Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 02.05.2024 10:07:54
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«_4_» _03_ ________ 2019 г.

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДАМИ ДЕФОРМИРОВАННОГО МНОГОГРАННИКА (МЕТОД НЕЛДЕРА-МИДА)

Методические указания к лабораторной работе №9
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Решение многомерной задачи оптимизации градиентными методами и методом деформированного многогранника (метод Нелдера-Мида): методические указания к лабораторной работе №9 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 15 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,84. Тираж 100 экз. Заказ 145 . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОМ ДЕФОРМИРОВАННОГО МНОГОГРАННИКА (МЕТОД НЕЛДЕРА-МИДА)

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений многомерной безусловной оптимизации.
2. Изучение основных методов решения задач многомерной минимизации.
3. Разработка алгоритма, программы и решения на ЭВМ задачи многомерной минимизации.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные определения. Задачей многомерной оптимизации является минимизация функции $U=f(x_1,x_2,...,x_m)$ от m переменных (параметров) $x_1,x_2,...,x_m$. Если нет ограничений на параметры x_1, $...,x_m$, то говорят о глобальной безусловной минимизации, если есть ограничения на параметры $x_1,...,x_m$, то говорят об условной минимизации.
Для сокращенного обозначения функции многих переменных удобно использовать векторное обозначение $f(\vec{x})$, при этом подразумевается, что каждой величине $\vec{x}$ сопоставлен свой единственный набор значений величин $x_1,...,x_m$. В соответствии с этим величину $\vec{x}$ можно рассматривать как точку (элемент) m-мерного линейного пространства независимых переменных $x_1,...,x_m$. Если в этом пространстве ввести единичные векторы $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_m$, поставленные в соответствие переменным $x_1,...,x_m$, то величину $\vec{x}$ можно рассматривать как вектор: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1,\ldots,x_m\vec{e}_m$, а операции сложения и вычитания производить по правилу векторов.

а) поверхность уровня. Множество точек $\vec{x}$, для которых $U=f(\vec{x})=\text{const}$ называется поверхностью уровня, для двух переменных это множество называется линей уровня. Функция $U=f(x_1,x_2)$ определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве U, x_1, x_2. Самая низкая точка этой поверхности есть решение задачи минимизации. Для каждого значения U на плоскости ox_1x_2 имеется своя линия уровня.

б) градиент. Вектор $\vec{g}(\vec{x})$ называется градиентом функции $f(\vec{x})$ и обозначается:

$$\vec{g}(\vec{x}) = \text{grad}\ f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\vec{e}_m. \qquad (2.1)$$

Вектор $\vec{g}(\vec{x})$ указывает направление наискорейшего возрастания функции, а вектор $-\vec{g}(\vec{x})$ называется антиградиентом и указывает направление наискорейшего убывания функции. Градиент всегда перпендикулярен поверхности (линии) уровня.

2. Необходимое и достаточное условия минимума функции многих переменных:

а) необходимое условие. Необходимым условием минимума функции многих переменных является условие равенства нулю ее градиента:

$$\text{grad}\ f(\vec{x}) = 0, \qquad (2.2)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,m.$$

б) достаточное условие. Достаточным условием является условие положительной определенности матриц Гессе:

$$\{G\} = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{matrix}\right\}. \qquad (2.3)$$

Для положительной определенности матрица Гесса необходимо, чтобы ее собственные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ были положительны. Собственные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ являются корнями характеристического уравнения:

$$\det\ (G - \lambda E) = 0, \qquad (2.4)$$

где det -определитель квадратной матрицы ранга m, E - единичная матрица.

Матрица C=G-λE называется характеристической матрицей для матрицы G.

3. Основные методы безусловной многомерной минимизации:

а) покоординатный спуск. В методе покоординатного спуска выбирается начальная точка x_0 с координатами $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Фиксируются все координаты кроме первой и решается одномерная задача минимизации. Затем фиксируются все координаты кроме второй и опять решается задача одномерной минимизации и т.д. т.е. поочередно производится спускание по всем координатам x_i, до тех пор пока не выполнятся все условия:

$$\left|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n\right| \le \varepsilon_1,$$

$$\left|f(\vec{x}_{n+1} - f(\vec{x}_n)\right| \le \varepsilon_2, \qquad , \tag{2.4}$$

$$f'(\vec{x}_m) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon, \qquad i = 1,\dots,m.$$

Если линия уровня имеет изломы, что соответствует “оврагам” на поверхности $U = f(\vec{x})$, то данный метод становится непригодным.

б) простой градиентный метод. В методе простого градиентного спуска выбирается начальная точка $\vec{x}_0$ и начальное значение шага h. В точке $\vec{x}_0$ вычисляется градиент и делается шаг в направлении антиградиента:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - h \cdot \text{grad } f(\vec{x}_0).. \tag{2.5}$$

В результате вычисляется точка $\vec{x}_1$. Если выполняется условие $f(\vec{x}_1) < f(\vec{x}_0)$, то в точке $\vec{x}_1$ вычисляется градиент и делается шаг в направление антиградиента. Если условие $f(\vec{x}_1) < f(\vec{x}_0)$ не выполняется, то шаг h уменьшают до тех пор, пока это условие не будет выполнено. Процесс продолжается до выполнения третьего условия (2.4).

Недостатком метода является необходимость на каждом шаге вычислять значение градиента, что требует достаточно много времени.

в) метод наискорейшего спуска. Из начальной точки $\vec{x}_0$ перпендикулярно линии уровня, т.е. в направлении антиградиента двигаются до тех пор, пока функция убывает, т.е. решают одномерную задачу минимизации для функции:

$$F(\alpha) = f(\vec{x}_0 - \alpha \cdot \text{grad } f(\vec{x}_0)),, \tag{2.6}$$

где α выступает в качестве параметра.

В результате находится значение $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \alpha \cdot \text{grad } f(\vec{x}_0)$, соответствующее минимальному значению функции на выбранной прямой. Затем вычислительный процесс повторяется для точки $\vec{x}_1$ и т.д. Критерием окончания является третье условие (2.4).

г) метод деформированного многогранника (Нелдера-Мида). Когда $f(\vec{x})$ не является гладкой и имеются множества точек, где она не дифференцируема используются прямые методы. Наиболее известным из них является метод деформированного многогранника или метод Нелдера-Мида. Задается m+1 точка $\vec{x}_1^{(0)}, \vec{x}_2^{(0)}, \ldots, \vec{x}_{m+1}^{(1)}$. При этом все разности $\Delta\vec{x}_{i,j} = \vec{x}_i^{(0)} - \vec{x}_j^{(0)},\ i \neq j,\ (i, j = 1, \ldots, m)$ должны быть линейно независимыми, т.е. любые три из точек $\vec{x}_i^{(0)},\ (i = 1, \ldots, m+1)$ не должны лежать на одной прямой.

Обычно это делается следующим образом. Задаются координаты точки $\vec{x}_{m+1}^{(0)}\ (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а координаты остальных точек определяются с помощью соотношения $\vec{x}_i^{(0)} = \vec{x}_{m+1}^{(0)} + h \cdot \vec{e}_i,\ i = 1, \ldots, m;$ где h - параметр, который определяет стороны многогранника.

Точки $\vec{x}_i^{(0)},\ (i = 1, \ldots, m+1)$, i=1,2,...,m+1 являются сторонами равнобедренного многогранника (на плоскости это треугольник).

Исключается точка, в которой функция имеет самое большое значение, пусть это точка $\vec{x}_{m+1}^{(0)}$. Далее вычисляется среднее значение (или как иногда говорят центр тяжести) оставшихся точек:

$$\vec{x}_{ср}^{(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\vec{x}_i^{(0)}. \tag{2.7}$$

Далее вычисляется пробная точка:

$$\vec{x}_{пр}^{(0)} = \vec{x}_{ср}^{(0)} + (\vec{x}_{ср}^{(0)} - \vec{x}_{m+1}^{(0)}), \tag{2.8}$$

которая является симметричным отражением исключенной точки $\vec{x}_{m+1}^{(0)}$ относительно точки $\vec{x}_{ср}^{(0)}$.

Вычисляется значение функции в пробной точке и сравнивается с со значением в точке $\vec{x}_{m+1}^{(0)}$. Если значение в пробной точке меньше, то точка $\vec{x}_{m+1}^{(0)}$ заменяется на точку $\vec{x}_{пр}^{(0)}$ и рассматривается новый многогранник с точками $\vec{x}_1^{(1)}, \vec{x}_2^{(1)}, \ldots, \vec{x}_{m+1}^{(1)}$, где $\vec{x}_i^{(1)} = \vec{x}_i^{(0)},\ (i = 1, \ldots, m)$, а $\vec{x}_{m+1}^{(1)} = \vec{x}_{пр}^{(0)}$.

Если же значение в пробной точке больше, то выбирается новая пробная точка внутри многогранника:

$$\vec{x}_{пр}^{(0)} = \vec{x}_{ср}^{(0)} - \frac{(\vec{x}_{ср}^{(0)} - \vec{x}_{m+1}^{(0)})}{2}, \tag{2.9}$$

и тоже рассматривается новый многогранник с точками $\vec{x}_1^{(1)}, \vec{x}_2^{(1)}, \ldots, \vec{x}_{m+1}^{(1)}$, где $\vec{x}_i^{(1)} = \vec{x}_i^{(0)},\ (i = 1, \ldots, m)$, а $\vec{x}_{m+1}^{(1)} = \vec{x}_{пр}^{(0)}$. Многогранник при этом деформируется.

Периодически многогранник восстанавливают. За новую базовую точку $\vec{x}^{(0)}_{m+1}$ принимается точка, в которой функция минимальна, а величина шага h выбирается равной средней длине всех граней, исходящих из точки $\vec{x}^{(0)}_{m+1}$. Процесс заканчивается, когда длины всех сторон многогранника станут меньше некоторого выбранного ε.

III. ЗАДАНИЕ

1. Написать основные соотношения метода простого градиентного спуска, метода наискорейшего спуска и метода деформированного многогранника для минимизации функции из таблицы заданий. Точку минимума определить с указанной в таблице точностью ε.
2. Разработать алгоритм и программу для минимизации с помощью ЭВМ данной функции простым градиентным методом и методом деформированного многогранника..
3. Отладить программу и провести минимизацию на ЭВМ. Сравнить результаты, полученные двумя методами.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Минимизировать функцию

$f(x,y) = 30x + 1.4y + e^{8.41x^2 + 0.4y^2}$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$,

простым градиентным методом и методом наискорейшего спуска.

1. Для минимизации функции f(x,y) используем формулу простого градиентного спуска (2.5):

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0 - h * \text{grad } f(\vec{z}_0), \qquad (4.1)$$

где $\vec{z}_0$ - точка с координатами x_0, y_0; h - длина шага в направлении антиградиента для заданной функции в точке $\vec{z}_0$.

2. Выбираем координаты начальной точки $\vec{z}_0$: $x_0=1$, $y_0=0$. В точке $\vec{z}_0$ вычисляем значение функции f(x,y):

$$f_0 = 30x_0 + 1.4y_0 + e^{8.41x_0^2 + 0.4y_0^2}. \qquad (4.2)$$

3. Определяем градиент заданной функции $g(z_0)$ в точке $\vec{z}_0$:

$$\vec{g}(\vec{z}_0) = \text{grad } f(\vec{z}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 = g_x\vec{e}_1 + g_y\vec{e}_2,$$

где

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 30 + 2*x_0*8.41*e^{8.41x_0^2+0.4y_0^2},$$
$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 1.4 + 2*y_0*0.4*e^{8.41x_0^2+0.40y_0^2}. \quad (4.3)$$

4. Проверяем выполнение третьего условия (2.4):

$$|g_x| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < \varepsilon, \qquad |g_y| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < \varepsilon; \quad (4.4)$$

если (4.4) выполняется, то точка $\vec{z}_0$ является точкой минимума и вычисления заканчиваем, а если нет то выполняем следующие пункты.

5. Вычисляем координаты x_1,y_1 новой точки $\vec{z}_1$ согласно (4.1):

$$x_1 = x_0 - h\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = x_0 - h\cdot(30 + 2*x_0*8.41*e^{8.41x_0^2+0.4y_0^2}),$$
$$y_1 = y_0 - h\cdot\frac{\partial f}{\delta y} = y_0 - h\cdot(1.4 + 2*y_0*0.4*e^{8.41x_0^2+0.40y_0^2}). \quad (4.5)$$

6. Вычисляем значение функции f(x,y) в точке $\vec{z}_1$:

$$f_1 = 30x_1 + 1.4y_1 + e^{8.41x_1^2+0.4y_1^2},$$

и сравниваем значения f_1 и f_0.

Если $f_1>f_0$, то шаг уменьшаем в два раза: h=h/2 и повторяем пункт 5. Если $f_1<f_0$, то полагаем, что $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$ и повторяем пункт 3 и т.д. до выполнения условий (4.4).

7. Пример программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для минимизации функции методами: простого градиентного спуска, деформированного многогранника и наискорейшего спуска:

Нахождение минимума функций двух переменных методом простого градиентного спуска

$$f(x,y) := 30\cdot x + 1.4\cdot y + e^{8.41\cdot x^2+0.4\cdot y^2}$$

$$gx(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y) \qquad gy(x,y) := \frac{d}{dy}f(x,y)$$

$$
M(f, gx, gy, h, \varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
x0 \leftarrow 0 \\
y0 \leftarrow 0 \\
px \leftarrow gx(x0, y0) \\
py \leftarrow gy(x0, y0) \\
\text{while } \left(|px| > \varepsilon \vee |py| > \varepsilon\right) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow k + 1 \\
x1 \leftarrow x0 - h \cdot gx(x0, y0) \\
y1 \leftarrow y0 - h \cdot gy(x0, y0) \\
h \leftarrow \dfrac{h}{2} \ \text{ if } \ f(x1, y1) > f(x0, y0) \\
\text{otherwise} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x0 \leftarrow x1 \\
y0 \leftarrow y1 \\
h \leftarrow \left(\dfrac{3}{2}\right) \cdot h \\
px \leftarrow gx(x0, y0) \\
py \leftarrow gy(x0, y0)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
z_0 \leftarrow k \\
z_1 \leftarrow x0 \\
z_2 \leftarrow y0 \\
z
\end{array}
\right.
$$

$\varepsilon := 10^{-4}$ $\qquad$ $h := 0.05$

$c := M(f, gx, gy, h, \varepsilon)$ $\qquad$ $k := c_0$ $\qquad$ $x := c_1$ $\qquad$ $y := c_2$

$$
c = \begin{pmatrix} 554 \\ -0.40914845 \\ -0.40141795 \end{pmatrix}
$$

Результаты

$x = -0.40914845$

$y = -0.40141795$

$k = 554$

$x := 0$ $\qquad$ $y := 0$

Given $\qquad$ $x > -1$ $\qquad$ $y > -1$

$x < 1$ $\qquad$ $y < 1$

$p := \text{Minimize}(f, x, y)$ $\qquad$ $p = \begin{pmatrix} -0.40914727 \\ -0.40144199 \end{pmatrix}$

Проверка встроенной программой MATHCAD

Метод Нелдера-Мида ORIGIN := 1

$$f(u,v) := 30\cdot u + 1.4\cdot v + e^{8.41\cdot u^2 + 0.4\cdot v^2}$$

$x0 := 0$ $y0 := 0$ $h := 0.1$ $\varepsilon := 10^{-6}$

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Min}(f, x0, y0, h, \varepsilon) := \\
\quad k \leftarrow 0 \\
\quad p \leftarrow 0 \\
\quad s \leftarrow 0 \\
\quad \text{while } h > \varepsilon \\
\qquad \text{if } p = 0 \wedge s = 0 \\
\qquad\quad x \leftarrow \begin{pmatrix} x0 \\ x0 + h \\ x0 \end{pmatrix} \\
\qquad\quad y \leftarrow \begin{pmatrix} y0 \\ y0 \\ y0 + h \end{pmatrix} \\
\qquad k \leftarrow k + 1 \\
\qquad n \leftarrow 1 \\
\qquad \text{for } i \in 1..3 \\
\qquad\quad n \leftarrow i \text{ if } f(x_i, y_i) > f(x_n, y_n) \\
\qquad xc \leftarrow 0 \\
\qquad yc \leftarrow 0 \\
\qquad \text{for } i \in 1..3 \\
\qquad\quad \text{if } i \neq n \\
\qquad\qquad xc \leftarrow xc + \dfrac{x_i}{2} \\
\qquad\qquad yc \leftarrow yc + \dfrac{y_i}{2} \\
\qquad xm \leftarrow 2\cdot xc - x_n \\
\qquad ym \leftarrow 2\cdot yc - y_n \\
\qquad \text{if } f(xm, ym) < f(x_n, y_n) \\
\qquad\quad x_n \leftarrow xm \\
\qquad\quad y_n \leftarrow ym \\
\qquad\quad s \leftarrow 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{otherwise} \\
\quad x_n \leftarrow xc + \dfrac{(x_n - xc)}{2} \\
\quad y_n \leftarrow yc + \dfrac{(y_n - yc)}{2} \\
\quad p \leftarrow p + 1 \\
\quad \text{if } \; p > 10 \\
\quad\quad n \leftarrow 1 \\
\quad\quad \text{for } \; i \in 1..3 \\
\quad\quad\quad n \leftarrow i \quad \text{if } \; f(x_i, y_i) < f(x_n, y_n) \\
\quad\quad \text{for } \; i \in 1..3 \\
\quad\quad\quad l_i \leftarrow \sqrt{(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2} \\
\quad\quad\quad l_n \leftarrow h \\
\quad\quad m \leftarrow 1 \\
\quad\quad \text{for } \; i \in 1..3 \\
\quad\quad\quad m \leftarrow i \quad \text{if } \; l_i < l_m \\
\quad\quad h \leftarrow \dfrac{l_m}{2} \\
\quad\quad x0 \leftarrow x_n \\
\quad\quad y0 \leftarrow y_n \\
\quad\quad p \leftarrow 0 \\
\quad\quad s \leftarrow 0 \\
M \leftarrow \begin{pmatrix} k \\ x0 \\ y0 \end{pmatrix} \\
M
\end{array}
$$

$$
\text{Min}(f,x0,y0,h,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 82 \\ -0.4091472 \\ -0.401442 \end{pmatrix}
$$

Проверка встроенной программой MATHCAD

$$
\textbf{Minimize(f,x0,y0)=}\begin{pmatrix} -0.4091473 \\ -0.401442 \end{pmatrix}
$$

```
program lab9;
    {Нахождение минимума функции двух переменных методом
наискорейшего спуска (для нахождения минимума функции одной
переменной используется метод золотого сечения}.
    {x,y координаты нулевого приближения}
    {e-точность вычисления}
    {a-параметр}
    {x1,y1 - координаты точки минимума}
    {aa-начальное значение параметра a=0}
    {ab-конечное значение параметра a=0.01÷10}
    {i - число итераций}
var x,y, e,a, x1,y1,aa,ab,a1,a2,f1,f2,g1,g2 : real;
var i : integer;
        function f(x,y : real) : real;
        {функция двух переменных x,y}
            begin
              f:=30*x+1.4*y+exp(8.41*x*x+0.4*y*y);          формула (4.2)
            end;      {f}

        function gx(x,y : real) : real;
        {функция для вычисления составляющей x градиента}
            begin
              gx:=30+2*x*8.41*exp(8.41*x*x+0.4*y*y);        формула (4.3)
            end;    {gx}

        function gy(x,y : real) : real;
        {функция для вычисления составляющей y градиента}
            begin
              gy:=1.4+2*y*0.4*exp(8.41*x*x+0.4*y*y);        формула (4.3)
            end;    {gy}

        function ff(a,x,y : real) : real;
        {функция для вычисления составляющей y градиента}
            begin
              ff:=f(x-a*gx(x,y),y-a*gy(x,y)                 формула (2.6)
            end;     {ff}
      begin
       writeln('Введите значения нулевого приближения x и y');
      readln (x,y);
       writeln('Введите точность вычислений e');
      readln (e);
```

```
  writeln('Введите нижнее значение параметра a');
 readln (aa);
  writeln('Введите верхнее значение параметра a');
 readln (ab);
   begin
     i:=0;
     g1:=gx(x,y);                                вычисление gx в точке x,y (4.3)
     g2:=gy(x,y);                                вычисление gy в точке x,y (4.3)
     t:=(sqrt(5)-1)/2;
       while (abs(g1)>=e) and (abs(g2)>=e) do begin
        i:=i+1;
        a1:=ab-(ab-aa)*t;
        a2:=aa+(ab-aa)*t;
        f1:=ff(a1,x,y);
        f2:=ff(a2,x,y);
          while abs(ab-aa)>=e do begin
            if f1>f2 then begin
            aa:=a1;
            a1:=a2;
            f1:=f2;
            a2:=aa+(ab-aa)*t;
            f2:=ff(a2,x,y);
            end else begin
            bb:=a2;
            a2:=a1;
            f2:=f1;
            a1:=ab-(ab-aa)*t;
            f1:=ff(a1,x,y);
            end;
          end;
        a:=(aa+ab)/2;
        x:=x-a*gx(x,y);
        y:=y-a*gy(x,y);
        g1:=gx(x,y);
        g2:=gy(x,y);
     end;
     x1:=x;
     y1:=y;
   writeln('Точка минимума x1=',x1,'....','y1=',y1,'число итераций i=',i);
 end.
```

8. Заполняем таблицу.

Метод	Точка минимума x/y	Точность	Число итераций
Метод простого градиентного спуска.	-0.40914 -0.40141	10^{-4}	554

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Пункты 1-4 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Безусловная и условная минимизация.
2. Определение поверхности уровня.
3. Определение уровня линии.
4. Свойства градиента функции.
5. Графическое определение направления убывания функции с помощью линий уровня.
6. Необходимое и достаточное условие минимума.
7. Матрица Гессе.
8. Характеристическая матрица и характеристическое уравнение.
9. Основные методы многомерной минимизации:
   а) покоординатный спуск;
   б) градиентные методы;
   в) метод деформированного многогранника.
10. Что называется “оврагом” на поверхности уровня.
11. Преимущества и недостатки градиентных методов.
12. Преимущества и недостатки метода деформированного многогранника.
13. Обусловленность задачи поиска минимума функций многих переменных.
14. Критерии окончания в задачах поиска минимума функций многих переменных.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

№	f(x)	ε
1	$x + y + sh(x^2 + y^2)$	10^{-4}
2	$5x + 7y + ch(x^2 + y^2)$	10^{-3}
3	$8x + y + sh(x^4 + y^2)$	10^{-4}
4	$x + y + e^{x^2 + y^2}$	10^{-5}
5	$3x + 2y + e^{x^2 + y^4}$	10^{-4}
6	$6x + y + ch(x^2 + y^4)$	10^{-5}
7	$25x + 0.9y + e^{5.76x^2 + 0.35y^2}$	10^{-4}
8	$x - 1.4y + e^{0.01x^2 + 0.11y^2}$	10^{-5}
9	$9x - 0.6y + e^{0.8x^2 + 0.19y^2}$	10^{-3}
10	$16x + 0.7y + e^{1.99x^2 + 0.26y^2}$	10^{-3}
11	$17x + 0.1y + e^{2.56x^2 + 0.27y^2}$	10^{-4}
12	$9x - 0.5y + ch(0.8x^2 + 0.2y^2)$	10^{-5}
13	$x - 1.5y + ch(0.01x^2 + 0.11y^2)$	10^{-3}
14	$15x + sh(1.99x^2 + 0.26y^2)$	10^{-4}
15	$24x + 0.8y + ch(5.29x^2 + 0.34y^2)$	10^{-4}
16	$2*x + 3*y + 5*(x^4 + y^2)$	10^{-4}
17	$12*x + 9*y + 5*(x^4 + y^4)$	10^{-4}
18	$2*x - 3*y + 50*(x^2 + y^2)$	10^{-5}
19	$-3*x - 8*y + 5*(x^2 + y^4)$	10^{-5}
20	$-x - 5y + sh(1.99x^2 + 0.26y^2)$	10^{-4}