)]}{n!}z^n+...=$$

$$=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n z^n+...$$

для $-1<z<1$, так как в нашем случае $z=\left(\frac{x}{3}\right)^2$, то

$$\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{9}\cdot\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^4+...+(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n+...\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x}{3}-\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}\right)^5-...+(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}+...\right] \quad \text{для} \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2<1$$

или $-3<x<3$. Окончательно имеем $\frac{x}{9+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}$ для $-3<x<3$.

Индивидуальные задания

Задание 1

Записать ряд в развернутой форме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, если задан общий член a_n ряда.

№	a_n	№	a_n
1.	$\frac{n \cdot 2^n}{n!}$	2.	$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (5n-3)}$
3.	$\frac{n^2}{(n+2)!}$	4.	$(-1)^n \cdot \frac{1+2^n}{n^3}$
5.	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 (n+1)^2}$	6.	$\frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$
7.	$\frac{n^2}{n!}$	8.	$\frac{-1 + 2 \cdot (-1)^{n+1}}{n!}$
9.	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	10.	$\frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+1}}$

Задание 2

Найти сумму ряда, взяв задание из таблицы

№	a_n	№	a_n
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+4)}$	2.	$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{(n-2)(n-4)}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{6^{n+1}}$	4.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n + 1)^2}{3^{3n-1}}$
5.	$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2}{(n-4)(n-6)}$	6.	$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{3}{(n-4)(n-7)}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{4^n}$	8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + 3^n}{7^{n+1}}$
9.	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-3)}$	10	$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-5)}$

Задание 3

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

№	$f_n(x)$	№	$f_n(x)$
1	$\dfrac{(x+5)^{2n+1}}{4^n(n+2)^6}$	2	$\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 8^n}$
3	$\dfrac{n^4}{(n+1)!}\cdot(x+1)^{2n}$	4	$\dfrac{(x-2)^n\cdot 2^n}{n^{n+1}}$
5	$\dfrac{(x+3)^n}{2^n\cdot n^2}$	6	$\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)\cdot(x-3)^n}$
7	$\dfrac{(-1)^n}{n^n}(x+1)^n$	8	$\dfrac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$
9	$\dfrac{n(n+1)}{n-3}(x-1)^n$	10	$\dfrac{3n+8}{n^2+4}(x-2)^n$

Задание 4.

Разложить функцию f(x) в ряд по степеням $x - x_0$

№	f(x)	x_0	№	f(x)	x_0
1	Sin(x+3)	0	2	$\dfrac{-3}{x^2+x-2}$	0
3	Ln(10x-3)	1	4	$\sqrt{2x+7}$	1
5	$\dfrac{1}{x^2-3x+2}$	0	6	Ln(3x + 2)	1
7	$\dfrac{2}{x^2-4x+3}$	0	8	x^2Cos(x + 1)	0
9	Cos(x-2)	0	10	$\dfrac{2x+2}{3x^2-2x-1}$	0

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Мтематика для гуманитариев [Текст]: учебник / К.В. Балдин. – М.: Дашков и К, 2009. – 512с.
2. Ильин В.А. Высшая математика [Текст]: учебник / В.А. Ильин, А.В. Куркина. – М.: Проспект, 2011.− 608с.
3. Сборник задач по математике для втузов [Текст]: учебное пособие. / А.В.Ефимов, А.С.Поспелов. – М.: Физматлит, 2009. Ч.1 − 288с.
4. Сборник задач по математике для втузов [Текст]: учебное пособие. / А.В.Ефимов, А.С.Поспелов. – М.: Физматлит, 2009. Ч.2 − 432с.

Дополнительная учебная литература

5. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев [Текст]: учебник / С.Ю. Жолков. – М: Альфа-М; ИНФРА-М., 2005. – 528с.
6. Иьин В.А. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. − М.: Физматлит, 2009. − 224 с.
7. Ильин В.А. Линейная алгебра [Текст]: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. −М.: Наука, 2014. – 280 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. Т. 1 − 416 с.
9. Салий В.Н. Математические основы гуманитарных знаний. [Текст]: учебное пособие. / В.Н. Салий. – М.: Высшая школа, 2009. – 304 с.
10. Тютюнов Д.Н. Неопределенный интеграл. Техника интегрирования [Текст]: учебное пособие./Д.Н. Тютюнов, Л.И. Студеникина. – Старый Оскол: ТНТ, 2015. –116 с.
11. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. – Курск: ЮЗГУ, 2014. – 52 с.

12. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.В. Бойков. – Курск: ЮЗГУ, 2014. – 30 с.

13. Интегрирование функций [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю М-5/ Юго-Зап. Гос. Ун-т; сост.: Н.А. Моргунова, А.Ф. Пихлап. – Курск: ЮЗГУ, 2014. – 38 с.

14. Интегрирование функций одной переменной. Приложения [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Моргунова, А.Ф. Пихлап. – Курск: ЮЗГУ, 2014. – 53 с.

15. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А. Бойцова, Т.В. Шевцова. – Курск: ЮЗГУ, 2016.− 26 с.

16. Определенный интеграл [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю М-8 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И. Студеникина. – Курск: ЮЗГУ, 2011.− 33 с.

17. Основные понятия теории множеств [Электронный ресурс]: Индивидуальные задания к модулю 1.1 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова, Е.В. Скрипкина. – Курск: ЮЗГУ, 2011.− 54 с.