МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«4» 03 2019 г.

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Методические указания к лабораторной работе №4
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Аппроксимация производных конечными разностями: методические указания к лабораторной работе №4 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 12 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 4.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 180 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории численного дифференцирования.
2. Изучение основных методов аппроксимации производных с помощью конечно-разностных соотношений.
3. Численное дифференцирование на ЭВМ с помощью разностей сложных функций и функций, заданных таблицей.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Аппроксимация производных конечными разностями. Производной функции y=f(x) называется предел:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2.1}$$

Для приближенного вычисления производной используется формула:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{2.2}$$

где Δx - некоторое конечное число.

Разностные соотношения, в которых **разность** между любыми **значениями аргумента** является **конечной** величиной, называются **конечными разностями**. Поэтому соотношение (2.2) также называют аппроксимацией производной с помощью конечных разностей.

Пусть известны значения функции $y_0, y_1, ..., y_i, ..., y_n$, вычисленные или заданные таблицей в точках $x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n$. **Точки** $x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n$ называются **узлами**, а разность между соседними значениями аргумента называется шагом $h_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,...,n$. Весь **набор узлов** называется **сеткой**. Если величина шага между узлами постоянна, то говорят, что узлы $x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n$ образуют равномерную сеткой с шагом h.

Для вычисления производной $y'i$ в точке точки x_i по формуле (2.2) можно использовать левую разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \tag{2.3}$$

правую разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \tag{2.4}$$

центральную разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h}. \qquad (2.5)$$

2. Погрешность численного дифференцирования. При численном дифференцировании с использованием приближенной формулы (2.2), например, по формулам (2.3-2.5), естественно возникает погрешность: $R(x,h)=y'(x)-y'_h(x)$, где $y'(x)$ - точное значение производной, $y'_h(x)$- значение производной вычисленное по приближенной формуле при шаге h.

Величина погрешности зависит от точки x, в которой вычисляется производная, и от шага h, чем меньше шаг, тем естественно погрешность меньше. Обычно погрешность R(x,h) записывают одним из способов:

$$R(x,h) = \psi(x,h) \cdot h^k = 0(h^k) = \varphi(x) \cdot h^k + 0(h^{k+1}). \qquad (2.6)$$

где, $\varphi(x)\cdot h^k$- называется главной частью погрешности аппроксимации, т.к. в формуле (2.6) это слагаемое при h<<1 будет гораздо больше второго, а величина k называется порядком погрешности или порядком точности аппроксимации относительно шага h.

С помощью разложения в ряд Тейлора получены следующие оценки погрешности для формул (2.3-2.5):

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + 0(h), \qquad \text{левая разность;}$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + 0(h), \qquad \text{правая разность;} \qquad (2.7)$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h} + 0(h^2), \qquad \text{центральная разность.}$$

Из этих формул следует, что центральная разность имеет самый высокий порядок точности, а именно, второй порядок по h.

3. Аппроксимирующие формулы для любого порядка точности. Аппроксимацию производных конечными разностями в общем случае можно рассматривать как замену производной от функции $y'=f'(x)$ производной от аппроксимирующей функции $\varphi'(x)$, $\varphi(x)\approx f(x)$, где в качестве аппроксимирующей функции используется интерполяционный многочлен: $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$. Поэтому увеличивая степень интерполяционного многочлена n мы будем увеличивать порядок точности аппроксимации производной.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при равномерном распределении узлов были получены следующие формулы для аппроксимации производной с помощью центральных разностей второго и четвертого порядка точности:

$$y'_i = \frac{1}{2 \cdot h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - y^{(3)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{6},$$

$$y'_i = \frac{1}{12 \cdot h}(y_{i-2} - 8 \cdot y_{i+1} + 8 \cdot y_{i-1} - y_{i-2}) + y^{(5)}(\xi) \cdot \frac{h^4}{30}, \tag{2.8}$$

где, $y^{(k)}(\xi)$ - значение "к"-той производной в некоторой точке на отрезке $[x_{i-2}, x_{i+2}]$.

В крайних точках таблицы или в крайних узлах нельзя использовать соотношения для центральных разностей (2.8). В этих точках используются односторонние формулы численного дифференцирования:

$$y'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + 0(h^2),$$

$$y'(x_n) = \frac{1}{2 \cdot h}(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) + 0(h^2). \tag{2.9}$$

4. Выбор оптимального шага при численном дифференцировании. Полная погрешность численного дифференцирования определяется не только погрешностью используемой формулы численного дифференцирования, но и погрешность возникающей при вычислениях по этим формулам. Например, при вычисления по первой формуле (2.8) абсолютная предельная погрешность будет равна

$$\bar{\Delta}(y') = \bar{\Delta}[\frac{1}{2 \cdot h}(y_{i+1} - y_{i-1})] = \frac{1}{2 \cdot h}(\bar{\Delta}y_{i+1} + \bar{\Delta}y_{i-1}) \le \frac{\bar{\Delta}y}{h},$$

$$\bar{\Delta}y_{i+1} \le \bar{\Delta}y, \qquad \bar{\Delta}y_{i-1} \le \bar{\Delta}y; \tag{2.10}$$

где $\bar{\Delta}y$ - абсолютная предельная погрешность вычислений значений функции y из-за ошибок округления.

Так как величина $\bar{\Delta}y$ в формуле (2.10) является абсолютной предельной погрешностью входных данных, а $\bar{\Delta}(y')$- абсолютной предельной погрешностью результата, то согласно определения абсолютного числа обусловленности δ_Δ для задачи численного дифференцирования из (2.10) имеем:

$\delta_\Delta = \bar{\Delta}(y') / \bar{\Delta}y = 1/h$,

т.е. задача плохо обусловлена, т.к. при при $h \to 0$ число обусловленности стремится к бесконечности.

Полная абсолютная погрешность вычисления производной $R(y_i')$ будет равна сумме погрешности (2.10) и погрешности формулы (2.8):

$$R(y_i') = \frac{\overline{\Delta}(y)}{h} + \left|y^{(3)}(\xi)\right| \frac{h^2}{6}. \qquad (2.11)$$

Первое слагаемое (погрешность вычислений) при уменьшении шага увеличивается, а второе слагаемое (погрешность самой формулы) уменьшается. Естественно будет такой шаг при котором полная погрешность будет минимальной., такой шаг называется оптимальным,

Оптимальный шаг $h_{опт}$ определяется из условия минимума полной погрешности $R(y'_i)$, т.е. из решения уравнения $R'_h(y'_i)=0$, где значок h - говорит о том , что производная берется по h. Например, для формулы центральных разностей (2.8) из соотношения (2.11 имеем:

$$h_{опт} = \sqrt{\frac{3 \cdot \overline{\Delta}(y)}{\left|y^{(3)}(\xi)\right|}}. \qquad (2.12)$$

Естественно для каждой формулы численного дифференцирования будет своя формула для вычисления оптимального шага.

Если величина абсолютной предельной погрешности вычислений значений y определяется погрешностью округления (машинным эпсилон) $\overline{\Delta}(y)=\varepsilon_\mu |y|$, то можем записать:

$$h_{опт} = \sqrt{\frac{3 \cdot \varepsilon_\mu |y|}{\left|y^{(3)}(\xi)\right|}}. \qquad (2.13)$$

Обычно на практике полагают, что $\dfrac{|y|}{\left|y^{(k)}(\xi)\right|} \approx 1$.

5. Улучшение аппроксимации с помощью метода Рунге -Ромберга. Пусть $y'(x)$ - точное значение производной, а $y'_h(x)$ -значение производной, вычисляемое по формуле численного дифференцирования, имеющей порядок точности *к* относительно шага h. Следовательно можем записать:

$$y'(x) = y'_h(x) + \varphi(x) \cdot h^k + 0(h^{k+1}). \qquad (2.14)$$

Запишем это же соотношение для шага $h_1=ph$:

$$y'(x) = y'_{ph}(x) + \varphi(x) \cdot (p \cdot h)^k + 0((ph)^{k+1}). \qquad (2.15)$$

Вычитая из (2.15) соотношение (2.14) имеем

$$\varphi(x) \cdot h^k = \frac{y'_h(x) - y'_{ph}(x)}{p^k - 1} + 0(h^{k+1}). \qquad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.14) получаем

$$y'(x) = y'_h(x) + \frac{y'_h(x) - y'_{ph}(x)}{p^k - 1} + 0(h^{k+1}). \qquad (2.17)$$

Формула (2.17) позволяет по результатам двух расчетов производной с шагом h и шагом ph по одной и той же формуле, имеющей порядок точности k, найти ее уточненное значение с порядком точности k+1. Данный прием называется методом Рунге-Ромберга.

III. ЗАДАНИЕ

1.Написать формулу для вычисления с помощью центральных разностей 2-го порядка точности производную от функции, заданной дискретно, из таблицы заданий.

Оценить $h_{опт}$, полагая, что $|y| / |y^{(n)}| \approx 1$, а $\varepsilon_\mu = 10^{-10}$. Улучшить аппроксимацию в заданных узлах с помощью метода Рунге-Ромберга.

3.Написать программу и рассчитать на ЭВМ производную этой функции в заданных узлах.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вычислить с помощью центральных разностей второго порядка точности производную от функции, заданной дискретно:

i	0	1	2	3	4	5
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	3	5	6	3	-1	-2

Уточнить производную в центральных узлах i=2,3.

Порядок выполнения работы

1.Для аппроксимации производной в узлах i=2,3 применяем формулу центральных разностей (2.8) второго порядка точности с шагом h=0.1:

$$y'_{i,h} = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}), \ \ i = 2,3. \qquad (4.1)$$

Для аппроксимации производной в узлах i=0,1 и i=4,5 применяем формулы (2.9) для крайних узлов таблицы:

$$y'_{0,h} = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2),$$

$$y'_{1,h} = \frac{1}{2h}(-3y_1 + 4y_2 - y_3),$$

$$y'_{4,h} = \frac{1}{2h}(3y_4 - 4y_3 + y_2),$$

$$y'_{5,h} = \frac{1}{2h}(3y_5 - 4y_4 + y_3). \qquad (4.2)$$

2.Оцениваем величину $h_{опт}$. Согласно (2.13) с учетом, что $|y| / |y^{(n)}| \approx 1$ и $\varepsilon_\mu = 10^{-10}$ имеем $h_{опт} \sim 10^{-3}$. Согласно таблицы $h > h_{опт}$, поэтому для уточнения значений производной в узлах 2 и 3 .можно применять метод Рунге-Ромберга.

3.Положим р=2, т.к. при р>2 мы выйдем за пределы таблицы. Для р=2 определяем шаг: h_1=2h.

Для узлов 0,1 и 4,5 при шаге h_1=2h нужно пользоваться формулами (4.2)

$$y'_{0,h} = \frac{1}{4h}(-3y_0 + 4y_2 - y_4), \qquad y'_{1,2h} = \frac{1}{4h}(-3y_1 + 4y_3 - y_5),$$

$$y'_{4,2h} = \frac{1}{4h}(3y_4 - 4y_2 + y_0), \qquad y'_{5,2h} = \frac{1}{2h}(3y_5 - 4y_3 + y_1).$$

Для узлов i=2,3 формула (4.1) запишется в виде:

$$y'_{i,2h} = \frac{1}{4h}(y_{i+2} - y_{i-2}), \ \ i = 2,3. \qquad (4.3)$$

Так как формула (4.1) второго порядка точности, то k=2. Подставляем (4.1) и (4.3) в формулу (2.17) получаем окончательную формулу:

$$\bar{y}'_i = y'_{i,h} + \frac{y'_{i,h} - y'_{i,2h}}{2^2 - 1}, \ \ i = 2,3; \qquad (4.4)$$

где $\bar{y}'_{i,h}$- уточненное значение производной.

4. Примеры программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для вычисления производной для функции заданной дискретным образом имеет следующий вид:

$$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h := x_1 - x_0$$

$$yh(x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\cdot h}\right)\cdot(-3\,y_0 + 4\cdot y_1 - y_2) \\ \left(\frac{1}{2\cdot h}\right)\cdot(-3\,y_1 + 4\cdot y_2 - y_3) \\ \frac{y_3 - y_1}{2\cdot h} \\ \frac{y_4 - y_2}{2\cdot h} \\ \left(\frac{1}{2\cdot h}\right)\cdot[(3\,y_4 - 4\cdot y_3) + y_2] \\ \left(\frac{1}{2\cdot h}\right)\cdot[(3\,y_5 - 4\cdot y_4) + y_3] \end{bmatrix} \qquad yh2(x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4\cdot h}\right)\cdot(-3\,y_0 + 4\cdot y_2 - y_4) \\ \left(\frac{1}{4\cdot h}\right)\cdot(-3\,y_1 + 4\cdot y_3 - y_5) \\ \frac{y_4 - y_0}{4\cdot h} \\ \frac{y_5 - y_1}{4\cdot h} \\ \left(\frac{1}{4\cdot h}\right)\cdot[(3\,y_4 - 4\cdot y_2) + y_0] \\ \left(\frac{1}{4\cdot h}\right)\cdot[(3\,y_5 - 4\cdot y_3) + y_1] \end{bmatrix}$$

$$yhh(x) := yh(x) + \frac{yh(x) - yh2(x)}{2^2 - 1}$$

$$yh(x) = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ -10 \\ -35 \\ -45 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad yh2(x) = \begin{pmatrix} 40 \\ -2.5 \\ -10 \\ -17.5 \\ -60 \\ -32.5 \end{pmatrix} \qquad yhh(x) = \begin{pmatrix} 20 \\ 40.833 \\ -10 \\ -40.833 \\ -40 \\ 17.5 \end{pmatrix}$$

```
   program lab4;
     {Вычисление производных для дискретной функции.}
     {y[i]- функция, x[i] - аргумент}
     {yh[i] производная в узлах xi (i=0,...,5], yt-уточненное значение}
var h,yt : real;
var x,y,yh : array[0..5] of real;
var i,k : integer;
        begin
```

```
            writeln('Введите шесть значений величины x');
              readln (x[0],x[1],x[2],x[3],x[4],x[5]);
            writeln('Введите шесть значений величины y');
              readln (y[0],y[1],y[2],y[3],y[4],y[5]);
            writeln('Введите значение номер узла, где производится
уточнение производной');
              readln (k);
               h:=x[1]-x[0];
                 for i:=0 to 5 do begin
                   if (i>0) and (i<5) then yh[i]:=(y[i+1]-y[i-1])/(2*h)          (4.1)
                     else begin
                      if i=0 then yh[0]:=(-3*y[0]+4*y[1]-y[2])/(2*h);           (4.2)
                      if i=5 then yh[5]:=(3*y[5]-4*y[4]+y[3])/(2*h);             (4.2
                     end;
                 end;
             yt:=(y[k+2]-y[k-2])/(4*h);                                          (4.3)
             yt:=yh[k]+(yh[k]-yt)/(2*2-1);                                       (4.4)
          writeln('Значения производных в шести заданных узлах');
          writeln('yh[0]=',yh[0], 'yh[1]=',yh[1],'yy[2]=',yh[2],
          'yh[3]=',yh[3], 'yh[4]=',yh[4], 'yh[5]=',yh[5]);
          writeln('Уточненное значение производной в узле с номером k');
          writeln('yh[k]=',yt);
        end.
```

6.Заполняем таблицу

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
yh_i	25	30	-10	-35	-45	5
$yh2_i$	40	-2.5	-10	-17.5	-60	-32.5
yhh_i	20	40.833	-10	40.833	-40	17.5

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1.Название лабораторной работы.
2.Индивидуальное задание.
3.Теоретическая часть.
4.Ответы на контрольные вопросы.
5.Текст программы.
6.Результаты расчета.
Пункты 1-5 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определение конечной разности.
2. Что такое правая, левая, центральная разность?
3. Определение узла и сетки.
4. Определение погрешности аппроксимации производной.
5. Что такое порядок точности (погрешности)?
6. Порядок точности правой, левой и центральной разности.
7. Метод Рунге-Ромберга.
8. Определение главной части погрешности аппроксимации.
9. Определение конечной разности для функции двух переменных.
10. Абсолютное число обусловленности численного дифференцирования.
11. Оптимальный шаг при численном дифференцировании.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В последней колонке число k указывает номер узла, в котором необходимо улучшить точность аппроксимации производной.

№	x	Табличные значения f(x)						k
	y	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	
1.	x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0
	y	0.03	0.04	0.03	0.01	0.0	-0.1	
2.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	5
	y	-0.5	-0.2	0	0.1	0.05	0	
3.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	2
	y	0.7	0.5	0.7	0.8	0.9	0.12	
4.	x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	3
	y	-0.6	-0.5	-0.3	0	0.4	1	
5.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	1
	y	0.8	0.5	0.4	0.5	0.6	0.9	
6.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	4
	y	0.0	0.1	0.0	-0.1	-0.2	0.0	
7.	x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0
	y	-0.03	-0.04	-0.03	-0.01	-0.01	-0.1	
8.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	5
	y	0.3	0.2	0	-0.1	-0.05	0	

№	x y	Табличные значения f(x)						k
		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	
9.	x y	0.05 -0.7	0.1 -0.5	0.15 -0.7	0.2 -0.8	0.25 -0.9	0.3 -0.12	2
10.	x y	0.2 0.6	0.4 0.5	0.6 0.3	0.8 0	1.0 -0.4	1.2 -1	3
11.	x y	0.1 -0.8	0.2 -0.5	0.3 -0.4	0.4 -0.5	0.5 -0.6	0.6 -0.9	1
12.	x y	0.05 0.0	0.1 -0.1	0.15 0.0	0.2 0.1	0.25 0.2	0.3 0	4
13.	x y	0.1 0.2	0.2 0.3	0.3 0.5	0.4 0.5	0.5 0.2	0.6 -0.2	2
14.	x y	0.15 -0.2	0.25 -0.4	0.3 -0.6	0.35 -0.5	0.4 -0.45	0.45 -0.44	1
15.	x y	0.5 0.0	0.6 1	0.7 0.0	0.8 -1	0.9 0.0	1.0 1	3
16.	x y	0.05 0.3	0.1 -0.1	0.15 0.5	0.2 0.1	0.25 0.2	0.3 0.4	4
17.	x y	0.01 -0.13	0.02 0.04	0.03 -0.13	0.04 0.01	0.05 -0.21	0.06 -0.01	0
18.	x y	0.1 -0.3	0.2 0.25	0.3 0,2	0.4 -0.2	0.5 -0.05	0.6 0,3	5
19.	x y	0.05 0.7	0.1 0.5	0.15 -0.75	0.2 0.8	0.25 0.9	0.3 0.12	2
20.	x y	0.2 -0.6	0.4 -0.5	0.6 -0.2	0.8 0,1	1.0 0.4	1.2 1,5	3