

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 04.05.2025 10:50:01

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabff73a947df6a1b516b56d088

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Локтионова
« 6 » 05 2025 г.
(ЮЗГУ)



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Методические указания по выполнению лабораторных работ для
студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»

УДК 004.383.3

Составитель: Д.С. Коптев

Рецензент

Доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор
кафедры космического приборостроения и систем связи

В.Г. Андронов

Цифровая обработка сигналов: методические указания по выполнению лабораторных работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев – Курск, 2021. – 187 с.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат развернутые теоретические сведения о синтезе цифровых КИХ-фильтров методом окон, синтезе цифровых БИХ-фильтров методом билинейного Z-преобразования, синтезе оптимальных по Чебышеву цифровых КИХ-фильтров, многоскоростной цифровой обработке сигналов, обработке сигналов на основе Вейвлет-преобразования, применении адаптивной фильтрации в обработке цифровых сигналов, правила и последовательность выполнения лабораторных работ, варианты заданий и вопросы для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины «Цифровая обработка сигналов».

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *06.09.2021г.* Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 10,86. Уч.-изд. л. 9,84. Тираж 100 экз. Заказ *1025* Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Введение

Анализируя развитие теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) как нового научного направления в области информационных технологий, можно выделить круг вопросов и характерные черты, отличающие ее от других областей знаний. Предмет исследований теории ЦОС полностью связан с самим *процессом обработки* цифровых сигналов в конкретной вычислительной среде и, как правило, не зависит от цели преобразования, которая определяется областью применения. Для разработчика системы или устройства ЦОС, реализующего заданный математический оператор преобразования, неважно, где и как будут использоваться результаты преобразования. Задача заключается, прежде всего, в минимизации вычислительных затрат. При этом дополнительно могут учитываться отведенные ресурсы памяти программ и данных, а также допустимая вычислительная погрешность. Результаты одного и того же класса алгоритмов преобразования, например линейной свертки, в одном случае обеспечивают воспроизведение желаемой частотной характеристики, в другом – согласованную фильтрацию, в третьем – адаптивную коррекцию или эхо-компенсацию и т.п.

С позиции самых общих представлений проектирование систем и устройств ЦОС включает 3 этапа (рисунок 1).

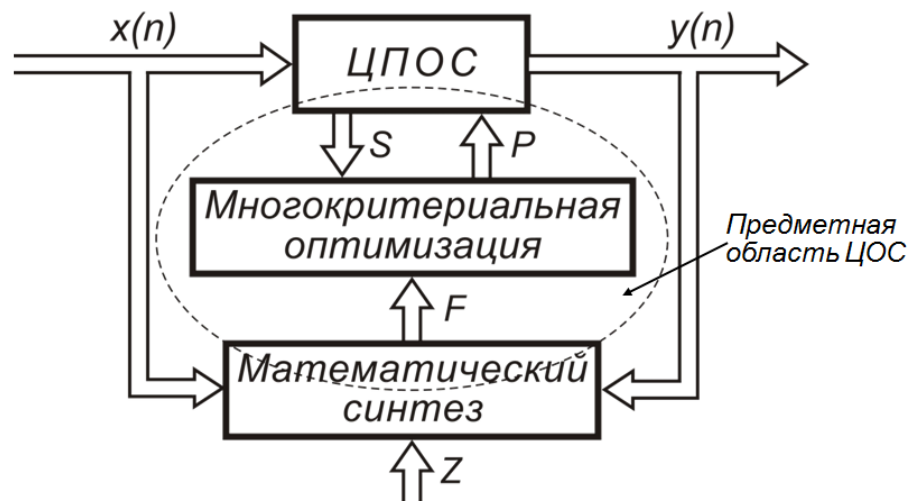


Рис. 1. Этапы проектирования систем и устройств ЦОС

На I этапе (этапе математического синтеза) синтезируется оператор F в форме математических выражений

$$y(n) = F\{x(n)\},$$

связывающих вход $x(n)$ и выход $y(n)$ ЦСП (ЦПОС) и обеспечивающих достижение заданной цели преобразования Z , например воспроизведение желаемой частотной характеристики фильтра с заданной точностью. При этом не учитывается конкретная среда реализации оператора F .

На II этапе (этапе многокритериальной оптимизации) строится оператор P , который представляет собой модификацию математического оператора F или некоторую функцию оператора F с учётом ограничений S , накладываемых конкретной средой реализации. Если класс операторов F синтезируется с использованием методов и математических моделей общей теории сигналов и систем, то теория и методы ЦОС должны показать, как достигнуть поставленной цели преобразования Z при общих минимальных затратах на реализацию оператора P в конкретной вычислительной среде: моделирование на ЭВМ, проектирование многопроцессорных систем, однокристальное исполнение на ЦСП и ПЛИС заданного семейства. Решение задач, поставленных на этапе многокритериальной оптимизации, и составляет предметную область ЦОС.

На III этапе (этапе эффективной программной реализации оператора P) завершается процесс проектирования систем ЦОС.

Весь комплекс задач, которые встают на пути разработчика систем и устройств ЦОС в соответствии с представленной на рис. 1. схемой, можно свести к следующему [28].

1. Проблема представления аналогового сигнала в цифровой форме.

В существующих технических системах и устройствах обычно используется аналоговая форма представления информации в ее конечном виде. Поэтому применение методов и средств ЦОС должно предполагать необходимость аналого-цифрового и цифроаналогового преобразований, со всеми вытекающими последствиями методологического и схемотехнического характера.

2. Проблема выбора класса цифровых цепей и преобразований, обеспечивающих воспроизведение заданного математического оператора F или его функции с априорно заданной точностью (этап математического синтеза).

Синтез оператора преобразования F проводится, как правило, в одном из двух классов цифровых цепей (с конечной или бесконечной импульсными характеристиками). Каждый класс имеет

свои достоинства и недостатки с позиции потенциальных возможностей эффективной реализации оператора F .

3. Проблема аппроксимации математического оператора F в заданном классе цифровых цепей.

Характеристики реально воспроизводимого оператора P могут существенно отличаться от желаемых, и аппроксимация заключается в расчете оптимальных параметров цифровой цепи, минимизирующих отклонения характеристик воспроизводимого оператора P от желаемого оператора F .

4. Проблема синтеза (выбора) структуры оператора P и оптимизации ее параметров (этап многокритериальной оптимизации).

Воспроизведение желаемых характеристик оператора F с заданной точностью является основной целью синтеза структуры оператора P и последующего расчета параметров цифровой цепи, которые могут быть реализованы различными путями, характеризующимися разными затратами при практической реализации: объемом вычислений в единицу времени, емкостью памяти данных и программ и своими потерями, связанными с собственными шумами и неточным представлением коэффициентов.

3. Проблема анализа влияния собственных шумов и неточного представления параметров оператора P на точность воспроизведения желаемых характеристик.

Эта проблема включает в себя такие вопросы, как анализ устойчивости, причин возникновения переполнений и предельных циклов, выбор масштабирующих множителей и разрядности представления данных и коэффициентов.

6. Проблема синтеза малошумящих и низкочувствительных к неточному представлению коэффициентов структур оператора преобразования P .

В зависимости от структуры цифровой цепи и выбора ее параметров влияние собственных шумов и неточного представления коэффициентов на конечный результат обработки может быть различным. Поэтому не менее важной проблемой синтеза структуры оператора преобразования P является проблема построения малошумящих и низкочувствительных структур цифровых цепей.

Лабораторная работа № 1

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ОКОН

Цель работы: изучение различных типов «окон» и их свойств, синтез цифровых низкочастотных, высокочастотных, полосовых и режекторных фильтров.

Краткая теория

1. Основные определения

Цифровой фильтр (ЦФ) в широком смысле – это любая цифровая система или цепь, которая согласно заданному алгоритму осуществляет извлечение цифрового сигнала либо его параметров из действующей на входе системы (цепи) смеси сигнала с помехой.

Цифровой фильтр в узком смысле – это частотно-избирательная цепь, которая обеспечивает селекцию цифровых сигналов по частоте; к таким фильтрам относятся: фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр верхних частот (ФВЧ), полосовой фильтр (ПФ), режекторный фильтр (РФ).

Цифровые фильтры, как и любая цифровая система, могут быть реализованы аппаратно, программно или аппаратно-программно. Последнее определяется целью, назначением и местом ЦФ в предполагаемой системе.

Аппаратная реализация подразумевает использование разнообразных блоков (регистров, сумматоров, умножителей, устройств памяти, логических элементов и т.п.).

Программная реализация означает, что фильтр представлен в виде программы, написанной на определенном языке программирования. Так, для персонального компьютера это будет любой из языков высокого уровня, а для микропроцессора, микроконтроллера или цифрового сигнального процессора – язык соответствующего ассемблера.

Аппаратно-программная реализация предполагает, что часть функций фильтра выполняется аппаратно (аналого-цифровое и цифроаналоговое преобразования, умножение, прием/передача данных и т.д.), а другая часть функций выполняется программно.

Под *проектированием ЦФ* понимается процесс, в результате которого создается программа или цифровое устройство, отвечающее заданным требованиям и ограничениям.

Процесс проектирования ЦФ включает в себя следующие этапы:

1. *Синтез*, результатом которого является функциональная схема фильтра с коэффициентами. Собственно процедуры синтеза фильтров с конечной и бесконечной импульсными характеристиками (КИХ и БИХ фильтров) существенно различаются, однако имеют одинаковую последовательность: задание требований к фильтрам; решение задачи аппроксимации характеристик фильтра, в результате которой рассчитываются коэффициенты передаточной функции (разностного уравнения); конструирование функциональной схемы ЦФ.

2. *Выбор или разработка рациональных алгоритмов вычислений* с учетом арифметики, используемой при заданном методе реализации: плавающая или фиксированная запятая. Алгоритм зависит от разрядности регистров процессора, количества аккумуляторов, возможности распараллеливания операций, наличия устройств, выполняющих операцию умножения с накоплением, и других особенностей процессора. Конечной целью данного этапа является обеспечение функционирования фильтра в реальном времени при минимальных потерях качества обработки сигналов.

3. *Проверка моделированием* проектируемого фильтра в нереальном времени по стандартным сигналам с использованием программных эмуляторов. Задача проверки моделированием состоит в обнаружении и устранении возможных логических и прочих скрытых ошибок, испытании на соответствие сконструированного фильтра заданным характеристикам, включая частотные, временные, шумовые и др.

4. *Практическая реализация и отладка* в реальном времени с помощью отладочных модулей.

Результаты проверки моделированием и отладки могут оказать влияние на изменение ряда решений – от выбора структурной схемы ЦФ, вплоть до задания новых требований.

Замечание. *В настоящей работе рассматриваются действия только на этапе синтеза ЦФ, причем основное внимание уделяется линейным частотно-избирательным фильтрам.*

2. Синтез цифровых фильтров

Каждый из классов ЦФ имеет свои, принципиально отличные, методы синтеза, которые рассматриваются отдельно для каждого класса, а сами методы синтеза могут быть как оптимальными («оптимальный» означает наилучший в некотором заранее

определенном смысле, например, по заданному критерию), так и не оптимальными. В связи с этим выделяют фильтры, в которых реализованы принципы оптимального синтеза, и фильтры, при синтезе которых принципы оптимальности не принимаются во внимание.

Замечание. В настоящей работе принципы оптимальности не учитываются.

2.1. Задание требований к цифровым фильтрам

Требования (спецификации) к фильтрам могут формулироваться как во временной, так и в частотной областях, что определяется назначением фильтра и областью его описания.

Во временной области требования могут задаваться к импульсной $h(n)$ и переходной $g(n)$ характеристике при широких допусках к частотным свойствам фильтра.

Частотно-избирательные фильтры обычно синтезируются в частотной области. При этом в процессе синтеза сами частоты могут задаваться как действительными f [Гц], ω [рад/с], так и нормированными на частоту дискретизации в $\Gamma\omega$ $\hat{\omega}$ [рад], что определяется удобствами и традициями.

В частотной области требования могут предъявляться:

1. Только к амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ) без каких-либо ограничений на фазочастотные характеристики (ФЧХ).

2. Только к ФЧХ, когда важно сохранение фазовых, а потому и временных соотношений между гармоническими составляющими принимаемого сигнала.

3. Одновременно и к АЧХ, и к ФЧХ.

Замечание. В настоящей работе рассматривается синтез КИХ-фильтров с заданной АЧХ и линейной ФЧХ, то есть синтез в частотной области с одновременно наложенными ограничениями на АЧХ и ФЧХ.

Рассмотрим задание требований к частотно-избирательным ЦФ. Идеальные частотно-избирательные ЦФ являются физически нереализуемыми, поэтому необходимо аппроксимировать их АЧХ при заранее определенных допусках, зависящих от ряда практических ограничений. Эти ограничения связаны, прежде всего, с назначением синтезируемого фильтра. Все ограничения и допуски составляют требования, предъявляемые к фильтру.

Требования к частотно-избирательным фильтрам включают в себя:

1. Задание частоты дискретизации $\hat{\omega}_\partial$ [рад] и типа избирательности.

2. Задание требований к АЧХ $|H(e^{j\hat{\omega}})|$.

3. Выбор метода аппроксимации АЧХ.

2.2. Типы частотно-избирательных фильтров и задание требований к ним

Диаграммы требований к АЧХ синтезируемых частотно-избирательных КИХ-фильтров представлены на рис. 1.

2.2.1. Фильтр нижних частот

Реальный ФНЧ имеет три частотных полосы (рис. 1а): полосу пропускания, переходную полосу (ПП), и полосу задерживания (ПЗ), ослабления или подавления.

Полоса пропускания ограничивается *граничной частотой* в ПП $\hat{\omega}_n$; ширина ПП $\Delta\hat{\omega}_{\text{ПП}} = \hat{\omega}_n$; δ_n – отклонение АЧХ от 1 в ПП, часто выражаемое в дБ с использованием величины α_n , получившей название *максимально допустимого затухания в ПП*:

$$\alpha_n = -20 \lg(1 - \delta_n).$$

Переходная полоса располагается между полосами пропускания и задерживания; ширина переходной полосы $\Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_n$. Поскольку в этой полосе требования не задаются, *удовлетворительным окажется любое решение, если оно соответствует требованиям в полосах пропускания и задерживания.*

Полоса задерживания (ослабления, подавления) лежит в пределах от *граничной частоты* в ПЗ $\hat{\omega}_3$ до половины частоты дискретизации $\hat{\omega}_\partial/2$; ширина ПЗ $\Delta\hat{\omega}_{\text{ПЗ}} = \hat{\omega}_\partial/2 - \hat{\omega}_3$; δ_3 – отклонение АЧХ от 0 в ПЗ, часто выражаемое в дБ с использованием величины α_3 , получившей название *минимально допустимого затухания в ПЗ*:

$$\alpha_3 = -20 \lg(\delta_3).$$

2.2.2. Фильтр верхних частот

Реальный ФВЧ имеет, как и ФНЧ, три частотных полосы, которые расположены в обратном, относительно ФНЧ, порядке (рис. 1б).

Полоса задерживания лежит в пределах от 0 до $\hat{\omega}_3$; ширина ПЗ $\Delta\hat{\omega}_{ПЗ} = \hat{\omega}_3$.

Переходная полоса лежит в пределах от $\hat{\omega}_3$ до $\hat{\omega}_n$; ширина переходной полосы $\Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_n - \hat{\omega}_3$.

Полоса пропускания лежит в пределах от $\hat{\omega}_n$ до $\hat{\omega}_\delta/2$; ширина ПП $\Delta\hat{\omega}_{ПП} = \hat{\omega}_\delta/2 - \hat{\omega}_n$.

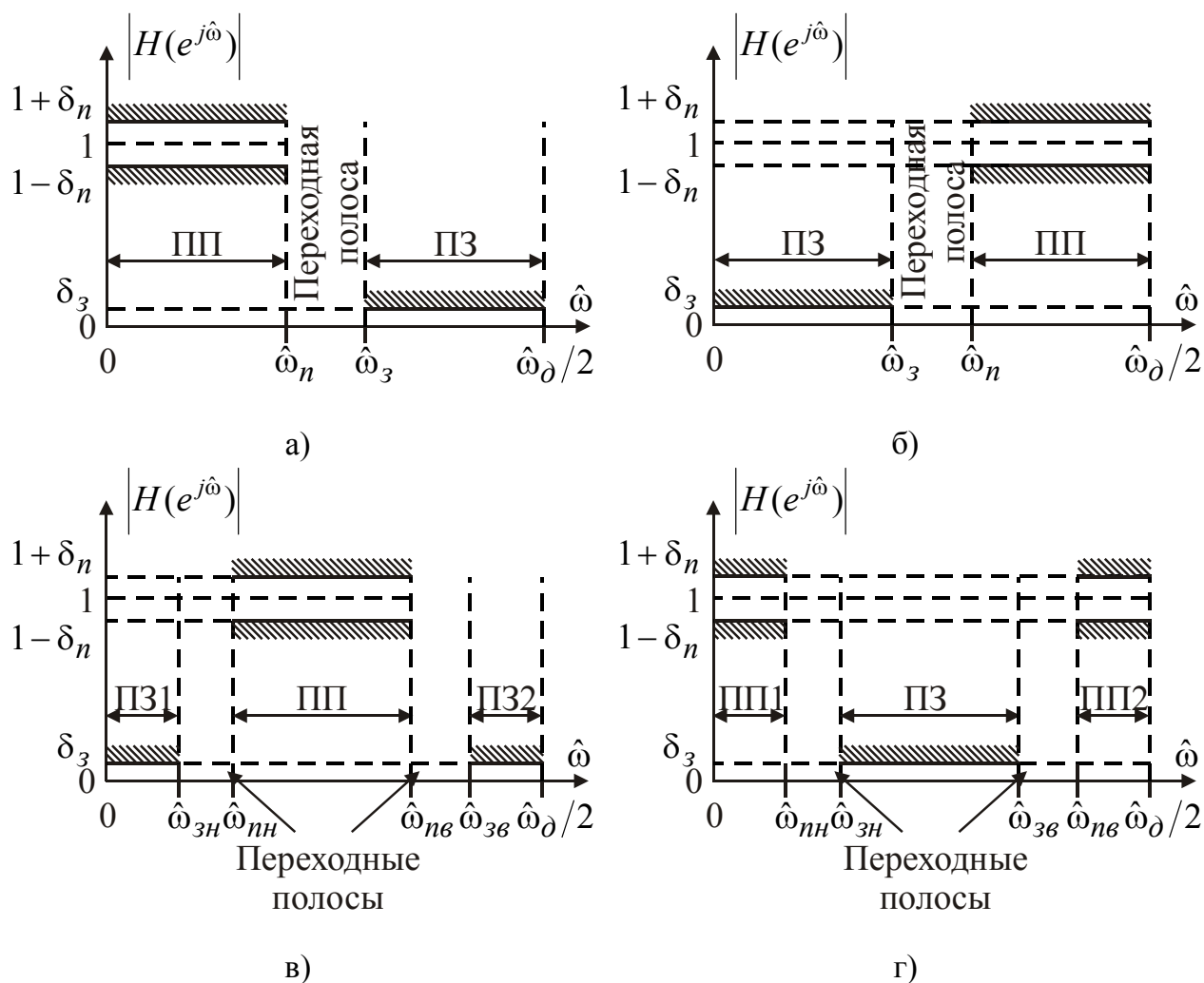


Рис. 1. Диаграммы требований к АЧХ частотно-избирательных КИХ-фильтров:
 а) фильтр нижних частот; б) фильтр верхних частот; в) полосовой фильтр;
 г) режекторный фильтр

2.2.3. Полосовой фильтр

Реальный ПФ, иногда называется также полосно-пропускающим, характеризуется пятью частотными полосами (рис. 1в), из которых одна – центральная – полоса пропускания, две полосы задерживания и

две переходные полосы. Обозначения, приведенные на рис. 1в, следующие:

$\hat{\omega}_{3н}$ – граничная частота первой полосы задерживания (ПЗ1); ширина ПЗ1 $\Delta\hat{\omega}_{ПЗ1} = \hat{\omega}_{3н}$;

$\hat{\omega}_{нн}$ – нижняя граничная частота ПП; $\hat{\omega}_{нв}$ – верхняя граничная частота ПП; ширина ПП $\Delta\hat{\omega}_{ПП} = \hat{\omega}_{нв} - \hat{\omega}_{нн}$;

$\hat{\omega}_{3в}$ – граничная частота второй полосы задерживания (ПЗ2); ширина ПЗ2 $\Delta\hat{\omega}_{ПЗ2} = \hat{\omega}_{\partial}/2 - \hat{\omega}_{3в}$.

Переходные полосы 1 и 2 имеют ширину $\Delta\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_{нн} - \hat{\omega}_{3н}$ и $\Delta\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_{3в} - \hat{\omega}_{нв}$.

2.2.4. Режекторный фильтр

Реальный РФ, иногда называется также полосно-заграждающим, подобно ПФ характеризуется пятью полосами (рис. 1г), из которых две полосы пропускания, одна полоса задерживания и две переходные полосы. Обозначения, приведенные на рис. 1г, следующие:

$\hat{\omega}_{нн}$ – граничная частота первой полосы пропускания (ПП1); ширина ПП1 $\Delta\hat{\omega}_{ПП1} = \hat{\omega}_{нн}$;

$\hat{\omega}_{3н}$ – нижняя граничная частота ПЗ; $\hat{\omega}_{3в}$ – верхняя граничная частота ПЗ; ширина ПЗ $\Delta\hat{\omega}_{ПЗ} = \hat{\omega}_{3в} - \hat{\omega}_{3н}$;

$\hat{\omega}_{нв}$ – граничная частота второй полосы пропускания (ПП2); ширина ПП2 $\Delta\hat{\omega}_{ПП2} = \hat{\omega}_{\partial}/2 - \hat{\omega}_{нв}$.

Переходные полосы 1 и 2 имеют ширину $\Delta\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_{нн} - \hat{\omega}_{3н}$ и $\Delta\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_{3в} - \hat{\omega}_{нв}$.

Замечание. При синтезе ЦФ вместо частот $\hat{\omega}_з$ и $\hat{\omega}_н$, $\hat{\omega}_{3н}$ и $\hat{\omega}_{нн}$, $\hat{\omega}_{3в}$ и $\hat{\omega}_{нв}$ могут задаваться частоты среза $\hat{\omega}_с$, $\hat{\omega}_{сн}$, $\hat{\omega}_{св}$ соответственно. В случае синтеза КИХ-фильтров методом окон, при заданных частотах $\hat{\omega}_з$ и $\hat{\omega}_н$, $\hat{\omega}_{3н}$ и $\hat{\omega}_{нн}$, $\hat{\omega}_{3в}$ и $\hat{\omega}_{нв}$, частоты $\hat{\omega}_с$, $\hat{\omega}_{сн}$, $\hat{\omega}_{св}$ могут быть найдены с использованием следующих математических выражений:

$$\hat{\omega}_с = \frac{\hat{\omega}_з + \hat{\omega}_н}{2}, \quad \hat{\omega}_{сн} = \frac{\hat{\omega}_{3н} + \hat{\omega}_{нн}}{2}, \quad \hat{\omega}_{св} = \frac{\hat{\omega}_{3в} + \hat{\omega}_{нв}}{2}.$$

Значение величины АЧХ на частотах среза $\hat{\omega}_с$, $\hat{\omega}_{сн}$, $\hat{\omega}_{св}$ у фильтров, синтезированных с использованием метода окон, составляет в логарифмическом масштабе -6 дБ.

3. Синтез КИХ-фильтров методом окон

Среди достаточного разнообразия методов синтеза КИХ-фильтров наибольшее применение в различных приложениях получили два «классических»: метод окон и метод оптимального (по Чебышеву) синтеза.

3.1. Общая характеристика задачи синтеза КИХ-фильтров методом окон

Без потери общности зададимся целью рассчитать коэффициенты (импульсную характеристику) одного из частотно-избирательных фильтров, представленных на рис. 2, например, ФНЧ.

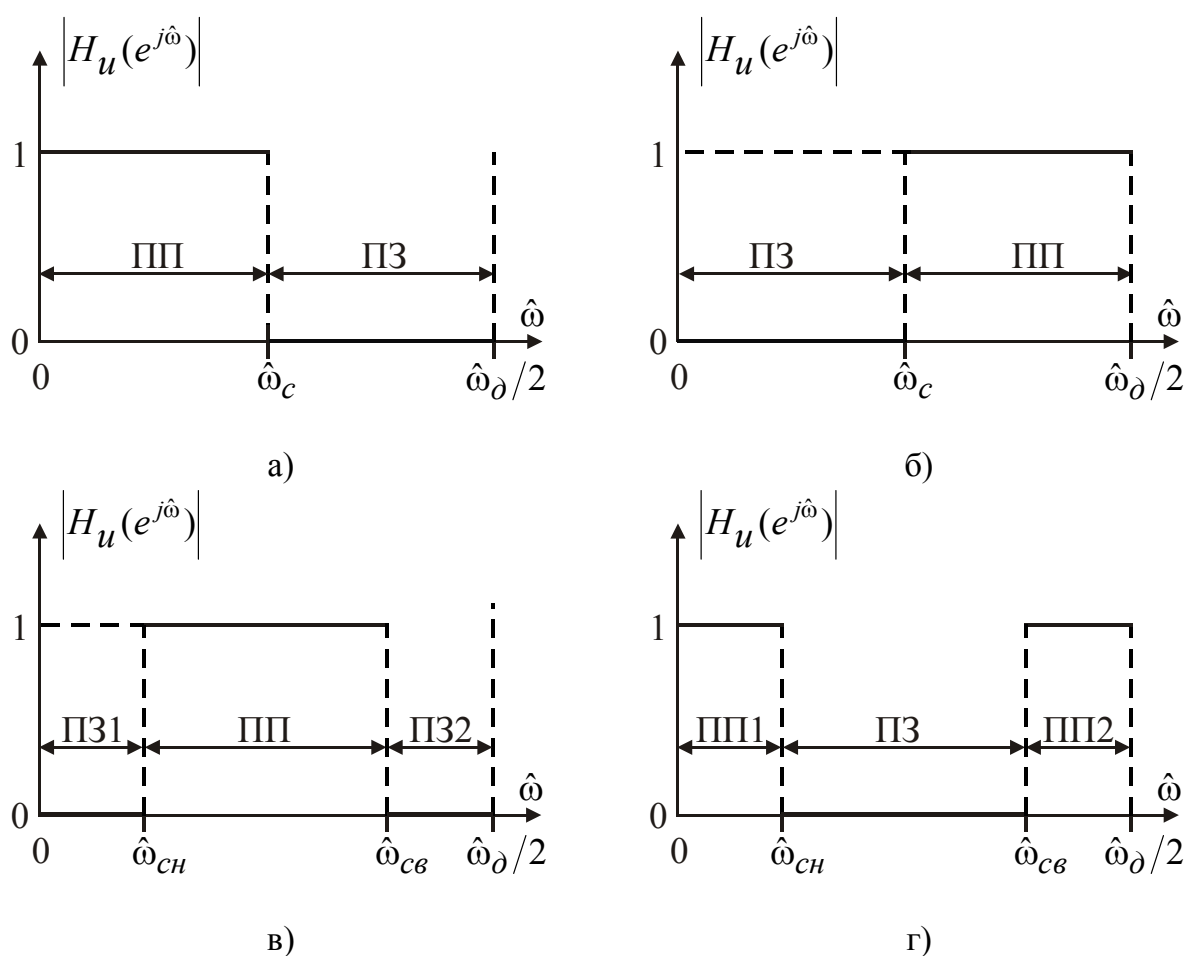


Рис. 2. Идеальные АЧХ частотно-избирательных фильтров: а) фильтр нижних частот; б) фильтр верхних частот; в) полосовой фильтр; г) режекторный фильтр

Рассматриваемый фильтр имеет идеальную АЧХ, а потому его частотная характеристика $H_u(e^{j\hat{\omega}})$ может быть представлена только бесконечным рядом Фурье:

$$H_u(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_u(n) e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (1)$$

Тогда идеальная импульсная характеристика может быть рассчитана как коэффициенты ряда Фурье:

$$h_u(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_u(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega}. \quad (2)$$

Ясно, что это – физически нереализуемый БИХ-фильтр, поскольку импульсная характеристика бесконечна и начинается в $-\infty$, то есть реакция предшествует воздействию. Простейший путь конструирования физически реализуемой передаточной функции фильтра состоит в исключении всех членов ряда (1), имеющих отрицательный индекс $n < 0$. В результате получается импульсная характеристика, соответствующая БИХ-фильтру. Для получения импульсной характеристики КИХ-фильтра необходимо ограничить ряд (1) сверху до $N+1$ членов. С точки зрения импульсной характеристики $h_u(n)$ рассматриваемая операция представляет собой ее *усечение* в пределах от $0 \leq n \leq N$, то есть умножение импульсной характеристики на последовательность $w_n(n)$ вида:

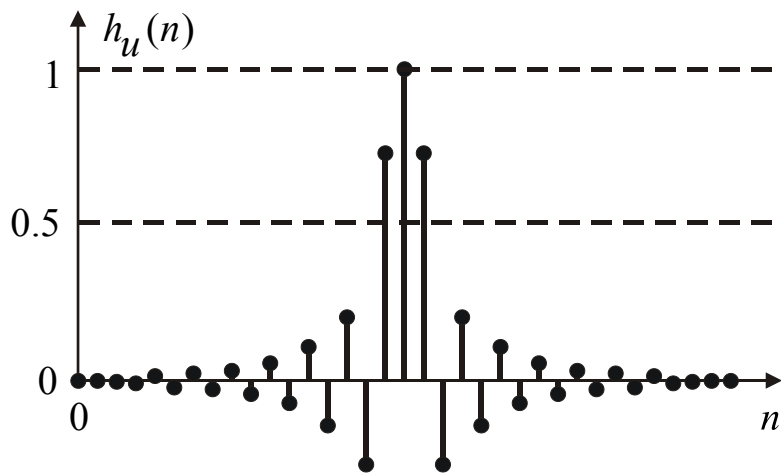
$$w_n(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases} \quad (3)$$

Процедура усечения с использованием (3), в результате которой образуется частотная характеристика КИХ-фильтра:

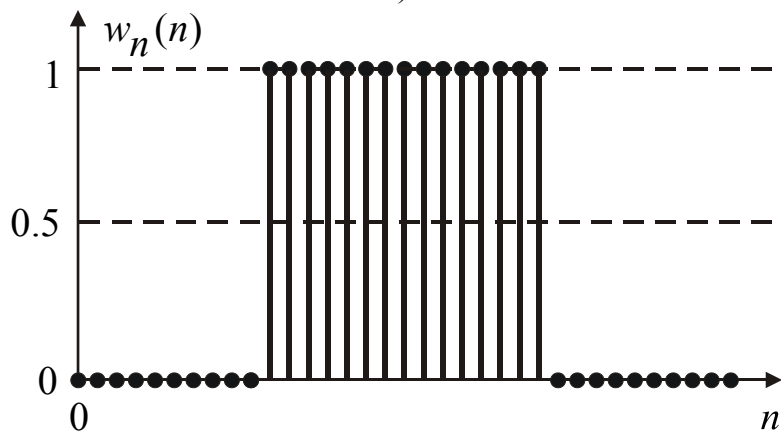
$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^N h(n) e^{-j\hat{\omega}n}, \quad (4)$$

демонстрируется на рис. 3. Из (4) после замены $e^{j\hat{\omega}} = z$ имеем передаточную функцию:

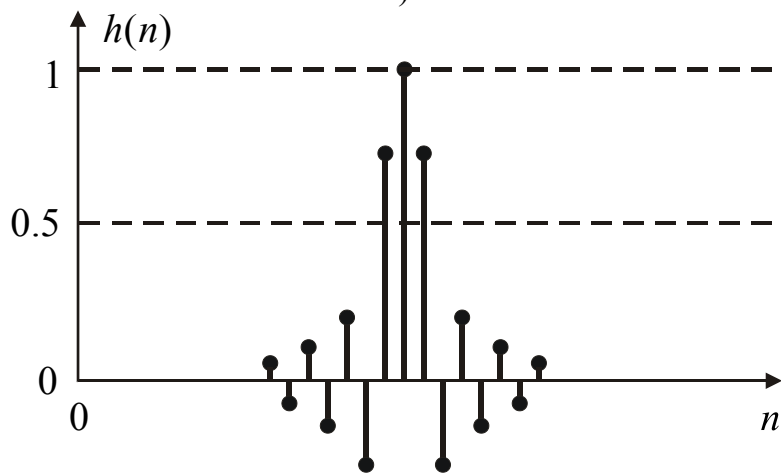
$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) z^{-n}, \quad (5)$$



а)



б)



в)

Рис. 3. Процедура усечения импульсной характеристики: а) «идеальная» импульсная характеристика; б) последовательность (3); в) результат усечения

где реальная импульсная характеристика (то есть коэффициенты $H(z)$) равна произведению идеальной импульсной характеристики (2) на функцию (3):

$$h(n) = w_n(n)h_u(n). \quad (6)$$

Казалось бы, решение найдено. Действительно, подбирая значения N и контролируя поведение АЧХ, за несколько итераций можно найти такое N , при котором требования к заданному фильтру будут выполнены.

Однако усечение ряда Фурье вследствие разрывности АЧХ приводит к существенным ошибкам.

3.2. Явление Гиббса

Появляющиеся ошибки связаны с характером сходимости ряда Фурье в точке разрыва первого рода, каковой и является точка $\hat{\omega}_c$ (рис. 2а).

Во-первых, в точке разрыва $\hat{\omega}_c$ первого рода *ряд Фурье сходится к среднему предельных значений функции слева и справа*. Предел слева равняется 1, а справа 0, поэтому $\left| H(e^{j\hat{\omega}_c}) \right| = 0.5$.

Во-вторых, в точке разрыва *сходимость ряда Фурье не является равномерной* и носит особый характер, который выражается в появлении пульсаций вблизи точки разрыва, максимум которых слева и справа составляет 9% от АЧХ и остается таковым вне зависимости от N . Этот феномен получил название *явления Гиббса*.

В результате формируются пульсации как в полосе задерживания, так и в полосе пропускания фильтра; кроме того образуется переходная полоса, ширина которой тем меньше, чем больше значение N .

Рассмотрим явление Гиббса более подробно, для чего обратимся к выражению (6). Здесь и далее ограничимся четными значениями N .

Выражение (6) представляет собой умножение двух функций во временной области. Для перехода в частотную область воспользуемся тем свойством, что умножение двух функций во временной области соответствует свертке их преобразований Фурье. Преобразование Фурье последовательности $h_u(n)$ соответствует частотной характеристике $H_u(e^{j\hat{\omega}})$ идеального фильтра, а преобразование Фурье весовой функции $w_n(n)$ соответствует $W_n(e^{j\hat{\omega}})$:

$$W_n(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^N w_n(n) e^{-j\hat{\omega}n} = e^{-jN\hat{\omega}/2} \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}(N+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (7)$$

Функция (7) известна под названием *ядра Дирихле*. Если не учитывать множитель, характеризующий линейный фазовый сдвиг, то график функции

$$\hat{W}_n(e^{j\hat{\omega}}) = \sin\left(\frac{\hat{\omega}(N+1)}{2}\right) / \sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) \quad (8)$$

будет иметь форму, показанную на рис. 4а, а ее модуль – на рис. 4б. Это быстроколеблющаяся функция с максимальным значением N при $\hat{\omega} = 0$, резко спадающая по амплитуде. Область с максимальной амплитудой называется *главным лепестком*, а остальные области – *боковыми лепестками*.

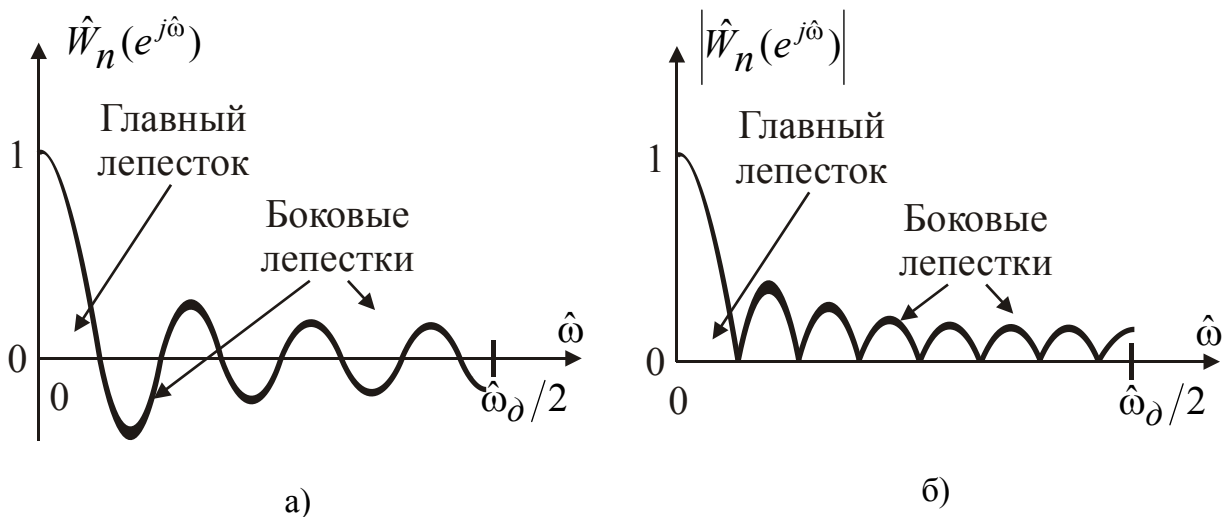


Рис. 4. а) Пример графика функции (7) при $N = 14$; б) пример графика функции (8) при $N = 14$

Функция $W_n(e^{j\hat{\omega}})$ принимает нулевые значения на частотах

$$\hat{\omega} = k \frac{2\pi}{N+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

а ширина всех лепестков, включая главный, одинакова и равна

$$\Delta\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N+1}, \quad (9)$$

причем с увеличением N ширина главного лепестка уменьшается и увеличивается число пульсаций.

Замечание. В некоторых источниках ширина главного лепестка выбирается вдвое больше той, которая определяется с использованием выражения (9). Последнее связано с тем, что главный лепесток модуля частотной характеристики окна математически определен как в положительной, так и в отрицательной области частот.

Таким образом, усечение ряда Фурье (1) до N членов (4) эквивалентно свертке частотной характеристики идеального ФНЧ $H_u(e^{j\hat{\omega}})$, АЧХ которой имеет форму прямоугольника (рис. 2а), с ядром Дирихле $W_n(e^{j\hat{\omega}})$. Это означает, что колебания функции $W_n(e^{j\hat{\omega}})$ попадают в область частотного прямоугольника, в которой свертка точно воспроизводит эти колебания. В результате получается АЧХ реального фильтра, у которой вблизи точки разрыва наблюдается два эффекта:

1. Возникают ошибки аппроксимации в виде пульсаций частотной характеристики $H(e^{j\hat{\omega}})$, которые обусловлены боковыми лепестками функции $W_n(e^{j\hat{\omega}})$.

2. Образуется сглаживающий разрыв – переходная полоса, ширина которой зависит от главного лепестка функции $W_n(e^{j\hat{\omega}})$ и приблизительно равняется его ширине.

3.3. Окна и их основные параметры

Явление Гиббса объясняется, как уже упоминалось, неравномерной сходимостью ряда Фурье в точке разрыва. Управлять сходимостью ряда Фурье (1) можно с помощью весовой последовательности конечной длины $w(n)$, называемой *окном* или *весовой функцией*. Метод состоит в том, что коэффициенты ряда Фурье, то есть импульсная характеристика $h_u(n)$ идеального фильтра, умножаются на $w(n)$. В результате получается импульсная характеристика реального фильтра

$$h(n) = w(n)h_u(n) \quad (10)$$

и передаточная функция

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^N w(n)h_u(n)z^{-n}, \quad (11)$$

где $N + 1$ – длина функции $w(n)$.

Ограниченная на интервале $0 \leq n \leq N$ и равная нулю вне этого интервала положительная симметричная весовая функция называется окном

$$w(n) = \begin{cases} w(N - n), & 0 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases} \quad (12)$$

Метод конструирования передаточной функции с помощью ограничения ряда (1) окном (12) часто называется *методом окон* или *методом взвешивания*.

Известно большое количество окон, применение которых определяется характером поставленной задачи синтеза фильтров. Ниже рассматриваются три из них: прямоугольное окно, обобщенное окно Хэмминга и окно Кайзера. Данные оконные функции обладают свойствами всех возможных видов окон и позволяют достаточно хорошо понять преимущества и недостатки метода взвешивания.

3.3.1. Прямоугольное окно (окно Дирихле)

$$w_n(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Именно прямоугольное окно (рис. 3б, рис. 4) было использовано при простом усечении ряда Фурье и изучении явления Гиббса. Ранее была получена частотная характеристика этого окна

$$W_n(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-jN\hat{\omega}/2} \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}(N+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}$$

и исследовано ее поведение. Установлено, что чем больше N , тем уже главный лепесток и переходная полоса синтезируемого фильтра, а так же меньше амплитуда пульсаций в области полос пропускания и задерживания при неизменной величине амплитуды пульсаций $\approx 9\%$ вблизи частоты среза $\hat{\omega}_c$.

Таким образом, прямоугольное окно позволяет сделать вывод о том, что «хорошее» окно должно обладать двумя свойствами:

1. Ширина главного лепестка частотной характеристики окна должна быть малой.

2. Энергия боковых лепестков частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться с увеличением частоты $\hat{\omega}$.

Эти два требования несовместимы, поэтому на практике необходим компромиссный вариант.

3.3.2. Обобщенное окно Хэмминга

Второе из рассматриваемых окон, называемое обобщенным окном Хэмминга, имеет следующий вид:

$$w_x(n) = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{при других } n, \end{cases}$$

где α – лежит в пределах $[0, 1]$. Случай $\alpha = 0.5$ соответствует окну Хэннинга, а случай $\alpha = 0.54$ – окну Хэмминга.

Частотную характеристику рассматриваемого окна можно получить, если представить его во временной области в виде произведения

$$w_x(n) = w_n(n) \left[\alpha - (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right],$$

где $w_n(n)$ – прямоугольное окно, длина которого $N + 1$ равна длине окна $w_x(n)$.

Для перехода к частотной характеристике заменим косинусы экспоненциальными функциями, используя формулу Эйлера, и учтем, что умножение последовательности $x(n)$ на $e^{j\hat{\omega}_0 n}$ дает в частотной области сдвиг на $\hat{\omega}_0$: $X(e^{j(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0)})$. Окончательно частотная характеристика обобщенного окна Хэмминга имеет следующий вид:

$$W_x(e^{j\hat{\omega}}) = \alpha W_n(e^{j\hat{\omega}}) + \frac{1 - \alpha}{2} W_n\left(e^{j\left(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{N}\right)}\right) + \frac{1 - \alpha}{2} W_n\left(e^{j\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{N}\right)}\right). \quad (13)$$

Видно, что частотная характеристика обобщенного окна Хэмминга представляет собой сумму сдвинутых по частоте характеристик прямоугольного окна $W_n(e^{j\hat{\omega}})$. При этом вторая и третья компоненты существенно уменьшают амплитуду бокового лепестка вблизи главного лепестка (так как боковые лепестки второй и третьей компонент (13)

находятся в противофазе с боковыми лепестками первой компоненты). Следовательно, уровни боковых лепестков (13) оказываются значительно ниже, чем у прямоугольного окна. Однако ширина главного лепестка обобщенного окна Хэмминга оказывается в два раза больше, чем ширина главного лепестка прямоугольного окна.

На рис. 5 приведен пример временной и модуля частотной характеристики окна Хэмминга ($\alpha = 0.54$).

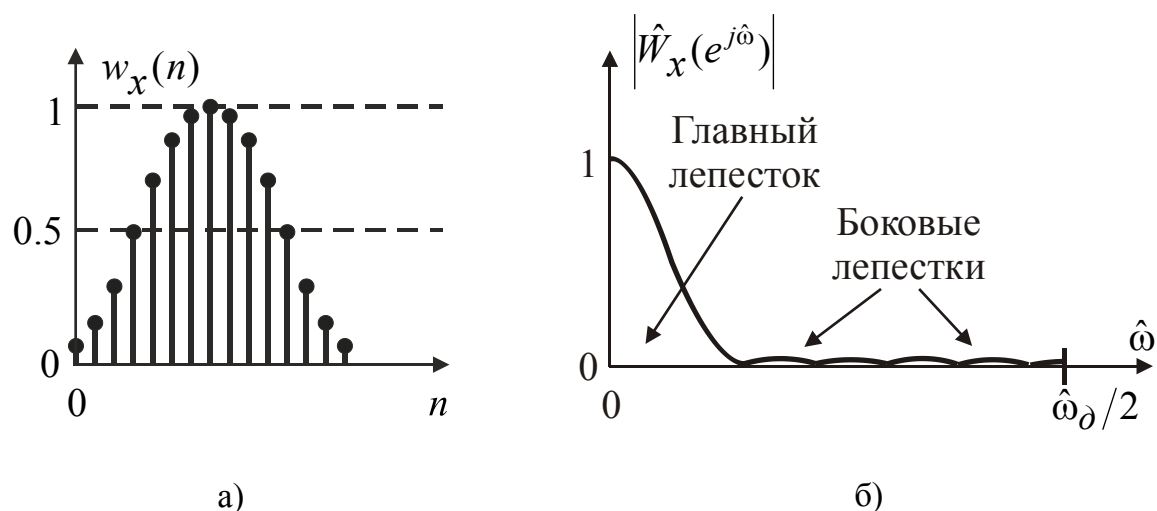


Рис. 5. Примеры характеристик окна Хэмминга: а) временной характеристики при $N = 14$; б) модуля частотной характеристики при $N = 14$

Замечание. Применение параметра $\alpha = 0.54$ в выражении (13) позволяет сконцентрировать 99.96% общей энергии спектра в главном лепестке, при этом максимальный уровень боковых лепестков на 40 дБ ниже главного максимума.

3.3.3. Окно Кайзера

Задача расчета «хороших» окон фактически сводится к математической задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразования Фурье которых наилучшим образом аппроксимируют функции, ограниченные по частоте, то есть имеют минимальную энергию за пределами заданного интервала частот.

При решении данной задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введен класс так называемых вытянутых сфероидальных функций, которые имеют достаточно сложный вид.

Поэтому Кайзер в качестве «наилучшего» окна предложил относительно простую аппроксимацию этих функций, получившую название *окна Кайзера* и имеющую следующий вид:

$$w_k(n) = \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

где $\alpha = N/2$, а $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, которая может быть легко получена из следующего выражения:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2.$$

Параметр β определяет форму окна и компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка частотной характеристики окна. *Окно Кайзера является по существу оптимальным окном, в том смысле, что оно имеет максимум энергии в главном лепестке для данного уровня боковых лепестков.*

Значения β и N вычисляются по полученным Кайзером эмпирическим формулам при условии, что отклонение от единицы в ПП и отклонение от нуля в ПЗ фильтра одинаковы $\delta_n = \delta_z = \delta$.

В приведенные ниже математические выражения входят затухание в ПЗ $\alpha_z = -20 \lg(\delta_z)$ и ширина переходной полосы $\Delta\hat{\omega}$, причем параметр β зависит от требований к α_z :

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_z - 8.7), & \alpha_z > 50, \\ 0.5842(\alpha_z - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_z - 21), & 21 \leq \alpha_z \leq 50, \\ 0, & \alpha_z < 21. \end{cases}$$

Окно Кайзера обладает одним замечательным свойством: для фиксированного отклонения δ произведение порядка КИХ-фильтра N на ширину его переходной полосы $\Delta\hat{\omega}$ является примерно постоянной величиной, которая называется D -фактором

$$D = N \cdot \Delta\hat{\omega}|_{\delta=const} \cong const.$$

D -фактор можно вычислить по формуле

$$D = \begin{cases} \frac{\alpha_z - 7.95}{2.2855}, & \alpha_z \geq 21, \\ 5.7944, & \alpha_z < 21. \end{cases}$$

Частотная характеристика окна Кайзера в замкнутой форме не получена, однако с очень хорошим приближением ее можно вычислить с помощью следующего выражения:

$$W_K(\hat{f}) = \frac{N \cdot sh \left[\sqrt{\beta^2 - (N\hat{f}/2)^2} \right]}{I_0(\beta) \sqrt{\beta^2 - (N\hat{f}/2)^2}},$$

где $\hat{f} = \hat{\omega}/(2 \cdot \pi)$, а $sh(x)$ – гиперболический синус:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

3.4. Методика синтеза КИХ-фильтров на основе оконных функций

Как видно из выражения (5), отсчеты импульсной характеристики КИХ-фильтров одновременно являются и коэффициентами его передаточной функции (разностного уравнения), поэтому задача синтеза в данном случае сводится к получению импульсной характеристики.

Методика синтеза включает в себя:

1. Задание требований к фильтру (см. п. 2).
2. Вычисление импульсной характеристики идеального фильтра $h_u(n)$ (см. п. 3.1).
3. Выбор окна и длины фильтра (см. п. 3.2, п. 3.3).
4. Расчет импульсной характеристики реального фильтра (см. п. 3.1).
5. Проверка выполнений заданных требований. Для проверки выполнения заданных требований рассчитывается АЧХ: если требования выполняются, то на этом процедуру конструирования передаточной функции можно завершить; если требования не выполняются, необходимо увеличить N и повторить п. 1 – п. 5.

Может случиться и так, что требования выполняются с большим запасом – тогда следует проверить, нельзя ли уменьшить N . Или может оказаться, что при выбранном окне длина фильтра оказывается слишком большой, а фильтр по каким-либо соображениям (обеспечение работы в реальном масштабе времени, элементная база и т.п.) не может быть реализован. Тогда выбирается другое окно и процедура повторяется.

3.5. Особенности использования метода окон

Метод взвешивания является весьма удобным для проектирования КИХ-фильтров, однако он обладает некоторыми особенностями, которые препятствуют его использованию.

1. Импульсная характеристика идеального фильтра $h_u(n)$ должна представлять замкнутое математическое выражение. Не имея его, для вычисления взвешенных коэффициентов, трудно говорить об использовании метода окон.

2. Для частотно-избирательных фильтров метод взвешивания одинаково аппроксимирует переходные полосы и пульсации в ПП и ПЗ.

3. Метод окон не является оптимальным в том смысле, что он не позволяет получить наименьшую по амплитуде пульсацию для заданного порядка фильтра N и заданного множества частот среза.

Содержание лабораторной работы

1. Исследование основных параметров окон.
2. Исследование параметров синтезированных фильтров.
3. Реализация алгоритма синтеза КИХ-фильтров с использованием элементов написания программного кода пакета Matlab.

Замечание. Тип частотно-избирательного фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ), а так же частоты среза выбираются по указанию преподавателя (см. табл. 1).

Замечание. При рассмотрении п. 1 и п. 2, в порядке выполнения работы ниже, необходимо воспользоваться приложением для анализа и синтеза фильтров пакета Matlab – *FDATool* (см. прил. 1).

Порядок выполнения работы

1. Исследование основных параметров окон

В разделе Design Method (метод синтеза) *FDATool* выбрать синтез КИХ-фильтров методом окон: FIR → Window. В разделе Filter Order → Specify order (порядок фильтра → задать порядок) задать длину окна. В разделе Options выбрать тип исследуемого окна. С использованием кнопки View (вид) отобразить временную характеристику окна и модуль его частотной характеристики. Произвести исследование изменения параметров окна.

Замечание. В действительности порядок фильтра на 1 меньше длины окна. В *FDATool* для удобства визуализации характеристик окон

эти значения совпадают. Тогда как в случае синтеза фильтров с использованием *FDATool* они различаются на 1 (что и является достоверным).

Таблица 1

Исходные данные

Шифр студента	Тип частотно-избирательного фильтра и требования на частоты среза			
	ФНЧ	ФВЧ	ПФ	РФ
1	$\hat{\omega}_c = 0.1\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.5\pi$
2	$\hat{\omega}_c = 0.2\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.4\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.1\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.4\pi$
3	$\hat{\omega}_c = 0.3\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.5\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
4	$\hat{\omega}_c = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.6\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$
5	$\hat{\omega}_c = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.6\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
6	$\hat{\omega}_c = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.3\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.5\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.8\pi$
7	$\hat{\omega}_c = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.2\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.1\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.4\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
8	$\hat{\omega}_c = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.1\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$

На рис. 6 приведен пример отображения характеристик окна во временной (Time domain) и в частотной области (Frequency domain). Щелчок правой кнопки мыши в области отображения оконных характеристик (Window Viewer), свободной от областей отображения графиков, позволяет выбрать элементы настроек отображения исследуемых зависимостей (см. рис. 6). Под графиками отображения характеристик оконной функции представлены численные значения следующих параметров окна:

Leakage factor – отношение мощности в боковых лепестках к общей мощности окна, измеряемое в процентах;

Relative sidelobe attenuation – максимальный уровень боковых лепестков, измеряемый в дБ;

Mainlobe width – ширина главного лепестка, измеряемая по уровню -3 дБ от максимального значения, принимаемого модулем частотной характеристики окна. При измерении ширины главного лепестка учитывается то, что лепесток определен как в положительной, так и в отрицательной области частот (см. замечание к п. 3.2).

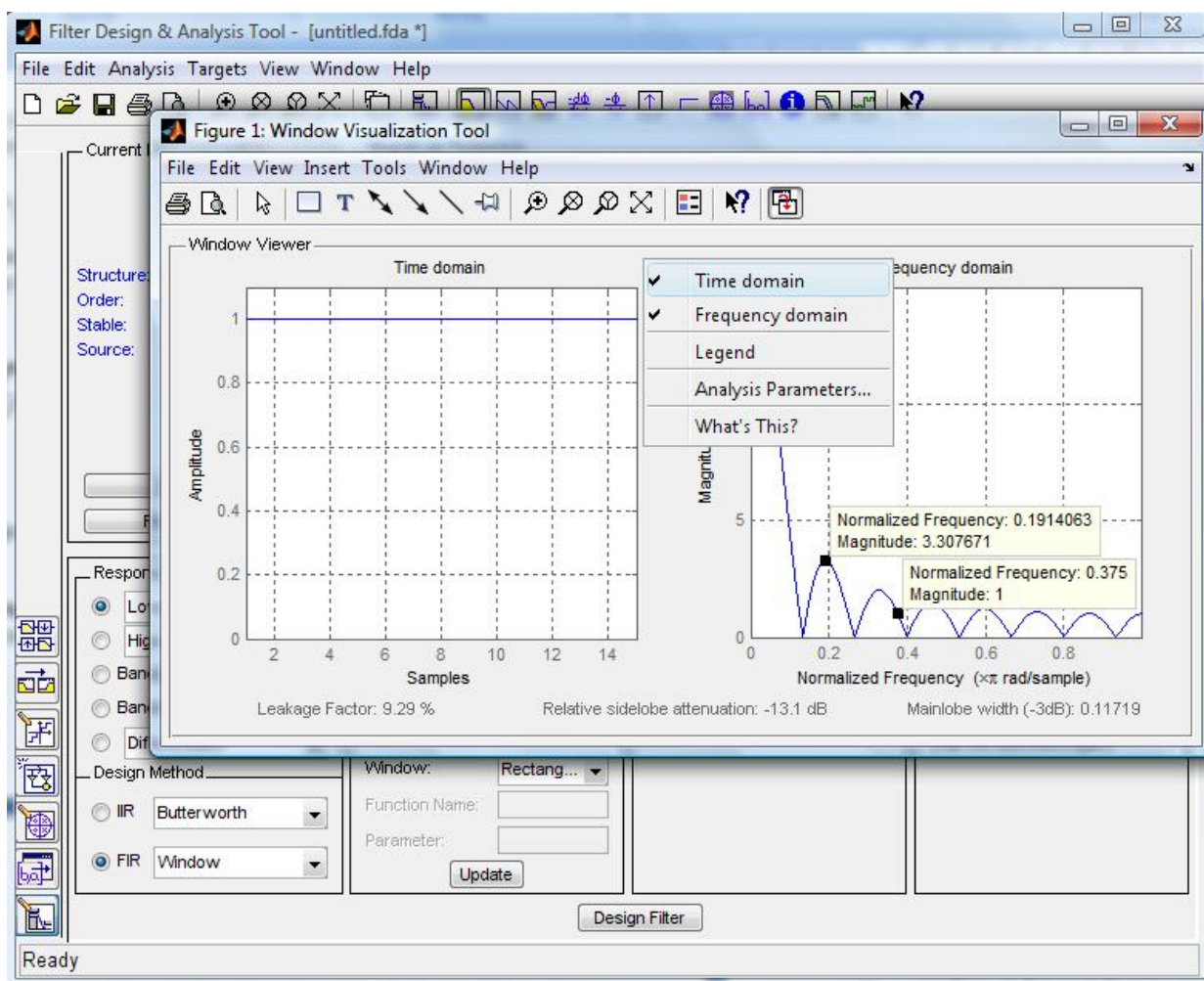


Рис. 6. Пример отображения характеристик окна

1.1. Исследование изменения ширины главного лепестка в зависимости от параметров окна

1. Для прямоугольного окна (Rectangular) произвести измерение ширины главного лепестка (Mainlobe width) модуля частотной характеристики окна в зависимости от его длины.

2. Выполнить п. 1 для случая окна Хэмминга (Hamming).
3. Выполнить п. 1 для случая окна Кайзера (Kaiser) при фиксированном параметре β .
4. Для окна Кайзера (Kaiser) произвести измерение ширины главного лепестка (Mainlobe width) в зависимости от параметра β при фиксированной длине окна.
5. Привести примеры полученных оконных функции и модулей их частотных характеристик. Произвести сравнение полученных результатов для различных типов окон.

1.2. Исследование изменения максимального уровня боковых лепестков в зависимости от параметров окна

1. Для прямоугольного окна (Rectangular) произвести измерение максимального уровня боковых лепестков (Relative sidelobe attenuation) модуля частотной характеристики окна в зависимости от его длины.
2. Выполнить п. 1 для случая окна Хэмминга (Hamming).
3. Выполнить п. 1 для случая окна Кайзера (Kaiser) при фиксированном параметре β .
4. Для окна Кайзера (Kaiser) произвести измерение максимального уровня боковых лепестков (Relative sidelobe attenuation) в зависимости от параметра β при фиксированной длине окна.
5. Привести примеры полученных оконных функции и модулей их частотных характеристик. Произвести сравнение полученных результатов для различных типов окон.

2. Исследование параметров синтезированных фильтров

В разделе Response type (тип характеристики) FDATool выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (ПФ), Bandstop (РФ). В разделе Filter Order→Specify order (порядок фильтра→задать порядок) задать порядок фильтра. В разделе Options выбрать тип окна и снять галочку напротив Scale Passband (масштабирование АЧХ). В разделе Frequency Specifications→Units (требования на частоты среза→единицы измерения частоты) выбрать Normalized (сетка частот является нормализованной) и установить частоты среза в соответствии с табл. 1. С использованием кнопки Design Filter (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения параметров фильтра.

Замечание. Для того чтобы не возникало излишней путаницы при задании частот среза в *FDATool*, отметим, что если в соответствии с табл. 1 указано, например, синтезировать ФНЧ с $\hat{\omega}_c = 0.1\pi$, то в программе нужно задавать частоту среза равную 0.1. Последнее становится понятным, если обратить внимание на коэффициент умножения по оси частот в окне отображения АЧХ (*Magnitude response*) синтезированного фильтра в *FDATool*.

2.1. Исследование изменения ширины переходной полосы синтезированного фильтра в зависимости от параметров окна

1. Для прямоугольного окна (*Rectangular*) произвести измерение ширины переходной полосы АЧХ синтезированного фильтра в зависимости от порядка фильтра.

2. Выполнить п. 1 для случая окна Хэмминга (*Hamming*).

3. Выполнить п. 1 для случая окна Кайзера (*Kaiser*) при фиксированном параметре β .

4. Для окна Кайзера (*Kaiser*) произвести измерение ширины переходной полосы АЧХ синтезированного фильтра в зависимости от параметра β при фиксированном порядке фильтра.

5. Привести примеры полученных АЧХ и импульсных характеристик синтезированных фильтров. Для приведенных примеров фильтров определить их тип в соответствии с классификацией КИХ-фильтров, имеющих линейную ФЧХ. Произвести сравнение полученных результатов для различных типов окон.

Замечание. Для определения переходной полосы синтезированного фильтра необходимо в плоскости отображения АЧХ отметить точки частот среза в ПП и ПЗ (см рис. 1). На примере ФНЧ это показано на рис. 7. Первая точка, соответствующая частоте среза в ПП, отмечается по уровню АЧХ, который равен 1 в области резкого спада АЧХ в 0. Вторая точка, соответствующая частоте среза в ПЗ, отмечается по уровню максимальной пульсации в ПЗ в области резкого спада АЧХ в 0. Разница между частотами среза, которые соответствуют указанным точкам, является переходной полосой синтезированного фильтра методом окон.

Замечание. В настоящей работе, при синтезе частотно-избирательных фильтров, тип КИХ-фильтра с линейной ФЧХ выбирается автоматически и полностью зависит от сформулированных спецификаций.

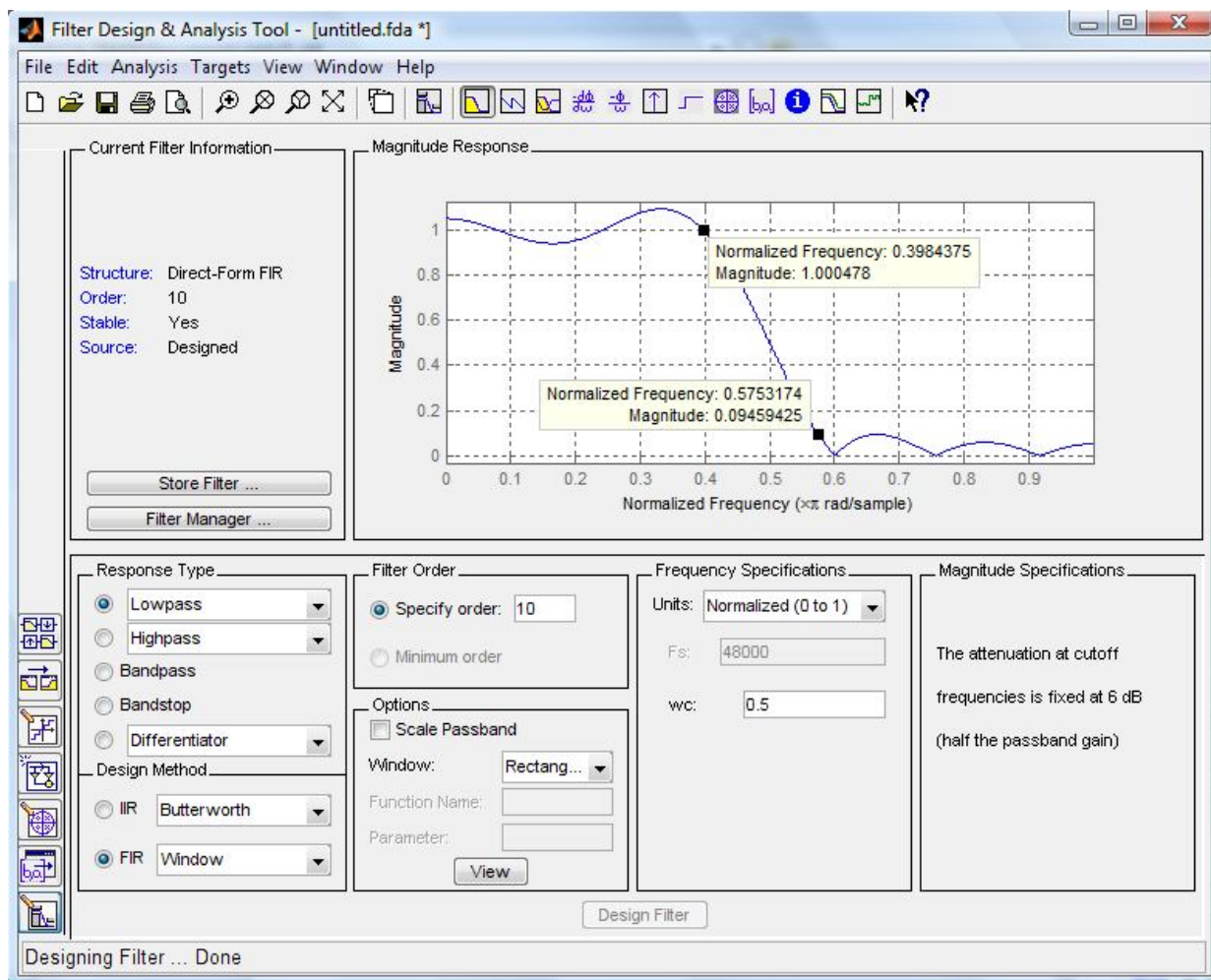


Рис. 7. Определение переходной полосы фильтра, синтезированного с использованием метода окон в FDATool

2.2. Исследование изменения минимального уровня затухания АЧХ в ПЗ синтезированного фильтра в зависимости от параметров окна

1. Для прямоугольного окна (Rectangular) произвести измерение минимального уровня затухания АЧХ в ПЗ синтезированного фильтра в зависимости от его порядка.

На рис. 8 приведет пример точки, соответствующей минимальному уровню затухания АЧХ в ПЗ синтезированного фильтра.

2. Выполнить п. 1 для случая окна Хэмминга (Hamming).

3. Выполнить п. 1 для случая окна Кайзера (Kaiser) при фиксированном параметре β .

4. Для окна Кайзера (Kaiser) произвести измерение минимального уровня затухания АЧХ в ПЗ синтезированного фильтра в зависимости от параметра β при фиксированном порядке фильтра.

5. Привести примеры полученных АЧХ и импульсных характеристик синтезированных фильтров. Для приведенных примеров фильтров определить их тип в соответствии с классификацией КИХ-фильтров, имеющих линейную ФЧХ. Произвести сравнение полученных результатов для различных типов окон.

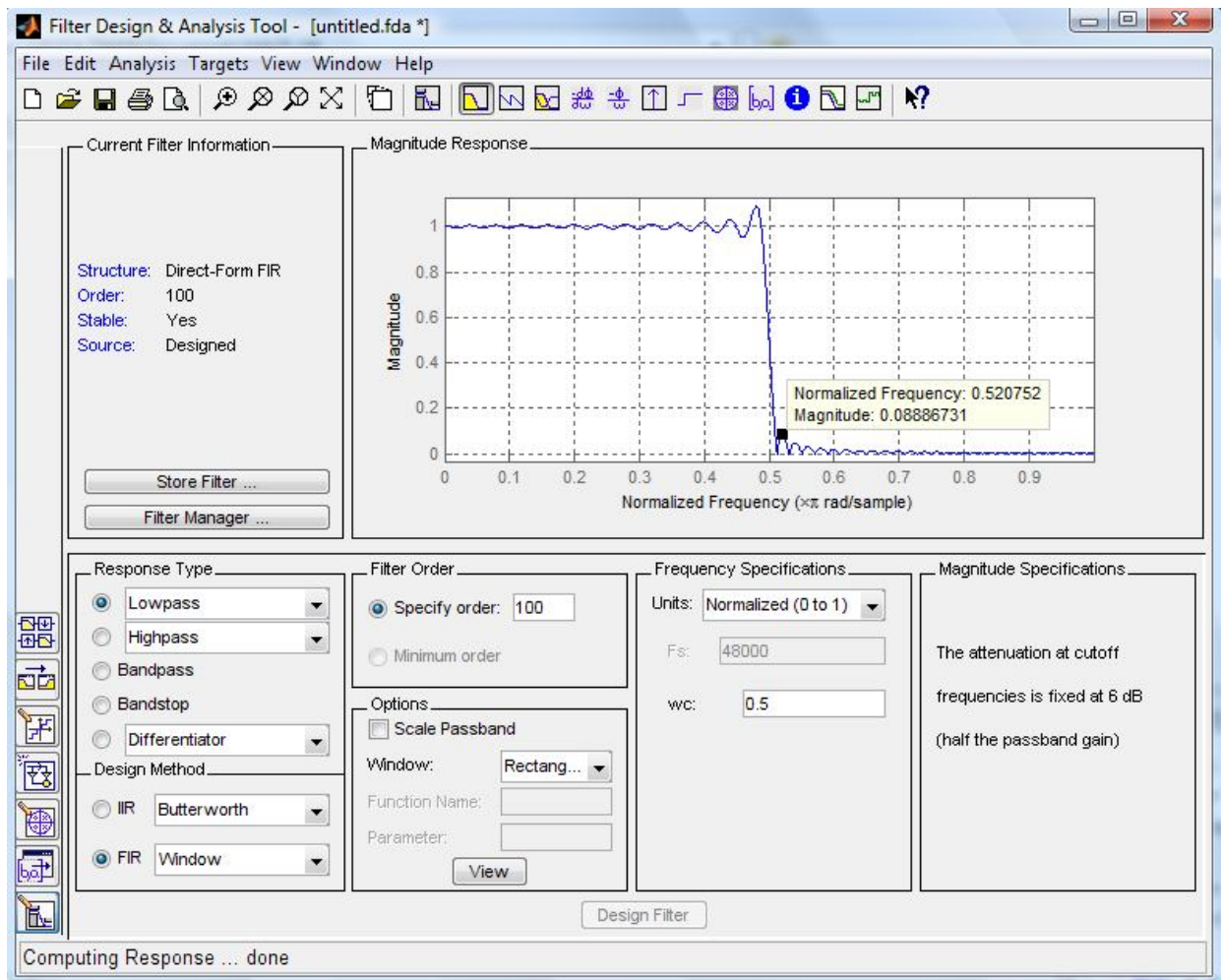


Рис. 8. Точка, соответствующая минимальному уровню затухания АЧХ в ПЗ ЦФ

2.3. Исследование изменения минимального порядка N синтезированного фильтра в зависимости от ширины переходной полосы и отклонений АЧХ в ПП и ПЗ для окна Кайзера

В разделе Response type (тип характеристики) выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра. В разделе Options выбрать окно Кайзера (Kaiser). В разделе Filter Order (порядок фильтра) выбрать Minimum order (минимальный порядок фильтра). В разделе Frequency Specifications → Units (требования на частоты среза → единицы измерения частоты) выбрать Normalized (сетка частот

является нормализованной) и установить частоты среза в ПП и ПЗ так, чтобы они находились симметрично относительно частот среза, приведенных в табл. 1. В разделе Magnitude Specifications (требования на отклонения АЧХ в ПП (D_{pass}) и ПЗ (D_{stop}) синтезируемого фильтра) установить значения отклонений в линейном или логарифмическом масштабе. С использованием кнопки Design Filter (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения его параметров.

1. Для любых трех наборов частот среза произвести измерение минимального порядка синтезированного фильтра при фиксированных значениях D_{pass} и D_{stop} .

2. Для любых трех наборов D_{pass} произвести измерение минимального порядка синтезированного фильтра при фиксированных значениях частот среза и D_{stop} .

3. Для любых трех наборов D_{stop} произвести измерение минимального порядка синтезированного фильтра при фиксированных значениях частот среза и D_{pass} .

4. Привести примеры полученных АЧХ и импульсных характеристик синтезированных фильтров. Для приведенных примеров фильтров определить их тип в соответствии с классификацией КИХ-фильтров, имеющих линейную ФЧХ.

3. Реализация алгоритма синтеза КИХ-фильтров с использованием элементов написания программного кода пакета Matlab

Для исследуемого частотно-избирательного фильтра при произвольно заданных спецификациях на фильтр решить задачу синтеза КИХ-фильтра методом окон с использованием средств написания программного кода системы Matlab. Пример постановки и решения рассматриваемой задачи приведен ниже.

Пример. Синтезировать цифровой КИХ-фильтр нижних частот, который удовлетворяет следующим спецификациям:

$$\hat{\omega}_n = 0.19\pi, \hat{\omega}_z = 0.21\pi, \delta_n = 0.01, \delta_z = 0.02.$$

Выбрать подходящую оконную функцию. Определить и построить идеальную импульсную характеристику, реальную импульсную характеристику, АЧХ синтезированного фильтра, временную характеристику окна.

Замечание. В настоящем пункте требования на КИХ-фильтр задаются так, как приведено на рис. 1. При этом требования на пульсации допускается задавать произвольно (по выбору студента), а

требования на частоты необходимо выбирать в соответствии с табл. 1, учитывая справедливость следующих математических выражений:

$$\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_z + \hat{\omega}_n}{2}, \quad \hat{\omega}_{сн} = \frac{\hat{\omega}_{zn} + \hat{\omega}_{nn}}{2}, \quad \hat{\omega}_{св} = \frac{\hat{\omega}_{zv} + \hat{\omega}_{nv}}{2}.$$

Для решения задачи можно воспользоваться аналогичной последовательностью действий, что и в п. 3.4.

Во-первых, поскольку заданы спецификации на фильтр, необходимо вычислить импульсную характеристику идеального фильтра $h_u(n)$. Для того чтобы осуществить этот процесс, необходимо выбрать тип КИХ-фильтра с линейной ФЧХ, воспользоваться выражением (2) и учесть, что частота среза идеального ФНЧ $\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_z + \hat{\omega}_n}{2}$. В результате, для идеального ФНЧ с симметричной импульсной характеристикой можно записать:

$$h_u(n) = \frac{\sin(n - \alpha)\hat{\omega}_c}{\pi(n - \alpha)}, \quad -\infty < n < \infty,$$

где α – вещественная константа.

Во-вторых, выбрать окно и длину фильтра. Для этого необходимо выбрать минимальное из двух отклонений в ПП и ПЗ, то есть δ_n или δ_z , и рассчитать минимальный уровень затухания в ПЗ: $-20 \lg(\min[\delta_n, \delta_z])$. Исходя из табл. 2, выбрать подходящее окно. Как видно из табл. 2, минимальный уровень затухания в ПЗ выше 40 дБ присутствует у окон Хэннинга, Хэмминга и Блэкмена. Далее, если, например, руководствоваться критерием выбора окна по минимальному порядку, то поскольку окно Хэннинга имеет наименьший порядок среди трех выбранных окон, то необходимо выбрать именно его для синтеза КИХ-фильтра. Выбрав окно, остается рассчитать его длину $N + 1$. Для этого так же можно воспользоваться табл. 2.

В-третьих, рассчитать импульсную характеристику реального ФНЧ:

$$h(n) = \left(0.5 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \cdot \frac{\sin(n - \alpha)\hat{\omega}_c}{\pi(n - \alpha)}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

В-четвертых, проверить выполнение заданных требований и построить необходимые графические зависимости.

Характеристики некоторых оконных функций

Окно	Максимальный уровень боковых лепестков	Ширина переходной полосы $\Delta\hat{\omega}$	Минимальный уровень затухания в ПЗ
Прямоугольное окно	- 13 дБ	$1.8\pi/N$	21 дБ
Окно Бартлетта	- 26 дБ	$6.1\pi/N$	25 дБ
Окно Хэннинга	- 31 дБ	$6.2\pi/N$	44 дБ
Окно Хэмминга	- 41 дБ	$6.6\pi/N$	53 дБ
Окно Блэкмена	- 57 дБ	$11\pi/N$	74 дБ

Пример программного кода, для решения рассматриваемой задачи с использованием пакета Matlab, приведен ниже.

```

function hd = ideal_lp(wc,M)
% Функция для вычисления идеальной импульсной
% характеристики ФНЧ
%
% hd -- идеальная импульсная характеристика
% wc -- частота среза
% M -- длина идеального фильтра
%
alpha = (M-1)/2;
n = 0:M-1;

% Добавление небольшого числа для устранения
% деления на 0
eps = 0.0001;
m = n - alpha + eps;

hd = sin(wc*m) ./ (pi*m);

function [db,mag,pha,w] = freqz_m(a,b)
% Модифицированная версия функции freqz
%
% mag -- абсолютные значения АЧХ, вычисленные
% от 0 до pi радиан

```

```

% db -- относительные значения АЧХ в дБ,
% вычисленные от 0 до pi радиан
% pha -- ФЧХ, вычисленная от 0 до pi радиан
% w -- вектор частотных значений от 0 до pi
% радиан
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра значения a
% эквивалентны отсчетам импульсной
% характеристики)
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра b=[1])
%
[H,w] = freqz(a,b,1000,'whole');
H = (H(1:1:501))';
w = (w(1:1:501))';

mag = abs(H);

eps = 0.0001;
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);

function [Dpass,Dstop] = check_low(a,wp,ws)
% Проверка выполнения требований к АЧХ ФНЧ
%
% Dstop -- максимальное отклонение АЧХ в ПП
% Dpass -- максимальное отклонение АЧХ в ПЗ
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра значения a
% эквивалентны отсчетам импульсной
% характеристики)
% wp -- граничная частота в ПП
% ws -- граничная частота в ПЗ
%
b = [1];

wt= 0:wp/1000:wp;
H = freqz(a,b,wt,2*pi);
Dpass = max([max(abs(H))-1 1-min(abs(H))]);

```

```

wk= ws:(pi-ws)/1000:pi;
H = freqz(a,b,wk,2*pi);
Dstop = max(abs(H));

% Реализация этапов синтеза КИХ-фильтра методом
% окон
%
wp = 0.19*pi; ws = 0.21*pi;
tr_width = ws - wp;

M = ceil(6.2*pi/tr_width)
n = 0:M;

wc = (ws+wp)/2;
hd = ideal_lp(wc,M+1);
w_han = (hanning(M+1))';
h = hd.* w_han;

[db,mag,pha,w] = freqz_m(h,[1]);

[Dpass,Dstop] = check_low(h,wp,ws)
subplot(221); stem(n,hd)
title('Идеальная импульсная характеристика')
axis([0 M -0.1 0.3])
xlabel('n'); ylabel('hd(n)')

subplot(222); stem(n,w_han)
title('Окно Хэннинга')
axis([0 M 0 1.1])
xlabel('n'); ylabel('w(n)')

subplot(223); stem(n,h)
title('Реальная импульсная характеристика')
axis([0 M -0.1 0.3])
xlabel('n'); ylabel('h(n)')

subplot(224); plot(w/pi,db)
title('АЧХ в дБ'); grid
axis([0 1 -100 10])

```

```
xlabel ('\omega*\pi, рад'); ylabel ('АЧХ, дБ')
```

Исполнение данного кода позволяет решить задачу.

Контрольные вопросы

1. Дать определение цифрового фильтра в широком и узком смысле.
2. Какие способы реализации цифровых фильтров существуют?
3. Что собой представляет процесс проектирования цифровых фильтров?
4. Какие существуют способы задания требований к цифровым фильтрам?
5. Какие требования предъявляются при синтезе частотно-избирательных КИХ-фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ)?
6. Дать определение КИХ-фильтра?
7. Сформулировать и доказать условия линейности ФЧХ КИХ-фильтра.
8. Назвать причины синтеза КИХ-фильтров с линейной ФЧХ?
9. Как выглядит нуль-полюсная диаграмма фильтров с линейной ФЧХ?
10. Что такое «окно»? Привести примеры «окон».
11. Перечислить параметры окон, которые оказывают влияние на синтез КИХ-фильтров.
12. Как связаны между собой ширина главного лепестка и уровень боковых лепестков с шириной переходной полосы и пульсациями частотной характеристики в ПП и ПЗ синтезируемого КИХ-фильтра.
13. Дать определение метода окон (взвешивания). На примере частотно-избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) перечислить этапы синтеза КИХ-фильтров с использованием метода взвешивания.
14. Какие ошибки возникают при использовании метода взвешивания?
15. Каковы основные особенности использования метода окон?

Литература

1. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л. Цифровые фильтры: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.

3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
4. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
5. Хрящев В.В., Приоров А.Л., Волохов В.А. Основы теории цепей: сборник задач. – Ярославль: ЯрГУ, 2008.
6. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
7. Ingle V.K., Proakis J.G. Digital Signal Processing using Matlab V. 4. PWS Publishing Company, 1997.

Лабораторная работа № 2

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель работы: изучение билинейного z -преобразования, синтез цифровых низкочастотных, высокочастотных, полосовых и режекторных фильтров.

Краткая теория

1. Основные определения

Синтез ЦФ по заданным требованиям к его характеристикам сводится к задаче аппроксимации, которая решается чисто математическими методами в области, определяемой назначением фильтра. Если аппроксимация производится в p -области, то есть в области преобразования Лапласа, получим аналоговый фильтр, а если в z -области, то есть в области z -преобразования – цифровой фильтр. В обоих случаях математический аппарат должен соответствовать особенностям выбранных областей синтеза. Однако при синтезе стандартных линейных частотно-избирательных БИХ-фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) удобнее всего воспользоваться хорошо развитым аппаратом расчета аналоговых фильтров и методами отображения p -области в z -область, то есть методами преобразования аналоговых фильтров в цифровые. Такой синтез включает в себя:

1. Выбор метода отображения p -области в z -область.
2. Расчет аналогового фильтра по требованиям, заданным к ЦФ.
3. Применение к аналоговому фильтру выбранного метода отображения p -области в z -область.

Рассчитываемый по требованиям, заданным к ЦФ, аналоговый фильтр называется *фильтром-прототипом*, или просто *прототипом*.

Основными ограничениями для методов синтеза ЦФ по фильтрам-прототипам являются:

1. *Сохранение существенных свойств АЧХ фильтра-прототипа в АЧХ ЦФ*, что означает необходимость отображения мнимой оси $j\Omega$ p -области на единичную окружность z -области.

2. *Устойчивый фильтр-прототип должен быть преобразован в устойчивый ЦФ*. Это означает необходимость отображения полюсов устойчивого прототипа из левой p -полуплоскости внутрь единичного круга z -области.

3. *Отображение p -области в z -область должно представлять рациональную функцию, с использованием которой рациональная передаточная функция $H_a(p)$ аналогового фильтра-прототипа отображается в рациональную передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра:*

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)},$$

где z_i – i -й нуль, p_i – i -й полюс, K – коэффициент усиления, а $M \leq N$ для того чтобы фильтр с передаточной функцией $H(z)$ был физически реализуемым.

Из ряда известных методов преобразования аналоговых фильтров-прототипов в ЦФ можно выделить:

1. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики.
2. Метод согласованного z -преобразования.
3. Метод отображения дифференциалов.
4. Метод билинейного z -преобразования.

Замечание. *В настоящей работе рассматривается синтез линейных цифровых частотно-избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с использованием метода билинейного z -преобразования.*

Необходимо отметить, что синтез ЦФ с использованием аналогового фильтра-прототипа начинается с построения аналогового ФНЧ. Поэтому в следующем разделе описываются классические аналоговые ФНЧ, рассматриваемые в работе, и их основные характеристики.

Замечание. *При дальнейшем изложении материала, для обозначения характеристик аналоговых фильтров вводится в рассмотрение аналоговая частота Ω [рад/с], а для обозначения характеристик цифровых фильтров – цифровая частота ω [рад/с].*

2. Аналоговые фильтры-прототипы нижних частот

Исторически сложилось так, что большинство методов аппроксимации аналоговых фильтров являются развитыми для синтеза пассивных систем, то есть систем, состоящих из пассивных компонентов, таких как, например, конденсаторы и резисторы. Пассивные системы не требуют источника энергии для своего функционирования и, в отличие от активных систем, в них не происходит усиления сигнала по мощности. Поэтому, если обозначить

через $H_a(j\Omega)$ частотную характеристику аналогового ФНЧ, спецификации на его синтез могут быть записанными в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1, \quad |\Omega| \leq \Omega_n,$$

$$0 \leq |H_a(j\Omega)| \leq \frac{1}{A}, \quad |\Omega| \geq \Omega_3,$$

где ε – параметр, определяющий пульсации в ПП, A – параметр, определяющий пульсации в ПЗ, Ω_n и Ω_3 – граничные частоты в ПП и ПЗ соответственно, измеряемые в $[rad/c]$. Диаграмма требований к АЧХ аналогового ФНЧ в терминах ε и A , представлена на рис. 1а. Дополнительно необходимо отметить, что

$$|H_a(j\Omega_n)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \quad |H_a(j\Omega_3)| = \frac{1}{A}.$$

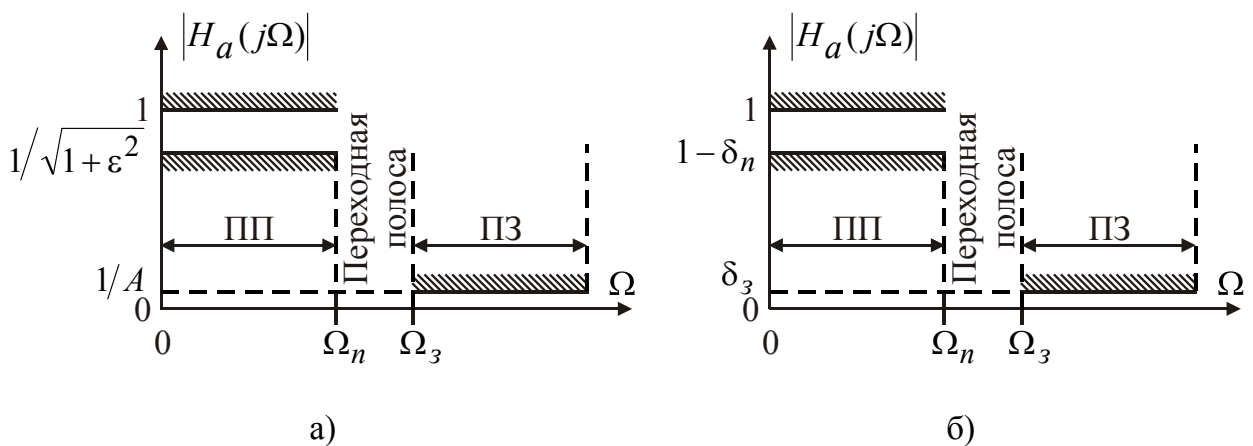


Рис. 1. Диаграммы требований к АЧХ аналогового ФНЧ: а) в терминах ε и A ; б) в терминах δ_n и δ_3

На рис. 1б приведен другой способ задания требований на синтез аналогового ФНЧ в терминах отклонений АЧХ в ПП (δ_n) и ПЗ (δ_3). Взаимосвязи между параметрами δ_n , δ_3 и ε , A определяются следующими выражениями:

$$1-\delta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \quad \delta_3 = \frac{1}{A}.$$

Известны четыре стандартных вида классических аналоговых ФНЧ, получивших свое название по виду аппроксимации: Баттерворта, Чебышёва типа I и типа II, эллиптические или Золотарева-Кауэра.

Предварительно отметим, что в приводимых ниже методах аппроксимации используется квадрат модуля частотной характеристики аналогового фильтра $|H_a(j\Omega)|^2$, то есть квадрат АЧХ. Это объясняется тем, что функция $|H_a(j\Omega)|^2$, являясь вещественной функцией вещественного аргумента, существенно упрощает решение задачи наилучшей аппроксимации.

2.1. Фильтры Баттерворта

Функция квадрата АЧХ порядка N аналогового ФНЧ в данном случае имеет вид:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}},$$

где Ω_c – частота среза. Пример квадрата АЧХ аналогового ФНЧ Баттерворта приведен на рис. 2.

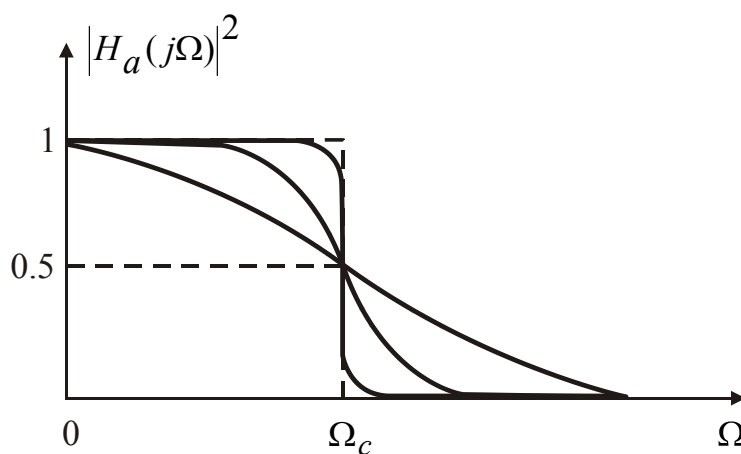


Рис. 2. Квадрат АЧХ аналогового ФНЧ Баттерворта

Основные свойства квадрата модуля частотной характеристики $|H_a(j\Omega)|^2$ аналогового ФНЧ Баттерворта следующие:

1. $|H_a(j0)|^2 = 1$ для всех значений N .

$$2. |H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2} \text{ для всех значений } N.$$

3. $|H_a(j\Omega)|^2$ является монотонно убывающей функцией частоты Ω .

$$4. |H_a(j\Omega)|^2 \text{ стремится к идеальному ФНЧ при } N \rightarrow \infty.$$

5. $|H_a(j\Omega)|^2$ является максимально плоской на частотах $\Omega = 0$ и $\Omega = \infty$, так как в этих точках функция квадрата АЧХ аналогового ФНЧ Баттерворта N -го порядка имеет равными нулю первые N производных. Поэтому фильтр Баттерворта называют *оптимальным по критерию максимальной плоскости функции* $|H_a(j\Omega)|^2$ в точках частот $\Omega = 0$ и $\Omega = \infty$.

Для дальнейшего анализа введем в рассмотрение передаточную функцию аналогового ФНЧ Баттерворта $H_a(p)$, с использованием которой можно записать следующее выражение:

$$H_a(p)H_a(-p) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=p/j} = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{p^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}.$$

Корни полинома знаменателя или полюсы $H_a(p)H_a(-p)$ имеют следующий вид:

$$p_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (1)$$

Интерпретация выражения (1) является следующей:

1. Функция $H_a(p)H_a(-p)$ имеет $2N$ полюсов, которые являются равномерно распределенными на окружности радиуса Ω_c с угловым шагом π/N [рад].

2. Для нечетного значения N выражение (1) принимает вид:

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

3. Для четного значения N выражение (1) принимает вид:

$$p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi k}{N}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

4. Полюсы функции $H_a(p)H_a(-p)$ являются симметрично расположенными относительно мнимой оси $j\Omega$.

5. Полюсы функции $H_a(p)H_a(-p)$ при любых значениях N не лежат на мнимой оси $j\Omega$, а в случае нечетного значения N лежат на действительной оси p -плоскости.

Пример расположения полюсов функции $H_a(p)H_a(-p)$ для нечетного и четного порядка фильтров Баттерворта представлен на рис. 3.

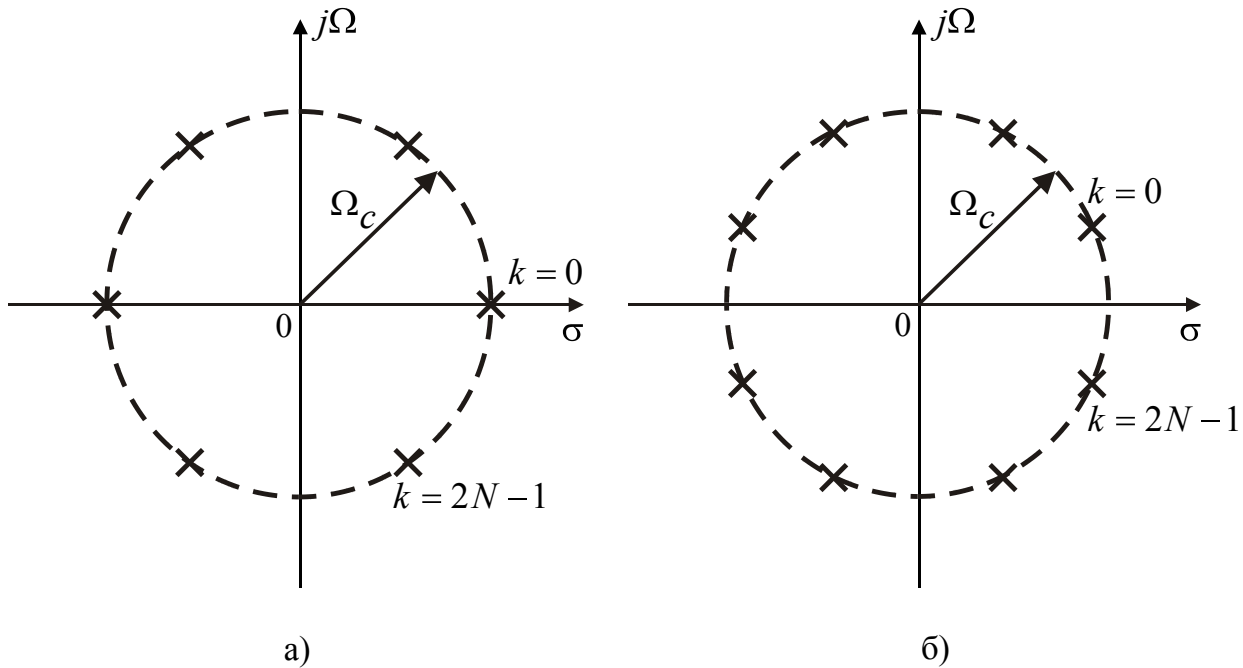


Рис. 3. Пример расположения полюсов функции $H_a(p)H_a(-p)$ для фильтров Баттерворта: а) нечетный порядок N фильтра; б) четный порядок N фильтра

Передаточная функция $H_a(p)$ устойчивого, физически реализуемого аналогового ФНЧ Баттерворта состоит из N полюсов функции $H_a(p)H_a(-p)$, лежащих в левой p -полуплоскости:

$$H_a(p) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}, \quad (2)$$

где $p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Основные этапы синтеза аналогового ФНЧ Баттерворта при заданных значениях Ω_n , Ω_3 и δ_n , δ_3 (ε , A) включают в себя:

1. Определение порядка фильтра Баттерворта, позволяющего выполнить заданные спецификации на синтез фильтра:

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{(1-\delta_n)^{-2}-1}{\delta_3^{-2}-1}\right)^{1/2}}{\lg\left(\frac{\Omega_n}{\Omega_3}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_n}{\Omega_3}\right)}.$$

2. Определение частоты среза Ω_c из множества частот:

$$\Omega_n \left[(1-\delta_n)^{-2} - 1 \right]^{-1/2N} \leq \Omega_c \leq \Omega_3 \left[\delta_3^{-2} - 1 \right]^{-1/2N}.$$

3. Синтез передаточной функции фильтра с использованием выражения (2).

Замечание. Достоинством фильтров Баттерворта является их близкая к линейной ФЧХ в ПП. С этой точки зрения они имеют существенное преимущество перед другими, рассматриваемыми далее, классическими аналоговыми фильтрами.

Основное свойство ФНЧ Баттерворта – равенство АЧХ величине $1/\sqrt{2}$ на частоте среза Ω_c – говорит о том, что процедура аппроксимации сосредотачивается на двух частотах: $\Omega = 0$ и $\Omega = \infty$.

Поэтому единственным параметром для задания функции $|H_a(j\Omega)|^2$ ФНЧ Баттерворта является порядок фильтра N , определяющий степень плоскости АЧХ на указанных крайних частотах.

Фильтры Баттерворта применяются при необходимости сохранения соотношений составляющих сигнала по амплитуде и фазе.

2.2. Фильтры Чебышёва

Удовлетворение требований к фильтру может быть обеспечено при меньших порядках, если ошибку аппроксимации равномерно распределить по ПП или по ПЗ; еще лучше, если ошибка распределена по обеим указанным полосам. Тогда получаем равноволновую аппроксимацию и порядок фильтра, существенно меньший порядка фильтра Баттерворта. Такими свойствами обладают фильтры Чебышёва. В зависимости от области, в которой минимизируется ошибка аппроксимации, различают фильтры Чебышёва типа I и типа II:

1. Фильтры Чебышёва типа I в ПП имеют равноволновый характер аппроксимации, а в ПЗ АЧХ монотонно убывает.

2. Фильтры Чебышёва типа II в ПЗ имеют равноволновый характер аппроксимации, а в ПП АЧХ является максимально плоской (подобно фильтрам Баттерворта); то есть вид аппроксимации фильтров Чебышёва типа II является обратным к виду аппроксимации фильтров Чебышева типа I, поэтому фильтры Чебышева типа II часто называют *инверсными*.

2.2.1. Фильтры Чебышёва типа I

Как уже отмечалось, фильтры Чебышёва типа I обладают равноволновой АЧХ в ПП и монотонной АЧХ – в ПЗ. Функция квадрата АЧХ N -го порядка ФНЧ Чебышёва типа I имеет вид:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)},$$

где ε – параметр, управляющий величиной пульсаций в ПП, $T_N(x)$ – полином Чебышёва N -го порядка, который определяется с использованием следующего выражения:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & 1 < x < \infty, \end{cases}$$

где $x = \frac{\Omega}{\Omega_c}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\cosh^{-1}(x) = \lg\left[x + (x^2 - 1)^{1/2}\right]$.

Необходимо отметить, что полиномы Чебышёва могут быть получены рекурсивно:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Основные свойства полиномов Чебышёва приведены ниже.

1. Если $|x| \leq 1$, то $|T_N(x)| \leq 1$. Если $|x| > 1$, то $T_N(x)$ монотонно увеличивается с ростом x .

2. $T_N(1) = 1$ для любых значений N .

3. $T_N(0) = \pm 1$ для четных N и $T_N(0) = 0$ для нечетных N .

4. Функция $T_N(x)$ обращается в 0 только при $|x| \leq 1$.

Примеры функции $|H_a(j\Omega)|^2$ для фильтров Чебышёва типа I приведены на рис. 4.

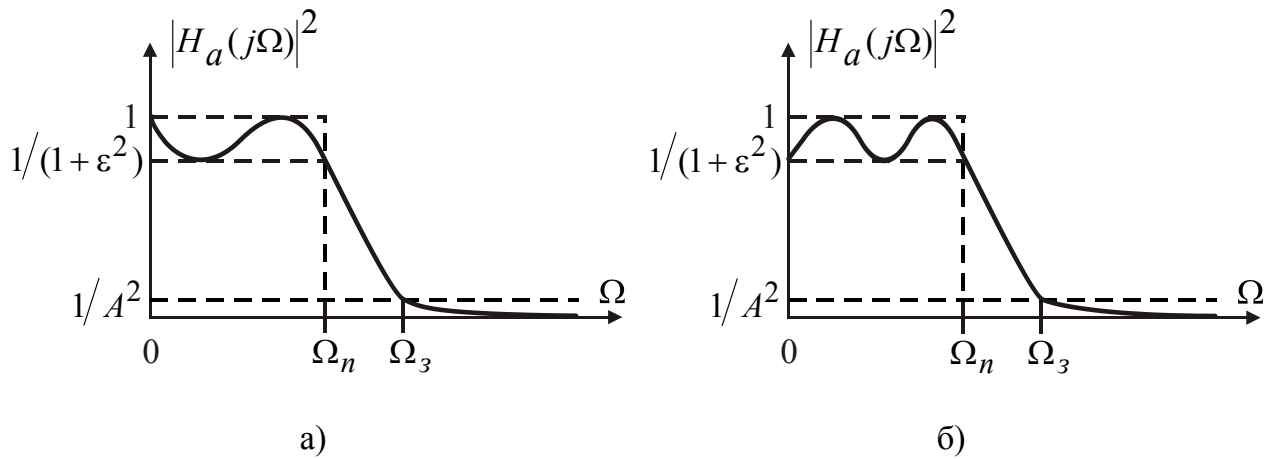


Рис. 4. Примеры квадратов АЧХ фильтров Чебышёва типа I:
 а) нечетный порядок N фильтра; б) четный порядок N фильтра

Основные свойства квадрата модуля частотной характеристики $|H_a(j\Omega)|^2$ аналогового ФНЧ Чебышёва типа I следующие:

1. $|H_a(j0)|^2 = 1$ для нечетных значений N . $|H_a(j0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ для четных значений N .
2. $|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ для всех значений N .
3. $\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1$ при $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$.
4. $|H_a(j\Omega)|^2$ монотонно уменьшается до 0 при $\Omega > \Omega_c$.
5. $|H_a(j\Omega_3)|^2 = \frac{1}{A^2}$.

Для определения передаточной функции $H_a(p)$ устойчивого, физически реализуемого аналогового ФНЧ Чебышёва типа I необходимо найти полюсы функции $H_a(p)H_a(-p)$ и выбрать из них те, которые лежат в левой p -полуплоскости. Полюсы $H_a(p)H_a(-p)$ находятся путем вычисления корней следующей функции:

$$1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{p}{j\Omega_c}\right). \quad (3)$$

Можно показать, что если $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$, $k = 0, \dots, N-1$ являются корнями функции (3), лежащими в левой полуплоскости, тогда

$$\sigma_k = a\Omega_c \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}\right), \quad \Omega_k = b\Omega_c \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}\right),$$

$$k = 0, \dots, N-1,$$

где $a = \frac{1}{2}(\sqrt[N]{\alpha} - \sqrt[N]{1/\alpha})$, $b = \frac{1}{2}(\sqrt[N]{\alpha} + \sqrt[N]{1/\alpha})$ и $\alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}$.

Эти корни лежат на эллипсе с большой осью $b\Omega_c$ и малой осью $a\Omega_c$. С учетом сказанного выше передаточная функция $H_a(p)$ устойчивого, физически реализуемого аналогового ФНЧ Чебышёва типа I имеет вид:

$$H_a(p) = H_a(j0) \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-p_k}{p - p_k}, \quad (4)$$

$$H_a(j0) = \begin{cases} 1, & \text{при нечетном } N, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, & \text{при четном } N. \end{cases}$$

Основные этапы синтеза аналогового ФНЧ Чебышёва типа I при заданных значениях $\Omega_n = \Omega_c$, Ω_3 и δ_n , δ_3 (ε , A) включают в себя:

1. Определение порядка фильтра Чебышёва типа I, позволяющего выполнить заданные спецификации на синтез фильтра:

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\delta_3^{-2} - 1}{(1 - \delta_n)^{-2} - 1}\right)^{1/2}}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_3}{\Omega_n}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_3}{\Omega_n}\right)}.$$

2. Синтез передаточной функции фильтра с использованием выражения (4).

Замечание. Фильтры Чебышёва типа I наиболее широко применяются в радиосистемах для подавления помех от соседних радиостанций.

2.2.2. Фильтры Чебышёва типа II

Фильтры Чебышёва типа II обладают монотонной АЧХ в ПП и равноволновой – в ПЗ. Функция квадрата АЧХ N -го порядка ФНЧ Чебышёва типа II имеет вид:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right) \right]^{-1}},$$

откуда следует, что фильтры Чебышева типа II обладают не только полюсами, но и нулями. Дополнительно, необходимо отметить, что выражение для квадрата АЧХ фильтра Чебышёва типа II, фактически получено из аналогичного выражения для фильтра Чебышёва типа I,

путем замены в последнем компонента $\varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)$ на $\left[\varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right) \right]^{-1}$.

Уравнения синтеза для фильтров Чебышёва типа II являются аналогичными тем, что были введены для фильтров Чебышёва типа I за исключением того, что $\Omega_3 = \Omega_c$, так как пульсации АЧХ для данного типа фильтров наблюдаются в ПЗ. Примеры квадратов АЧХ фильтров Чебышёва типа II приведены на рис. 5.

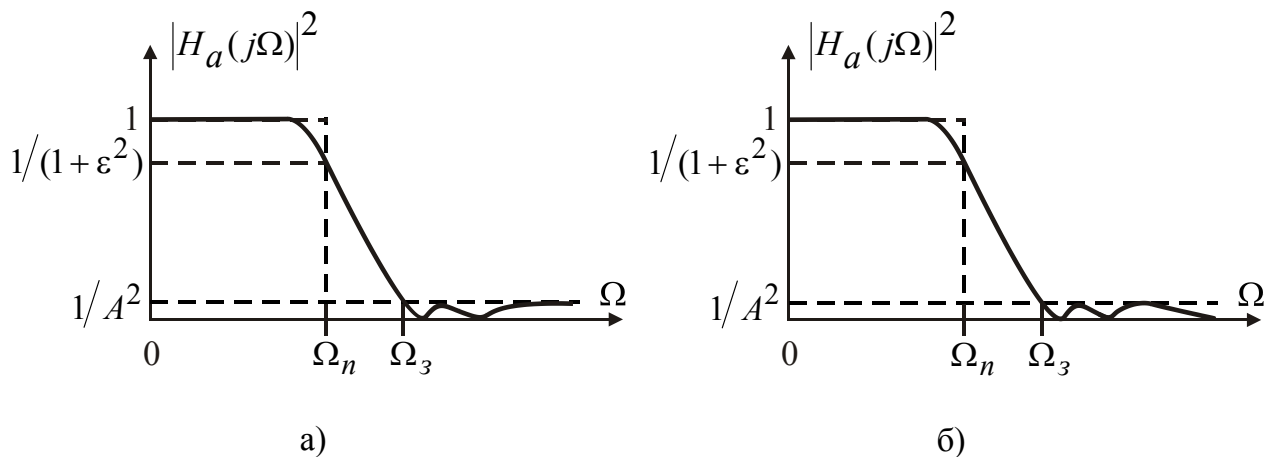


Рис. 5. Примеры квадратов АЧХ фильтров Чебышёва типа II:
а) нечетный порядок N фильтра; б) четный порядок N фильтра

Замечание. Фильтры Чебышёва типа II применяются значительно реже, чем фильтры Чебышёва типа I, поскольку они требуют реализации нулей. Это не только усложняет программную и

аппаратную реализацию, но и увеличивает собственный шум фильтра за счет введения умножений в числителе передаточной функции.

2.3. Эллиптические фильтры (фильтры Золотарева-Кауэра)

Эллиптические фильтры характеризуются равноволновой АЧХ как в ПП, так и в ПЗ. Они являются оптимальными в том смысле, что среди всех других фильтров имеют наименьшую ширину переходной полосы для заданного порядка N , $\Omega_n = \Omega_c$ и пульсаций δ_n, δ_z (ε, A) в ПП и ПЗ соответственно.

Функция квадрата АЧХ N -го порядка ФНЧ Золотарева-Кауэра имеет вид:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)},$$

где ε – параметр, управляющий величиной пульсаций в ПП, $U_N(x)$ – эллиптическая функция Якоби N -го порядка.

Примеры квадратов АЧХ эллиптических фильтров приведены на рис. 6.

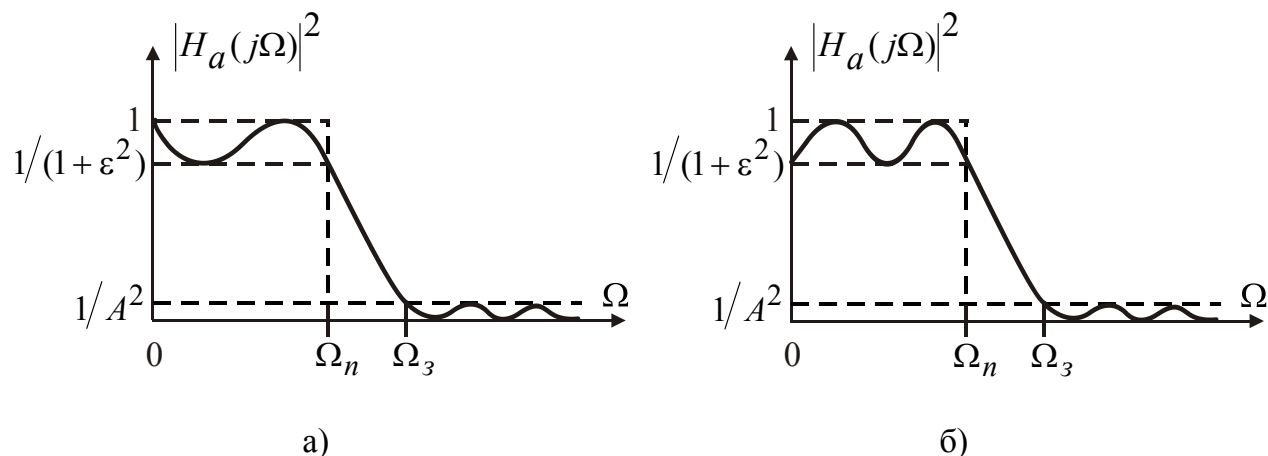


Рис. 6. Примеры квадратов АЧХ эллиптических фильтров:
а) нечетный порядок N фильтра; б) четный порядок N фильтра

Теория эллиптических функций очень сложна и здесь не рассматривается. Заметим только, что при вычислении полюсов фильтров Золотарева-Кауэра необходимо обращаться к эллиптическим интегралам, для вычисления которых в программах синтеза фильтров используются численные методы.

Замечание. Фильтры Золотарева-Кауэра применяются в задачах, требующих высокой избирательности и не критичных к виду ФЧХ. Дополнительно, необходимо отметить, что эллиптические фильтры являются очень трудными для анализа и, следовательно, для синтеза. Однако порядок фильтров Золотарева-Кауэра при заданных спецификациях на фильтр, возможно оценить с использованием сравнительно простого выражения:

$$N \geq \frac{\lg\left(16 \frac{\delta_3^{-2} - 1}{(1 - \delta_n)^{-2} - 1}\right)}{\lg\left(\frac{1}{q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}}\right)} = \frac{\lg\left(16 \frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}\right)}{\lg\left(\frac{1}{q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}}\right)},$$

$$\text{где } q_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1 - k^2)^{1/4}}{1 + (1 - k^2)^{1/4}}, \quad k = \frac{\Omega_n}{\Omega_3}.$$

3. Билинейное z -преобразование

Билинейное z -преобразование представляет метод синтеза цифровых БИХ-фильтров по аналоговому прототипу. Метод основан на представлении комплексного оператора p как функции комплексной переменной z . Такое представление оператора p , имеющее вид дробно-рациональной функции от z^{-1} первого порядка, и называется билинейным z -преобразованием.

3.1. Определение билинейного z -преобразования

Для перехода от p -области, которая описывает аналоговый фильтр-прототип в z -область, которая описывает цифровой фильтр, можно воспользоваться следующим соотношением между комплексными переменными p и z :

$$z = e^{pT_\Delta} \quad \text{или} \quad p = \frac{1}{T_\Delta} \ln(z), \quad (5)$$

где T_Δ – период дискретизации. Формально с использованием выражения (5), которое получается из прямой взаимосвязи между преобразованием Лапласа и z -преобразованием, можно осуществить

отображение передаточной функции $H_a(p)$ аналогового фильтра-прототипа в передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра. Однако подстановка выражения $p = \frac{1}{T_\partial} \ln(z)$ в рациональную функцию $H_a(p)$ приводит к получению физически нереализуемой передаточной функции, так как последняя не представляет отношения двух полиномов от z .

В связи с этим необходимо вводить в рассмотрение другие отображения p -области в z -область, которые должны удовлетворять трем основным свойствам, перечисленным в п. 1.

Одно из таких отображений может быть получено, если выражение (5) представить в следующем виде:

$$z = e^{pT_\partial} = \frac{e^{\frac{pT_\partial}{2}}}{e^{-\frac{pT_\partial}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{pT_\partial}{2}}{1 - \frac{pT_\partial}{2}}. \quad (6)$$

Из выражения (6) можно получить следующую взаимосвязь между комплексными переменными p и z :

$$p = \frac{2}{T_\partial} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (7)$$

Передаточная функция $H(z)$ цифрового фильтра может быть получена из передаточной функции $H_a(p)$ аналогового фильтра заменой переменной p на переменную z согласно выражению (7), то есть

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_\partial} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}. \quad (8)$$

Преобразование (7), представляющее собой конформное отображение p -области в z -область и являющееся рациональной функцией первого порядка от z^{-1} , называется билинейным z -преобразованием. Этот тип преобразования обеспечивает однозначное отображение p -плоскости на z -плоскость и позволяет реализовать эффективный метод синтеза цифровых фильтров, который удовлетворяет трем основным свойствам, перечисленным в п. 1.

3.2. Свойства билинейного z -преобразования

1. Билинейное z -преобразование обеспечивает однозначное отображение p -плоскости на z -плоскость (рис. 7).

Частотная ось $j\Omega$ однозначно отображается в единичную окружность. Действительно, единичная окружность на комплексной плоскости описывается равенством $z = e^{j\omega T_\Delta}$, а оператор $p = \sigma + j\Omega$ для частотной оси имеет вид $p = j\Omega$, поскольку $\sigma = 0$. Тогда из (7) получаем следующее выражение:

$$z = \frac{2/T_\Delta + j\Omega}{2/T_\Delta - j\Omega} = r e^{j\varphi(\Omega)} = \underbrace{\sqrt{\frac{(2/T_\Delta)^2 + \Omega^2}{(2/T_\Delta)^2 + \Omega^2}}}_{r=1} e^{j\varphi(\Omega)}. \quad (9)$$

Поскольку радиус окружности $r = 1$, становится ясным, что выражение (9) описывает единичную окружность на комплексной плоскости.

Рассмотрим, каким образом отображаются положительная и отрицательная области частотной оси $j\Omega$ на z -плоскость, для чего определим аргумент z из выражения (9):

$$\arg(z) = \varphi(\Omega) = \arctg\left(\frac{\Omega T_\Delta}{2}\right) - \arctg\left(-\frac{\Omega T_\Delta}{2}\right) = 2\arctg\left(\frac{\Omega T_\Delta}{2}\right).$$

Рассмотрим отображение некоторых точек $p = j\Omega$ на z -плоскость:

$$\Omega = 0; \varphi(\Omega) = 0; z = e^{j\varphi(\Omega)} = 1;$$

$$\Omega = \pm\infty; \varphi(\Omega) = \pm 2\arctg(\infty) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi; z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi} = -1;$$

$$\Omega = \pm \frac{2}{T_\Delta}; \varphi(\Omega) = \pm 2\arctg(1) = \pm 2\frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2}; z = e^{j\varphi(\Omega)} = e^{\pm j\pi/2} = \pm j.$$

Полученные соответствия указаны в табл. 1.

Таблица 1

Отображение оси $j\Omega$ на z -плоскость

Частота Ω	Значение $\varphi(\Omega)$	Значение z
0	0	1
$\pm\infty$	$\pm\pi$	-1
$\pm 2/T_\Delta$	$\pm\pi/2$	$\pm j$

Продолжая подобные вычисления, можно убедиться (рис. 7), что ось $j\Omega$ однозначно отображается в единичную окружность на z -плоскости, причем положительная область частотной оси $j\Omega$ отображается на верхнюю, а отрицательная – на нижнюю полуокружность.

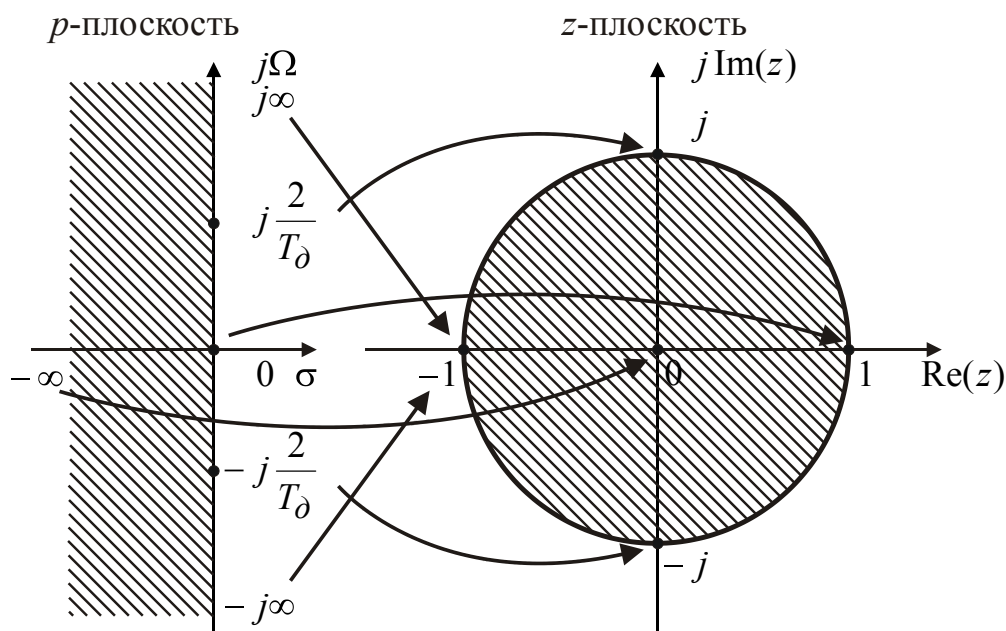


Рис. 7. Отображение p -плоскости на z -плоскость при билинейном z -преобразовании

Левая p -полуплоскость однозначно отображается внутрь единичного круга, а правая p -полуплоскость – вне его.

Для доказательства этого утверждения достаточно знать, в каких пределах лежат значения радиуса r . Воспользуемся выражением (7), в которое подставим оператор $p = \sigma + j\Omega$, и исследуем $r = |z|$ при положительных и отрицательных значениях σ :

$$|z| = \left| \frac{2/T_d + \sigma + j\Omega}{2/T_d - \sigma - j\Omega} \right| = \sqrt{\frac{(2/T_d + \sigma)^2 + \Omega^2}{(2/T_d - \sigma)^2 + \Omega^2}}.$$

Числитель подкоренного выражения при $\sigma < 0$, что соответствует левой p -полуплоскости, оказывается меньше знаменателя, поэтому $r < 1$ и левая p -полуплоскость отображается внутрь единичного круга z -плоскости. При $\sigma > 0$, что соответствует правой p -полуплоскости, числитель оказывается больше знаменателя, поэтому $r > 1$ и правая p -полуплоскость отображается на всю z -плоскость вне единичного круга.

2. ЦФ устойчив, если устойчив его аналоговый фильтр-прототип, поскольку полюсы последнего лежат в левой p -полуплоскости, отображаемой внутрь единичного круга z -плоскости.

3. Соотношение между аналоговыми Ω и цифровыми ω частотами принципиально нелинейно, то есть шкала частот деформируется.

Найдем это соотношение из (7) при $p = j\Omega$ и $z = e^{j\omega T_\partial}$, поскольку рассматриваются только частотная ось и единичная окружность:

$$j\Omega = \frac{2}{T_\partial} \frac{1 - e^{-j\omega T_\partial}}{1 + e^{-j\omega T_\partial}} = j \frac{2}{T_\partial} \frac{(e^{j\omega T_\partial/2} - e^{-j\omega T_\partial/2})}{(e^{j\omega T_\partial/2} + e^{-j\omega T_\partial/2})},$$

откуда следует:

$$\Omega = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T_\partial}{2}\right), \quad (10)$$

$$\omega = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{arctg}\left(\frac{\Omega T_\partial}{2}\right). \quad (11)$$

При $\omega < 0.3/T_\partial$ получается $\Omega \approx \omega$. Следовательно, приблизительно для одних и тех же частот цифровой и аналоговый фильтры имеют одинаковые АЧХ. Однако для более высоких частот соотношения между Ω и ω становится нелинейным и, как показано на рис. 8, в шкалу частот цифрового фильтра вводятся искажения по отношению к частотной шкале аналогового фильтра. Этот эффект известен как *деформация шкалы частот*.

Влияние деформации шкалы частот можно продемонстрировать при рассмотрении аналогового фильтра, имеющего несколько полос пропускания, равномерно распределенных на частотной шкале (см. рис. 8). Получаемый цифровой фильтр будет иметь такое же число полос пропускания, однако в высокочастотной части шкалы ω полосы пропускания будут иметь тенденцию к непропорциональному уменьшению, как показано на рис. 8.

Если интересоваться только АЧХ, то деформация шкалы частот может быть скомпенсирована во всех практически важных случаях с помощью введения предискажений в аналоговый фильтр. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ – граничные частоты (частоты среза) полос пропускания

и задерживания аналогового фильтра. Значения граничных частот соответствующих полос ЦФ определяются выражением:

$$\omega_i = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Omega_i T_\partial}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

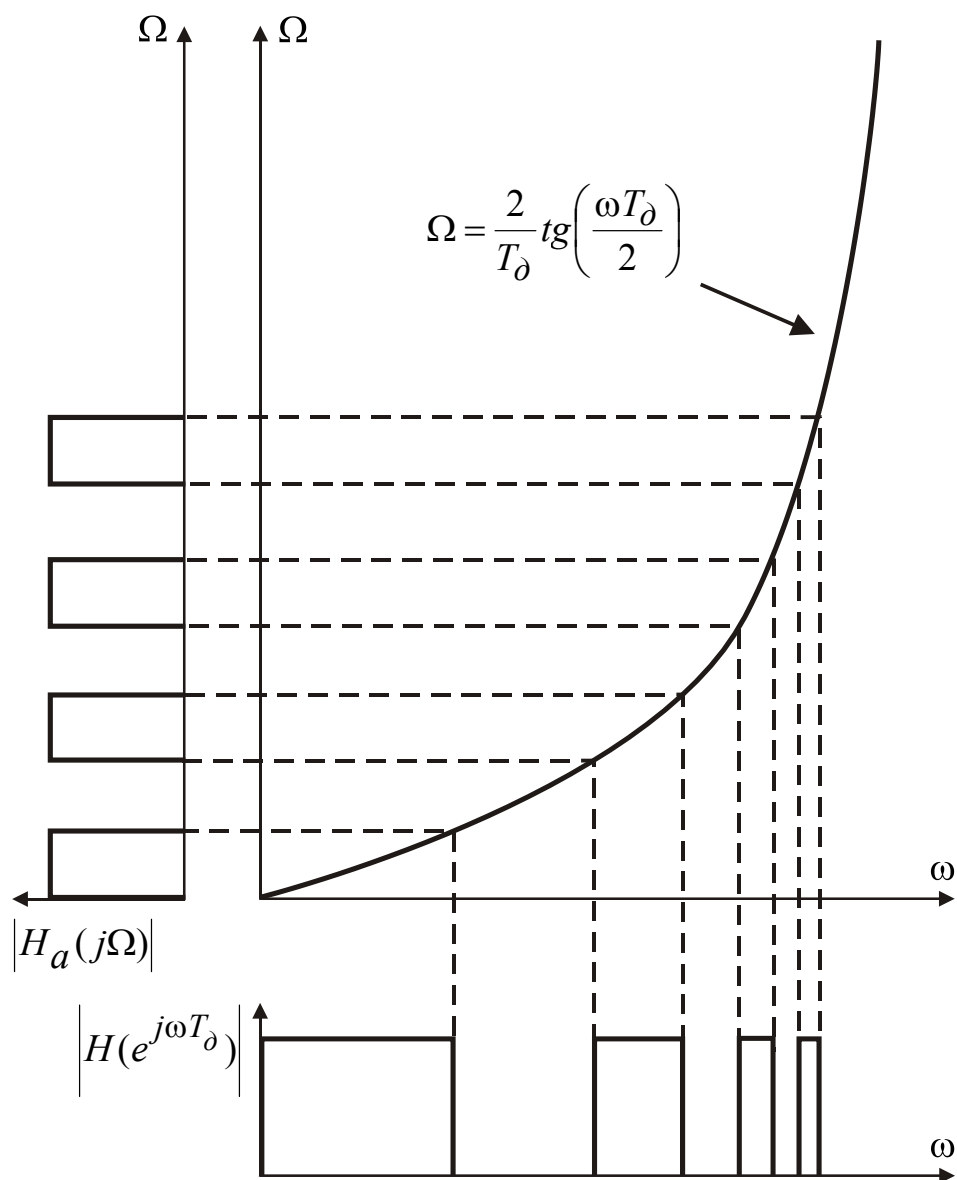


Рис. 8. Влияние деформации шкалы частот на АЧХ ЦФ

Таким образом, если у ЦФ должны быть получены заданные значения граничных частот $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n$ полос пропускания и задерживания, то до применения билинейного z -преобразования в шкалу частот исходного аналогового фильтра должны быть введены предыскажения, обеспечивающие выполнение условий:

$$\Omega_i = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{\omega}_i T_\partial}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

При выполнении этих условий в соответствии с (12) и (13) получаем требуемые соотношения $\omega_i = \tilde{\omega}_i$. Влияние деформации шкалы частот на ФЧХ можно продемонстрировать на примере анализа аналогового фильтра с линейной ФЧХ $\arg(H_a(j\Omega))$. Как показано на рис. 9, ФЧХ $\arg(H(e^{j\omega T_\partial}))$ рассчитываемого цифрового фильтра нелинейна. Таким образом, если в ЦФ требуется сохранить линейность ФЧХ, то необходимо использовать другие методы расчета.

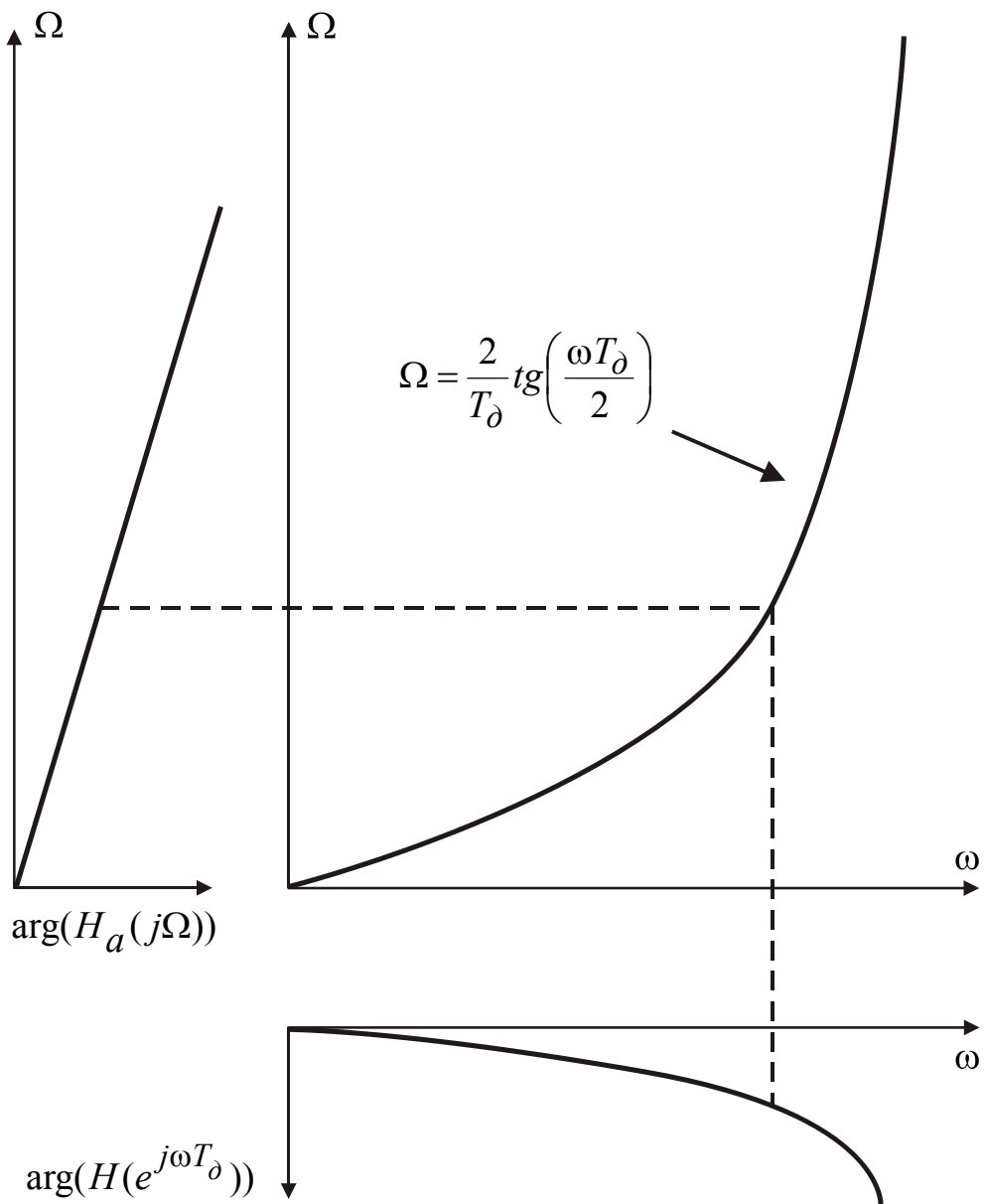


Рис. 9. Влияние деформации шкалы частот на ФЧХ ЦФ

4. В цифровой области сохраняются свойства оптимальности АЧХ аналогового прототипа вследствие однозначности отображения частотной оси в единичную окружность, что исключает эффект наложения АЧХ.

3.3. Частотные преобразования

При расчете цифровых ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ используются два подхода, представленные на рис. 10.

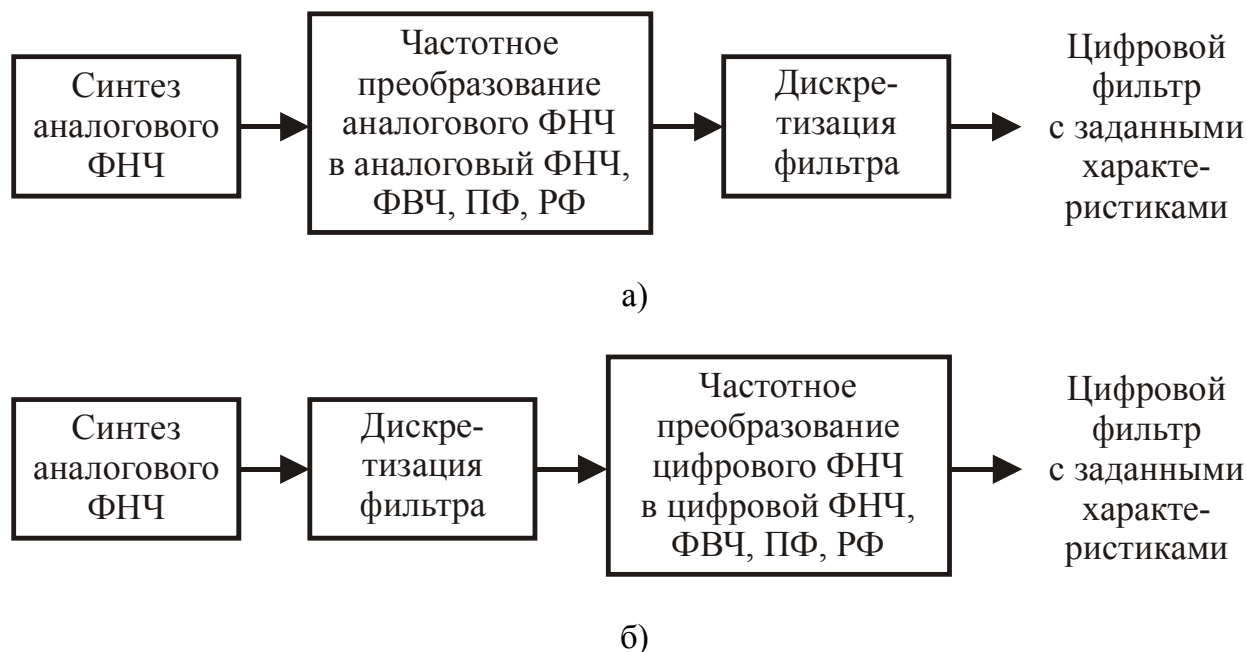


Рис. 10. Частотные преобразования ФНЧ

Различие между ними заключается в следующем. В первом случае аналоговый фильтр-прототип нижних частот с частотой среза Ω_c , предварительно преобразуется в другой аналоговый фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ), из которого затем путем дискретизации, осуществляемой, например, с использованием билинейного z -преобразования, рассчитывается ЦФ с заданными характеристиками. Во втором случае аналоговый фильтр-прототип нижних частот с частотой среза Ω_c , дискретизируется сразу же, а затем путем преобразования его полосы формируется цифровой фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с заданными характеристиками. Рассмотрим различные методы преобразования для аналоговых и цифровых фильтров.

3.3.1. Преобразование полосы частот для аналоговых фильтров

Наиболее простые преобразования аналогового фильтра-прототипа нижних частот с частотой среза Ω_c , в другой аналоговый фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) имеют следующий вид:

1. Преобразование ФНЧ с частотой среза Ω_c в ФНЧ с частотой среза Ω'_c : $p \rightarrow \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} p$.

2. Преобразование ФНЧ с частотой среза Ω_c в ФВЧ с частотой среза Ω'_c : $p \rightarrow \frac{\Omega_c \Omega'_c}{p}$.

3. Преобразование ФНЧ с частотой среза Ω_c в ПФ с нижней $\Omega'_{сн}$ и верхней $\Omega'_{св}$ частотой среза: $p \rightarrow \Omega_c \frac{p^2 + \Omega'_{св} \Omega'_{сн}}{p(\Omega'_{св} - \Omega'_{сн})}$.

4. Преобразование ФНЧ с частотой среза Ω_c в РФ с нижней $\Omega'_{сн}$ и верхней $\Omega'_{св}$ частотой среза: $p \rightarrow \Omega_c \frac{p(\Omega'_{св} - \Omega'_{сн})}{p^2 + \Omega'_{св} \Omega'_{сн}}$.

3.3.2. Преобразование полосы частот для цифровых фильтров

По аналогии с фильтрами непрерывного времени существует несколько простых, предложенных Константиноидисом, преобразований цифрового ФНЧ с частотой среза ω_c в ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ. Приведем формулы для этих преобразований:

1. Преобразование ФНЧ с частотой среза ω_c в ФНЧ с частотой среза ω'_c : $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$, где $\alpha = \frac{\sin[(\omega_c - \omega'_c)T_\delta / 2]}{\sin[(\omega_c + \omega'_c)T_\delta / 2]}$, T_δ – период дискретизации.

2. Преобразование ФНЧ с частотой среза ω_c в ФВЧ с частотой среза ω'_c : $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$, где $\alpha = \frac{\cos[(\omega_c - \omega'_c)T_\delta / 2]}{\cos[(\omega_c + \omega'_c)T_\delta / 2]}$, T_δ – период дискретизации.

3. Преобразование ФНЧ с частотой среза ω_c в ПФ с нижней $\omega'_{сн}$ и верхней $\omega'_{св}$ частотой среза: $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}$, где $\alpha_1 = \frac{2\beta\gamma}{\gamma + 1}$,

$$\alpha_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \beta = \frac{\cos[(\omega'_{св} + \omega'_{сн})T_\partial / 2]}{\cos[(\omega'_{св} - \omega'_{сн})T_\partial / 2]}, \quad \gamma = ctg\left(\frac{(\omega'_{св} - \omega'_{сн})T_\partial}{2}\right)tg\left(\frac{\omega_c T_\partial}{2}\right),$$

T_∂ – период дискретизации.

4. Преобразование ФНЧ с частотой среза ω_c в РФ с нижней $\omega'_{сн}$ и верхней $\omega'_{св}$ частотой среза: $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}$, где $\alpha_1 = \frac{2\beta}{1 + \gamma}$,

$$\alpha_2 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad \beta = \frac{\cos[(\omega'_{св} + \omega'_{сн})T_\partial / 2]}{\cos[(\omega'_{св} - \omega'_{сн})T_\partial / 2]}, \quad \gamma = tg\left(\frac{(\omega'_{св} - \omega'_{сн})T_\partial}{2}\right)tg\left(\frac{\omega_c T_\partial}{2}\right),$$

T_∂ – период дискретизации.

Замечание. В пакете *Matlab* в качестве функций преобразования полосы частот используются функции, представленные в п. 3.3.1. Применительно к билинейному z -преобразованию результат, получаемый при синтезе цифрового фильтра с использованием частотных преобразований, изложенных в п. 3.3.1 или п. 3.3.2, является идентичным, при одинаково заданных требованиях на синтез фильтра. Однако последнее является несправедливым, например, для синтеза БИХ-фильтров с использованием метода инвариантного преобразования импульсной характеристики.

3.4. Методика синтеза цифровых фильтров на основе билинейного z -преобразования

С использованием основных положений, сформулированных в п. 3.3, опишем два метода синтеза ЦФ на основе билинейного z -преобразования.

3.4.1. Методика синтеза ЦФ на основе билинейного z -преобразования с использованием трансформации полосы частот для аналоговых фильтров

1. Определить и деформировать граничные частоты (частоты среза) нужного фильтра с использованием выражения (13).

2. На основе спецификаций ЦФ и набора граничных частот, полученных на шаге 1, определить подходящий аналоговый фильтр прототип нижних частот с передаточной функцией $H_a(p)$.

3. С использованием подхода, приведенного в п. 3.3.1, осуществить преобразование аналогового фильтра-прототипа нижних

частот с частотой среза Ω_c , в другой аналоговый фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ).

4. Применить билинейное z -преобразование с использованием выражения (8) к передаточной функции аналогового фильтра, полученной на шаге 3, и получить передаточную функцию $H(z)$ требуемого ЦФ.

5. Проверить выполнение заданных требований.

3.4.2. Методика синтеза ЦФ на основе билинейного z -преобразования с использованием трансформации полосы частот для цифровых фильтров

1. Определить и деформировать граничные частоты (частоты среза) нужного фильтра с использованием выражения (13).

2. На основе спецификаций ЦФ и набора граничных частот, полученных на шаге 1, определить подходящий аналоговый фильтр прототип нижних частот с передаточной функцией $H_a(p)$.

3. Применить билинейное z -преобразование к функции $H_a(p)$ с использованием выражения (8) и получить передаточную функцию ЦФ.

4. С использованием подхода, приведенного в п. 3.3.2, осуществить преобразование цифрового ФНЧ с частотой среза ω_c , полученного на шаге 3, в требуемый цифровой фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ).

5. Проверить выполнение заданных требований.

3.5. Особенности использования метода билинейного z -преобразования

Основным фактором, создающим ограничение на использование билинейного z -преобразования, является деформация шкалы частот. Последнее означает, что:

1. Билинейное z -преобразование пригодно лишь в тех случаях, когда требования к АЧХ фильтра-прототипа задаются ступенчатой функцией частоты, что свойственно частотно-избирательным фильтрам (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ).

2. Билинейное z -преобразование не пригодно для синтеза корректирующих фильтров (фильтров с произвольными АЧХ), фильтров с линейной ФЧХ, а так же для сохранения импульсной характеристики фильтра-прототипа. Иначе говоря, ни фазочастотная, ни импульсная характеристики аналогового прототипа не сохраняются.

Содержание лабораторной работы

1. Исследование параметров синтезированных фильтров.
2. Реализация алгоритма синтеза БИХ-фильтров на основе метода билинейного z -преобразования с использованием элементов написания программного кода в пакете Matlab.
3. Применение синтезированных фильтров в задаче обработки (фильтрации) гармонических сигналов.

Замечание. Тип частотно-избирательного фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ), а так же частоты среза выбираются по указанию преподавателя (см. табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные

Шифр студента	Тип частотно-избирательного фильтра и требования на частоты среза (рад)			
	ФНЧ	ФВЧ	ПФ	РФ
1	$\hat{\omega}_c = 0.1\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.5\pi$
2	$\hat{\omega}_c = 0.2\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.4\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.1\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.4\pi$
3	$\hat{\omega}_c = 0.3\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.5\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
4	$\hat{\omega}_c = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.6\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$
5	$\hat{\omega}_c = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.6\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
6	$\hat{\omega}_c = 0.6\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.3\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.5\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.8\pi$
7	$\hat{\omega}_c = 0.7\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.2\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.1\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.4\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.4\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.7\pi$
8	$\hat{\omega}_c = 0.8\pi$	$\hat{\omega}_c = 0.1\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.3\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.5\pi$	$\hat{\omega}_{сн} = 0.2\pi,$ $\hat{\omega}_{св} = 0.6\pi$

Замечание. При рассмотрении п. 1 и п. 2, в порядке выполнения работы ниже, необходимо воспользоваться приложением для анализа и синтеза фильтров пакета Matlab – FDATool (см. прил. 1).

Порядок выполнения работы

1. Исследование изменения характеристик фильтра в зависимости от заданных на него спецификаций

В разделе Design Method (метод синтеза) FDATool выбрать синтез БИХ-фильтров методом билинейного z -преобразования: $PR \rightarrow$ Butterworth (фильтр Баттерворта), Chebyshev Type I (фильтр Чебышёва типа I), Chebyshev Type II (фильтр Чебышёва типа II), Elliptic (эллиптический фильтр). В разделе Response type (тип характеристики) выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (ПФ), Bandstop (РФ). В разделе Filter Order \rightarrow Specify order (порядок фильтра \rightarrow задать порядок) задать порядок фильтра. В разделе Frequency Specifications \rightarrow Units (требования на частоты среза \rightarrow единицы измерения частоты) выбрать Normalized (сетка частот является нормализованной) и установить частоты среза в соответствии с табл. 2. В разделе Magnitude Specifications (требования на отклонения АЧХ в ПП (Epass или Apass) и ПЗ синтезируемого фильтра (Estop или Astop)) установить значения отклонений либо квадрата АЧХ (Epass и Estop), либо АЧХ, значения которой представлены в логарифмическом масштабе (Apass и Astop). С использованием кнопки Design Filter (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения параметров фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр.

1. Для фильтра Баттерворта (Butterworth) произвести исследование изменения АЧХ и ФЧХ в зависимости от порядка фильтра.

2. Для фильтра Чебышёва типа I (Chebyshev Type I) произвести исследование изменения АЧХ и ФЧХ в зависимости от порядка фильтра и отклонений АЧХ в ПП (Epass или Apass).

3. Для фильтра Чебышёва типа 2 (Chebyshev Type II) произвести исследование изменения АЧХ и ФЧХ в зависимости от порядка фильтра и отклонений АЧХ в ПЗ (Estop или Astop).

4. Для эллиптического фильтра (Elliptic) произвести исследование изменения АЧХ и ФЧХ в зависимости от порядка фильтра и отклонений АЧХ в ПП (Epass или Apass) и ПЗ (Estop или Astop).

5. Привести примеры полученных АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров и произвести их сравнение для различных аналоговых фильтров-прототипов.

Замечание. Для того чтобы не возникло излишней путаницы при задании частот среза в *FDATool*, отметим, что если в соответствии с табл. 2 указано, например, синтезировать ФНЧ с $\hat{\omega}_c = 0.1\pi$, то в программе нужно задавать частоту среза, равную 0.1. Последнее становится понятным, если обратить внимание на коэффициент умножения по оси частот в окне отображения АЧХ (*Magnitude response*) синтезированного фильтра.

2. Исследование изменения порядка фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр

В разделе *Design Method* (метод синтеза) *FDATool* выбрать синтез БИХ-фильтров методом билинейного *z*-преобразования: *IR* → *Butterworth* (фильтр Баттерворта), *Chebyshev Type I* (фильтр Чебышёва типа I), *Chebyshev Type II* (фильтр Чебышёва типа II), *Elliptic* (эллиптический фильтр). В разделе *Response type* (тип характеристики) выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра *Lowpass* (ФНЧ), *Highpass* (ФВЧ), *Bandpass* (ПФ), *Bandstop* (РФ). В разделе *Filter Order* (порядок фильтра) выбрать *Minimum order* (минимальный порядок фильтра). В разделе *Options* (опции) параметр *Match exactly* (точное выполнение требования на АЧХ только в ПП или только ПЗ, или в обеих полосах) рекомендуется оставлять без изменения для заданного типа фильтров (параметр вводится по причине округления минимального порядка фильтра при его вычислении). В разделе *Frequency Specifications* → *Units* (требования на частоты среза → единицы измерения частоты) выбрать *Normalized* (сетка частот является нормализованной) и установить частоты среза в соответствии с табл. 2. В разделе *Magnitude Specifications* (требования на отклонения АЧХ в ПП (*Epass* или *Apass*) и ПЗ синтезируемого фильтра (*Estop* или *Astop*)) установить значения отклонений либо квадрата АЧХ (*Epass* и *Estop*), либо АЧХ значения которой представлены в логарифмическом масштабе (*Apass* и *Astop*). С использованием кнопки *Design Filter* (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения порядка фильтра в зависимости от заданных на него спецификаций.

1. Для фильтра Баттерворта (*Butterworth*) произвести исследование изменения порядка фильтра в зависимости от изменения ширины

переходной полосы, регулируемой параметрами w_{pass} (граничная частота (частоты) в ПП) и w_{stop} (граничная частота (частоты) в ПЗ) и изменения отклонений АЧХ в ПП (E_{pass} или A_{pass}) и ПЗ (E_{stop} или A_{stop}).

2. Для фильтра Чебышёва типа I (Chebyshev Type I) произвести исследование изменения порядка фильтра в зависимости от изменения ширины переходной полосы, регулируемой параметрами w_{pass} (граничная частота (частоты) в ПП) и w_{stop} (граничная частота (частоты) в ПЗ) и изменения отклонений АЧХ в ПП (E_{pass} или A_{pass}) и ПЗ (E_{stop} или A_{stop}).

3. Для фильтра Чебышёва типа II (Chebyshev Type II) произвести исследование изменения порядка фильтра в зависимости от изменения ширины переходной полосы, регулируемой параметрами w_{pass} (граничная частота (частоты) в ПП) и w_{stop} (граничная частота (частоты) в ПЗ) и изменения отклонений АЧХ в ПП (E_{pass} или A_{pass}) и ПЗ (E_{stop} или A_{stop}).

4. Для эллиптического фильтра (Elliptic) произвести исследование изменения порядка фильтра в зависимости от изменения ширины переходной полосы, регулируемой параметрами w_{pass} (граничная частота (частоты) в ПП) и w_{stop} (граничная частота (частоты) в ПЗ) и изменения отклонений АЧХ в ПП (E_{pass} или A_{pass}) и ПЗ (E_{stop} или A_{stop}).

5. Привести примеры полученных АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров и произвести сравнение порядков фильтров для различных аналоговых фильтров-прототипов.

Замечание. Для сравнения результатов, полученных при синтезе фильтров с использованием различных аналоговых прототипов, рекомендуется ширину переходной полосы и пульсации в ПП и ПЗ синтезируемого фильтра выбирать одинаковыми при использовании различных аналоговых фильтров-прототипов.

3. Реализация алгоритма синтеза БИХ-фильтров на основе билинейного z -преобразования с использованием элементов написания программного кода в пакете Matlab

Для исследуемого частотно-избирательного фильтра при произвольно заданных спецификациях на фильтр решить задачу синтеза БИХ-фильтра методом билинейного z -преобразования с использованием средств написания программного кода системы Matlab. Пример постановки и решения рассматриваемой задачи приведен ниже.

Пример. Синтезировать цифровой БИХ-фильтр верхних частот Чебышёва типа I с использованием методики, предложенной в п. 3.4.2. Спецификации синтезируемого фильтра следующие:

$$\tilde{\omega}_z = \frac{0.2\pi}{T_\partial} \text{ [рад/с]}, \tilde{\omega}_n = \frac{0.3\pi}{T_\partial} \text{ [рад/с]}, \delta_z = 0.178, \delta_n = 0.109, T_\partial = 1 \text{ [с]}.$$

Определить и построить АЧХ синтезированного ЦФ. Проверить идентичность полученной АЧХ с аналогом, полученным при использовании методики, предложенной в п. 3.4.1.

Замечание. В настоящем пункте требования на БИХ-фильтр задаются через граничные частоты и пульсации в ПП и ПЗ. Выбор частот и пульсаций осуществляется по усмотрению студента, при этом тип синтезируемого фильтра выбирается в соответствии с табл. 2.

Для решения задачи воспользуемся последовательностью действий, изложенных в п. 3.4.2.

1. Определим и деформируем граничные частоты (частоты среза) нужного фильтра с использованием выражения (13)

$$\Omega_z = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{\omega}_z T_\partial}{2}\right) \approx 0.650, \Omega_n = \frac{2}{T_\partial} \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{\omega}_n T_\partial}{2}\right) \approx 1.019.$$

2. На основе спецификаций ЦФ и набора граничных частот, полученных на шаге 1, определим подходящий аналоговый фильтр прототип нижних частот с передаточной функцией $H_a(p)$.

Применительно к настоящей задаче это можно решить с использованием стандартной функции пакета Matlab, позволяющей сгенерировать коэффициенты фильтра Чебышёва типа I.

```
[a,b] = cheby1(N, rp, wp, 'low', 'type')
% функция для вычисления коэффициентов ФНЧ
% Чебышёва типа I
%
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции
% N -- порядок фильтра
% rp -- уровень АЧХ в ПП на частоте wr,
% выраженный в дБ
% wr -- граничная частота в ПП
```

```

% 'low' -- синтезировать ФНЧ
% 'type' -- выбор синтезируемого фильтра ('s' --
% синтез аналогового фильтра Чебышева типа I,
% 'z' -- синтез цифрового фильтра Чебышева
% типа I, с использованием алгоритма,
% приведенного в п. 3.4.1)

```

При вычислении коэффициентов фильтра Чебышёва типа I по спецификациям, приведенным выше, нужно рассчитать порядок фильтра. Минимальный порядок фильтра Чебышёва типа I может быть вычислен с использованием стандартной функции пакета Matlab.

```

[N,wp] = cheblord(wp,ws,rp,rs,'s')
% Функция для вычисления минимального порядка
% фильтра Чебышёва типа I
%
% N -- порядок фильтра
% wp -- граничная частота в ПП
% ws -- граничная частота в ПЗ
% rp -- уровень АЧХ в ПП на частоте wp,
% выраженный в дБ
% rs -- уровень АЧХ в ПЗ на частоте ws,
% выраженный в дБ
% 's' -- вычисление минимального порядка
% аналогового фильтра Чебышева типа I

```

Вычислить АЧХ и ФЧХ аналогового фильтра-прототипа можно с использованием функции, приведенной ниже.

```

function [db,mag,pha,w] = freqs_m(a,b,wmax)
% Модифицированная версия функции freqs
%
% mag -- абсолютные значения АЧХ, вычисленные
% от 0 до wmax рад/с
% db -- относительные значения АЧХ в дБ,
% вычисленные от 0 до wmax рад/с
% pha -- ФЧХ, вычисленная от 0 до wmax рад/с
% w -- вектор частотных значений от 0 wmax рад/с
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции

```

```

% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции
% wmax -- максимальное значение частоты в рад/с
% по оси частот
%
w = [0:1:500]*wmax/500;
[H,w] = freqs(a,b,w);

mag = abs(H);

eps = 0.0001;
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);

```

3. Применим билинейное z-преобразование к функции $H_a(p)$ с использованием выражения (8) и получим передаточную функцию ЦФ.

Выполнение настоящей этапы может быть осуществлено с использованием стандартной функции пакета Matlab, листинг которой приведен ниже.

```

[ad,bd] = bilinear(a,b,fs,fp)
% Функция для вычисления билинейного z-
% преобразования
%
% ad -- коэффициенты числителя передаточной
% функции цифрового фильтра
% bd -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции цифрового фильтра
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции аналогового фильтра
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции аналогового фильтра
% fs -- частота дискретизации, выраженная в Гц
% fp -- частота, выражаемая в Гц, для которой
% значения АЧХ до и после билинейного z-
% преобразования будут идентичными

```

4. С использованием подхода, приведенного в п. 3.4.2, осуществляем преобразование цифрового ФНЧ с частотой среза ω_c

[рад/с], в требуемый цифровой ФВЧ с частотой среза $\omega'_c = \tilde{\omega}_n = 0.19\pi$ [рад/с].

Для решения задачи преобразования цифрового ФНЧ в цифровой ФВЧ может быть использован программный код, приведенный ниже.

```

function [az,bz] = zmapping(aZ,bZ,Nz,Dz)
% Функция, позволяющая осуществить частотные
% преобразования, изложенные в п. 3.4.2
%
% a(z)  a(Z) |
% --- = --- |      N(Z)
% b(z)  b(Z) |Z = ---
%                         D(Z)
%
azord = (length(aZ)-1) * (length(Nz)-1);
bzord = (length(bZ)-1) * (length(Dz)-1);

az = zeros(1,azord+1);

for k = 0:azord
    pln = [1];
    for l = 0:k-1
        pln = conv(pln,Nz);
    end

    pld = [1];
    for l = 0:azord-k-1
        pld = conv(pld,Dz);
    end
    az = az+aZ(k+1)*conv(pln,pld);
end

bz = zeros(1,bzord+1);

for k = 0:azord
    pln = [1];
    for l = 0:k-1
        pln = conv(pln,Nz);
    end

```

```

pld = [1];
for l = 0:bzord-k-1
    pld = conv(pld,Dz);
end
bz = bz + bZ(k+1)*conv(pln,pld);
end

bz1 = bz(1);
bz = bz/bz1;
az = az/bz1;

```

Замечание. Для сравнения АЧХ фильтра Чебышева типа I, полученного с использованием методики, изложенной в п. 3.4.2, с АЧХ того же фильтра, полученной с использованием методики, изложенной п. 3.4.1, необходимо произвести синтез фильтра с использованием последнего подхода. Это может быть выполнено на основе функции `cheby1`, листинг которой был приведен выше, с заменой параметра 'low' (синтезировать ФНЧ) на параметр 'high' (синтезировать ФВЧ).

5. Проверяем выполнение заданных требований.

Настоящий пункт можно выполнить графически или с использованием написания дополнительного кода, проверяющего спецификации в заданных выше точках.

Окончательный программный код, использующий функции, приведенные выше, может иметь следующий вид.

```

% Реализация этапов синтеза БИХ-фильтра методом
% билинейного z-преобразования
%
Ts = 1; % с
fs = 1/Ts; % Гц

ws = 0.2*pi/Ts; % рад/с
wp = 0.3*pi/Ts; % рад/с
deltas = 0.178;
deltap = 0.109;

rs = -20*log10(deltas);
rp = -20*log10(1-deltap);

```

```

Omegas = (2/Ts)*tan(ws*Ts/2);
Omegas = (2/Ts)*tan(wp*Ts/2);
[N,Omegas] = cheblord(Omegas, rp, rs, 's');
[a,b] = cheby1(N, rp, Omegas, 'low', 's');

[db,mag,pha,w] = freqs_m(a,b,pi);
subplot(221); plot(w/pi,mag)
title('АЧХ аналогового ФНЧ-прототипа'); grid
xlabel('\omega*\pi, рад/с'); ylabel('АЧХ')

fp = Omegas/(2*pi);
[ad,bd] = bilinear(a,b,fs,fp);

[dbd,magd,phad,wd] = freqz_m(ad,bd);
subplot(222); plot(wd/(pi*Ts),magd)
title('АЧХ цифрового ФНЧ, полученного из
аналогового ФНЧ-прототипа'); grid
xlabel('\omega*\pi, рад/с'); ylabel('АЧХ')

wphp = wp; % рад/с
alfa = cos((Omegas-wphp)*Ts/2)/cos((Omegas+ ...
wphp)*Ts/2);
Nz = [alfa,-1];
Dz = [1,-alfa];
[az,bz] = zmapping(ad,bd,Nz,Dz);
[dbz,magz,phaz,wz] = freqz_m(az,bz);
subplot(223); plot(wz/(pi*Ts),magz)
title('АЧХ синтезированного цифрового ФВЧ (метод
п. 3.4.2)'); grid
xlabel('\omega*\pi, рад/с'); ylabel('АЧХ')

[at,bt] = cheby1(N, rp, wphp/pi*Ts, 'high', 'z');
[dbt,magt,phat,wt] = freqz_m(at,bt);
subplot(224); plot(wt/(pi*Ts),magt)
title('АЧХ синтезированного цифрового ФВЧ (метод
п. 3.4.1)'); grid
xlabel('\omega*\pi, рад/с'); ylabel('АЧХ')

function [db,mag,pha,w] = freqz_m(a,b)

```

```

% Модифицированная версия функции freqz
%
% mag -- абсолютные значения АЧХ, вычисленные
% от 0 до pi радиан
% db -- относительные значения АЧХ в дБ,
% вычисленные от 0 до pi радиан
% pha -- ФЧХ, вычисленная от 0 до pi радиан
% w -- вектор частотных значений от 0 до pi
% радиан
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра значения a
% эквивалентны отсчетам импульсной
% характеристики)
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра b=[1])
%
[H,w] = freqz(a,b,1000,'whole');

H = (H(1:1:501))';
w = (w(1:1:501))';

mag = abs(H);

eps = 0.0001;
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);

```

Замечание. Часть функций, аналогичных приведенным выше, может быть найдена в пакете Matlab для других типов фильтров, изучаемых в настоящей работе.

Замечание. При выполнении п. 3 настоящей работы, вид аппроксимации частотной характеристики фильтра (Баттерворта, Чебышева типа I или типа II, Золотарева-Кауэра) может быть выбран по усмотрению студента.

4. Реализация алгоритма обработки (фильтрации) гармонических сигналов с использованием синтезированных фильтров и применением элементов написания программного кода в пакете Matlab

Написать программный код, позволяющий удалять гармонический сигнал из смеси двух или нескольких сигналов, с использованием фильтров, синтезированных в предыдущем пункте. Пример программного кода, написанного в пакете Matlab, приведен ниже.

```
% Программа для обработки (фильтрации)
% гармонического сигнала в смеси двух
% сигналов (гармонического и белого гауссовского
% шума) . Для работы требуются коэффициенты
% числителя az и знаменателя bz передаточной
% функции синтезированного ЦФ
%
m = 1000;
n = 0:1:m-1;
Ts = 1; % с

signal = 5*sin(0.01*pi*n*Ts) + ...
        random('norm',0,1,[1 m]);
[H,w] = freqz(az,bz,m,'whole');
fftsignal = fft(signal);
restsignal = ifft(H.*conj(fftsignal'));

subplot(221); plot(n*Ts,signal)
title('Исходный сигнал'); grid
xlabel('n*Ts'); ylabel('Значения сигнала')

subplot(222); plot(w/(Ts*pi),abs(H))
title('АЧХ синтезированного цифрового ФВЧ');
grid
axis([0 2/Ts 0 1])
xlabel('\omega*\pi, рад/с'); ylabel('АЧХ')

subplot(223); plot(w/(Ts*pi),abs(fftsignal))
title('Амплитудный спектр анализируемого
сигнала'); grid
axis([0 2/Ts 0 max(abs(fftsignal))])
```

```

xlabel ('\omega*\pi, рад/с')
ylabel ('Амплитудный спектр')

subplot(224); plot(n*Ts,restsignal)
title('Восстановленный сигнал'); grid
xlabel('n*Ts'); ylabel('Значения сигнала')

```

Контрольные вопросы

1. Что такое аналоговый фильтр-прототип?
2. Дать определение БИХ-фильтра?
3. Какие основные ограничения накладываются на методы синтеза ЦФ по аналоговым фильтрам-прототипам?
4. Привести примеры методов синтеза БИХ-фильтров.
5. Какие существуют способы задания требований к цифровым БИХ-фильтрам?
6. Какую роль играют фильтры непрерывного времени при проектировании ЦФ.
7. Привести примеры аналоговых фильтров-прототипов, перечислить их основные параметры.
8. Объяснить сущность метода билинейного z -преобразования.
9. Перечислить и пояснить основные свойства билинейного z -преобразования.
10. Что такое эффект деформации полосы частот? Привести примеры.
11. Пояснить два подхода, применяемые в задаче синтеза цифровых БИХ-фильтров по аналоговым фильтрам-прототипам.
12. Каковы основные особенности использования метода билинейного z -преобразования?

Литература

1. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л. Цифровые фильтры: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
4. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
5. Хрящев В.В., Приоров А.Л., Волохов В.А. Основы теории цепей: сборник задач. – Ярославль: ЯрГУ, 2008.

6. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
7. Ingle V.K., Proakis J.G. Digital Signal Processing using Matlab V. 4. PWS Publishing Company, 1997.

Лабораторная работа № 3

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ЧЕБЫШЁВУ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Цель работы: изучение оптимального по Чебышёву метода синтеза КИХ-фильтров, синтез цифровых низкочастотных, высокочастотных, полосовых и режекторных фильтров.

Краткая теория

1. Основные определения

Простота расчета коэффициентов передаточной функции КИХ-фильтров методом окон сопровождается получением фильтров, которые обладают рядом недостатков:

1. Расположение граничных частот синтезированного фильтра не соответствует заданным на него спецификациям.

2. Пульсации в различных полосах фильтра аппроксимируются одинаково.

3. Ошибка аппроксимации, то есть разница между идеальной и реальной частотной характеристикой фильтра, распределена неравномерно по различным частотным полосам. Причем пульсации АЧХ фильтра возрастают при приближении к границам соответствующих полос. Необходимо отметить, что равномерное распределение пульсаций АЧХ в различных полосах фильтра, позволяет значительно снизить его порядок.

В теории цифровой обработки сигналов разработана методика, позволяющая устранить отмеченные выше недостатки синтезируемых цифровых фильтров. Однако она является достаточно сложной для понимания и требует программной реализации.

В классе КИХ-фильтров с линейной ФЧХ, существует возможность получить множество условий, для которых доказывается, что решение задачи синтеза цифровых фильтров является оптимальным по Чебышёву, то есть оптимальным в смысле минимума максимальной ошибки аппроксимации (иногда называемой минимаксной ошибкой или ошибкой Чебышёва). Фильтры, обладающие свойством оптимальности, отмеченным выше, называются фильтрами с равномерными (равноволновыми) пульсациями, поскольку ошибка аппроксимации данного типа фильтров является равномерно распределенной по его частотным полосам. Как следствие последнего, цифровые фильтры,

оптимальные в смысле минимума максимальной ошибки аппроксимации, будут иметь более низкий порядок, чем цифровые фильтры, синтезированные с использованием метода окон, при одинаково заданных спецификациях на синтез фильтров.

Далее будет сформулирована задача синтеза оптимальных фильтров в смысле минимума максимальной ошибки аппроксимации и проанализировано общее число максимумов и минимумов амплитудной характеристики КИХ-фильтров с линейной ФЧХ. С использованием этой формулировки может быть рассмотрен обобщенный алгоритм синтеза КИХ-фильтров с равномерными пульсациями, использующий полиномиальную интерполяцию при нахождении оптимального решения. Этот алгоритм получил название алгоритма Паркса-Макклеллана, включающий в себя алгоритм замены Ремеза для полиномиальных решений.

2. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Фильтры с линейной ФЧХ могут быть классифицированы на 4 типа в зависимости от симметрии или антисимметрии импульсной характеристики $h(n)$, а также четности или нечетности N . Каждый из этих типов имеет собственные ограничения на расположение нулей передаточной функции $H(z)$, которая в свою очередь накладывает ограничения на характер частотной характеристики:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{j\beta} e^{-jN\hat{\omega}/2} A(\hat{\omega}),$$

где β – константа, зависящая от типа КИХ-фильтра с линейной ФЧХ, $A(\hat{\omega})$ – амплитудная характеристика, представляющая собой действительную функцию частоты $\hat{\omega}$ [рад] и принимающая как положительные, так и отрицательные значения. Модуль амплитудной характеристики есть АЧХ КИХ-фильтра с линейной ФЧХ.

2.1. Фильтры типа I – симметричная импульсная характеристика, N – четное

Центр симметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$. Частотная характеристика фильтра типа I с линейной ФЧХ выражается следующим образом:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-jN\hat{\omega}/2} \sum_{k=0}^{N/2} a(k) \cos(k\hat{\omega}),$$

где $a(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, $a(0) = h\left(\frac{N}{2}\right)$.

Амплитудная характеристика имеет следующий вид:

$$A(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{N/2} a(k) \cos(k\hat{\omega}).$$

2.2. Фильтры типа II – симметричная импульсная характеристика, N – нечетное

Центр симметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$. Частотная характеристика фильтра типа II с линейной ФЧХ может быть представлена в виде

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-jN\hat{\omega}/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} b(k) \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\hat{\omega}\right],$$

где $b(k) = 2h\left(\frac{N+1}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$.

Амплитудная характеристика имеет следующий вид:

$$A(\hat{\omega}) = \sum_{k=1}^{(N+1)/2} b(k) \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\hat{\omega}\right].$$

Последнее выражение может быть представлено в виде:

$$A(\hat{\omega}) = \cos\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \tilde{b}(k) \cos(k\hat{\omega}),$$

где коэффициенты $\tilde{b}(k)$ являются линейно связанными с коэффициентами $b(k)$. Можно показать, что эта взаимосвязь имеет следующий вид:

$$\tilde{b}(0) = \frac{1}{2}b(1),$$

$$\tilde{b}(k) = 2b(k) - \tilde{b}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-3}{2},$$

$$\tilde{b}\left(\frac{N-1}{2}\right) = \frac{1}{2}b\left(\frac{N+1}{2}\right).$$

2.3. Фильтры типа III – антисимметричная импульсная характеристика, N – четное

Центр антисимметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$. Частотная характеристика фильтра типа III с линейной ФЧХ может быть представлена в виде:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = je^{-jN\hat{\omega}/2} \sum_{k=1}^{N/2} c(k) \sin(k\hat{\omega}),$$

где $c(k) = 2h\left(\frac{N}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$.

Амплитудная характеристика имеет следующий вид:

$$A(\hat{\omega}) = \sum_{k=1}^{N/2} c(k) \sin(k\hat{\omega}).$$

Последнее выражение может быть представлено в виде:

$$A(\hat{\omega}) = \sin(\hat{\omega}) \sum_{k=0}^{(N-2)/2} \tilde{c}(k) \cos(k\hat{\omega}),$$

где коэффициенты $\tilde{c}(k)$ являются линейно связанными с коэффициентами $c(k)$. Можно показать, что эта взаимосвязь имеет следующий вид:

$$\tilde{c}\left(\frac{N-2}{2}\right) = c\left(\frac{N}{2}\right),$$

$$\tilde{c}\left(\frac{N-4}{2}\right) = c\left(\frac{N-2}{2}\right),$$

$$\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 2c(k), \quad 2 \leq k \leq \frac{N-4}{2},$$

$$\tilde{c}(0) - \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = c(1).$$

2.4. Фильтры типа IV – антисимметричная импульсная характеристика, N – нечетное

Центр антисимметрии импульсной характеристики проходит в точке $\alpha = N/2$, при этом α не является целым числом. Частотная характеристика фильтра типа IV с линейной ФЧХ может быть представлена в виде

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = je^{-jN\hat{\omega}/2} \sum_{k=1}^{(N+1)/2} d(k) \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\hat{\omega}\right],$$

где $d(k) = 2h\left(\frac{N+1}{2} - k\right)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$.

Амплитудная характеристика имеет следующий вид:

$$A(\hat{\omega}) = \sum_{k=1}^{(N+1)/2} d(k) \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\hat{\omega}\right].$$

Последнее выражение может быть представлено в виде:

$$A(\hat{\omega}) = \sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \tilde{d}(k) \cos(k\hat{\omega}),$$

где коэффициенты $\tilde{d}(k)$ являются линейно связанными с коэффициентами $d(k)$. Можно показать, что эта взаимосвязь имеет следующий вид:

$$\tilde{d}\left(\frac{N-1}{2}\right) = 2d\left(\frac{N+1}{2}\right),$$

$$\tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 2d(k), \quad 2 \leq k \leq \frac{N-1}{2},$$

$$\tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = d(1).$$

В заключение рассмотренного выше необходимо отметить, что общее выражение для представления амплитудных характеристик КИХ-фильтров с линейной ФЧХ может быть записано в виде:

$$A(\hat{\omega}) = Q(\hat{\omega})P(\hat{\omega}),$$

где выражения для $Q(\hat{\omega})$ и $P(\hat{\omega})$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$Q(\omega)$, L , $P(\omega)$ для КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Тип КИХ-фильтра с линейной ФЧХ	$Q(\hat{\omega})$	L	$P(\hat{\omega})$
тип 1	1	$\frac{N}{2}$	$\sum_{k=0}^L a(n) \cos(k\hat{\omega})$
тип 2	$\cos\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$	$\frac{N-1}{2}$	$\sum_{k=0}^L \tilde{b}(n) \cos(k\hat{\omega})$
тип 3	$\sin(\hat{\omega})$	$\frac{N-2}{2}$	$\sum_{k=0}^L \tilde{c}(n) \cos(k\hat{\omega})$
тип 4	$\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$	$\frac{N-1}{2}$	$\sum_{k=0}^L \tilde{d}(n) \cos(k\hat{\omega})$

Замечание. В настоящей работе рассматривается синтез линейных цифровых частотно-избирательных КИХ-фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с линейной ФЧХ.

3. Теорема чередования

Для дальнейшего рассмотрения материала помимо функции, описывающей амплитудную характеристику $A(\hat{\omega})$ реального фильтра, введем функцию, описывающую амплитудную характеристику $A_u(\hat{\omega})$ идеального фильтра и весовую функцию $W(\hat{\omega})$, регулирующую относительный размер ошибки аппроксимации в различных частотных полосах синтезируемого фильтра. Амплитудная характеристика $A_u(\hat{\omega})$ идеального фильтра принимает значение 1 в ПП фильтра и значение 0 в ПЗ для класса частотно-избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ). Весовую функцию $W(\hat{\omega})$ необходимо выбирать так, чтобы

существовала возможность независимого контроля ошибки аппроксимации в различных частотных полосах фильтра. Например, для ФНЧ весовая функция $W(\hat{\omega})$ может быть выбрана в следующем виде:

$$W(\hat{\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_3}{\delta_n}, & \text{для ПП,} \\ 1, & \text{для ПЗ,} \end{cases} \quad (1)$$

где δ_n – отклонение АЧХ от 1 в ПП, δ_3 – отклонение АЧХ от 0 в ПЗ.

Определив амплитудные характеристики реального и идеального фильтров, а так же весовую функцию, введем в рассмотрение взвешенную ошибку аппроксимации:

$$\begin{aligned} E(\hat{\omega}) &= W(\hat{\omega})[A_u(\hat{\omega}) - A(\hat{\omega})] = \\ &= W(\hat{\omega})[A_u(\hat{\omega}) - Q(\hat{\omega})P(\hat{\omega})] = \\ &= W(\hat{\omega})Q(\hat{\omega})\left[\frac{A_u(\hat{\omega})}{Q(\hat{\omega})} - P(\hat{\omega})\right]. \end{aligned}$$

Для удобства введем модифицированную весовую функцию $\hat{W}(\hat{\omega})$ и модифицированную амплитудную характеристику идеального фильтра $\hat{A}_u(\hat{\omega})$ в виде:

$$\begin{aligned} \hat{W}(\hat{\omega}) &= W(\hat{\omega})Q(\hat{\omega}), \\ \hat{A}_u(\hat{\omega}) &= \frac{A_u(\hat{\omega})}{Q(\hat{\omega})}. \end{aligned}$$

Тогда взвешенная ошибка аппроксимации для четырех типов КИХ-фильтров с линейной ФЧХ может быть представлена в виде:

$$E(\hat{\omega}) = \hat{W}(\hat{\omega})[\hat{A}_u(\hat{\omega}) - P(\hat{\omega})].$$

В результате процедура расчета цифрового фильтра заключается в нахождении коэффициентов фильтра $\alpha(k)$, которые минимизируют максимум абсолютной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$:

$$\min_{\alpha(k)} \left[\max_{\hat{\omega} \in S} |E(\hat{\omega})| \right] = \min_{\alpha(k)} \left[\max_{\hat{\omega} \in S} \left| \hat{W}(\hat{\omega}) \left[\hat{A}_u(\hat{\omega}) - \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\hat{\omega}) \right] \right| \right], \quad (2)$$

где S – совокупность интервалов аппроксимации. По существу S содержит множество полос пропускания и полос задерживания фильтра.

Применительно к рассмотренной выше проблеме синтеза цифровых фильтров, Паркс и Макклеллан переформулировали теорему теории аппроксимации Чебышёва, получив в результате следующую формулировку.

Теорема чередования. Пусть S – любое замкнутое подмножество закрытого интервала $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$. Для того, чтобы функция $P(\hat{\omega})$, представляемая в виде:

$$P(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\hat{\omega})$$

была единственной и наилучшей аппроксимацией на подмножестве S для функции $\hat{A}_u(\hat{\omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функция ошибки $E(\hat{\omega})$ имела на S , по крайней мере, $L+2$ чередований. То есть существует, по крайней мере, $L+2$ экстремальных частот $\hat{\omega}_i$ на подмножестве S , таких что $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < \dots < \hat{\omega}_{L+2}$, $E(\hat{\omega}_i) = -E(\hat{\omega}_{i+1})$ и $|E(\hat{\omega}_i)| = \max_{\hat{\omega} \in S} |E(\hat{\omega})|$, $i = 1, 2, \dots, L+2$.

Для конкретизации теоремы чередования, рассмотрим синтез ФНЧ с ПП $0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_n$ и ПЗ $\hat{\omega}_z \leq \hat{\omega} \leq \pi$. Так как амплитудная характеристика идеального фильтра $A_u(\hat{\omega})$ и весовая функция $W(\hat{\omega})$ являются кусочно-постоянными, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dE(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} &= \frac{d}{d\hat{\omega}} \{W(\hat{\omega})[A_u(\hat{\omega}) - A(\hat{\omega})]\} = \\ &= -W(\hat{\omega}) \frac{dA(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому частоты $\hat{\omega}_i$, соответствующие пикам $E(\hat{\omega})$, также соответствуют пикам, в которых $A(\hat{\omega})$ удовлетворяет допускаемой ошибке. Так как $A(\hat{\omega})$, например, для КИХ-фильтров типа 1 с линейной ФЧХ представляет собой тригонометрический полином степени L представимый в виде:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\hat{\omega}) = \\
&= \sum_{k=0}^L \alpha(k) \left[\sum_{n=0}^k \beta_{nk} (\cos(\hat{\omega}))^n \right] = \\
&= \sum_{k=0}^L \tilde{\alpha}(k) (\cos(\hat{\omega}))^k,
\end{aligned} \tag{3}$$

то $A(\hat{\omega})$ имеет не больше чем $L - 1$ локальных максимумов и минимумов на открытом интервале $0 < \hat{\omega} < \pi$. Дополнительно можно отметить, что частоты $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$ обычно являются экстремумами амплитудной характеристики $A(\hat{\omega})$, а также взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$. Следовательно, функция $A(\hat{\omega})$ имеет не больше чем $L + 1$ экстремальных частот. Кроме того, граничные частоты в ПП и ПЗ, $\hat{\omega}_n$ и $\hat{\omega}_z$, также являются экстремумами функции $E(\hat{\omega})$, так как $|E(\hat{\omega})|$ является максимальным на этих частотах. Следовательно, должно существовать $L + 3$ экстремальных частот функции $E(\hat{\omega})$ для единственной и наилучшей аппроксимации идеального ФНЧ. С другой стороны теорема чередования устанавливает существование, по крайней мере, $L + 2$ экстремальных частот $E(\hat{\omega})$. Таким образом, единственная и наилучшая аппроксимация для идеальной амплитудной характеристики фильтра $A_u(\hat{\omega})$ имеет либо $L + 2$, либо $L + 3$ чередований взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$. Синтезированные фильтры, содержащие $L + 3$ чередований, были названы Парксом и Макклелланом фильтрами с дополнительной пульсацией. Последнее связано с тем фактом, что данного типа фильтры обладали большим, чем минимальное число $L + 2$ чередований функции ошибки, требуемым для оптимальности.

Теорема чередования гарантирует единственность решения для достижения задачи оптимизации, представленной выражением (2). Из теоремы чередования следует, что для заданного множества экстремальных частот $\hat{\omega}_i$ можно записать:

$$\hat{W}(\hat{\omega}_i) [\hat{A}_u(\hat{\omega}_i) - P(\hat{\omega}_i)] = (-1)^i \delta, \quad i = 0, 1, \dots, L + 1, \tag{4}$$

где δ представляет максимальную величину взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$. Фактически, если весовая функция $W(\hat{\omega})$ выбрана так, как представлено в выражении (1), то $\delta = \delta_z$.

Множество линейных уравнений, представленных выражением (4), можно записать в виде:

$$P(\hat{\omega}_i) + \frac{(-1)^i \delta}{\hat{W}(\hat{\omega}_i)} = \hat{A}_u(\hat{\omega}_i), \quad i = 0, 1, \dots, L + 1,$$

или

$$\sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\hat{\omega}_i) + \frac{(-1)^i \delta}{\hat{W}(\hat{\omega}_i)} = \hat{A}_u(\hat{\omega}_i), \quad i = 0, 1, \dots, L + 1. \quad (5)$$

Выражение (5) может быть записано в матричной форме относительно неизвестных коэффициентов фильтра $\alpha(k)$ и максимальной величины δ взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\hat{\omega}_0) & \cdots & \cos(L\hat{\omega}_0) & \frac{1}{\hat{W}(\hat{\omega}_0)} \\ 1 & \cos(\hat{\omega}_1) & \cdots & \cos(L\hat{\omega}_1) & \frac{1}{\hat{W}(\hat{\omega}_1)} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \cos(\hat{\omega}_{L+1}) & \cdots & \cos(L\hat{\omega}_{L+1}) & \frac{1}{\hat{W}(\hat{\omega}_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_u(\hat{\omega}_0) \\ \hat{A}_u(\hat{\omega}_1) \\ \vdots \\ \hat{A}_u(\hat{\omega}_{L+1}) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При заданных экстремальных частотах, выражение (6) можно решить относительно неизвестных коэффициентов фильтра $\alpha(k)$ и максимальной величины δ взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$.

4. Алгоритм замены Ремеза

Рассматривая теорему чередования, необходимо сказать, что она гарантирует для минимаксной аппроксимации, представленной выражением (2), существование и единственность решения, однако она не дает никакого представления об алгоритме, с использованием которого оптимальное решение может быть получено. Паркс и Макклеллан предложили итерационную процедуру, основанную на алгоритме замены Ремеза и позволяющую найти оптимальное решение задачи минимаксной аппроксимации амплитудной характеристики фильтра. Данная процедура предполагает, что порядок фильтра N , граничные частоты $\hat{\omega}_n$, $\hat{\omega}_z$ и отношение δ_z/δ_n являются известными. Однако является более естественным во время процедуры синтеза

фильтров точно задавать граничные частоты $\hat{\omega}_n$, $\hat{\omega}_z$ и пульсации δ_n , δ_z , зная которые, далее определять порядок фильтра N , удовлетворяющий заданным спецификациям. Сравнительно простая формула, применяемая для оценки порядка N ФНЧ с равномерными пульсациями по заданным спецификациям $\hat{\omega}_n$, $\hat{\omega}_z$, δ_n и δ_z , была предложена Кайзером и имеет следующий вид:

$$\hat{N} = \frac{-10 \log_{10}(\delta_n \delta_z) - 13}{14.6 \Delta f}, \quad (7)$$

где Δf – ширина переходной полосы, определяемая как $\Delta f = \frac{\hat{\omega}_z - \hat{\omega}_n}{2\pi}$. Более точная формула была предложена Херрманном и имеет следующий вид:

$$\hat{N} = \frac{D_\infty(\delta_n, \delta_z) - f(\delta_n, \delta_z)(\Delta f)^2}{\Delta f}, \quad (8)$$

где $D_\infty(\delta_n, \delta_z)$ и $f(\delta_n, \delta_z)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_n, \delta_z) &= [0.005309(\log_{10}(\delta_n))^2 + 0.07114(\log_{10}(\delta_n)) - \\ &\quad - 0.4761](\log_{10}(\delta_z)) - \\ &\quad - [0.00266(\log_{10}(\delta_n))^2 + 0.5941(\log_{10}(\delta_n)) + 0.4278], \\ f(\delta_n, \delta_z) &= 11.022 + 0.51244(\log_{10}(\delta_n) - \log_{10}(\delta_z)). \end{aligned}$$

Ниже приведены основные этапы синтеза цифрового фильтра с использованием алгоритма замены Ремеза.

1. Приблизительная оценка $L + 2$ экстремальных частот $\hat{\omega}_i$.
2. Вычисление максимальной величины δ взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$ с использованием следующего выражения:

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} \gamma(k) \hat{A}_u(\hat{\omega}_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} \frac{(-1)^k \gamma(k)}{\hat{W}(\hat{\omega}_k)}}, \quad (9)$$

где $\gamma(k) = \prod_{n=0, n \neq k}^{L+1} \frac{1}{\cos(\hat{\omega}_k) - \cos(\hat{\omega}_n)}$. Формула (9) следует из выражения (6). Таким образом, задавая начальные значения экстремальных частот на шаге 1, происходит вычисление δ с использованием выражения (9).

3. Вычисление взвешенной ошибки аппроксимации $E(\hat{\omega})$ на густой сетке частот.

Поскольку функция $P(\hat{\omega})$ представляет собой тригонометрический полином вида:

$$P(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^L \tilde{\alpha}(k)x^k, \quad x = \cos(\hat{\omega})$$

и поскольку в точках $x_i = \cos(\hat{\omega}_i)$, $i = 0, 1, \dots, L+1$ известны значения функции $P(\hat{\omega})$, принимающие вид:

$$P(\hat{\omega}_i) = \hat{A}_u(\hat{\omega}_i) - \frac{(-1)^i \delta}{\hat{W}(\hat{\omega}_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, L+1, \quad (10)$$

можно осуществить интерполяцию Лагранжа функции $P(\hat{\omega})$ по значениям $P(\hat{\omega}_i)$ с использованием следующего математического выражения:

$$P(\hat{\omega}) = \frac{\sum_{i=0}^L P(\hat{\omega}_i) [\beta(i)/(x - x_i)]}{\sum_{i=0}^L [\beta(i)/(x - x_i)]}, \quad (11)$$

где $P(\hat{\omega}_i)$ определяются выражением (10), $x = \cos(\hat{\omega})$, $x_i = \cos(\hat{\omega}_i)$ и

$$\beta(i) = \prod_{i=0, i \neq k}^L \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Зная функцию $P(\hat{\omega})$, определяемую выражением (11), можно вычислить взвешенную ошибку аппроксимации $E(\hat{\omega})$:

$$E(\hat{\omega}) = \hat{W}(\hat{\omega}) [\hat{A}_u(\hat{\omega}) - P(\hat{\omega})]$$

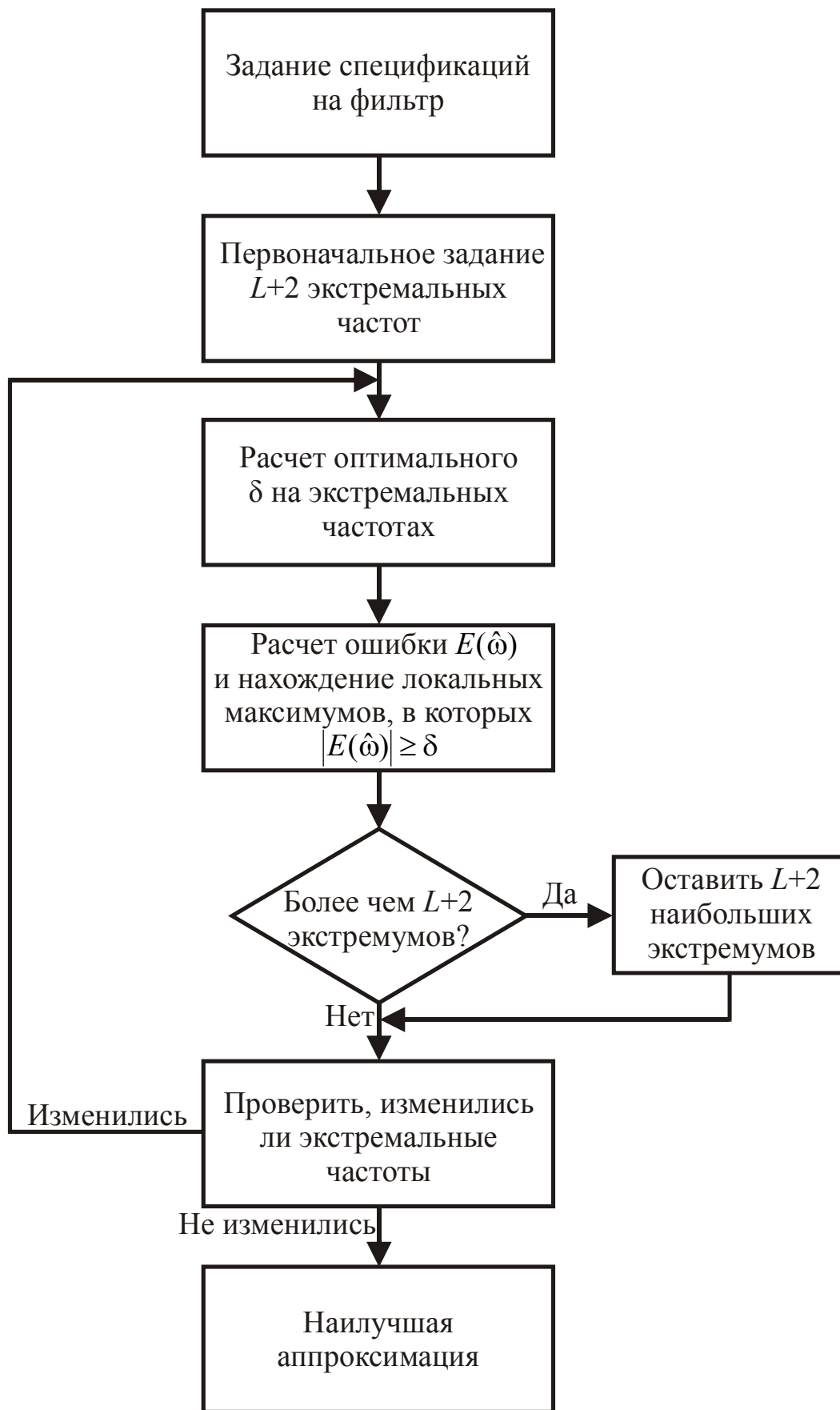


Рис. 1. Блок-схема алгоритма замены Ремеза

на густой сетке частот. Обычно число точек для вычисления ошибки аппроксимации выбирается равным значению $16(N+1)$, где N – порядок фильтра.

4. Если среди значений взвешенной ошибки аппроксимации, вычисленных на шаге 3, найдутся такие, что $|E(\hat{\omega})| \geq \delta$, то необходимо выбрать новое множество $L+2$ экстремальных частот $\hat{\omega}_i$, которые соответствуют $L+2$ наибольшим значениям $|E(\hat{\omega})|$. И затем, повторить процедуру нахождения единственного и наилучшего решения, начиная с шага 2. Если $|E(\hat{\omega})| \leq \delta$ для всех точек на густой сетке частот, то процедура нахождения единственного и наилучшего решения задачи аппроксимации заканчивается. Тем самым коэффициенты функции $P(\hat{\omega})$ являются найденными и, как следствие, является полученной частотная характеристика реального фильтра $H(e^{j\hat{\omega}})$.

Блок-схема описанного выше алгоритма, приведенная на рис. 1, впервые была представлена Ремезом.

В заключении необходимо отметить, что приведенный выше оптимальный метод синтеза – это простой и эффективный путь вычисления коэффициентов КИХ-фильтра. Для большинства приложений оптимальный метод синтеза дает хорошие амплитудные характеристики фильтра при разумном порядке фильтра N . Однако, хотя метод и позволяет полностью контролировать спецификации, задаваемые на фильтр, необходимым требованием для его выполнения является наличие программной реализации разрабатываемого фильтра.

Содержание лабораторной работы

1. Исследование характеристик синтезированных фильтров.
2. Реализация алгоритма синтеза КИХ-фильтров на основе оптимального по Чебышёву метода синтеза цифровых фильтров с использованием элементов написания программного кода в пакете Matlab.
3. Применение синтезированных фильтров в задаче обработки (фильтрации) гармонических сигналов.

Замечание. Тип частотно-избирательного фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ), выбирается по указанию преподавателя.

Замечание. При рассмотрении п. 1 и п. 2, в порядке выполнения работы ниже, необходимо воспользоваться приложением для анализа и синтеза фильтров пакета Matlab – *FDATool* (см. прил. 1).

Порядок выполнения работы

1. Исследование изменения характеристик фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр

В разделе Design Method (метод синтеза) FDA Tool выбрать оптимальный по Чебышёву синтез КИХ-фильтров: FIR → Equiripple. В разделе Response type (тип характеристики) выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (ПФ), Bandstop (РФ). В разделе Filter Order → Specify order (порядок фильтра → задать порядок) задать порядок фильтра. В разделе Options (опции) выбрать Density Factor (плотность частотной сетки, то есть параметр, отвечающий за количество точек на густой сетке частот). Рекомендуется параметр Density Factor оставлять по умолчанию равным 20, что соответствует числу точек густой сетки частот, приблизительно равному $20N/(2 \cdot width)$, где $width$ – суммарная полоса пропускания фильтра на закрытом интервале от 0 до π .

В разделе Frequency Specifications → Units (требования на частоты среза → единицы измерения частоты) выбрать Normalized (сетка частот является нормализованной) и установить частоты среза. В разделе Magnitude Specifications (требования на отклонения АЧХ в ПП (W_{pass}) и ПЗ (W_{stop}) синтезируемого фильтра) установить значения весовой функции $W(\hat{\omega})$. С использованием кнопки Design Filter (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения характеристик фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр.

1. Для любых шести наборов граничных частот в ПП (w_{pass}) и ПЗ (w_{stop}) произвести исследование АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров при фиксированных значениях порядка фильтра N и параметрах W_{pass} и W_{stop} .

2. Для любых шести наборов порядка фильтра N произвести исследование АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров при фиксированных значениях граничных частот в ПП (w_{pass}) и ПЗ (w_{stop}), и параметрах W_{pass} и W_{stop} .

3. Для любых шести наборов значений весовой функции $W(\hat{\omega})$ (W_{pass} и W_{stop}) произвести исследование АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров при фиксированных значениях порядка фильтра N и граничных частот в ПП (w_{pass}) и ПЗ (w_{stop}).

Привести примеры полученных АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров. Для приведенных примеров фильтров определить их тип в

соответствии с классификацией КИХ-фильтров, имеющих линейную ФЧХ.

2. Исследование изменения минимального порядка фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр

В разделе Design Method (метод синтеза) FDA Tool выбрать оптимальный по Чебышёву синтез КИХ-фильтров: FIR → Equiripple. В разделе Response type (тип характеристики) выбрать тип исследуемого частотно-избирательного фильтра Lowpass (ФНЧ), Highpass (ФВЧ), Bandpass (ПФ), Bandstop (РФ). В разделе Filter Order → Minimum order (порядок фильтра → минимальный порядок фильтра) задать порядок фильтра. В разделе Options (опции) выбрать Density Factor (плотность частотной сетки, то есть параметр, отвечающий за количество точек на густой сетке частот). Рекомендуется параметр Density Factor оставлять по умолчанию равным 20, что соответствует числу точек густой сетке частот, приблизительно равному $20N/(2 \cdot width)$, где *width* – суммарная полоса пропускания фильтра на закрытом интервале от 0 до π .

В разделе Frequency Specifications → Units (требования на частоты среза → единицы измерения частоты) выбрать Normalized (сетка частот является нормализованной) и установить частоты среза. В разделе Magnitude Specifications (требования на отклонения АЧХ в ПП и ПЗ синтезируемого фильтра) установить значения отклонений в линейном (Dpass и Dstop) или логарифмическом масштабе (Apass и Astop). С использованием кнопки Design Filter (синтезировать фильтр) осуществить синтез фильтра. Произвести исследование изменения параметров фильтра в зависимости от спецификаций, заданных на фильтр.

1. Для любых шести наборов граничных частот в ПП (*wpass*) и ПЗ (*wstop*) произвести исследование изменения минимальных порядков синтезированных фильтров при фиксированных значениях отклонений в ПП и ПЗ (Dpass и Dstop или Apass и Astop).

2. Для любых шести наборов отклонений в ПП и ПЗ (Dpass и Dstop или Apass и Astop) произвести исследование изменения минимальных порядков синтезированных фильтров при фиксированных значениях граничных частот в ПП (*wpass*) и ПЗ (*wstop*).

Привести примеры полученных АЧХ и ФЧХ синтезированных фильтров. Для приведенных примеров фильтров определить их тип в соответствии с классификацией КИХ-фильтров, имеющих линейную ФЧХ.

3. Реализация алгоритма синтеза КИХ-фильтров с использованием элементов написания программного кода в пакете Matlab

Для исследуемого частотно-избирательного фильтра при произвольно заданных спецификациях на фильтр решить задачу синтеза КИХ-фильтра алгоритмом Паркса-Макклеллана с использованием средств написания программного кода системы Matlab. Пример постановки и решения рассматриваемой задачи приведен ниже.

Пример. Синтезировать цифровой, полосовой КИХ-фильтр, который удовлетворяет следующим спецификациям:

$$\hat{\omega}_{зн} = 0.2\pi, \hat{\omega}_{нн} = 0.35\pi, \hat{\omega}_{нв} = 0.65\pi, \hat{\omega}_{зв} = 0.8\pi, \\ \delta_n = 0.0141, \delta_z = 0.0032,$$

где $\hat{\omega}_{зн}$ – граничная частота первой ПЗ, $\hat{\omega}_{нн}$ – нижняя граничная частота ПП, $\hat{\omega}_{нв}$ – верхняя граничная частота ПП, $\hat{\omega}_{зв}$ – граничная частота второй ПЗ, δ_n – отклонение АЧХ 1 в ПП, δ_z – отклонение АЧХ 0 в первой и во второй ПЗ. Определить и построить импульсную характеристику, АЧХ реального фильтра, а так же функцию взвешенной ошибки аппроксимации. Определить минимальный порядок синтезированного фильтра и сравнить его с порядком фильтра, получаемого при аналогичных спецификациях на основе метода окон с использованием окна Кайзера.

Алгоритм Паркса-Макклеллана, описанный выше, реализуется в пакете Matlab с использованием функции `firpm`, возможный листинг которой, приведен ниже.

```
[h,delta,opt] = firpm(N,f,m,weights,
                    'ftype',{lgrid})
% Функция для синтеза цифровых КИХ-фильтров
% методом Паркса-Макклеллана
%
% h -- импульсная характеристика
% синтезированного КИХ-фильтра
% delta -- содержит величину пульсации АЧХ
% полученного фильтра (то есть значение
% максимального отклонения АЧХ от заданной)
% opt -- параметр представляет собой структуру
% со следующими полями:
% opt.fgrid -- вектор сетки частот,
% использованной при синтезе
```

```

% opt.des -- значения заданной АЧХ для частот
% из opt.fgrid
% opt.wt -- весовые коэффициенты для частот из
% opt.fgrid
% opt.H -- получившаяся комплексная частотная
% характеристика фильтра для частот из
% opt.fgrid
% opt.error -- ошибка воспроизведения заданной
% частотной характеристики для частот из
% opt.fgrid
% opt.iextr -- номер элементов вектора
% opt.fgrid, соответствующих экстремальным
% частотам (частотам, на которых отклонение АЧХ
% от заданной максимально)
% opt.fextr -- вектор значений экстремальных
% частот
% N -- порядок фильтра
% f -- массив граничных частот на закрытом
% интервале от 0 до 1, где 1 соответствует точке
% в pi радиан. Частоты должны задаваться в
% порядке возрастания, начиная от 0 и заканчивая
% 1
% m -- массив значений идеальной амплитудной
% характеристики фильтра на частотах f
% weights -- массив значений весовой функции в
% каждой частотной полосе фильтра
% 'ftype' -- параметр, определяющий тип
% синтезированного фильтра. При отсутствии
% параметра 'ftype' производится расчет фильтров
% с симметричной импульсной характеристикой.
% Если использовать параметр 'ftype', становится
% возможным синтезировать фильтры с
% антисимметричной импульсной характеристикой.
% Данный параметр может принимать одно из
% следующих значений:
% 'hilbert' -- синтезируется фильтр с
% антисимметричной импульсной характеристикой.
% Название данного режима объясняется тем, что
% такую характеристику, в частности, должен
% иметь фильтр, реализующий дискретное

```

```

% преобразование Гильберта
% 'differentiator' -- синтезируется фильтр с
% антисимметричной импульсной характеристикой,
% представляющий дифференцирующий фильтр
% {lgrid} -- параметр, регулирующий плотность
% частотной сетки, то есть параметр, отвечающий
% за количество точек на густой сетке частот.
% {lgrid} является полным эквивалентом параметра
% Density Factor, который задается в графическом
% интерфейсе FDATool. Увеличение параметра
% {lgrid} может сделать пульсации более
% равномерными, но приводит к увеличению времени
% расчета. По умолчанию значение параметра
% {lgrid} равно 16. Дополнительно необходимо
% отметить, что хотя параметр {lgrid} и является
% положительным числом, он должен задаваться в
% виде одноэлементного массива ячеек (то есть в
% фигурных скобках)

```

Замечание. В ранних версиях пакета Matlab эквивалентом функции `firpm` была функция `remez`, которая сохраняется в современных его версиях и с тем же успехом может быть использована для синтеза КИХ-фильтров, оптимальных по Чебышёву.

Как видно из листинга функции `firpm`, одним из необходимых параметров для ее работы является порядок фильтра N , который для случая полосового фильтра может быть оценен с использованием следующего выражения:

$$\hat{N} = \frac{D_{\infty}(\delta_n, \delta_z) + f(\delta_n, \delta_z)(\Delta f)^2}{\Delta f}, \quad (12)$$

где $D_{\infty}(\delta_n, \delta_z)$ и $f(\delta_n, \delta_z)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 D_{\infty}(\delta_n, \delta_z) = & [0.01201(\log_{10}(\delta_n))^2 + 0.09664(\log_{10}(\delta_n)) - \\
 & - 0.51325](\log_{10}(\delta_z)) + \\
 & + [0.00203(\log_{10}(\delta_n))^2 - 0.5705(\log_{10}(\delta_n)) - 0.44314], \\
 f(\delta_n, \delta_z) = & -14.6(\log_{10}(\delta_n) - \log_{10}(\delta_z)) - 16.9,
 \end{aligned}$$

здесь Δf – ширина переходной полосы.

Зная приблизительное значение порядка фильтра \hat{N} и спецификации, заданные на фильтр, можно произвести синтез фильтра с использованием функции `firpm`. Однако поскольку порядок фильтра оценивается не точно, существует необходимость в проверке спецификаций, заданных на фильтр. И если последние не выполняются, существует необходимость повторить синтез фильтра с новым порядком (меньшим или большим значения, рассчитанного с использованием выражения (12)).

Замечание. В современных версиях пакета *Matlab* присутствует функция `firpmord`, которая позволяет автоматически, приближенно оценить порядок КИХ-фильтра, оптимального по Чебышёву, без явного использования формул (7), (8) и (12) в программном коде. Описание функции `firpmord` может быть найдено в помощи пакета *Matlab*.

Ниже приведен пример программного кода, которым можно воспользоваться для решения задачи синтеза фильтра, представленной в примере выше.

```
function [db,mag,pha,w] = freqz_m(a,b)
% Модифицированная версия функции freqz
%
% mag -- абсолютные значения АЧХ, вычисленные
% от 0 до pi радиан
% db -- относительные значения АЧХ в дБ,
% вычисленные от 0 до pi радиан
% pha -- ФЧХ, вычисленная от 0 до pi радиан
% w -- вектор частотных значений от 0 до pi
% радиан
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра значения a
% эквивалентны отсчетам импульсной
% характеристики)
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра b=[1])
%
[H,w] = freqz(a,b,1000,'whole');

H = (H(1:1:501))';
w = (w(1:1:501))';

mag = abs(H);
```

```

eps = 0.0001;
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);

% Реализация этапов синтеза КИХ-фильтра методом
% Паркса-Макклеллана
%
ws1 = 0.2*pi; wp1 = 0.35*pi;
wp2 = 0.65*pi; ws2 = 0.8*pi;
deltap = 0.0141; deltas = 0.0032;

tr_width = min((ws2-wp2)/(2*pi), (wp1-
ws1)/(2*pi));
D = (0.01201*(log10(deltap))^2 + ...
0.09664*log10(deltap) - ...
0.51325)*log10(deltas) + ...
(0.00203*(log10(deltap))^2 - ...
0.5705*log10(deltap) - 0.44314);
f = -14.6*log10(deltap/deltas) - 16.9;
N = ceil(D/tr_width + f*tr_width);
f = [0 ws1/pi wp1/pi wp2/pi ws2/pi 1];
m = [0 0 1 1 0 0];
weights = [1 deltas/deltap 1];

[h,delta,opt] = firpm(N,f,m,weights);
[db,mag,pha,w] = freqz_m(h,[1]);

while (delta) > deltas
    N = N + 1;
    [h,delta,opt] = firpm(N,f,m,weights);
    [db,mag,pha,w] = freqz_m(h,[1]);
end

disp(sprintf('Порядок фильтра = %5.0f',N));
disp(sprintf('Уровень пульсаций в ПЗ =
%5.4f',delta));

n = 0:length(h)-1;
subplot(221); stem(n,h); grid

```

```

title('Реальная импульсная характеристика')
axis([0 N -0.4 0.5])
xlabel('n'); ylabel('h(n)')

subplot(222); plot(w/pi,db)
title('АЧХ в дБ'); grid
axis([0 1 -100 10])
xlabel('\omega*\pi, рад'); ylabel('АЧХ, дБ')

subplot(223); plot(w/pi,mag)
title('АЧХ в линейном масштабе'); grid
axis([0 1 0 1+deltap])
xlabel('\omega*\pi, рад'); ylabel('АЧХ')

subplot(224); plot(opt.fgrid,opt.error)
title('Взвешенная ошибка аппроксимации'); grid
xlabel('\omega*\pi, рад'); ylabel('АЧХ, дБ')

```

Выполнение настоящего программного кода позволяет синтезировать искомый фильтр и оценить порядок полосового КИХ-фильтра, синтезированного с использованием алгоритма Паркса-Макклеллана. Последний, при заданных спецификациях на фильтр, получается равным 32. Аналогичная оценка порядка фильтра с теми же спецификациями, но синтезированного на основе метода окон с использованием окна Кайзера приводит к значению 39. Последний результат может быть получен либо с использованием написания дополнительного программного кода для расчета порядка фильтра, либо с использованием графического интерфейса FDATool.

4. Реализация алгоритма обработки (фильтрации) гармонических сигналов с использованием синтезированных фильтров и применением элементов математического моделирования пакета Simulink системы Matlab

На основе пакета Simulink построить модель, позволяющую производить обработку (фильтрацию) гармонических сигналов, с использованием фильтров, синтезированных на основе алгоритма Паркса-Макклеллана. Пример готовой модели приведен на рис. 2.

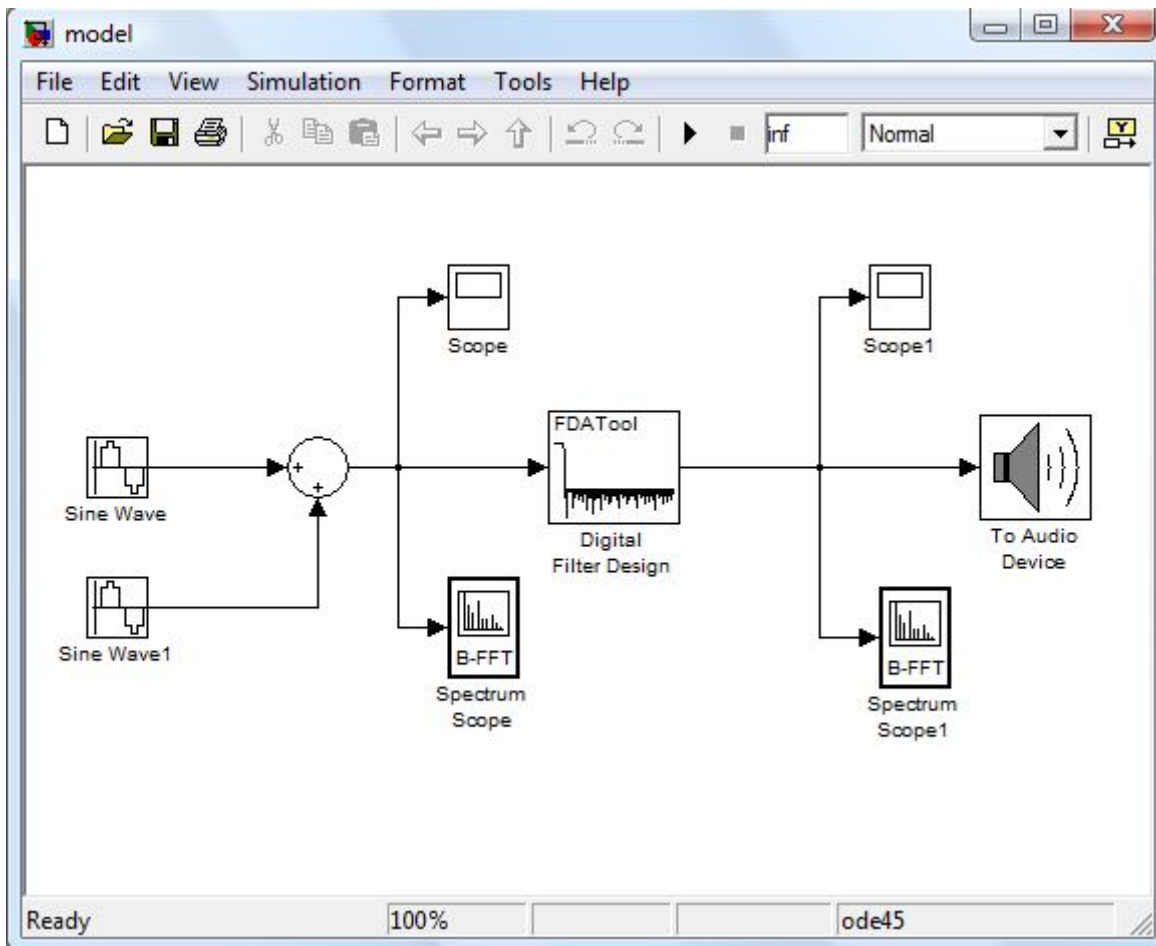


Рис. 2. Пример программной модели, построенной в пакете Simulink, для обработки (фильтрации) гармонического сигнала

Для понимания основных моментов построения модели, приведенной на рис. 2, кратко, применительно к данной модели, рассмотрим общие понятия, затрагивающие работу с пакетом Simulink.

В состав системы Matlab входит пакет моделирования динамических систем – Simulink, считающийся одним из лучших пакетов моделирования блочно заданных динамических систем.

Пакет Simulink является ядром интерактивного программного комплекса, предназначенного для математического моделирования линейных и нелинейных динамических систем и устройств, представленных своей функциональной блок-схемой, именуемой *S-моделью* или просто *моделью*. При этом возможны различные варианты моделирования: во временной области, в частотной области и т.д.

Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств Simulink обладает обширной библиотекой блочных компонентов и удобным *редактором блок-схем*. Он основан на графическом интерфейсе пользователя и по существу является

типичным средством *визуально-ориентированного программирования*. С использованием *палитры компонентов* (наборов), существует возможность переносить мышью необходимые блоки с палитр на рабочий стол пакета Simulink и соединять линиями входы и выходы блоков. Таким образом, создается блок-схема системы или устройства, то есть модель, пример которой приведен на рис. 2.

Для запуска пакета Simulink достаточно, например, в командной строке Matlab выполнить команду `simulink` (для вывода полного перечня команд Simulink необходимо выполнить команду `help simulink`). В результате открывается окно интегрированного браузера библиотек (Simulink Library Browser), приведенное на рис. 3.

В окне браузера содержится дерево компонентов библиотек (Libraries) пакета Simulink. Для просмотра того или иного раздела библиотеки достаточно выделить его мышью – в правой части окна Simulink Library Browser появится набор пиктограмм компонентов активного раздела библиотеки. На рис. 3 показан основной раздел библиотеки Simulink.

С помощью меню браузера или кнопок его панели инструментов можно открыть окно для создания новой модели или загрузить существующую модель. Работа с Simulink происходит на фоне открытого окна Matlab, в котором можно осуществлять наблюдение за выполняемыми операциями – если их вывод предусмотрен программой моделирования.

Для создания новой модели необходимо в меню Simulink Library Browser выбрать `File→New→Model` (Файл→Новый→Модель). При успешном выполнении этой операции должно появиться пустое окно, представленное на рис. 4, в котором, путем обычного перетаскивания левой кнопкой мыши блоков из Simulink Library Browser, можно построить модель, подобную той, что приведена на рис. 2. Соединение блоков так же осуществляется с использованием левой кнопки мыши, путем протаскивания соединительной линии от выхода одного блока к входу другого.

Для построения модели, приведенной на рис. 2, необходимо в браузере библиотек найти и поместить в окно модели (рис. 4) следующие блоки:

1. Sine Wave – блок, позволяющий генерировать синусоидальное колебание. Находится в разделе Simulink→Sources дерева компонентов библиотек (Libraries).

2. Sum – блок, осуществляющий суммирование сигналов, подаваемых на его входы. Находится в разделе Simulink→Math Operations дерева компонентов библиотек (Libraries).

3. Scope – блок, осуществляющий отображение сигнала подаваемого на его вход. Находится в разделе Simulink→Sinks дерева компонентов библиотек (Libraries).

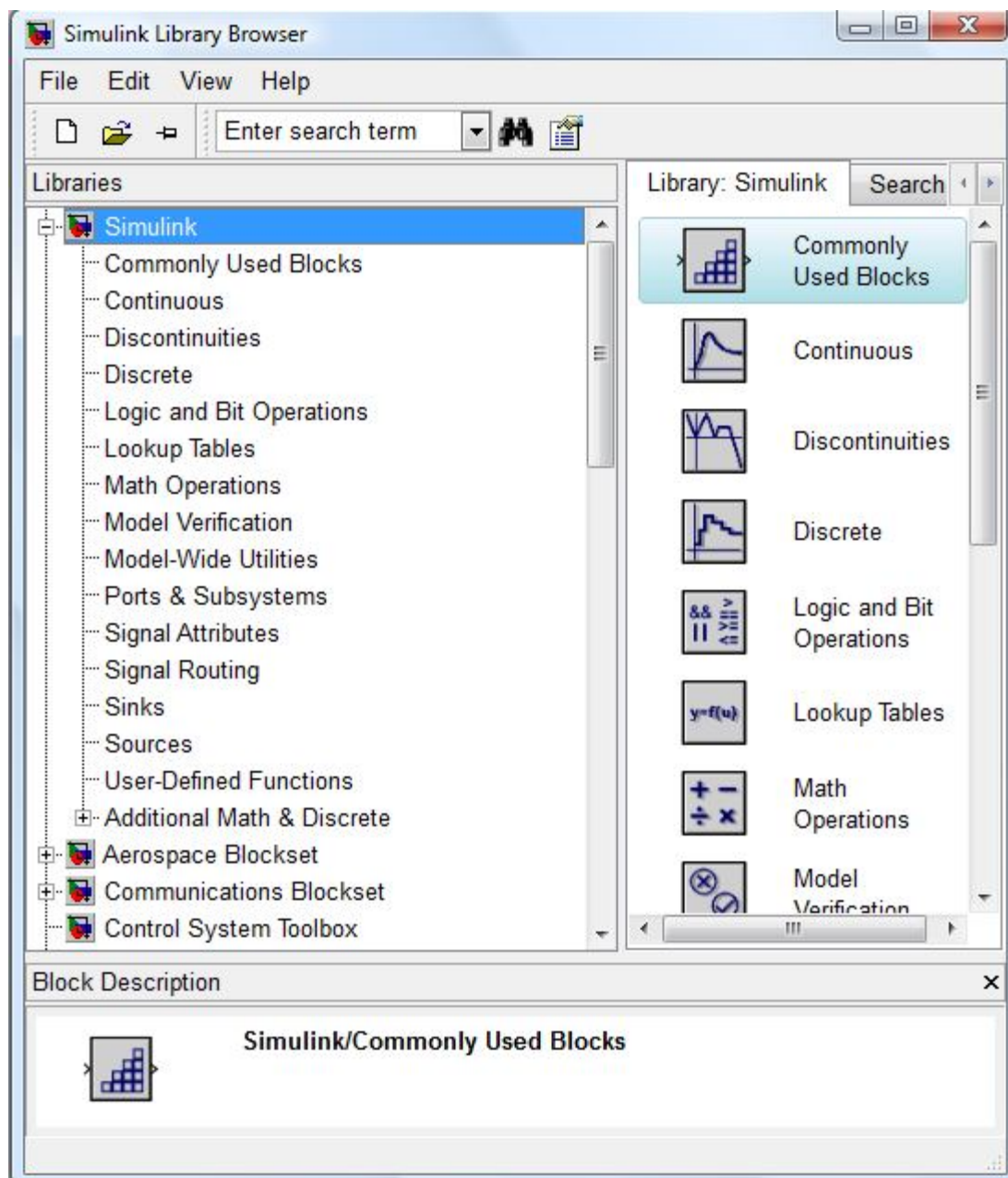


Рис. 3. Окно интегрированного браузера библиотек (Simulink Library Browser) пакета Simulink

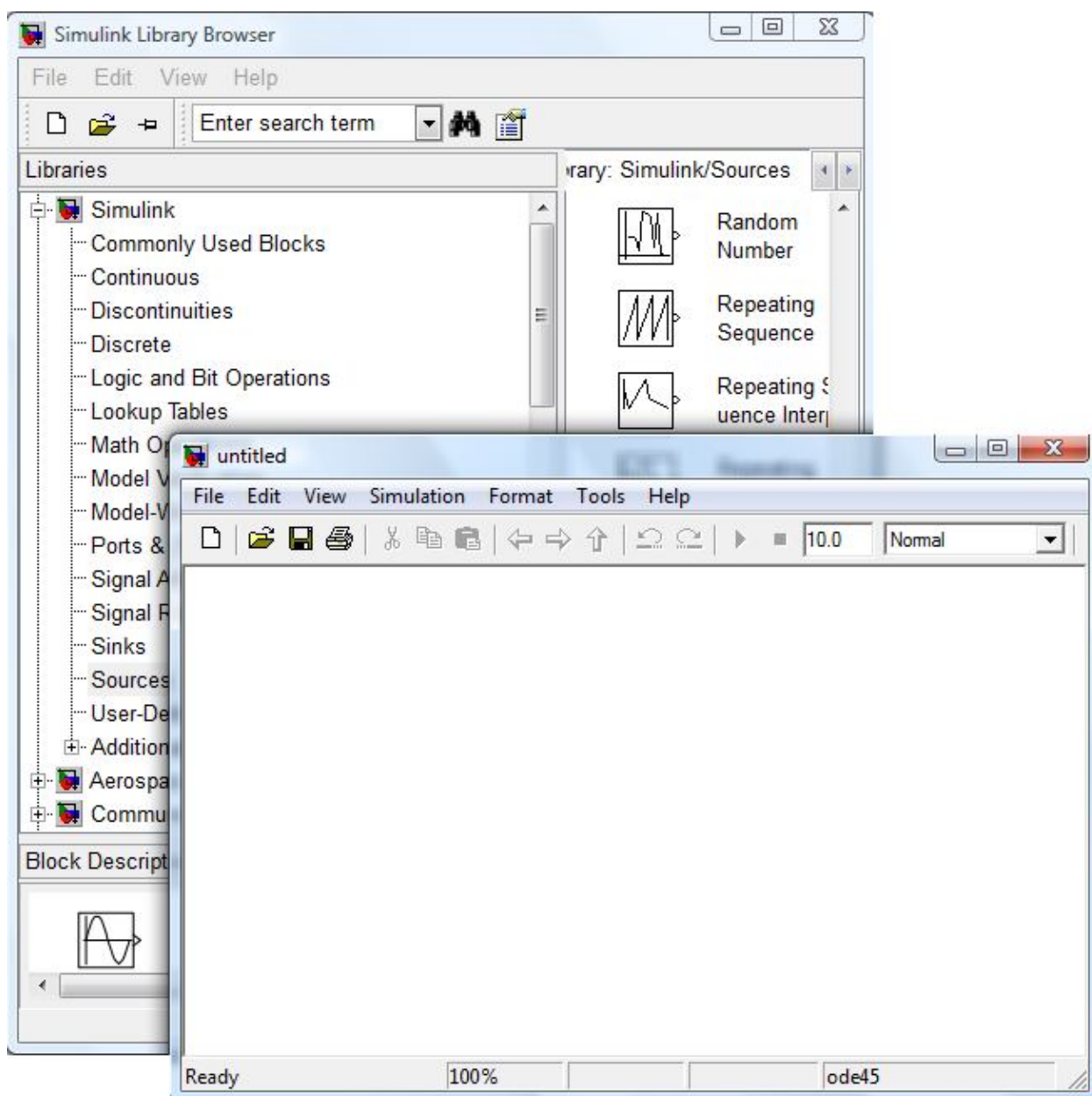


Рис. 4. Окно для создания новой модели пакета Simulink

4. Spectrum Scope – блок, осуществляющий построение периодограмм входного сигнала. Находится в разделе Signal Processing Blockset→Signal Processing Sinks дерева компонентов библиотек (Libraries).

5. Digital Filter Design – блок, осуществляющий синтез цифрового фильтра по заданным спецификациям. Находится в разделе Signal Processing Blockset→Filtering→Filter Designs дерева компонентов библиотек (Libraries).

6. To Audio Device – блок, осуществляющий звуковое воспроизведение входного сигнала. Находится в разделе Signal

Processing Blockset→Signal Processing Sinks дерева компонентов библиотек (Libraries).

Дополнительно, необходимо отметить, что каждый из указанных блоков имеет определенную совокупность параметров, обратиться к которым можно с использованием двойного щелчка левой кнопки мыши по соответствующему блоку. Полное описание настроек параметров блоков, зависящих от конкретной ситуации, приведено в помощи пакета Matlab. После того как модель собрана, ее можно запустить на выполнение и снять необходимые результаты. Запуск модели может быть осуществлен с использованием вкладки Simulation→Start (моделирования→начало моделирования) меню окна создания модели пакета Simulink (рис. 2, рис. 4). Если модель собрана правильно она начнет свою работу, время которой зависит от настроек параметра Stop time (время останова), находящегося во вкладке Simulation→Configuration Parameters (моделирования→настройка параметров) меню окна создания модели пакета Simulink.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют методы синтеза КИХ-фильтров?
2. Что такое оптимальные методы синтеза цифровых фильтров?
3. Сформулировать и доказать условия линейности ФЧХ КИХ-фильтра.
4. Назвать причины синтеза КИХ-фильтров с линейной ФЧХ?
5. Записать общее математическое выражение, с использованием которого можно представить все типы фильтров с линейной ФЧХ.
6. Что такое взвешенная ошибка аппроксимации?
7. Что означает оптимальность КИХ-фильтров по минимаксному критерию?
8. Сформулировать теорему чередования.
9. Пояснить основные этапы алгоритма Паркса-Макклеллана.
10. Пояснить основные достоинства и недостатки алгоритма Паркса-Макклеллана.
11. Произвести сравнение алгоритмов синтеза КИХ-фильтров на основе метода окон и метода Паркса-Макклеллана.

Литература

1. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л. Цифровые фильтры: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.

2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
4. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
5. Хрящев В.В., Приоров А.Л., Волохов В.А. Основы теории цепей: сборник задач. – Ярославль: ЯрГУ, 2008.
6. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.

Лабораторная работа № 4

МНОГОСКОРОСТНАЯ ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Цель работы: изучение многоскоростных систем цифровой обработки сигналов и их основных составляющих.

Краткая теория

1. Основные операторы изменения частоты дискретизации

Двумя основными видами операторов изменения частоты дискретизации являются дециматор и интерполятор, соответственно понижающий и повышающий частоту дискретизации. Анализ их частотных характеристик покажет, почему данные устройства обычно используются совместно с дополнительными фильтрами. Кроме того, частотный анализ поможет понять работу других многоуровневых систем, рассматриваемых ниже.

1.1. Временные соотношения

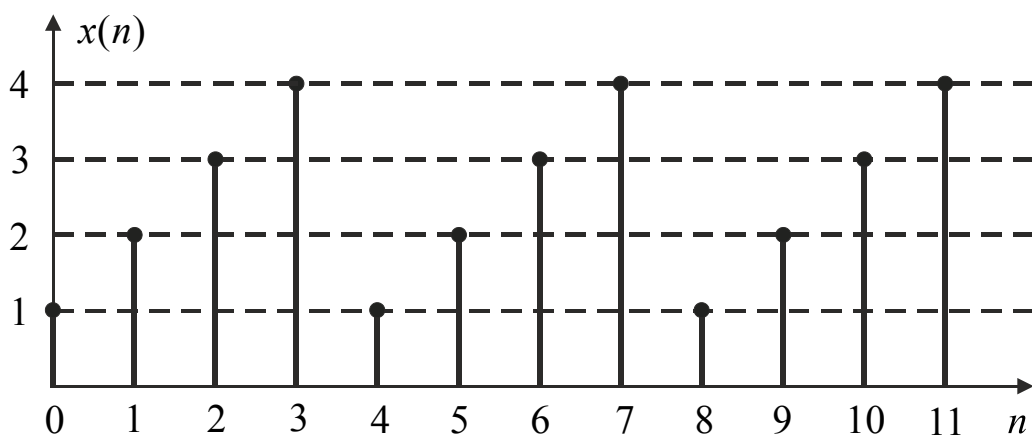
1.1.1. Увеличение частоты дискретизации

Рассмотрим временные характеристики двух основных устройств преобразования цифрового сигнала. Устройство увеличения частоты дискретизации в L раз, где L – положительное целое, имеет на выходе последовательность $x_u(n)$ с шагом дискретизации в L раз меньше, чем входной сигнал $x(n)$. Операция увеличения частоты дискретизации задается введением $L-1$ нулевых отсчетов во входную последовательность и выражается формулой:

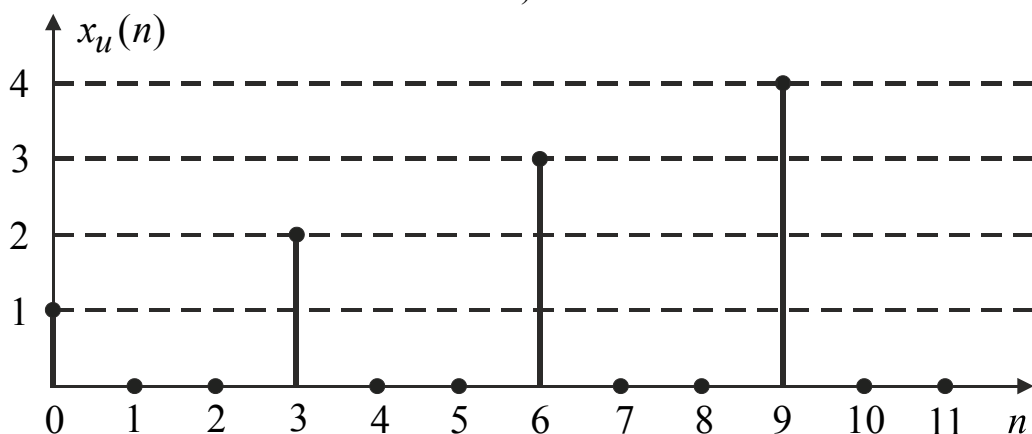
$$x_u(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Пример выполнения операции увеличения частоты дискретизации в 3 раза ($L = 3$) для произвольного периодического сигнала (рис. 1а), представлен на рис. 1б. На рис. 1в представлена блок-схема операции увеличения частоты дискретизации в L раз.

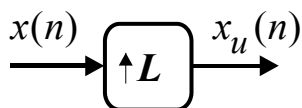
На практике, обычно с помощью определенного процесса фильтрации вместо нулей, не несущих никакой информационной нагрузки, вставляются ненулевые отсчеты. Этот процесс называется интерполяцией и будет рассмотрен далее.



а)



б)



в)

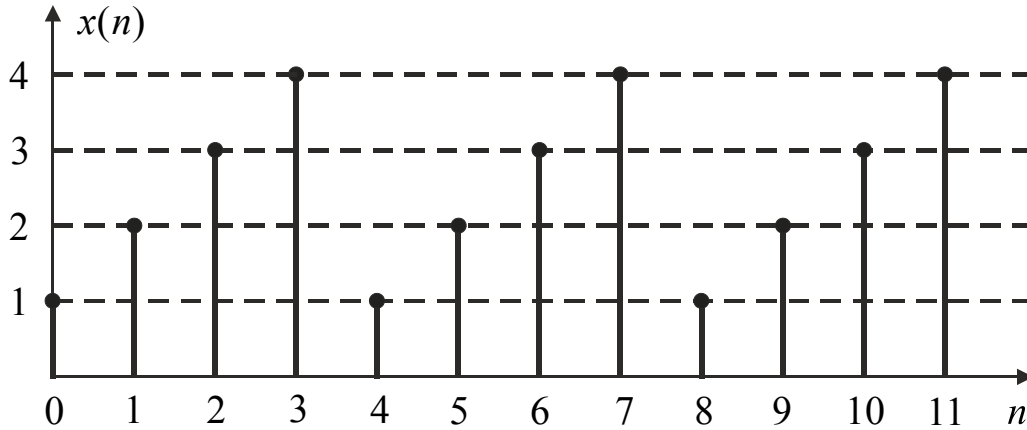
Рис. 1. Увеличение частоты дискретизации в 3 раза: а) входной сигнал; б) выходной сигнал при увеличении частоты дискретизации в 3 раза; в) блок-схема увеличения частоты дискретизации в L раз

1.1.2. Уменьшение частоты дискретизации

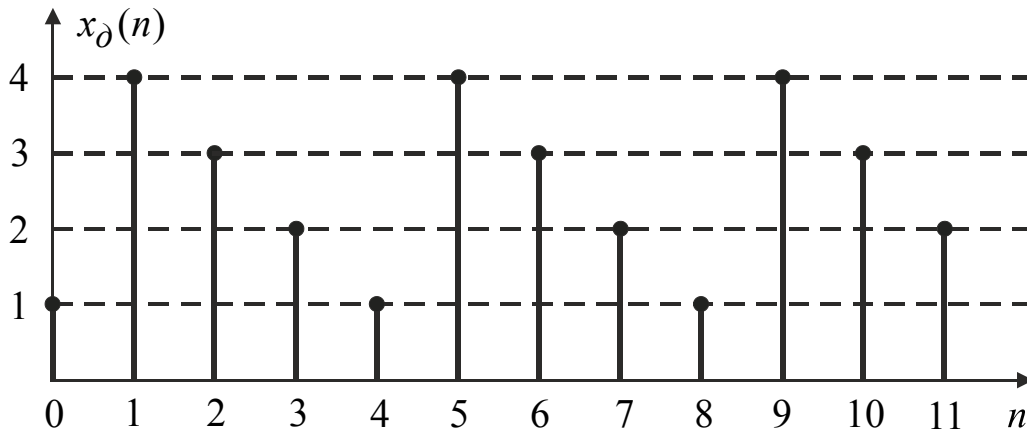
При уменьшении частоты дискретизации в M раз, где M – положительное целое, получаем выходную последовательность $x_\partial(n)$ с шагом дискретизации в M раз больше, чем у входного сигнала $x(n)$. Понижение частоты дискретизации получается путем сохранения одного отсчета входной последовательности и удалением $M-1$ последующих отсчетов сигнала, что выражается следующей формулой:

$$x_{\partial}(n) = x(nM). \quad (2)$$

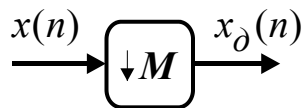
В результате шаг дискретизации выходной последовательности возрастает в M раз. Пример выполнения операции уменьшения частоты дискретизации в 3 раза ($M = 3$) для произвольного периодического сигнала (рис. 2а) представлен на рис. 2б. На рис. 2в представлена блок-схема операции уменьшения частоты дискретизации в M раз.



а)



б)



в)

Рис. 2. Уменьшение частоты дискретизации в 3 раза: а) входной сигнал; б) выходной сигнал при уменьшении частоты дискретизации в 3 раза; в) блок-схема уменьшения частоты дискретизации в M раз

1.2. Соотношения в частотной области

1.2.1. Увеличение частоты дискретизации

Определим соотношения спектров входного и выходного сигналов при увеличении частоты дискретизации в L раз. Для этого вычислим z -преобразование последовательности $x_u(n)$, описываемой формулой (1):

$$X_u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u(n)z^{-n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\text{-кратно } L}}^{\infty} x(n/L)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-mL} = X(z^L), \quad (3)$$

где $X(z)$ – z -преобразование входной последовательности $x(n)$. Выполняя в выражении (3) замену $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим соотношение для связи преобразований Фурье (спектров) сигналов на входе и выходе блока увеличения частоты дискретизации (рис. 1в):

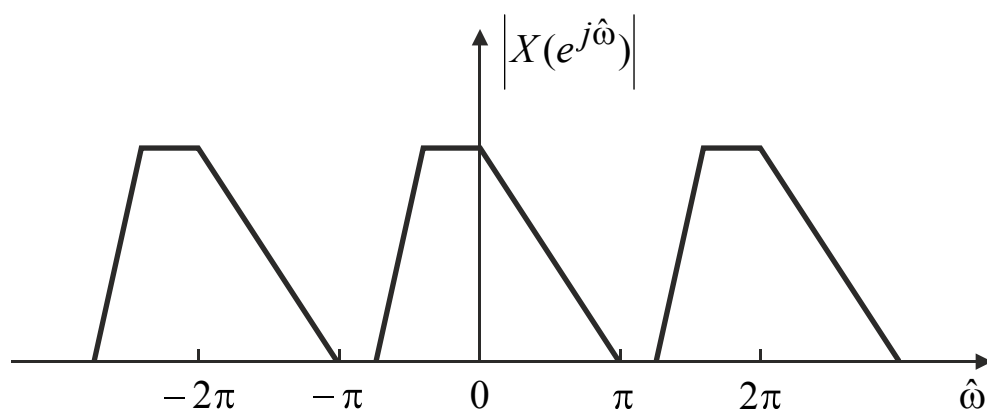
$$X_u(e^{j\hat{\omega}}) = X(e^{j\hat{\omega}L}). \quad (4)$$

Здесь частота $\hat{\omega}$ является нормированной на частоту дискретизации, измеряемую в $\Gamma\omega$, и измеряется в радианах. Выражение (4) фактически показывает, что для получения преобразования Фурье сигнала на выходе блока повышения частоты дискретизации необходимо выполнить операцию масштабирования по частоте преобразования Фурье сигнала на входе данного блока.

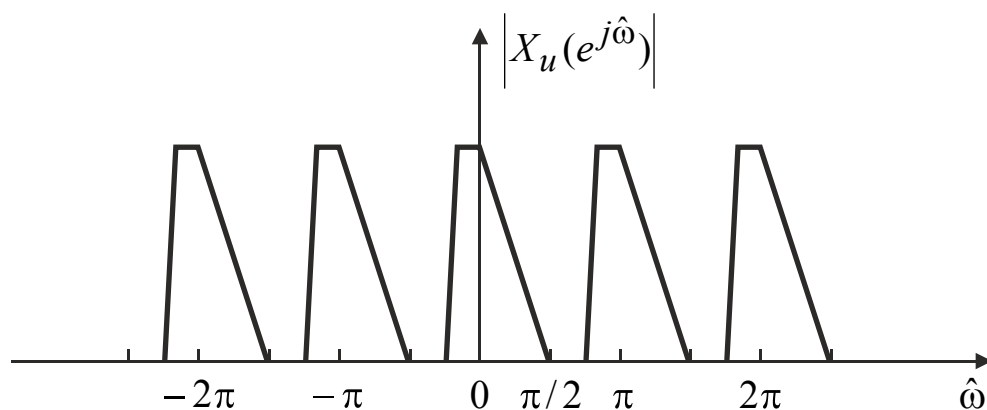
На рис. 3 показан пример преобразования функции $|X(e^{j\hat{\omega}})|$ в функцию $|X_u(e^{j\hat{\omega}})|$ для случая увеличения частоты дискретизации в 2 раза ($L = 2$). Необходимо отметить, что функции $|X(e^{j\hat{\omega}})|$ и $|X_u(e^{j\hat{\omega}})|$, представленные на рис. 3, были получены для последовательностей $x(n)$ и $x_u(n)$, соответственно, являющихся комплексными. Асимметричное (нестандартное) решение было выбрано для того, чтобы более детально показать результат уменьшения шага дискретизации.

Как показано на рис. 3, при $L = 2$, модуль преобразования Фурье сигнала $x_u(n)$ сжимается в 2 раза. Этот процесс называется «формированием изображения», так как в результате получается дополнительное изображение входного спектра. В случае с коэффициентом интерполяции, равным L , получим дополнительно

$L - 1$ «изображений» входного спектра сигнала. Данные «изображения», не несущие дополнительной информации, можно устранить с помощью низкочастотной цифровой фильтрации.



а)



б)

Рис. 3. Результат увеличения частоты дискретизации в спектральной области в 2 раза: а) для входного сигнала; б) для выходного сигнала

1.2.2. Уменьшение частоты дискретизации

Рассчитаем соотношение спектров входного и выходного сигналов при уменьшении частоты дискретизации. Для этого вычислим z -преобразование последовательности $x_\partial(n)$, представленной в (2):

$$X_\partial(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\partial(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nM)z^{-n}. \quad (5)$$

Введем промежуточную последовательность $x_n(n)$, которую можно представить через отсчеты сигнала $x(n)$ на входе блока уменьшения частоты дискретизации в виде:

$$x_n(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Затем

$$\begin{aligned} X_\partial(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nM)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(nM)z^{-n} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n(k)z^{-k/M} = X_n(z^{1/M}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $X_n(z)$ – z -преобразование последовательности $x_n(n)$.

Последовательность $x(n)$ может быть приведена к последовательности $x_n(n)$ с использованием выражения $x_n(n) = c(n)x(n)$, где $c(n)$ определяется как

$$c(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Более удобное представление последовательности $c(n)$ имеет вид

$$c(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn}. \quad (9)$$

Используя замену $x_n(n) = c(n)x(n)$ и воспользовавшись уравнением (9) при z -преобразовании $x_n(n)$, получим:

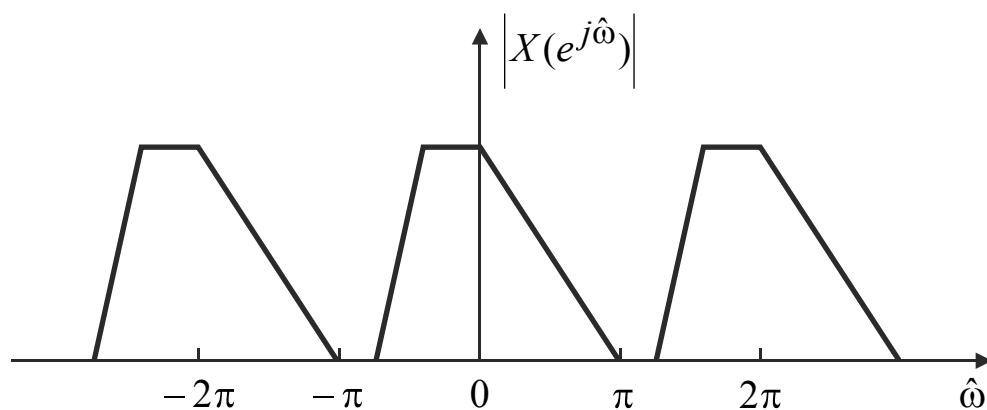
$$\begin{aligned} X_n(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)x(n)z^{-n} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \right) x(n)z^{-n} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\frac{2\pi}{M}kn} z^{-n} \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Взаимосвязь между z-преобразованиями сигналов на входе и выходе блока уменьшения частоты дискретизации (рис. 2в), с учетом подстановки выражения (10) в выражение (7), имеет вид:

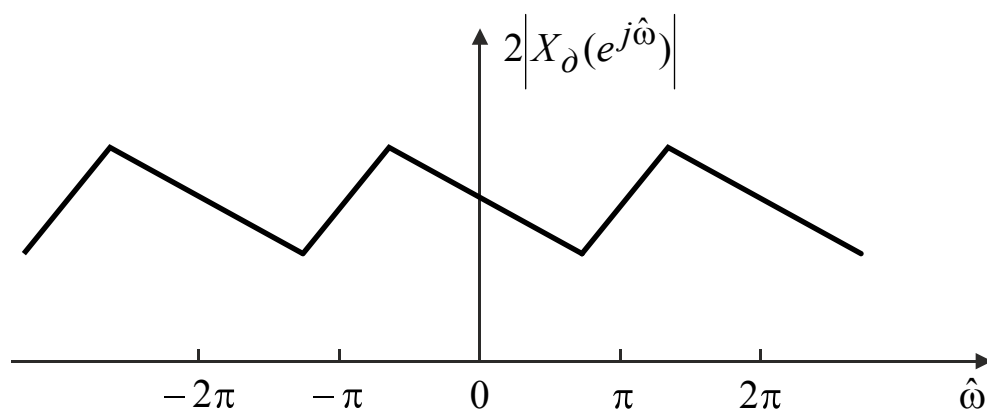
$$X_{\partial}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(e^{-j\frac{2\pi k}{M}} z^{1/M} \right). \quad (11)$$

Выполняя в выражении (11) замену $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим соотношение для связи преобразований Фурье сигналов на входе и выходе блока уменьшения частоты дискретизации (рис. 2в):

$$X_{\partial}(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\hat{\omega}-2\pi k)/M}). \quad (12)$$



а)



б)

Рис. 4. Эффект наложения в частотной области, вызванный понижением частоты дискретизации в 2 раза: а) спектр исходного сигнала; б) суммарный спектр выходного сигнала после понижения частоты дискретизации в 2 раза

Выражение (12) подразумевает, что $X_{\partial}(e^{j\hat{\omega}})$ является суммой M слагаемых смещенных функций $X(e^{j\hat{\omega}})$ с увеличенным периодом, которая дополнительно умножается на $1/M$. В силу уменьшения частоты дискретизации возможно возникновение эффекта наложения спектров. Этого можно избежать, если при уменьшении частоты дискретизации в M раз сигнал $x(n)$ ограничен полосой частот до π/M .

Возможный вид функции $|X_{\partial}(e^{j\hat{\omega}})|$ при отсутствии и наличии эффекта наложения спектров, как следствия выполнения операции понижения частоты дискретизации, представлен на рис. 4 и рис. 5 соответственно.

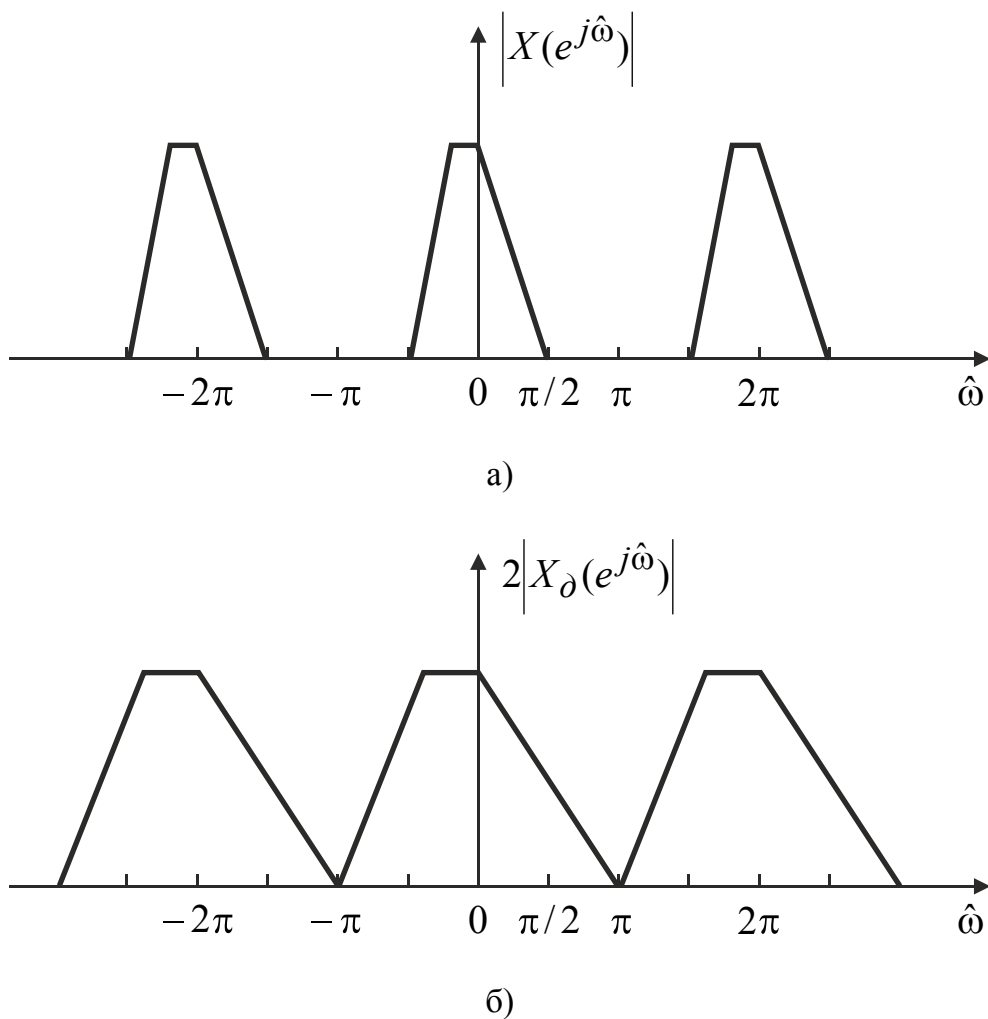


Рис. 5. Отсутствие наложения при понижении частоты дискретизации в 2 раза:
 а) спектр исходного сигнала; б) суммарный спектр выходного сигнала после понижения частоты дискретизации в 2 раза

1.3. Многоскоростные тождества

1. *Коммутативность изменения частоты дискретизации.* Схемы, представленные на рис. 6а, эквивалентны, если коэффициенты повышения L и понижения M частоты дискретизации являются взаимно простыми числами, то есть с учетом того, что L и M являются положительными целыми числами, они не имеют общих делителей, больших 1.

2. *Чередование операции фильтрации и повышения частоты дискретизации.* Каскадное соединение фильтра с передаточной функцией $H(z)$ и блока повышения частоты дискретизации в L раз является эквивалентным каскадному соединению блока повышения частоты дискретизации в L раз и фильтра с передаточной функцией $H(z^L)$.

3. *Чередование операции фильтрации и понижения частоты дискретизации.* Каскадное соединение блока понижения частоты дискретизации в M раз и фильтра с передаточной функцией $H(z)$ является эквивалентным каскадному соединению фильтра с передаточной функцией $H(z^M)$ и блока понижения частоты дискретизации в M раз.

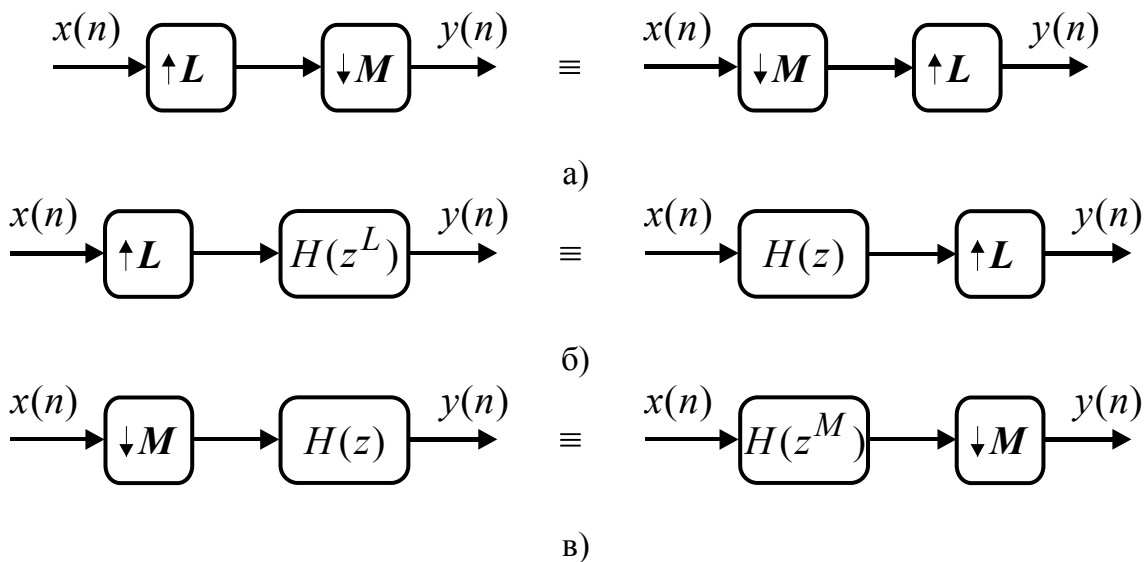


Рис. 6. Многоскоростные тождества: а) коммутативность изменения частоты дискретизации выполняется, если целые числа L и M являются взаимно простыми; б) чередование операции фильтрации и повышения частоты дискретизации; в) чередование операции фильтрации и понижения частоты дискретизации

1.4. Многоскоростные системы для преобразования частоты дискретизации

Процесс уменьшения частоты дискретизации сигналов более известен как «децимация», а многоскоростные устройства, используемые для децимации, называются дециматорами. Обратный процесс повышения частоты называется «интерполяцией», а устройства, используемые для интерполяции, называются интерполяторами. Выше было показано, что нельзя произвольно снижать частоту дискретизации сигнала так, чтобы при этом отсутствовал эффект наложения. Поэтому для предельно дискретизированного сигнала в первую очередь необходимо преобразовать его с помощью ФНЧ, а только затем уменьшать частоту дискретизации. Подобным образом после вставки нулевых отсчетов в последовательность при увеличении частоты дискретизации сигнал должен быть пропущен через ФНЧ.

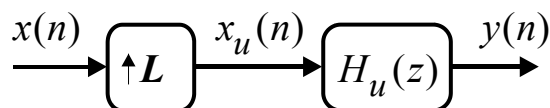
В связи с тем, что преобразователи частоты дискретизации с коэффициентами дискретизации, являющимися дробными числами, могут быть реализованы с помощью каскадов интерполяции и децимации, в многоскоростных системах необходимо использовать цифровые фильтры. Рассмотрим порядок использования таких фильтров. В первую очередь определим соотношения между входной и выходной последовательностями многоскоростной системы, в которой используются преобразователи частоты. Затем определим частотные характеристики понижающих фильтров, используемых в многоскоростных структурах. Далее рассмотрим децимацию и интерполяцию последовательностей и определим выходные характеристики понижающих цифровых фильтров.

1.5. Основные структуры

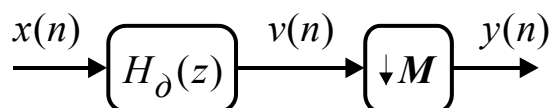
При повышении частоты дискретизации в L раз происходит повторение сигналов основного спектра (рис. 3), поэтому интерполятор для целых значений изменения частоты дискретизации содержит ФНЧ с передаточной функцией $H_u(z)$, имеющего частоту среза π/L , как показано на рис. 7а. Данный низкочастотный фильтр, называемый фильтром интерполяции, перемещает $L-1$ не несущих информационной нагрузки нулевых отсчетов $x_u(n)$ в спектр сигнала с повышенной частотой.

С другой стороны, устройство понижения частоты с индексом M , равным целому числу, может привести к эффекту наложения. Поэтому в

основной структуре дециматора применяется ФНЧ с передаточной функцией $H_{\delta}(z)$, имеющий частоту среза π/M , который расположен перед блоком понижения частоты дискретизации и формирует некоторый сигнал $v(n)$, как показано на рис. 7б. Данный фильтр называется фильтром децимации и ограничивает полосу частот входного сигнала $x(n)$ до $|\hat{\omega}| \leq \pi/M$ перед началом процесса уменьшения частоты дискретизации, чтобы не допустить эффекта наложения спектров.

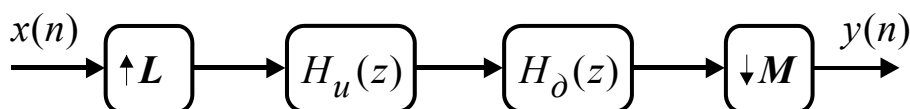


а)

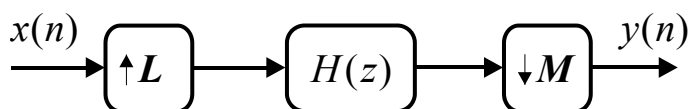


б)

Рис. 7. Применение ФНЧ: а) для устранения $L - 1$ копий сжатого спектра сигнала; б) для устранения наложения



а)



б)

Рис. 8. Эквивалентное преобразование при изменении частоты дискретизации в дробное число раз: а) исходная структура; б) структура после преобразования

Изменение частоты дискретизации в дробное число раз может быть получено совместным использованием интерполятора с коэффициентов L и дециматора с коэффициентом M , где L и M – положительные целые числа. Интерполяция должна предшествовать децимации, как показано на рис. 8а. Оба фильтра – интерполяции

$H_u(z)$ и децимации $H_\partial(z)$ (рис. 8а) – могут быть объединены в один фильтр $H(z)$. Тем самым можно избежать эффекта наложения, который может возникнуть при понижении частоты дискретизации, и повлиять на исчезновение «лишних» составляющих сигнала при увеличении частоты дискретизации. Результат такого объединения фильтров показан на рис. 8б.

1.6. Связь входного и выходного сигналов

Опуская математические выкладки, определим соотношения вход-выход для систем, представленных на рис. 7 и рис. 8.

Рассмотрим соотношение вход-выход для интерполятора, изображенного на рис. 7а. Пусть $h_u(n)$ обозначает импульсную характеристику фильтра интерполяции с передаточной функцией $H_u(z)$. Во временной области желаемая связь вход-выход может быть описана следующим образом:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_u(n - Lm)x(m), \quad (13)$$

а в z-области:

$$Y(z) = H(z)X(z^L). \quad (14)$$

Рассмотрим соотношение вход-выход для дециматора, изображенного на рис. 7б. Пусть $h_\partial(n)$ обозначает импульсную характеристику фильтра децимации с передаточной функцией $H_\partial(z)$. Во временной области желаемая связь вход-выход выглядит следующим образом:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_\partial(Mn - m)x(m), \quad (15)$$

а в z-области:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z^{1/M} \right) X \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z^{1/M} \right). \quad (16)$$

Рассмотрим соотношение вход-выход для системы изменения частоты дискретизации в дробное число раз, изображенной на рис. 8б. Пусть $h(n)$ обозначает импульсную характеристику фильтра с

передаточной функцией $H(z)$. Во временной области желаемая связь вход-выход описывается следующим образом:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(Mn - mL)x(m), \quad (17)$$

а в z -области:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z^{1/M} \right) X \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}kL} z^{L/M} \right). \quad (18)$$

1.7. Требования к цифровым фильтрам

Рассмотрим особенности ФНЧ, показанных на рис. 7 и рис. 8. В первую очередь рассмотрим интерполяционные фильтры. Пусть $x(n)$ – последовательность, полученная в результате дискретизации с частотой Найквиста ограниченного во времени сигнала $x_a(t)$. Если $X_a(j\Omega)$ и $X(e^{j\hat{\omega}})$ являются результатом преобразования Фурье $x_a(t)$ и $x(n)$ соответственно, то получим, что эти преобразованные функции связаны между собой следующим выражением:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{T_\partial} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(\frac{j\hat{\omega} - j2\pi k}{T_0} \right), \quad (19)$$

где T_∂ – период дискретизации. Если вместо дискретной функции $x(n)$ подставить функцию $y(n)$ с меньшим периодом T_∂ / L , преобразование Фурье функции $Y(e^{j\hat{\omega}})$ может быть выражено в виде:

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{L}{T_\partial} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(\frac{j\hat{\omega} - j2\pi k}{T_\partial / L} \right). \quad (20)$$

С другой стороны, если сигнал $x(n)$ будет пропущен через интерполятор с коэффициентом увеличения частоты дискретизации L и ФНЧ с частотой среза π/L , и усилением L , выходной сигнал интерполятора будет точно соответствовать сигналу $y(n)$, преобразование Фурье которого описывается выражением (20). В результате описание идеального интерполяционного ФНЧ будет следующим:

$$|H_u(e^{j\hat{\omega}})| = \begin{cases} L, & |\hat{\omega}| \leq \pi/L, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично задаются спецификации для идеального децимационного ФНЧ, который будет задан выражением:

$$|H_\partial(e^{j\hat{\omega}})| = \begin{cases} 1, & |\hat{\omega}| \leq \pi/M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (22)$$

В случае преобразователя частоты дискретизации с дробным множителем, как показано на рис. 8б, спецификации на идеальный ФНЧ могут быть заданы в виде:

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = \begin{cases} L, & |\hat{\omega}| \leq \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (23)$$

Тем самым подавляются «изображения», вызванные интерполятором, и одновременно обеспечивается отсутствие наложения, вызванное дециматором. Синтез фильтров (21) – (23) – стандартная задача разработки ФНЧ с конечной или бесконечной импульсными характеристиками.

1.8. Банки цифровых фильтров

В цифровой обработке сигналов существует ряд приложений, в которых необходимо разделять сигнал на множество поддиапазонных сигналов, занимающих обычно неперекрывающиеся части исходной полосы частот. В других приложениях необходимо объединять много поддиапазонных сигналов в единственный составной сигнал. В данных приложениях банки цифровых фильтров играют чрезвычайно важную роль.

1.8.1. Основные определения

Банк цифровых фильтров является набором цифровых полосовых фильтров с общим входом или суммирующим выходом, как показано на рис. 9. Устройство, показанное на рис. 9а, называется M -канальным банком фильтров анализа с фильтрами $H_k(z)$, известными как фильтры анализа. Банк фильтров анализа необходим для разложения входного сигнала $x(n)$ в набор M поддиапазонных сигналов $v_k(n)$, где каждый поддиапазонный сигнал занимает часть исходной полосы частот. Тем

самым сигнал будет «проанализирован», когда будет разделен в частотной области на набор узких спектральных полос. Двойственной операцией анализа является синтез, посредством которого набор поддиапазонных сигналов $v_k(n)$ объединяется в один сигнал $y(n)$. На рис. 9б показан L -диапазонный синтезирующий банк фильтров, где каждый фильтр $F_k(z)$ называется синтезирующим фильтром.

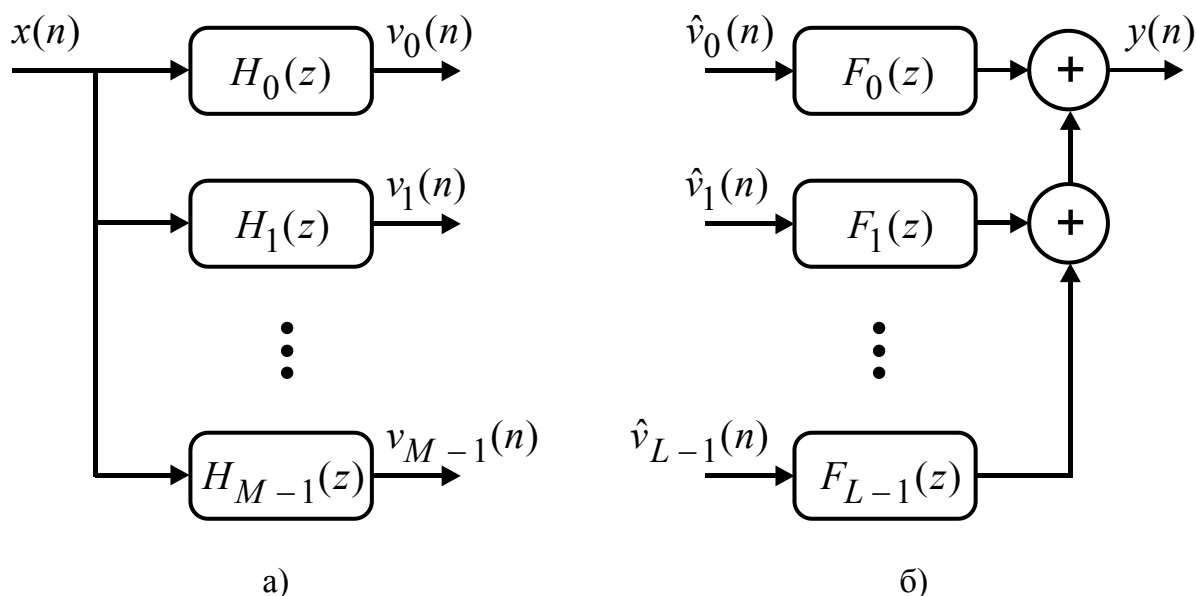


Рис. 9. Банки фильтров: а) анализа; б) синтеза

1.8.2. Равномерные банки фильтров

Ниже описывается техника создания класса банков фильтров с равной шириной полосы пропускания. Допустим, что $H_0(z)$ представляет собой физически реализуемый цифровой ФНЧ с действительным импульсным откликом $h_0(n)$:

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(n)z^{-n}, \quad (24)$$

где допускается, что фильтр может иметь бесконечную импульсную характеристику. Пусть $H_0(z)$ имеет граничные частоты в полосе пропускания $\hat{\omega}_n$ и полосе задерживания $\hat{\omega}_z$, сосредоточенные вокруг частоты π/M (рис. 10а), где M – некоторое произвольное целое число. Теперь рассмотрим физически реализуемый импульсный отклик $h_k(n)$, $0 \leq k \leq M-1$, полученный модулированием $h_0(n)$ экспоненциальной последовательностью

$$h_k(n) = h_0(n)e^{j\frac{2\pi}{M}kn}. \quad (25)$$

Соответствующая передаточная функция равна:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(n) \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z \right)^{-n} = H_0 \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} z \right), \quad (26)$$

где $0 \leq k \leq M-1$. При этом частотная характеристика может быть представлена в виде:

$$H_k(e^{j\hat{\omega}}) = H_0(e^{j(\hat{\omega}-2\pi k/M)}), \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (27)$$

Таким образом, частотная характеристика $H_k(e^{j\hat{\omega}})$ получена смещением $H_0(e^{j\hat{\omega}})$ на $2\pi k/M$ (рис. 10б). Соответствующие импульсные отклики $h_k(n)$ в общем случае являются комплексными, и, следовательно, функция $|H_k(e^{j\hat{\omega}})|$ необязательно является симметричной относительно нулевой частоты. На рис. 10б представлены отклики $M-1$ фильтров, которые получены сдвигом низкочастотного фильтра-прототипа.

Отметим, что M фильтров $H_k(z)$, определенных в выражении (26), могут быть использованы как анализирующие фильтры в банке фильтров анализа (рис. 9а) или как фильтры банка синтеза $F_k(z)$ (рис. 9б). Полученный банк цифровых фильтров в данном случае называют равномерным.

Содержание лабораторной работы

1. Исследование соотношения вход-выход для операций увеличения и уменьшения частоты дискретизации во временной области.
2. Исследование соотношения вход-выход для операций увеличения и уменьшения частоты дискретизации в частотной области.
3. Проектирование и реализация интерполятора.
4. Проектирование и реализация дециматора.
5. Исследование изменения частоты дискретизации в дробное число раз.
6. Проектирование равномерных банков фильтров анализа / синтеза.

7. Проектирование L -полосного КИХ-фильтра.

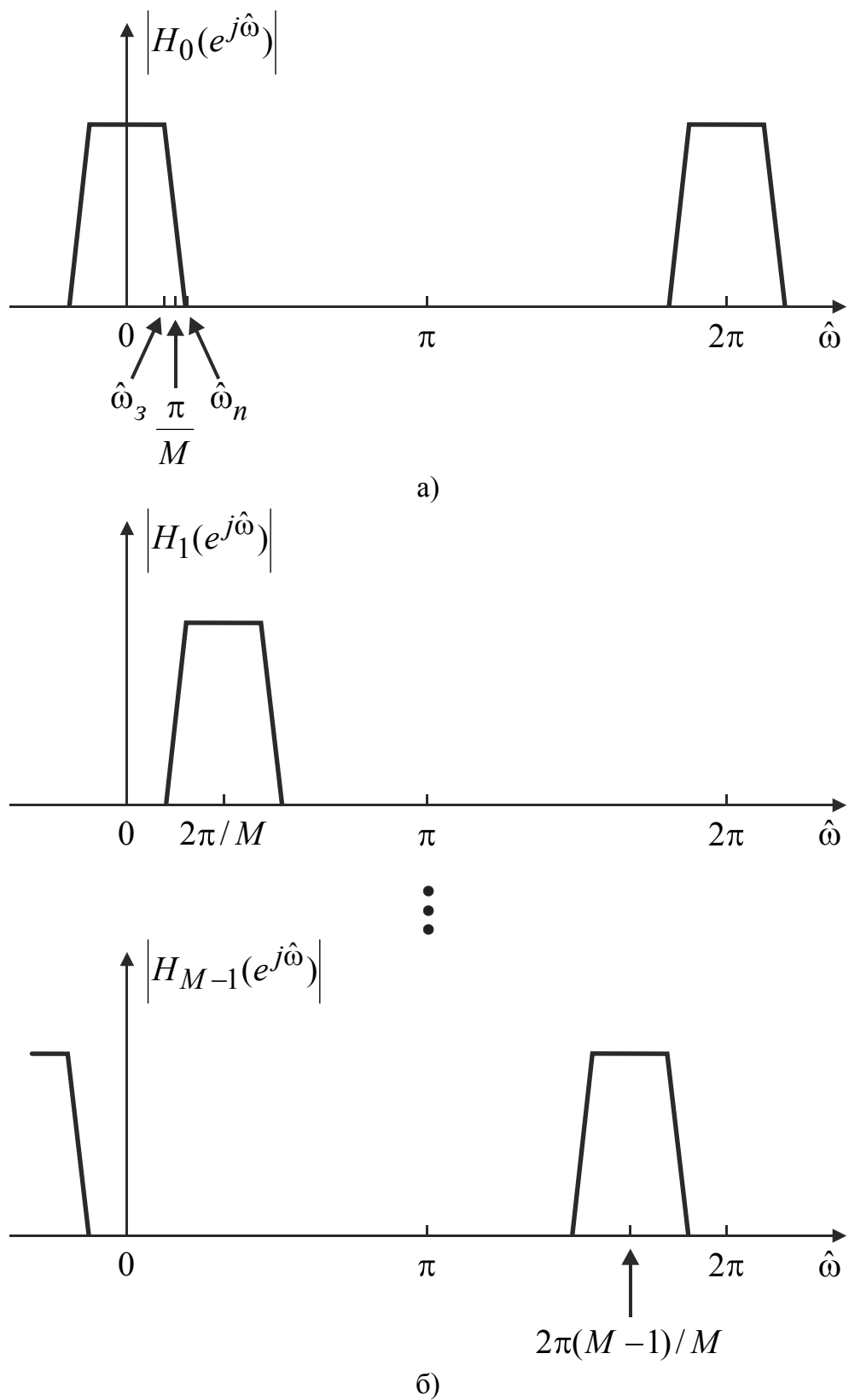


Рис. 10. Равномерный банк фильтров: а) ФНЧ прототип; б) $M - 1$ полосовых фильтров

Порядок выполнения работы

1. Исследование соотношения вход-выход для операций увеличения и уменьшения частоты дискретизации во временной области

С использованием программы 1, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование процесса увеличения частоты дискретизации во временной области и ответить на следующие вопросы:

1. Какова нормированная частота в радианах у синусоидальной последовательности, рассмотренной в программе 1? Какова ее длина? Чему равен коэффициент увеличения частоты дискретизации L ?

2. Как реализован оператор увеличения частоты дискретизации в программе 1?

3. Запустить программу 1 и проверить, что отношение между выходом и входом оператора увеличения частоты дискретизации удовлетворяет уравнению (1).

4. Повторить п. 3 для двух различных значений нормированной частоты и двух различных значений коэффициента увеличения частоты дискретизации L .

5. Модифицировать программу 1 для исследования процесса увеличения частоты дискретизации единичного скачка.

```
% Программа 1. Иллюстрация операции увеличения  
% частоты дискретизации в целое число раз  
%
```

```
clf;  
n = 0:50;
```

```
x = sin(2*pi*0.12*n);  
y = zeros(1,3*length(x));  
y(1:3:length(y)) = x;
```

```
subplot(211); stem(n,x)  
title('Входная последовательность'); grid  
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')
```

```
subplot(212); stem(n,y(1:length(x)))  
title('Выходная последовательность'); grid  
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')
```

С использованием программы 2, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование процесса уменьшения частоты дискретизации во временной области и ответить на следующие вопросы:

1. Какова нормированная частота в радианах у синусоидальной последовательности, рассмотренной в программе 2? Какова ее длина? Чему равен коэффициент уменьшения частоты дискретизации M ?

2. Как реализован оператор уменьшения частоты дискретизации в программе 2?

3. Запустить программу 2 и проверить, что отношение между выходом и входом оператора уменьшения частоты дискретизации удовлетворяет уравнению (2).

4. Повторить п. 3 для двух различных значений нормированной частоты и двух различных значений коэффициента уменьшения частоты дискретизации M .

```
% Программа 2. Иллюстрация операции уменьшения  
% частоты дискретизации в целое число раз
```

```
%
```

```
clf;
```

```
n = 0:49;
```

```
m = 0:50*3-1;
```

```
x = sin(2*pi*0.042*m);
```

```
y = x(1:3:length(x));
```

```
subplot(211); stem(n,x(1:50))
```

```
title('Входная последовательность'); grid
```

```
axis([0 50 -1.2 1.2])
```

```
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')
```

```
subplot(212); stem(n,y)
```

```
title('Выходная последовательность'); grid
```

```
axis([0 50 -1.2 1.2])
```

```
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')
```

2. Исследование соотношения вход-выход для операций увеличения и уменьшения частоты дискретизации в частотной области

Для демонстрации эффекта увеличения и уменьшения частоты дискретизации в частотной области необходимо создать входную последовательность конечной длины, которая является узкополосной.

Для выполнения данной операции можно воспользоваться функцией `fir2`, листинг которой может быть найден в помощи пакета Matlab.

С использованием программы 3, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование процесса увеличения частоты дискретизации в частотной области и ответить на следующие вопросы:

1. Какова длина входной последовательности, рассмотренной в программе 3?

2. Запустить программу 3 для следующих значений коэффициента увеличения частоты дискретизации L : 2, 3 и 5. Прокомментировать полученный результат. Проверить результат в соответствии с выражением (4).

```
% Программа 3. Иллюстрация эффекта увеличения  
% частоты дискретизации в частотной области с  
% использованием функции fir2 для создания  
% узкополосной входной последовательности  
%  
clf;  
freq = [0 0.45 0.5 1];  
mag = [0 1 0 0];  
x = fir2(99,freq,mag);  
  
% Вычисление и вывод входного спектра  
[Xz,w] = freqz(x,1,512);  
subplot(211); plot(w/pi,abs(Xz))  
title('Входной спектр'); grid  
axis([0 1 0 1])  
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Величина')  
  
% Создание последовательности с увеличенной  
% частотой дискретизации  
L = input('Введите коэффициент L = ');  
y = zeros(1,L*length(x));  
y(1:L:length(y)) = x;  
  
% Вычисление и вывод выходного спектра  
[Yz,w] = freqz(y,1,512);  
  
subplot(212); plot(w/pi,abs(Yz))  
title('Выходной спектр'); grid
```

```
axis([0 1 0 1])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Величина')
```

С использованием программы 4, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование процесса уменьшения частоты дискретизации в частотной области и ответить на следующие вопросы:

1. Какова длина входной последовательности, рассмотренной в программе 4?

2. Запустить программу 4 для следующих значений коэффициента уменьшения частоты дискретизации M : 2, 3 и 5. Прокомментировать полученный результат. Проверить результат в соответствии с выражением (12).

```
% Программа 4. Иллюстрация эффекта уменьшения
% частоты дискретизации в частотной области с
% использованием функции fir2 для создания
% узкополосной входной последовательности
%
clf;
freq = [0 0.42 0.48 1];
mag = [0 1 0 0];
x = fir2(101,freq,mag);
% Вычисление и вывод входного спектра
[Xz,w] = freqz(x,1,512);
subplot(211); plot(w/pi,abs(Xz))
title('Входной спектр'); grid
axis([0 1 0 1])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Величина')

% Создание последовательности с уменьшенной
% частотой дискретизации
M = input('Введите коэффициент M = ');
y = x(1:M:length(x));

% Вычисление и вывод выходного спектра
[Yz,w] = freqz(y,1,512);

subplot(212); plot(w/pi,abs(Yz))
title('Выходной спектр'); grid
axis([0 1 0 1])
```

```
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Величина')
```

3. Проектирование и реализация интерполятора

С использованием программы 5, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование работы интерполятора и ответить на следующие вопросы:

1. Каковы нормированные частоты в радианах двух синусоидальных последовательностей, формирующих входной сигнал в программе 5? Какова его длина?

2. Каковы тип и порядок интерполирующего фильтра, используемого в программе 5?

3. Запустить программу 5 для значения $L = 2$ и прокомментировать результат.

4. Изменить нормированную частоту синусоидальных последовательностей на $2\pi \cdot 0.045$ [rad] и $2\pi \cdot 0.029$ [rad] и длину входной последовательности на 40. Запустить модифицированную программу 5 для $L = 3$. Прокомментировать результат.

```
% Программа 5. Иллюстрация процесса интерполяции
%
clf;
L = input('Введите коэффициент L = ');
n = 0:49;
m = 0:(50*L)-1;
% Создание входной последовательности
x = sin(2*pi*0.043*n) + sin(2*pi*0.031*n);

% Создание интерполированной выходной
% последовательности
y = interp(x,L);

% Вывод входной и выходной последовательностей
subplot(211); stem(n,x(1:50))
title('Входная последовательность'); grid
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')

subplot(212); stem(m,y(1:50*L))
title('Выходная последовательность'); grid
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')
```

Необходимо отметить, что программа 5 иллюстрирует использование встроенной Matlab-функции `interp` при проектировании и исполнении интерполятора с целочисленным коэффициентом интерполяции L . Функция `interp` использует низкочастотный интерполирующий фильтр, синтезированный с учетом выражения (21). Листинг функции `interp` может быть найден в помощи пакета.

4. Проектирование и реализация дециматора

С использованием программы 6, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование работы дециматора и ответить на следующие вопросы:

1. Каковы нормированные частоты в радианах двух синусоидальных последовательностей, формирующих входной сигнал в программе 6? Какова его длина?

2. Каковы тип и порядок децимирующего фильтра, используемого в программе 6?

3. Запустить программу 6 для $M = 2$ и прокомментировать результат.

4. Изменить нормированные частоты синусоидальных последовательностей на $2\pi \cdot 0.045$ [рад] и $2\pi \cdot 0.029$ [рад] и длину входной последовательности на 120. Запустить модифицированную программу для $M = 3$. Прокомментировать результат.

```
% Программа 6. Иллюстрация процесса децимации
%
clf;
M = input('Введите коэффициент M = ');
n = 0:99;
m = 0:(100/M)-1;

% Создание входной последовательности
x = sin(2*pi*0.043*n) + sin(2*pi*0.031*n);

% Создание децимированной выходной
% последовательности
y = decimate(x,M,'fir');

subplot(211); stem(n,x(1:100))
```

```

title('Входная последовательность'); grid
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')

subplot(212); stem(m, y(1:100/M))
title('Выходная последовательность'); grid
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')

```

Необходимо отметить, что программа 6 иллюстрирует использование встроенной Matlab-функции `decimate` при проектировании и исполнении дециматора с целочисленным коэффициентом децимации M . Функция `decimate` использует низкочастотный децимирующий фильтр, синтезированный с учетом выражения (22). Необходимый листинг функции `decimate` может быть найден в помощи пакета.

5. Исследование изменения частоты дискретизации в дробное число раз

С использованием программы 7, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести исследование изменения частоты дискретизации в дробное число раз и ответить на следующие вопросы:

1. Каковы нормированные частоты в радианах двух синусоидальных последовательностей, формирующих входной сигнал в программе 7? Какова его длина?

2. Каковы тип и порядок фильтра, используемого в программе 7?

3. Запустить программу 7 для $L = 5$ и $M = 3$. Прокомментировать результат.

4. Изменить нормированные частоты двух синусоидальных последовательностей во входном сигнале на $2\pi \cdot 0.045$ [rad] и $2\pi \cdot 0.029$ [rad] и длину входной последовательности на 40. Запустить модифицированную программу 7 для $L = 3$ и $M = 5$. Прокомментировать результат.

```

% Программа 7. Иллюстрация изменения частоты
% дискретизации в дробное число раз
%
clf;
L = input('Введите коэффициент L = ');
M = input('Введите коэффициент M = ');
n = 0:29;

```

```

m = 0:(30*L/M)-1;

x = sin(2*pi*0.043*n) + sin(2*pi*0.031*n);
y = resample(x,L,M);

subplot(211); stem(n,x(1:30))
title('Входная последовательность'); grid
axis([0 29 -2.2 2.2])
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')

subplot(212); stem(m,y(1:30*L/M))
title('Выходная последовательность'); grid
axis([0 (30*L/M)-1 -2.2 2.2])
xlabel('Отсчеты n'); ylabel('Амплитуда')

```

Программа 7 иллюстрирует использование встроенной Matlab-функции `resample` при проектировании и исполнении процедуры изменения частоты дискретизации в дробное L/M число раз. Функция `resample` использует низкочастотный фильтр, синтезированный с учетом выражения (23). Листинг функции `resample` может быть найден в помощи пакета.

6. Проектирование равномерных банков фильтров анализа/синтеза

Проектирование M -канального равномерного банка фильтров анализа или синтеза может быть выполнено с использованием выражения (25). С использованием программы 8, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести проектирование M -канального равномерного банка фильтров анализа или синтеза и ответить на следующие вопросы:

1. Каковы тип и порядок у ФНЧ прототипа в программе 8? Сколько каналов в банке фильтров?
2. Запустить программу 8 и прокомментировать результат.
3. Модифицировать программу 8 для проектирования равномерного трехканального банка фильтров.

```

% Программа 8. Проектирование равномерного банка
% фильтров
%
clf;

```

```

% Проектирование прототипа низкочастотного КИХ-
% фильтра
freq = [0 0.2 0.25 1];
mag   = [1 1 0 0];
weights = [10 1];
a = remez(20,freq,mag);

n = 0:20;
w = 0:2*pi/255:2*pi;

for k = 1:4
    c = exp(2*pi*(k-1)*n*i/4);
    FB = a.*c;
    HB(k,:) = freqz(FB,1,w);
end

% Вывод амплитудно-частотных характеристик
% каждого фильтра
subplot(221); plot(w/pi,abs(HB(1,:)))
title('Фильтр 1'); grid
axis([0 2 0 1.2])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Амплитуда')

subplot(222); plot(w/pi,abs(HB(2,:)))
title('Фильтр 2'); grid
axis([0 2 0 1.2])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Амплитуда')

subplot(223); plot(w/pi,abs(HB(3,:)))
title('Фильтр 3'); grid
axis([0 2 0 1.2])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Амплитуда')

subplot(224); plot(w/pi,abs(HB(4,:)))
title('Фильтр 4'); grid
axis([0 2 0 1.2])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Амплитуда')

```

Программа 8 иллюстрирует использование встроенной Matlab-функции `remez`, которая может быть использована для синтеза КИХ-

фильтров, оптимальных по Чебышёву. Соответствующий листинг функции `remez` может быть найден в помощи пакета.

7. Проектирование L -полосного КИХ-фильтра

Низкочастотный L -полосный КИХ-фильтр с нулевой фазой и частотой среза $\hat{\omega}_c = \pi / L$ [rad] может быть спроектирован, например, с использованием метода окон. В этом случае коэффициенты импульсной характеристики фильтра выбираются следующим образом:

$$h(n) = w(n) h_u(n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (28)$$

где $w(n)$ – ограниченная на интервале $0 \leq n \leq N$ и равная нулю вне этого интервала положительная симметричная весовая функция, называемая окном, $h_u(n)$ – импульсная характеристика идеального ФНЧ, порядка N и частотой среза $\hat{\omega}_c = \pi / L$ [rad], описываемого следующим выражением:

$$h_u(n) = \frac{\sin(n\hat{\omega}_c)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n / L)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (29)$$

С использованием программы 9, описание кода Matlab которой приведено ниже, провести проектирование L -полосного низкочастотного фильтра и ответить на следующие вопросы:

1. Каковы значение L и длина L -полосного КИХ-фильтра, спроектированного с использованием программы 9? Какой тип окна используется в программе 9?

2. Запустить программу 9 и прокомментировать результат. Записать коэффициенты L -полосного фильтра.

3. Повторите п. 3 для других значений L и различных окон.

```
% Программа 9. Проектирование L-полосного КИХ-
% фильтра с использованием метода окон
%
clf;
K = 11;
n = -K:K;

% Создание усеченной импульсной характеристики
% из идеального низкочастотного фильтра
h = sinc(n/2)/2;
```

```

% Создание последовательности окна
w_ham = hamming(23);

% Создание коэффициентов оконного фильтра
hd = h.*w_ham';
c = hd/sum(hd);

% Вывод характеристики усиления оконного фильтра
[H,w] = freqz(c,1,256);
G = 20*log10(abs(H));

plot(w/pi,G)
title('Характеристика усиления оконного
фильтра'); grid
axis([0 1 -90 10])
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Усиление, дБ')

```

Контрольные вопросы

1. Что собой представляет процесс увеличения частоты дискретизации во временной области? Привести примеры.
2. Что собой представляет процесс уменьшения частоты дискретизации во временной области? Привести примеры.
3. Описать процесс увеличения частоты дискретизации во временной области. Привести примеры.
4. Выполнить вывод формулы (4).
5. Описать процесс уменьшения частоты дискретизации во временной области. Привести примеры.
6. Выполнить вывод формулы (12).
7. Что такое многоскоростные тождества?
8. Как устроен интерполятор?
9. Для каких целей в структуре интерполятора используется ФНЧ?
10. Какие требования задаются на ФНЧ, используемый в структуре интерполятора?
11. Как устроен дециматор?
12. Для каких целей в структуре дециматора используется ФНЧ?
13. Какие требования задаются на ФНЧ, используемый в структуре дециматора?
14. Описать процесс изменения частоты дискретизации в дробное число раз.

15. Какие требования задаются на ФНЧ, используемый в структуре схемы изменения частоты дискретизации в дробное число раз?
16. Определить соотношения вход-выход во временной области и в области z-преобразования для структур, изображенных на рис. 7 и рис. 8.
17. Что такое банк фильтров?
18. Какие функции выполняет банк анализа?
19. Какие функции выполняет банк синтеза?
20. Что такое равномерный банк фильтров?
21. Как построить равномерный банк фильтров?

Литература

1. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л. Цифровые фильтры: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
2. Чобану М.К. Цифровые многоскоростные системы обработки сигналов: Учеб. пособие. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009.
3. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
5. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
6. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
7. Ingle V.K., Proakis J.G. Digital Signal Processing using Matlab V. 4. PWS Publishing Company, 1997.
8. Хрящев В.В., Приоров А.Л., Волохов В.А. Основы теории цепей: сборник задач. – Ярославль: ЯрГУ, 2008.

Лабораторная работа № 5

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель работы: изучение непрерывного вейвлет-преобразования, кратномасштабного анализа, дискретного вейвлет-преобразования, быстрого вейвлет-преобразования, пороговых функций.

Краткая теория

1. Основные определения

Непрерывное преобразование Фурье (НПФ) является важнейшим средством анализа стационарных непрерывных сигналов, которые широко используются в радиотехнике и телекоммуникациях. При этом сигнал раскладывается в базис синусов и косинусов различных частот. Количество этих функций бесконечно большое, а коэффициенты преобразования находятся путем вычисления скалярного произведения сигнала с комплексными экспонентами:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad (1)$$

где $f(t)$ – сигнал, а $F(\Omega)$ – его преобразование Фурье.

С позиции точного представления произвольных сигналов и функций, НПФ имеет ряд недостатков:

1. Даже для одной заданной частоты требуется знание сигнала не только в прошлом, но и в будущем, что является математической абстракцией.

2. В условиях практически неизбежного ограничения числа гармоник или спектра колебаний точное восстановление сигнала после прямого и обратного преобразований Фурье теоретически (и тем более практически) невозможно, в частности из-за появления эффекта Гиббса.

3. Базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое колебание, которое математически определено в интервале времени от $-\infty$ до ∞ и имеет неизменные во времени параметры.

4. Отдельные особенности сигнала (разрывы, пики) вызывают незначительные изменения частотного образа сигнала во всем

интервале частот, которые «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру практически невозможным.

5. Такая плавная базисная функция, как синусоида, в принципе не может представлять перепады сигналов с бесконечной крутизной (прямоугольные импульсы и др.), хотя такие сигналы применяются весьма широко.

6. Для нестационарных сигналов трудности НПФ многократно возрастают.

7. Единственным приспособлением к представлению быстрых изменений сигналов, таких как пики или перепады, является резкое увеличение числа гармоник, которые оказывают влияние на форму сигнала и за пределами локальных особенностей сигнала.

8. По составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение особенностей на временной зависимости сигнала и их характер.

Проблемы спектрального анализа и синтеза сигналов, ограниченных во времени, частично решаются переходом к так называемому оконному преобразованию Фурье (ОПФ):

$$F(\Omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-b)e^{-j\Omega t} dt, \quad (2)$$

которое перед использованием НПФ, выражаемого формулой (1), применяет операцию умножения сигнала на окно. Окном $w(t-b)$ называется локальная функция, которая перемещается вдоль временной оси для вычисления преобразования Фурье в нескольких позициях b . Таким образом, преобразование становится зависимым от времени, и в результате получается частотно-временное описание сигнала.

Недостатком ОПФ является то, что при его вычислении используется фиксированное окно, которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала. Вейвлет-преобразование, рассматриваемое далее, решает эту и некоторые другие проблемы, связанные с обработкой сигналов.

2. Введение в теорию вейвлет-преобразования

За последние два десятилетия в мире возникло и оформилось новое научное направление, связанное с так называемым вейвлет-преобразованием. Слово «wavelet», являющееся переводом французского «ondelette», означает небольшие волны, следующие друг за другом. В узком смысле вейвлеты – это семейство функций,

получающихся путем масштабирования и сдвигов одной материнской функции. В широком смысле вейвлеты – это функции, обладающие хорошей частотной локализацией, чье среднее значение равно нулю.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций (в настоящей работе ортогональных)

$$\Psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3)$$

сконструированных из *материнского* (порождающего) вейвлета $\psi(t)$, обладающего определенными свойствами, за счет операций сдвига во времени – b и изменения временного масштаба – a . Множитель $|a|^{-1/2}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a . Таким образом, для заданных значений параметров a и b функция $\Psi_{ab}(t)$ и есть вейвлет, порождаемый материнским вейвлетом $\psi(t)$.

2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование

Сконструируем базис $\Psi_{ab}(t)$ с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов материнского вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров a и b в формуле (3). Тогда по определению прямое вейвлет-преобразование сигнала $f(t)$ будет представлено в виде:

$$W_f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (4)$$

Если для порождающего вейвлета $\psi(t)$ выполняется равенство

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < \infty, \text{ то возможно обратное преобразование:}$$

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \Psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Psi(\Omega)$ – преобразование Фурье функции $\psi(t)$.

Из (4) следует, что вейвлет-спектр $W_f(a, b)$, в отличие от спектра Фурье, является функцией двух аргументов: первый аргумент a (временной масштаб) аналогичен периоду осцилляций, то есть является

обратным частоте, а второй аргумент b аналогичен смещению сигнала по оси времени. Следует отметить, что $W_f(a_0, b)$ характеризует временную зависимость при фиксированном значении $a = a_0$, тогда как зависимости $W_f(a, b_0)$ можно поставить в соответствие частотную зависимость при фиксированном значении $b = b_0$.

При непрерывном изменении параметров a и b для расчета вейвлет-спектра необходимы большие вычислительные затраты. Множество функций $\psi_{ab}(t)$ является избыточным. Поэтому необходима дискретизация параметров a и b при сохранении возможности восстановления сигнала из его трансформант. Дискретизация, как правило, осуществляется через степени двойки:

$$a = 2^j, b = k2^j, \psi_{jk}(t) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

где j и k – целые числа, а j называется параметром масштаба. В отличие от НВП в данном случае рассматриваются не все сдвиги и растяжения базисной функции, а только взятые на некоторой дискретной сетке (обычно логарифмической). Здесь необходимо отметить, что если сигнал остается непрерывным, то называть это преобразование дискретным неверно. В литературе, посвященной вейвлет-анализу, его называют диадным вейвлет-преобразованием, прямой и обратный вид которого представлен с использованием формул (6) и (7), соответственно.

$$d_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{jk}^*(t) dt, \quad (6)$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \psi_{jk}(t). \quad (7)$$

Если же сигнал дискретный, то аналогичное преобразование правильно называть дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП).

2.2. Признаки вейвлета

1. *Локализация.* Вейвлет-преобразование, в отличие от преобразования Фурье, использует локализованные базисные функции. Вейвлет должен быть локализован как во временной области, так и в частотной. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$|\psi(t)| \leq C(1 + |t|)^{-1-\varepsilon}, \quad |\Psi(\Omega)| \leq C(1 + |\Omega|)^{-1-\varepsilon}, \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Например, дельта-функция и гармоническая функция не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временной и частотной областях.

2. *Нулевое среднее.* График вейвлет-функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Из этого условия становится понятным значение слова «wavelet» – небольшая волна. Часто для приложений необходимо, чтобы не только нулевой, но и все первые n моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0.$$

Такой вейвлет называется вейвлетом n -го порядка. Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

3. *Ограниченность.* Квадрат нормы функции должен быть конечным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

4. *Автомодельность базиса.* Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов.

2.3. Примеры вейвлетообразующих функций (материнских вейвлетов)

Вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета на заданном масштабе и анализируемого

сигнала. Вейвлет-коэффициенты $W_f(a, b)$ содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, которые содержат информацию о сигнале и о синусоидальной волне).

Таблица 1

Примеры вейвлет-функций $\psi(t)$

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\Psi(\Omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
<i>Гауссовы:</i> первого порядка или WAVE-вейвлет	$-te^{-t^2/2}$	$(i\Omega)\sqrt{2\pi}e^{-\Omega^2/2}$
второго порядка или МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа» – mexican hat),	$(1-t^2)e^{-t^2/2}$	$(i\Omega)^2\sqrt{2\pi}e^{-\Omega^2/2}$
<i>n</i> -го порядка	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2/2} \right)$	$(-1)^n (i\Omega)^n \sqrt{2\pi} e^{-\Omega^2/2}$
<i>DOG – difference of gaussians</i>	$e^{-t^2/2} - 0.5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi} \left(e^{-\Omega^2/2} - 0.5e^{-2\Omega^2} \right)$
<i>LP-Littlewood & Paley</i>	$(\pi t)^{-1} (\sin(2\pi t) - \sin(\pi t))$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & \pi \leq \Omega \leq 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Вещественные дискретные базисы		
<i>Вейвлет Хаара (Haar)</i>	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$	$\Psi(\Omega) = i \frac{\sin^2(\Omega/4)}{\Omega/4} e^{i\Omega/2}$
Комплексные базисы		
<i>Морле (Morlet)</i>	$e^{i\Omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\Omega)\sqrt{2\pi} e^{-(\Omega - \Omega_0)^2/2}$
<i>Пауля (Paul)</i>	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\Omega)\sqrt{2\pi}\Omega^n e^{-\Omega}$

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временной и в частотной области, поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

Примеры наиболее распространенных вейвлет-функций приведены в табл. 1. Наиболее распространенные вещественные базисы конструируются на основе производных функции Гаусса:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях. При $n = 1$ получаем вейвлет первого порядка, называемый WAVE-вейвлетом, с равным нулю нулевым моментом. При $n = 2$ получаем МНАТ-вейвлет, называемый «мексиканская шляпа» (mexican hat – похож на сомбреро). У него нулевой и первый моменты равны нулю. Он имеет лучшее разрешение, чем WAVE-вейвлет.

Наиболее простой пример *дискретного* вейвлета – это вейвлет Хаара (Haar). Недостатком его являются несимметричность формы и негладкость – резкие границы во временной области, вследствие чего возникает бесконечное чередование «лепестков» в частотной области, хотя и убывающих как $1/\omega$.

Среди *комплексных* вейвлетов наиболее часто используется базис, основанный на хорошо локализованном и во временной, и в частотной областях вейвлете Морле (Morlet). Характерный параметр ω_0 позволяет изменять избирательность базиса. Вещественная и мнимая части $\psi(t)$ – это амплитудно-модулированные колебания.

Выше был представлен небольшой перечень вейвлетов, описываемых аналитически в явном виде. Однако большинство вейвлет-функций не имеют аналитического описания в виде одной формулы, а задаются итерационными выражениями, легко вычисляемыми компьютерами. Примером таких вейвлетов являются функции Добеши (Daubechies).

Выбор конкретного материнского вейвлета (будь то непрерывный или дискретный) целиком зависит от характера поставленной задачи и от конкретного анализируемого сигнала. Разные сигналы удастся анализировать тем или иным способом, и критерием успеха обычно служит простота получаемого разложения. При этом решающим фактором оказываются интуиция и практический опыт исследователя.

2.4. Свойства вейвлет-анализа

Как уже отмечалось, прямое вейвлет-преобразование (4) содержит комбинированную информацию об анализируемом сигнале и анализирующем вейвлете. Несмотря на это, вейвлет-преобразование позволяет получить объективную информацию о сигнале, потому что некоторые свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от вейвлета делает эти простые свойства очень важными.

1. *Линейность*. Она следует из скалярного произведения (4):

$$W(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha W_{f_1}(a, b) + \beta W_{f_2}(a, b).$$

2. *Сдвиг*. Смещение сигнала во временной области на b_0 ведет к сдвигу вейвлет-образа также на b_0 :

$$W(f(t - b_0)) = W_f(a, b - b_0).$$

3. *Масштабирование*. Растяжение (сжатие) сигнала приводит также к растяжению (сжатию) его вейвлет-образа $W_f(a, b)$:

$$W(f(t/a_0)) = \frac{1}{a_0} W_f\left[\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right].$$

4. *Дифференцирование*

$$W(d_t^n f(t)) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d_t^n [\psi_{a,b}(t)] dt,$$

где $d_t^n f(t) = d^n f(t)/dt^n$, $n \geq 1$. Из этого свойства следует, что проигнорировать, например, крупномасштабные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации сигнала $f(t)$ можно дифференцированием нужное число раз либо вейвлета, либо самого сигнала.

5. *Масштабно-временная локализация*. Она обусловлена тем, что элементы базиса вейвлет-преобразования хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном.

За счет изменения масштаба (увеличение a приводит к сужению спектра Фурье функции $\psi_{ab}(t)$) вейвлеты способны выявлять различие в характеристиках на разных шкалах (частотах), а за счет сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем исследуемом интервале. Поэтому при анализе *нестационарных сигналов*, за счет свойства локальности вейвлетов, получают существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает только глобальные сведения о частотах (масштабах)

анализируемого сигнала, так как используемая при этом система функций (комплексная экспонента или синусы и косинусы) определена на бесконечном интервале.

По этой причине многие исследователи называют вейвлет-анализ «*математическим микроскопом*». Это название хорошо отражает замечательные свойства метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a – увеличение, и, наконец, выбором материнского вейвлета $\psi(t)$ определяют его оптические качества.

2.5. Дискретное вейвлет-преобразование

Статьи, касающиеся практического использования вейвлет-преобразования, содержат в основной своей массе результаты компьютерных расчетов, в которых использовано дискретное вейвлет-преобразование, которое по аналогии с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) широко используется в цифровой обработке сигналов. При этом не только параметры a и b , но и сигналы также дискретизируются во времени.

Подобно тому, как коэффициенты ДПФ обычно вычисляются при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), вейвлет-коэффициенты ДВП можно вычислить с помощью итерационной процедуры, известной под названием *быстрого вейвлет-преобразования* (БВП). Алгоритм БВП приведен в п. 2.6. При этом, если необходимо, можно *сжать* полученные данные, отбросив некоторую несущественную часть закодированной таким образом информации. Осуществляется это *квантованием*, в процессе которого приписываются разные весовые множители различным вейвлет-коэффициентам. Аккуратно проведенная процедура позволяет не только удалить некоторые статистические флуктуации и повысить роль динамических характеристик сигнала, но и существенно сократить компьютерную память и требования к передаче информации и, следовательно, снизить расходы.

2.6. Быстрое вейвлет-преобразование

При исследовании сигналов полезно их представление в виде совокупности последовательных приближений грубой (аппроксимирующей) $A_{j_0}(t)$ и уточненной (детализирующей) $D_j(t)$ составляющих:

$$f(t) = A_{j_0}(t) + \sum_{j=1}^{j_0} D_j(t), \quad (8)$$

с последующим их уточнением итерационным методом. Каждый шаг уточнения соответствует определенному масштабу, то есть уровню j_0 анализа (декомпозиции) и синтеза (реконструкции, восстановления) сигнала. Такое представление каждой составляющей сигнала вейвлетами можно рассматривать как во временной, так и в частотной областях. В этом суть кратномасштабного анализа (КМА). В прил. 2 описан КМА для непрерывных сигналов.

Как уже отмечалось в п. 2.5, на практике в большинстве случаев приходится сталкиваться с использованием ДВП. Однако формулы для вейвлет-преобразования дискретных сигналов не могут быть получены простой дискретизацией формул диадного вейвлет-преобразования для непрерывного сигнала. Получим их из предпосылок КМА.

Пусть имеется непрерывный сигнал $f(t) \in V_0$. Дискретный сигнал интерпретируем как последовательность коэффициентов a_{0k} , полученную в ходе КМА сигнала $f(t)$ при масштабирующих функциях Φ_{0k} :

$$f(t) = A_0(t) = \sum_k a_{0k} \Phi_{0k}(t), \quad (9)$$

$$a_{0k} = \langle f(t), \Phi_{0k}(t) \rangle = \int f(t) \Phi_{0k}(t) dt,$$

где a_{0k} – коэффициенты аппроксимации на уровне $j_0 = 0$.

По концепции КМА сигнал $f(t)$ разлагается на две составляющие (принадлежащие подпространствам V_1 и W_1):

$$f(t) = A_1(t) + D_1(t) = \sum_k a_{1k} \Phi_{1k}(t) + \sum_k d_{1k} \Psi_{1k}(t). \quad (10)$$

Следовательно, получены две новые последовательности a_{1k} и d_{1k} . Отметим, что последовательности a_{1k} и d_{1k} имеют половинную длину по сравнению с a_{0k} . Далее процесс декомпозиции может быть продолжен по $A_1(t)$ (подпространства V_2 и W_2). Сигнал $f(t)$ на уровне разложения j_0 будет представлен совокупностью коэффициентов a_{j_0k} и d_{j_0k} .

Однако вычисления a_{j_0k} и d_{j_0k} по-прежнему зависят от непрерывных базисных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Как показано в прил. 2, эти функции однозначно определяются коэффициентами h_l :

$$\varphi(t) = 2 \sum_l h_l \varphi(2t - l), \quad (11)$$

$$\psi(t) = 2 \sum_l g_l \varphi(2t - l), \quad (12)$$

$$h_l = \langle \varphi(t), \varphi(2t - l) \rangle = \int \varphi(t) \varphi(2t - l) dt,$$

$$g_l = (-1)^l h_{2n-l-1},$$

где $l = 0, 1, \dots, 2n-1$, n – порядок вейвлета. Вейвлеты n -го порядка существуют только на интервале длиной $2n-1$ и имеют $2n$ отличающихся от нуля коэффициентов h_l .

Из (11) и (12) можно получить следующие соотношения:

$$a_{j_0 k} = \langle f(t), \varphi_{j_0 k}(t) \rangle = \sum_l h_{l-2k} \langle \varphi(t), \varphi_{j_0-1, l}(t) \rangle = \sum_l h_{l-2k} a_{j_0-1, l},$$

$$d_{j_0 k} = \langle f(t), \psi_{j_0 k}(t) \rangle = \sum_l g_{l-2k} \langle \varphi(t), \varphi_{j_0-1, l}(t) \rangle = \sum_l g_{l-2k} a_{j_0-1, l}.$$

Итерационная процедура быстрого вейвлет-анализа получила название анализа от «тонкого» к «грубому» масштабу.

На практике наименьший возможный масштаб (наибольший уровень разрешения) определяется числом N дискретных значений сигнала. На самом «тонком» значении масштаба $j_0 = 0$ за аппроксимирующие коэффициенты a_{0k} принимаются сами отсчеты дискретного сигнала. При переходе от текущего масштаба j_0 к следующему $j_0 + 1$ число вейвлет-коэффициентов уменьшается в два раза, и они определяются по рекуррентным соотношениям:

$$a_{j_0+1, k} = \sum_l h_{l-2k} a_{j_0, k}, \quad (13)$$

$$d_{j_0+1, k} = \sum_l g_{l-2k} a_{j_0, k}. \quad (14)$$

При восстановлении (реконструкции) сигнала по его вейвлет-коэффициентам процесс идет от крупных масштабов к мелким и на каждом шаге описывается выражением:

$$a_{j_0-1, k} = \sum_l (h_{k-2l} a_{j_0, l} + g_{k-2l} a_{j_0, l}), \quad (15)$$

которое получается из соотношений (11) и (12).

Таким образом, в практических приложениях с применением быстрого вейвлет-преобразования используются только коэффициенты h_l , сами же вейвлеты не вычисляются и в расчетах не используются, что, как и в случае с БПФ, сокращает вычислительные затраты при обработке сигналов.

2.7. Частотный подход к вейвлет-преобразованию

До сих пор рассмотрение вейвлет-преобразования базировалось на временном подходе. Однако также плодотворна трактовка вейвлет-преобразования в частотной области на базе частотной фильтрации. В этом случае КМА сигнала рассматривается как поэтапная процедура фильтрации.

Обратимся к схеме, представленной на рис. 1. Сигнал $f(k)$ подается на низкочастотный (верхняя часть схемы) и высокочастотный (нижняя часть схемы) фильтры декомпозиции LoD и HiD соответственно, в которых вычисляется свертка (цифровая фильтрация) по формуле:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{2n-1} f(l)q(k-l), \quad (16)$$

где $2n$ – число отсчетов импульсной характеристики $q(k)$ фильтра.

В соответствии с (8) и (16) на выходе фильтров будут высокочастотная $y_H(k)$ и низкочастотная $y_L(k)$ компоненты сигнала.

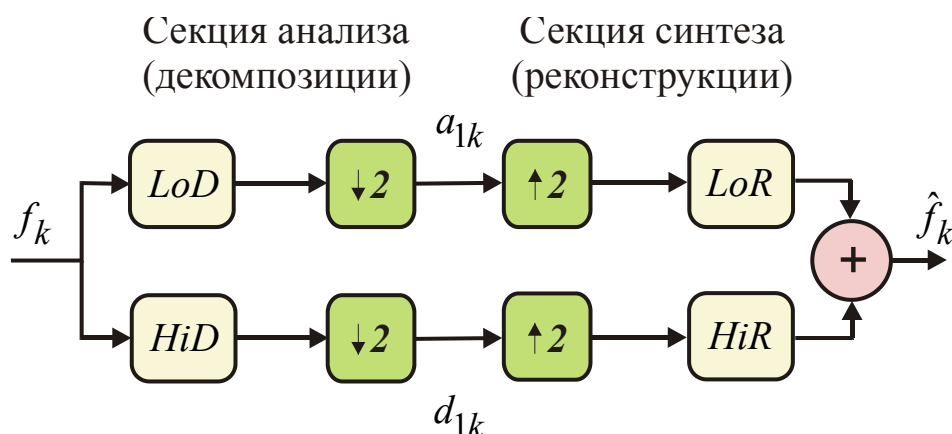


Рис. 1. Выполнение вейвлет-преобразования на базе частотной фильтрации

Из сопоставления (13), (14) и (16) следует, что для вычисления коэффициентов a_{j_0k} и d_{j_0k} (на первом этапе $j_0 = 1$) аргументы весовых коэффициентов фильтров должны быть взяты с обратным порядком следования, то есть $h_{-l} = h(-l)$ и $g_{-l} = g(-l)$. Такие фильтры называются транспонированными.

Во вторых блоках схемы выполняется *децимация* с фактором 2, то есть прореживание сигналов на выходе фильтров в два раза (из-за множителя 2 при аргументе k в формулах (13) и (14)).

Правая часть схемы рис. 1 осуществляет вейвлет-реконструкцию сигнала. Эта процедура использует операции интерполяции и фильтрации фильтрами реконструкции LoR и HiR . Операция

интерполяции с фактором 2, обратная децимации с фактором 2, осуществляется путем увеличения в два раза числа составляющих добавлением нулевых компонентов вперемежку с имеющимися. При сложении сигналов, полученных на выходе фильтров LoR и HiR , получим сигнал $\hat{f}(k)$, близкий к исходному $f(k)$, то есть произойдет его реконструкция на начальном уровне.

Для последующей итерации $j_0 = 2$ используются значения a_{1k} с предыдущей итерации и т.д.

Схема многошаговой итерационной процедуры анализа-синтеза показана на рис. 2, где представлена структура многошагового алгоритма декомпозиции и реконструкции сигнала, называемого алгоритмом Малла (Mallat).

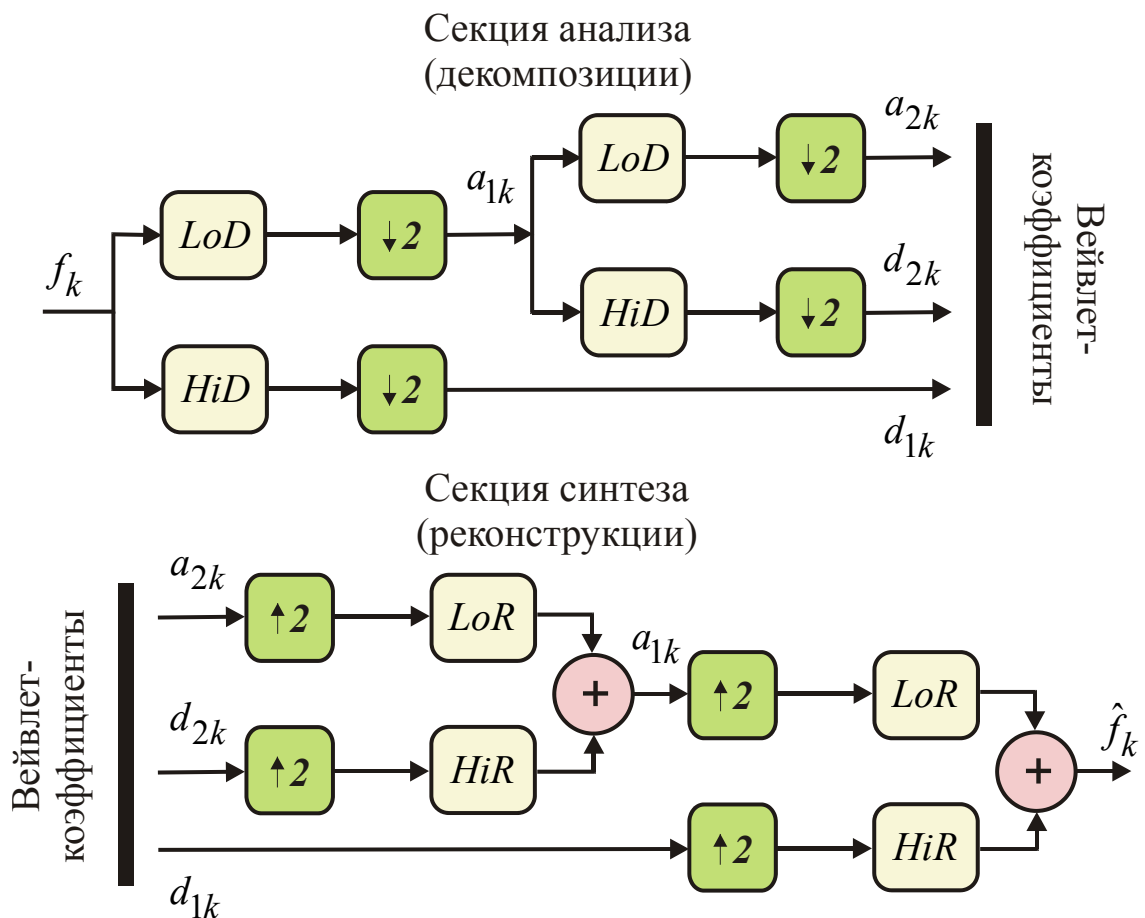


Рис. 2. Выполнение вейвлет-преобразования на базе частотной фильтрации (многошаговая итерационная процедура)

Таким образом, быстрое вейвлет-преобразование во временной и частотной областях – это две стороны единой многошаговой структуры, позволяющей быстро осуществить как декомпозицию, так и реконструкцию сигнала.

3. Удаление шумов из сигнала с использованием вейвлет-преобразования

Основу данной методики составляет использование пороговых функций различной формы, на основе которых происходит ограничение уровня детализирующих коэффициентов. Задав определенный порог для их уровня и «отсекая» коэффициенты ниже этого порога, можно значительно снизить уровень шума и сжать сигнал. Примеры пороговых функций, рассматриваемых в данной работе и зачастую используемых в современных алгоритмах фильтрации, основанных на кратномасштабных схемах преобразования, представлены на рис. 3.

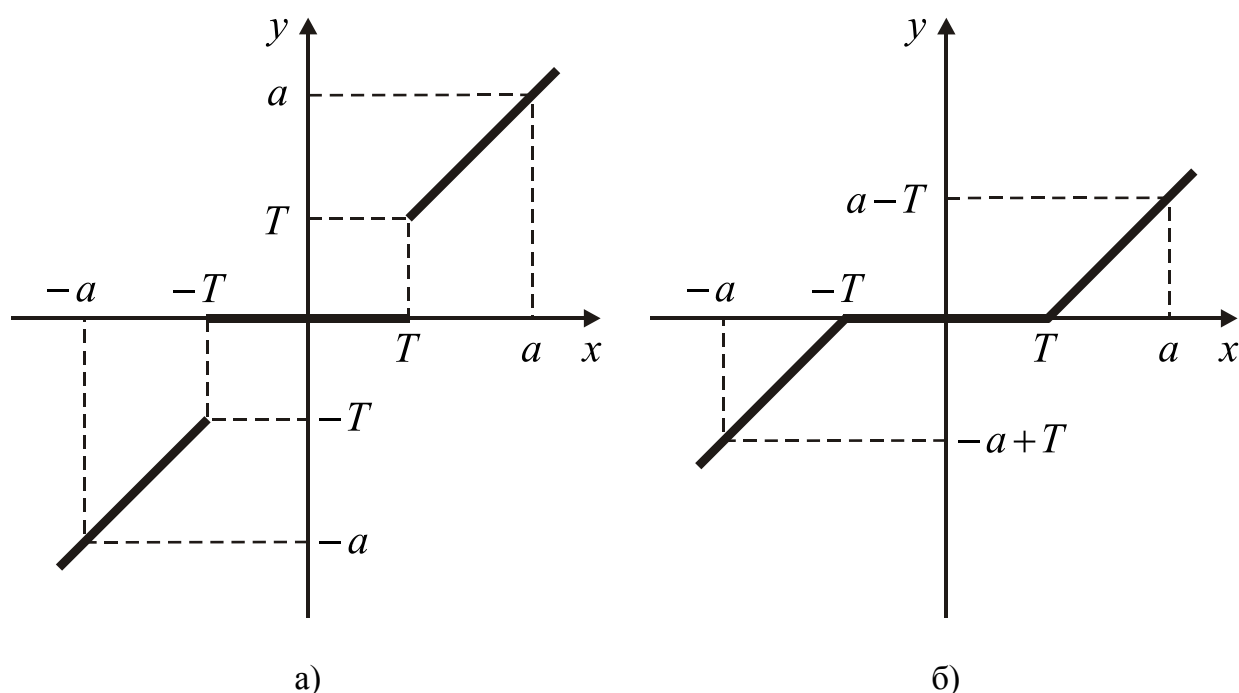


Рис. 3. Пороговые функции обработки коэффициентов преобразования:
 а) жесткая пороговая функция; б) мягкая пороговая функция

На рис. 3а представлена *жесткая пороговая функция (жесткая пороговая оценка)*, описываемая следующим выражением

$$y(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \geq T, \\ 0, & \text{если } |x| < T. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь в качестве величины T выступает некоторое *пороговое значение*, о возможности определения которого будет сказано ниже, в качестве x и y выступают входное и выходное значения коэффициентов преобразования.

На рис. 3б представлена *мягкая пороговая функция* (*мягкая пороговая оценка*), описываемая следующим выражением

$$y(x) = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - T), & \text{если } |x| \geq T, \\ 0, & \text{если } |x| < T. \end{cases} \quad (18)$$

Обозначения, представленные в выражение (18), те же, что и описанные выше. В качестве функции $\text{sign}(x)$, определяющей знак коэффициента x , выступает функция вида

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Основное отличие мягкой пороговой функции от жесткой заключается в том, что первая из них (мягкая пороговая функция) не содержит разрыва в точке, определяемой пороговым значением T . Иными словами мягкая пороговая функция, в отличие от жесткой, является непрерывной. Последнее обстоятельство, в случае мягкой пороговой обработки позволяет лучшим образом обрабатывать зашумленный сигнал (изображение) в окрестности точки его разрыва.

Нужно отметить, что понижение значения коэффициентов разложения на величину порогового значения, в случае мягкой пороговой обработки, в целом для большого количества сигналов оказывает неблагоприятное воздействие на итоговую оценку качества восстановленного сигнала. Поэтому в целом, как показывают эксперименты, лучшей, с точки зрения численной оценки качества восстановленного сигнала, является жесткая пороговая оценка.

Как показывают эксперименты, для того чтобы в случае мягкой пороговой обработки численная оценка качества восстановленного сигнала приближалась к последней в случае жесткой пороговой обработки, необходимо выбирать значение порога T , равным половине значения порога жесткой обработки сигнала.

Основной проблематикой использования пороговых методов обработки является выбор порогового значения. В большом количестве научных работ выбор порога осуществлялся с использованием следующего выражения

$$T = \sigma \sqrt{2 \ln(N)}. \quad (20)$$

Формула (20) записана для случая одномерного сигнала. В ней использованы следующие обозначения: N – общее количество отсчетов обрабатываемого сигнала, σ – среднеквадратическое отклонение шума, оцениваемое в данной работе с использованием следующего выражения

$$\sigma = \frac{M_X}{0.6745}, \quad (21)$$

где M_X – медиана абсолютного значения множества коэффициентов $\{X\}$. В качестве $\{X\}$ в настоящей работе выступают детализирующие коэффициенты, лежащие на самом низком уровне разложения.

Замечание. *Выражение (21) хорошо подходит для оценки среднеквадратического отклонения (СКО) белого гауссовского шума (БГШ) с нулевым математическим ожиданием, который является аддитивно подмешанным в некоторый полезный сигнал.*

Содержание лабораторной работы

1. Исследование непрерывного вейвлет-преобразования.
2. Исследование дискретного вейвлет-преобразования.

Порядок выполнения работы

1. Исследование непрерывного вейвлет-преобразования

Используя средства написания программного кода системы Matlab произвести построение и исследование спектра НВП сигнала для четырех типов вейвлет-функций, произвольно выбранных из табл. 1. Пример постановки и решения рассматриваемой задачи приведен ниже.

Пример. *Произвести анализ спектра НВП сигнала, параметры и аналитическое выражение которого, приведены ниже:*

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t + 45).$$

Построить вид рассматриваемого сигнала во временной области, спектр его НВП, тип вейвлет-функции, применяемой для анализа.

Алгоритм вычисления НВП сигнала, рассмотренный в краткой теории настоящего описания, является реализованным в пакете Matlab с использованием функции `cwt`, листинг которой приведен ниже.

```
COEFS = cwt(S, SCALES, 'wname', PLOTMODE, XLIM)
% Функция для вычисления непрерывного вейвлет-
% преобразования
```

```

% COEFS -- коэффициенты непрерывного вейвлет-
% преобразования
% S -- анализируемый сигнал
% SCALES -- параметр, изменяющий временной
% масштаб вейвлет-функции
% 'wname' -- тип вейвлет-функции, применяемый
% для вычисления спектра непрерывного вейвлет-
% преобразования
% PLOTMODE -- параметр, изменяющий настройки
% цвета, для отображения набора вейвлет-
% коэффициентов. PLOTMODE может принимать
% следующие значения:
% 'lvl' -- окраска шаг за шагом
% 'glb' -- окраска с учетом всех коэффициентов
% 'abslvl' или 'lvlabs' -- окраска шаг за шагом
% с использованием абсолютных значений вейвлет-
% коэффициентов
% 'absglb' или 'glbabs' -- окраска с
% масштабированием и использованием абсолютных
% значений вейвлет-коэффициентов
% Использование в настройках PLOTMODE значений
% '3Dlvl', '3Dglb', '3Dabslvl' ('3Dlvlabs'),
% '3Dabsglb' ('3Dglbabs'), взамен 'lvl', 'glb',
% 'abslvl' ('lvlabs'), 'absglb' ('glbabs')
% соответственно позволяет отображать спектр
% вейвлет-коэффициентов в виде поверхности
% взамен плоскости
% XLIM - параметр, изменяющий настройки
% цвета, для отображения набора вейвлет-
% коэффициентов. Представляет собой вектор
% [x1 x2], 1<=x1<x2<=length

% Программа для вычисления и построения спектра
% непрерывного вейвлет-преобразования
%
t = 0:0.000001:0.0004;
A = 1; F = 10000; phi = 45;
signal = A*sin(2*pi*F*t + phi);
subplot(211); plot(t,signal);

```

```

axis([0 0.0004 -1 1]);
title('Исходный сигнал'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

subplot(212);
c = cwt(signal,1:1:32, 'mexh', '3Dabslvl', [0 10]);
title('Вейвлет-спектр');
xlabel('Временной сдвиг, b');
ylabel('Временной масштаб, a')

lb = -5; ub = 5; n = 1000;
[psi,x] = mexihat(lb,ub,n);
figure; plot(x,psi);
title('Вейвлет мексиканская шляпа'); grid
xlabel('t'); ylabel('\psi(t)')

```

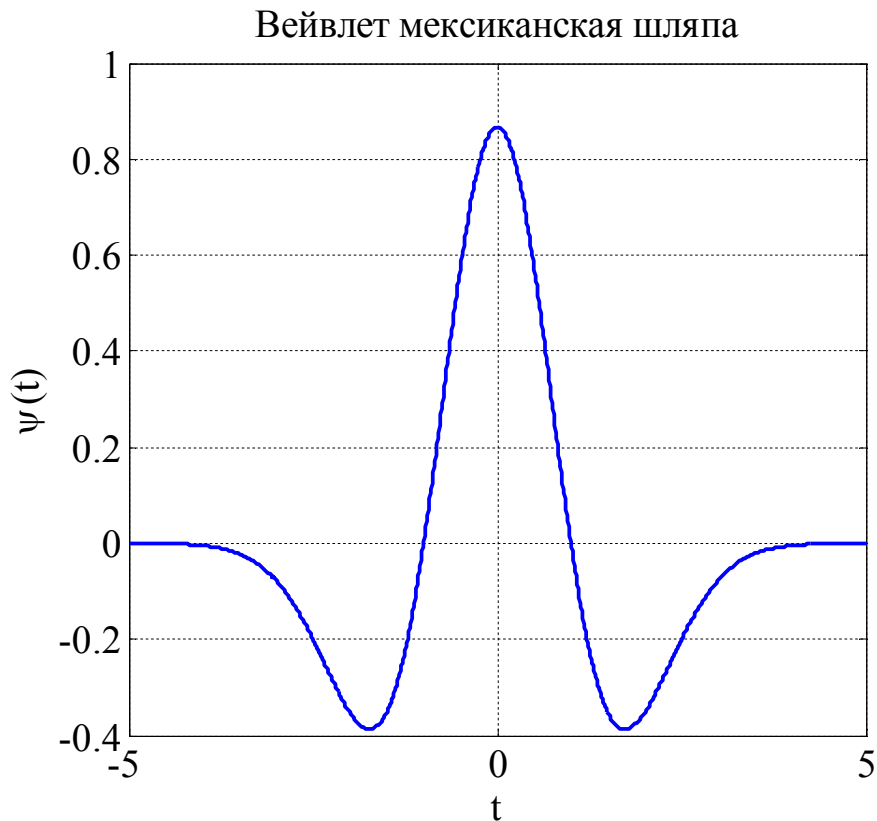


Рис. 4. Пример вейвлет-функции, используемой для построения спектра, приведенного на рис. 5

Выполнение программного кода для вычисления и построения спектра НВП позволяет построить следующие изображения, приведенные на рис. 4 и рис. 5.

На рис. 5 приведен пример анализируемого сигнала, заданного выше, и его вейвлет-спектр. Как видно из спектрограммы, она состоит из совокупности светлых и темных областей, каждая из которых соответствует определенным особенностям сигнала. Например, светлые области соответствуют экстремумам синусоидального колебания, а темные вертикальные полосы – переходам сигнала через нуль.

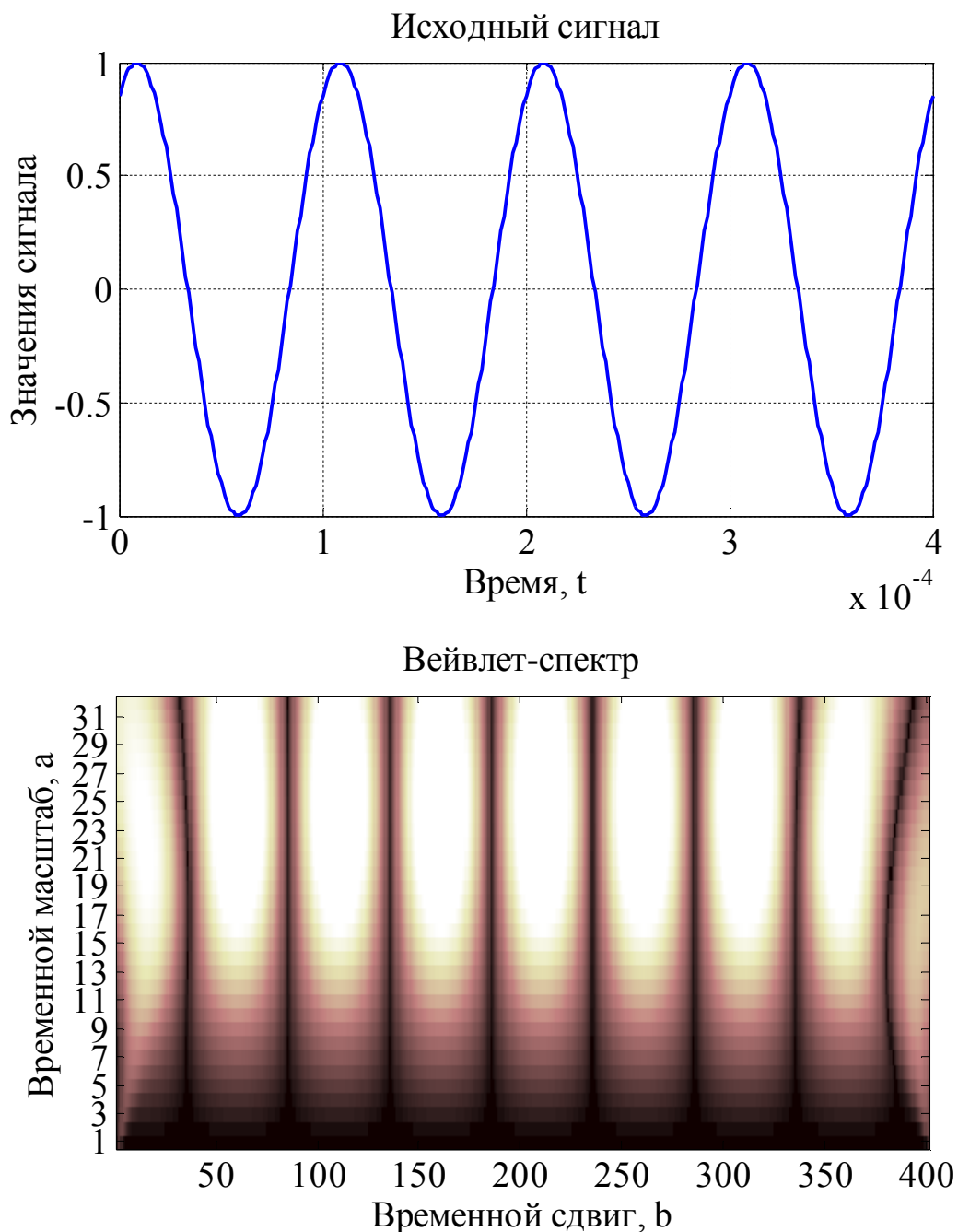


Рис. 5. Пример анализируемого сигнала и его непрерывного вейвлет-спектра

Дополнительно необходимо отметить, что вид спектрограммы, приведенной на рис. 5, является не единственным для анализируемого сигнала, так как существует множество различных базисных вейвлет-функций. В настоящем примере в качестве такой функции был выбран вейвлет мексиканская шляпа (рис. 4). В программном коде, приведенном выше, вычисление значений вейвлета мексиканская шляпа происходило с использованием стандартной функции `mexihat` пакета Matlab. Аналогичные функции для других типов вейвлетов могут быть найдены в помощи соответствующего пакета.

Замечание. В качестве примера анализируемого непрерывного сигнала рекомендуется выбирать полигармоническое колебание, представляющее собой сумму двух или более синусоид разной амплитуды, частоты и фазы.

2. Исследование дискретного вейвлет-преобразования

2.1. Исследование представления сигнала в виде совокупности грубой (аппроксимирующей) и уточненной (детализирующей) составляющих

Используя средства написания программного кода системы Matlab, произвести построение и исследование аппроксимирующих и детализирующих сигналов, полученных на основе выполнения процедуры КМА для трех уровней разложения и двух типов вейвлет-функций класса Добеши, выбранных произвольно. Пример постановки и решения рассматриваемой задачи приведен ниже.

Пример. Произвести исследование аппроксимирующих и детализирующих сигналов, полученных на основе выполнения процедуры КМА, для трех уровней разложения сигнала, параметры и аналитическое выражение которого, приведены ниже:

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t + 45) + n(t),$$

где $n(t)$ – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и произвольно выбранным значением среднеквадратического отклонения. Построить вид рассматриваемого сигнала во временной области, аппроксимирующие и детализирующие сигналы для трех уровней разложения, а так же структуру вейвлет-разложения, представляющую совокупность аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов.

Для решения указанной задачи в работе предлагается использовать ряд стандартных функций пакета Matlab, листинг которых приведен ниже.

```
[C,L] = wavedec(S,N,'wname')
% функция для вычисления N-уровневого
% одномерного дискретного вейвлет-преобразования
%
% C -- вектор, содержащий коэффициенты вейвлет-
% разложения
% L -- вектор, содержащий длины векторов
% вейвлет-коэффициентов, полученных на различных
% уровнях разложения
% S -- анализируемый сигнал
% N -- число уровней вейвлет-разложения
% 'wname' -- тип вейвлет-функции, применяемый
% для вычисления вейвлет-коэффициентов

S = wrcoef('type',C,L,'wname',N)
% функция для вычисления аппроксимирующих и
% детализирующих сигналов, восстановленных с
% N-го уровня разложения
%
% S -- восстановленный сигнал
% 'type' -- параметр, отвечающий за тип
% восстанавливаемого сигнала:
% 'a' -- восстановление аппроксимирующего
% сигнала
% 'd' -- восстановление детализирующего сигнала
% C -- вектор, содержащий коэффициенты вейвлет-
% разложения
% L -- вектор, содержащий длины векторов
% вейвлет-коэффициентов, полученных на различных
% уровнях разложения
% 'wname' -- тип вейвлет-функции, применяемый
% для вычисления вейвлет-коэффициентов
% N -- уровень, с которого восстанавливаются
% аппроксимирующие или детализирующие сигналы
```

```

A = appcoef(C, L, 'wname', N)
% Функция для возврата аппроксимирующих
% коэффициентов с N-го уровня вейвлет-разложения
% A -- аппроксимирующие коэффициенты
% C -- вектор, содержащий коэффициенты вейвлет-
% разложения
% L -- вектор, содержащий длины векторов
% вейвлет-коэффициентов, полученных на различных
% уровнях разложения
% 'wname' -- тип вейвлет-функции, применяемый
% для восстановления аппроксимирующих
% коэффициентов
% N -- уровень, с которого восстанавливаются
% аппроксимирующие коэффициенты

```

```

D = detcoef(C, L, N)
% Функция для возврата детализирующих
% коэффициентов с N-го уровня вейвлет-разложения
%
% D -- детализирующие коэффициенты
% C -- вектор, содержащий коэффициенты вейвлет-
% разложения
% L -- вектор, содержащий длины векторов
% вейвлет-коэффициентов, полученных на различных
% уровнях разложения
% N -- уровень, с которого восстанавливаются
% детализирующие коэффициенты

```

```

% Программа для анализа сигнала с использованием
% КМА
%
t = 0:0.000001:0.0004;
A = 1; F = 10000; phi = 45;
signal = A*sin(2*pi*F*t + phi) + ...
random('norm', 0, 0.2, [1 length(t)]);
subplot(421); plot(t, signal)
title('Исходный сигнал'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

```

```

wavefunc = 'haar';
[C,L] = wavedec(signal,3,wavefunc);
ca3 = appcoef(C,L,wavefunc,3);
[cd1,cd2,cd3] = detcoef(C,L,[1 2 3]);
subplot(422); plot([ca3 cd1 cd2 cd3])
title('Структура вейвлет-разложения'); grid
xlabel('Аппроксимирующие коэф-ты, j=3 и
детализирующие коэф-ты j=1, 2, 3,
соответственно');
ylabel('Значения коэф-тов')

appsig1 = wrcoef('a',C,L,wavefunc,1);
subplot(423); plot(t,appsig1)
title('Аппроксимирующий сигнал, j=1'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

appsig2 = wrcoef('a',C,L,wavefunc,2);
subplot(425); plot(t,appsig2)
title('Аппроксимирующий сигнал, j=2'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

appsig3 = wrcoef('a',C,L,wavefunc,3);
subplot(427); plot(t,appsig3)
title('Аппроксимирующий сигнал, j=3'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

detsig1 = wrcoef('d',C,L,wavefunc,1);
subplot(424); plot(t,detsig1)
title('Детализирующий сигнал, j=1'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

detsig2 = wrcoef('d',C,L,wavefunc,2);
subplot(426); plot(t,detsig2)
title('Детализирующий сигнал, j=2'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

detsig3 = wrcoef('d',C,L,wavefunc,3);
subplot(428); plot(t,detsig3)
title('Детализирующий сигнал, j=3'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

```

Выполнение программного кода для анализа сигналов с использованием КМА позволяет построить графики, приведенные на рис. 6 и рис. 7.

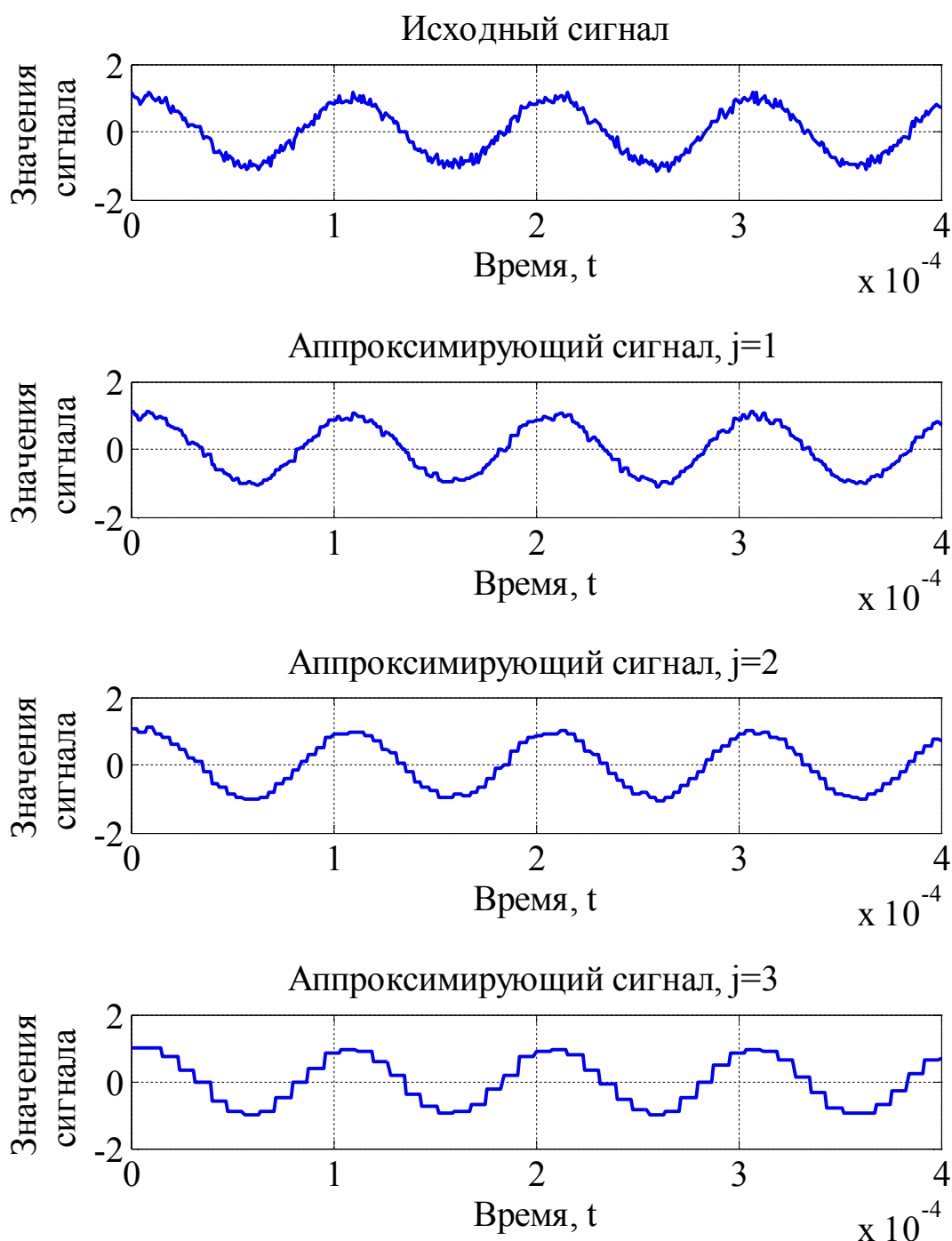


Рис. 6. Пример аппроксимирующих сигналов на трех уровнях разложения, полученных для исходного сигнала

Как видно из рис. 6, при восстановлении аппроксимирующих сигналов с более высоких уровней вейвлет-разложения, структура

синусоидального колебания без примеси белого гауссовского шума проявляется более четко. Последнее связано с тем, что детали сигнала, обусловленные в данном случае наличием БГШ, заключаются в детализирующие коэффициенты вейвлет-разложения, то есть содержатся в детализирующих сигналах, приведенных на рис. 7.

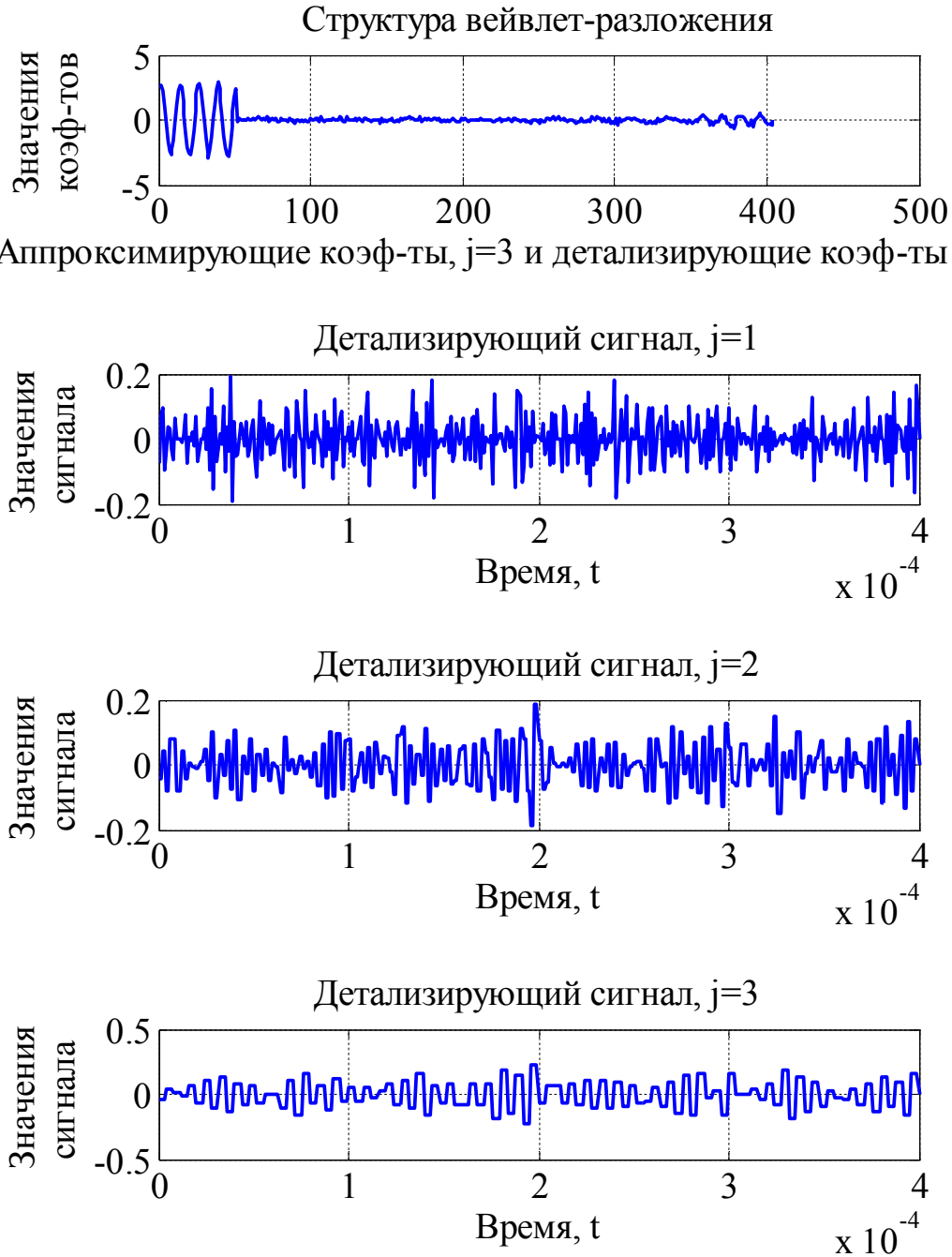


Рис. 7. Пример детализирующих сигналов на трех уровнях разложения и структуры вейвлет-разложения, полученных для исходного сигнала (рис. 6)

Отметим, что аппроксимирующий (детализирующий) сигнал, восстановленный с третьего уровня разложения, имеет более ступенчатую структуру, чем аппроксимирующие (детализирующие) сигналы, восстановленный с первого и второго уровней разложения. Последнее связано с формой масштабирующей и вейвлет-функции. В настоящем примере для анализа сигнала был использован вейвлет Хаара (принадлежащий к классу вейвлетов Добеши). Последний имеет масштабирующую функцию формы прямоугольника, а вейвлет-функцию формы меандра (табл. 1). Именно эти структуры и проявляются, когда число коэффициентов вейвлет-разложения, используемых для представления аппроксимирующих (детализирующих) сигналов, уменьшается, подобно тому, как это происходит в теории рядов Фурье.

2.2. Реализация алгоритма обработки (фильтрации) сигнала на основе дискретного вейвлет-преобразования

Используя средства написания программного кода системы Matlab, произвести построение и исследование алгоритма фильтрации аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) с нулевым математическим ожиданием и произвольно выбранным значением дисперсии из некоторого полезного сигнала на основе вейвлет-преобразования.

Основные этапы реализуемого алгоритма должны включать в себя следующие шаги:

1. Вычисление прямого вейвлет-преобразования сигнала (выбор типа вейвлет-функции и числа уровней вейвлет-разложения).

2. Изменение полученных коэффициентов преобразования по определенному правилу (выбор алгоритма нахождения порогового значения, выбор пороговой функции, выбор стратегии обработки детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения).

3. Вычисление обратного вейвлет-преобразования от множества модифицированных (обработанных) вейвлет-коэффициентов.

Основные пункты исследования работы алгоритма должны включать:

1. Сравнение использования мягкой и жесткой пороговых функций внутри рассматриваемого алгоритма фильтрации. Подобную процедуру необходимо проводить при пяти различных степенях зашумления сигнала (дисперсии шума), произвольно выбранных настроек алгоритма, включающих в себя: тип вейвлет-функции, число

уровней вейвлет-разложения, алгоритм нахождения порогового значения, стратегию обработки детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения. Сравнение качества работы алгоритма осуществить на основе критерия среднеквадратической ошибки (СКО), вычисляемой с использованием следующего математического выражения:

$$\text{СКО} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(k) - \hat{f}(k))^2, \quad (22)$$

где $f(k)$ – эталонный сигнал, $\hat{f}(k)$ – восстановленный сигнал.

2. Сравнение использования различных типов вейвлет-функций внутри рассматриваемого алгоритма фильтрации. В качестве вейвлет-функций рекомендуется выбирать вейвлеты из класса Добеши. Подобную процедуру необходимо проводить при пяти различных степенях зашумления сигнала (дисперсии шума), трех различных типах вейвлетов, произвольно выбранных настроек алгоритма, включающих в себя: число уровней вейвлет-разложения, алгоритм нахождения порогового значения, тип пороговой функции, стратегию обработки детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения. Сравнение качества работы алгоритма осуществить на основе критерия СКО.

3. Сравнение использования различного числа уровней вейвлет-разложения внутри рассматриваемого алгоритма фильтрации. Подобную процедуру необходимо проводить при пяти различных степенях зашумления сигнала (дисперсии шума), трех различных значениях числа уровней вейвлет-разложения, произвольно выбранных настроек алгоритма, включающих в себя: тип вейвлет-функции, алгоритм нахождения порогового значения, тип пороговой функции, стратегию обработки детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения. Сравнение качества работы алгоритма осуществить на основе критерия СКО.

Решение рассматриваемой задачи (рис. 8) можно осуществить с использованием функций и программного кода, рассмотренных ниже.

```
[SD, CSD, LSD] = wden(S, TPTR, SORH, SCAL, N, 'wname')
% Функция для автоматического удаления шума из
% сигнала на основе вейвлет-преобразования в
% одномерном случае
%
% SD – восстановленный сигнал
```

```

% CSD -- вектор, содержащий коэффициенты
% вейвлет-разложения сигнала XD
% LSD -- вектор, содержащий длины векторов
% вейвлет-коэффициентов, полученных на различных
% уровнях разложения
% S -- обрабатываемый сигнал
% TPTR -- алгоритм, используемый для выбора
% порога:
% 'rigrsure' -- алгоритм Штейна несмещенной
% оценки риска
% 'heursure' - эвристический вариант
% предыдущего алгоритма
% 'sqrtwolog' - универсальный порог
% (определяется выражением (20) настоящего
% описания)
% 'minimaxi' - минимаксный порог
% SORH - параметр, отвечающий за выбор пороговой
% функции:
% 'h' -- жесткая пороговая функция
% 's' -- мягкая пороговая функция
% SCAL - параметр, определяющий характер
% обработки детализирующих коэффициентов
% вейвлет-разложения:
% 'one' -- обработка детализирующих
% коэффициентов на всех уровнях вейвлет-
% разложения одинакова. При этом пороговое
% значение выбирается без автоматического
% оценивания дисперсии шума
% 'sln' -- обработка детализирующих
% коэффициентов на всех уровнях вейвлет-
% разложения одинакова. При этом пороговое
% значение выбирается с автоматическим
% оцениванием дисперсии шума на первом уровне
% разложения
% 'mln' -- обработка детализирующих
% коэффициентов на всех уровнях вейвлет-
% разложения различна. При этом пороговое
% значение выбирается с автоматическим
% оцениванием дисперсии шума на каждом уровне
% разложения и является индивидуальным для

```

- ⊗ детализирующих коэффициентов, находящихся на
- ⊗ этом уровне разложения
- ⊗ N -- число уровней вейвлет-разложения
- ⊗ 'wname' -- тип вейвлет-функции, применяемый
- ⊗ для вычисления вейвлет-коэффициентов

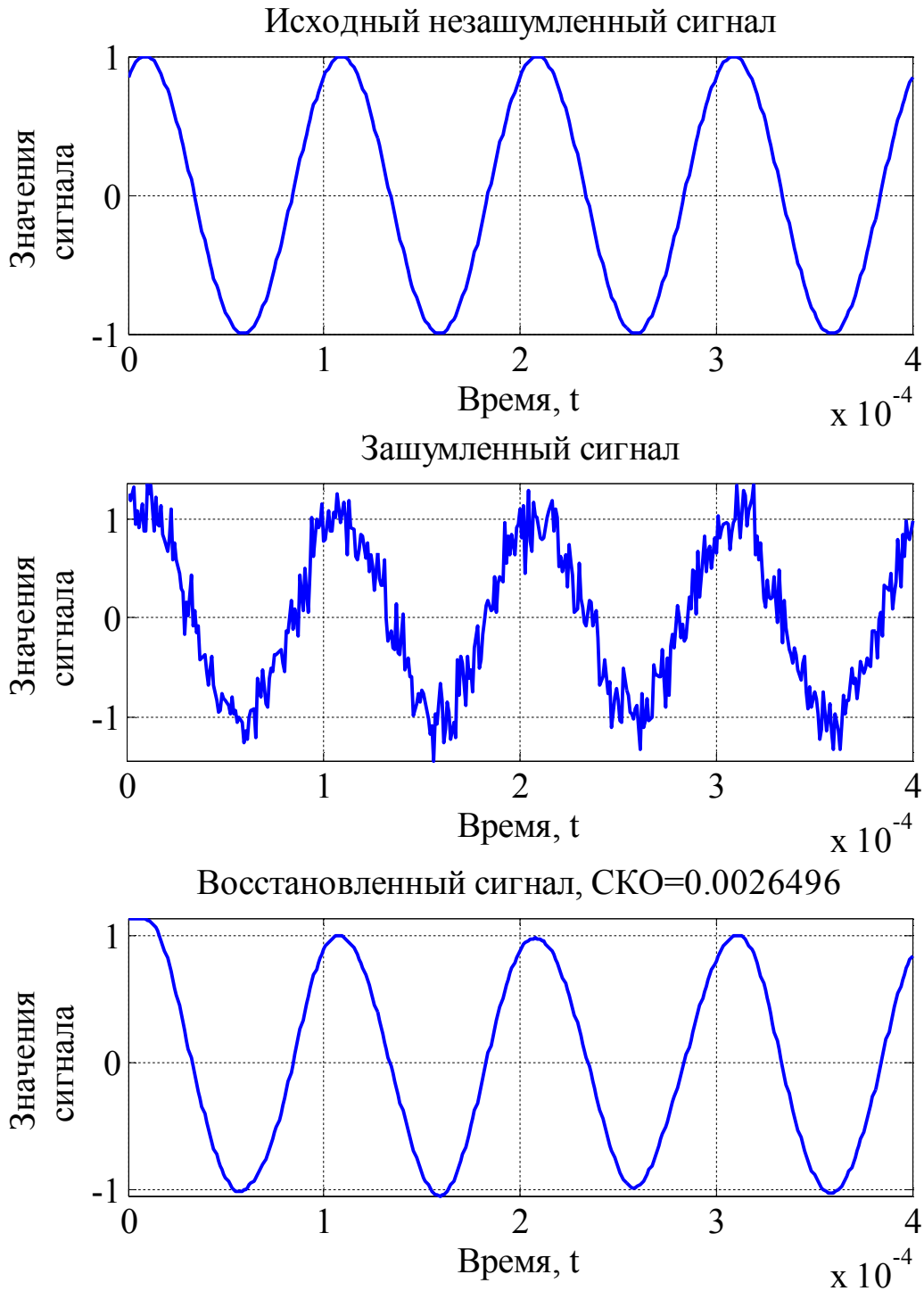


Рис. 8. Пример обработки (фильтрации) сигнала с использованием вейвлет-преобразования

```

function mse = MSE(signal,rsignal)
% Функция для оценки качества восстановленного
% сигнала по критерию среднеквадратической
% ошибки
%
% mse -- среднеквадратическая ошибка
% signal -- эталонный сигнал
% rsignal -- восстановленный сигнал
%
if isequal(signal,rsignal)
    disp('Сигналы идентичны; СКО равно нулю')
else
    N = length(signal);
    mse = sum((double(signal) - ...
              double(rsignal)).^ 2)/N;
    disp(sprintf('СКО = %5.4f',mse));
end

% Программа для обработки (фильтрации) сигнала
% на основе дискретного вейвлет-преобразования
%
t = 0:0.000001:0.0004;
A = 1; F = 10000; phi = 45;
signal = A*sin(2*pi*F*t + phi);

subplot(311); plot(t,signal)
title('Исходный незашумленный сигнал'); grid
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

signal_noise = signal + ...
random('norm',0,0.2,[1 length(t)]);

subplot(312); plot(t,signal_noise)
title('Зашумленный сигнал'); grid
axis([min(t) max(t) min(signal_noise)
max(signal_noise)])
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

tptr = 'sqrtwolog';

```

```

sorb = 'h';
scal = 'one';
lev = 4;
wavefunc = 'db8';

rsignal =
wden(signal_noise, tptr, sorb, scal, lev, wavefunc);
mse = MSE(signal, rsignal);

subplot(313); plot(t, rsignal)
title(['Восстановленный сигнал' ', ' ' ' ' 'СКО'
'=' num2str(mse)]); grid
axis([min(t) max(t) min(rsignal) max(rsignal)])
xlabel('Время, t'); ylabel('Значения сигнала')

```

Выполнение программного кода для обработки (фильтрации) сигнала на основе ДВП позволяет построить функции, приведенные на рис. 8, и оценить значение СКО при заданных настройках алгоритма.

Замечание. Отметим, что не все существующие типы вейвлет-функций можно использовать для построения алгоритма ДВП. Последнее связано с тем, что не для всякой вейвлет-функции $\psi(t)$ можно найти масштабирующую функцию $\phi(t)$ (см. прил. 2).

Контрольные вопросы

1. В чем заключаются основные проблемы практического использования преобразования Фурье?
2. Что такое оконное преобразование Фурье?
3. Перечислить основные недостатки оконного преобразования Фурье.
4. Что такое вейвлет?
5. Привести примеры вейвлет-функций.
6. Как осуществляется построение вейвлет-базиса?
7. Что такое непрерывное вейвлет-преобразование?
8. Что такое диадное вейвлет-преобразование?
9. Каковы основные признаки вейвлета?
10. Перечислить основные свойства вейвлет-анализа.
11. Что такое дискретное вейвлет-преобразование?
12. Как ДВП связано с кратномасштабным анализом?
13. Как получить аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты при выполнении кратномасштабного анализа.

14. Что такое масштабирующая функция?
15. Что такое вейвлет-функция?
16. Что такое быстрое вейвлет-преобразование?
17. В чем заключается частотный подход к выполнению вейвлет-преобразования?
18. Что такое белый гауссовский шум?
19. Как построить алгоритм фильтрации сигналов с использованием вейвлет-преобразования?
20. В чем состоит отличие обработки вейвлет-коэффициентов на основе мягкой и жесткой пороговых функций?
21. Как оценить значение порога, используемого при обработке вейвлет-коэффициентов, на основе мягкой и жесткой пороговых функций?

Литература

1. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
2. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
3. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК, 2005.
4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
6. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004.
7. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования. – Новосибирск: НГТУ, 2003.
8. Короновский А., Храмов А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. – М.: Физматлит., 2003.
9. Нефедов В.И., Сигов А.С. Основы радиоэлектроники и связи: Учеб. пособие – М.: Высшая школа, 2009.
10. Чуи К. Введение в вейвлеты. Пер. с англ. – М.: Мир, 2001.
11. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2000.

Лабораторная работа № 6

ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБРАБОТКЕ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Цель работы: изучение основ теории адаптивной фильтрации и систем адаптивной обработки сигналов.

Краткая теория

1. Основные определения

Во многих приложениях часто возникает такая проблема, как загрязнение полезного сигнала нежелательными, часто мощными, сигналами или шумом. Если полезный сигнал и шум занимают строго определенные и разнесенные полосы частот, для извлечения полезного сигнала используются обычные линейные частотные фильтры. Однако существуют ситуации, в которых указанное условие не выполняется. В подобных случаях, например, когда спектры сигнала и шума перекрываются, или когда полоса шумовых частот неизвестна или переменна, коэффициенты фильтра должны меняться, и их нельзя задать заранее. Именно в таких ситуациях существует возможность удачно воспользоваться элементами адаптивной фильтрации.

Адаптивный фильтр – это цифровой фильтр с самонастраивающимися характеристиками. Такой фильтр автоматически адаптируется к изменениям выходных сигналов и является предметом изучения подобласти цифровой обработки сигналов, известной как *адаптивная обработка сигналов*.

Замечание. В настоящей работе рассматривается только теория линейных АФ. Однако нужно отметить, что современная адаптивная обработка цифровых сигналов этим не ограничена.

В современной технической литературе описано множество различных приложений теории адаптивной обработки сигналов, некоторые из которых, заслуживающие особого внимания, приведены ниже:

1. *Адаптивная антенная система*, в которой АФ могут использоваться для управления диаграммой направленности антенны.

2. *Цифровой приемник связи*, в котором АФ могут использоваться для устранения нежелательной межсимвольной интерференции, при наличии канала с многолучевым распространением сигнала.

3. *Адаптивные методы удаления шума*, в которых АФ используются для оценки и устранения шумовой компоненты в некотором анализируемом сигнале.

4. *Задача системной идентификации (системного моделирования)*, в которой АФ используются в качестве модели для оценки характеристик неизвестной системы.

АФ отличается следующим свойством: его частотная характеристика автоматически регулируется или модифицируется для улучшения производительности фильтра в соответствии с некоторым критерием, что позволяет фильтру адаптироваться к изменениям характеристик входного сигнала. Вследствие самонастройки и присущей АФ гибкости они используются в таких сферах, как телефонное эхоподавление, обработка сигналов с радаров, системы навигации и т.п.

Итак, АФ стоит использовать, если:

1. Характеристики фильтра должны быть переменными и адаптироваться к меняющимся условиям.
2. Существует спектральное перекрытие сигнала и шума.
3. Полоса шумовых сигналов неизвестна или меняется с течением времени.

В перечисленных случаях использование обычных фильтров привело бы к неприемлемому искажению полезного сигнала.

Необходимо отметить, что для решения задачи адаптивной фильтрации возможно использование как фильтров с КИХ, так и фильтров с БИХ. Однако с практической точки зрения более широко используются КИХ-фильтры. Последнее объясняется их простотой и гарантированной устойчивостью.

Замечание. *С точки зрения адаптивной фильтрации является неправильным говорить, что адаптивный КИХ-фильтр устойчив всегда. Последнее связано с тем, что устойчивость данного типа фильтра зависит от алгоритма, с использованием которого осуществляется настройка его коэффициентов. В настоящей работе в качестве такого алгоритма используется адаптивный алгоритм наименьших квадратов, рассмотренный далее.*

В настоящей работе в качестве АФ рассматривается КИХ-фильтр.

В цифровой обработке сигналов существуют несколько структур представления КИХ-фильтров, но в адаптивной фильтрации наиболее часто используются трансверсальная (рис. 1) и решётчатая (в настоящей

работе не рассматривается) структуры. Как видно из рис. 1 АФ состоит из двух различных частей:

1. Цифровой фильтр с регулируемыми коэффициентами $h(0), h(1), \dots, h(N)$, где N – порядок КИХ-фильтра.

2. Адаптивный алгоритм, который используется для настройки или изменения коэффициентов фильтра.

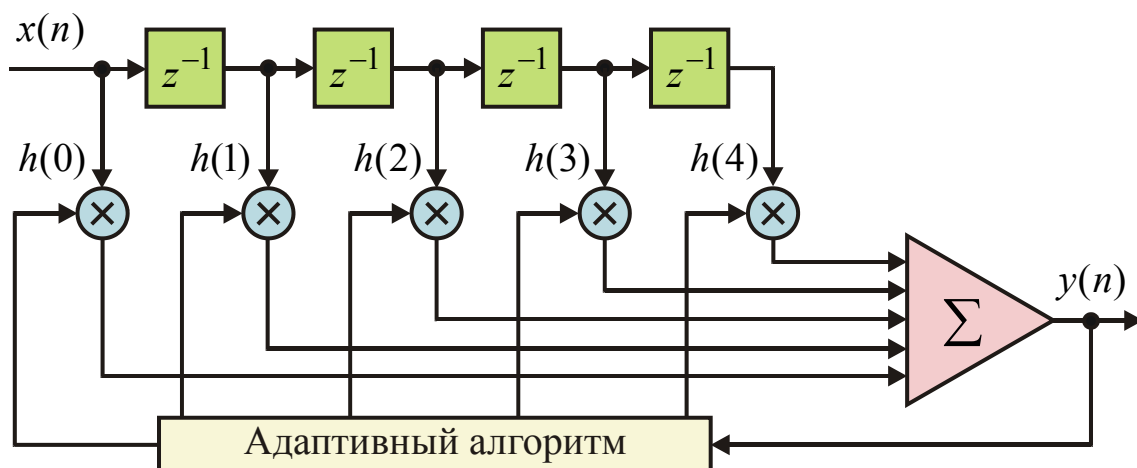


Рис. 1. Трансверсальная структура адаптивного КИХ-фильтра

Важным при рассмотрении АФ является критерий оптимизации настраиваемых параметров фильтра (коэффициентов фильтра). Одним из таких, хорошо известных в адаптивной фильтрации критериев, является критерий наименьших квадратов или его аналог (используемый при статистической формулировке задачи адаптивной обработки) – критерий минимума СКО. Каждый из этих критериев приводит к построению квадратичной функции коэффициентов фильтра, имеющей один минимум, нахождение которого и будет решением задачи оптимизации. Поэтому в следующем разделе описывается один из наиболее удачных адаптивных алгоритмов, названный адаптивным алгоритмом наименьших квадратов, который позволяет решить указанную задачу.

Замечание. Математические выражения, представленные в следующем разделе, описывают критерий наименьших квадратов. Аналогичные соотношения могут быть найдены в литературе по адаптивной обработке цифровых сигналов для случая использования критерия СКО.

2. Адаптивный алгоритм наименьших квадратов

Рассмотрим КИХ-фильтр с настраиваемыми коэффициентами $h(n)$, $0 \leq n \leq N$ (рис. 1). Пусть $x(n)$ – последовательность выборок, подаваемая на вход фильтра, а $y(n)$ – соответствующая $x(n)$ последовательность выборок на выходе фильтра, такая что:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k), \quad 0 \leq n \leq M. \quad (1)$$

Пусть $d(n)$ – эталонная последовательность, то есть последовательность, которую хотелось бы получить при подаче на вход рассматриваемого АФ сигнала $x(n)$, и с которой можно сравнить выход КИХ-фильтра (рис. 1). Тогда можно сформировать последовательность ошибки $e(n)$ как разницу между эталонной последовательностью $d(n)$ и последовательностью на выходе фильтра $y(n)$:

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad 0 \leq n \leq M. \quad (2)$$

Коэффициенты КИХ-фильтра должны быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратичных ошибок, представленную следующим выражением:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=0}^M e^2(n) = \sum_{n=0}^M \left[d(n) - \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k) \right]^2 = \\ &= \sum_{n=0}^M d^2(n) - 2 \sum_{k=0}^N h(k)r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N h(k)h(l)r_{xx}(k-l), \end{aligned} \quad (3)$$

где $r_{dx}(k)$ – взаимная корреляция между эталонной последовательностью $d(n)$ и входной последовательностью $x(n)$, а $r_{xx}(k)$ – автокорреляционная последовательность сигнала $x(n)$, определяемые с использованием следующих выражений:

$$r_{dx}(k) = \sum_{n=0}^M d(n)x(n-k), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (4)$$

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=0}^M x(n)x(n+k), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (5)$$

Замечание. В некоторых источниках, например, в литературе по компьютерному зрению, термин *взаимная корреляция* заменяется на термин *кросс-корреляция*, как дословный перевод с англоязычных источников.

Сумма квадратичной ошибки E представляет собой квадратичную функцию коэффициентов КИХ-фильтра. Следовательно, решение задачи минимизация E по отношению к коэффициентам фильтра $h(n)$, $0 \leq n \leq N$ может быть рассмотрено как решение системы линейных уравнений, записанных относительно этих коэффициентов. Последняя может быть получена путем дифференцирования E по каждому из коэффициентов фильтра:

$$\frac{\partial E}{\partial h(m)} = 0, \quad 0 \leq m \leq N, \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^N h(k)r_{xx}(k-m) = r_{dx}(m), \quad 0 \leq m \leq N. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет систему линейных уравнений, решение которой позволяет получить оптимальное (в смысле минимума суммы квадратичных ошибок E) множество коэффициентов анализируемого КИХ-фильтра. Как видно из соотношения (7), для решения системы линейных уравнений необходимо явное вычисление взаимной корреляции $r_{dx}(k)$ между эталонной последовательностью $d(n)$ и входной последовательностью $x(n)$ и автокорреляционной последовательности $r_{xx}(k)$ сигнала $x(n)$. Однако с практической точки зрения, при реализации систем, работающих в режиме реального времени, явно вычислить последовательности $r_{dx}(k)$ и $r_{xx}(k)$ невозможно. Последнее связано с тем, что при их непосредственном вычислении необходимо априори знать все значения сигнала на входе и выходе фильтра.

Таким образом, необходима разработка адаптивных алгоритмов, которые позволяют преодолеть указанные трудности. Одним из наиболее удачных адаптивных алгоритмов является адаптивный алгоритм наименьших квадратов, разработанный группой Уидроу. Взамен явного вычисления последовательностей $r_{dx}(k)$ и $r_{xx}(k)$, адаптивный алгоритм наименьших квадратов позволяет настроить коэффициенты фильтра при последовательной обработке выборок с

минимизацией суммы квадратичных ошибок. Графически результат работы алгоритма можно представить как спуск по поверхности, изображенной на рис. 2 (для случая фильтра первого порядка), к ее дну. График зависимости (рис. 2) суммы квадратичных ошибок от коэффициентов $h(n)$, $0 \leq n \leq 1$ – это чашеобразная поверхность с однозначно определенной нижней точкой. Данная структура называется *поверхностью производительности*, и она неотрицательна. Как видно из рис. 2, при старте адаптивного алгоритма наименьших квадратов из некоторого начального условия (обозначенного на рис. 2 цифрой 1) система за определенное количество итераций переходит в состояние с минимальным значением суммы квадратичных ошибок $E_{мин}$, которому соответствуют оптимальные значения коэффициентов фильтра $h_{опт}(n)$, $0 \leq n \leq 1$.

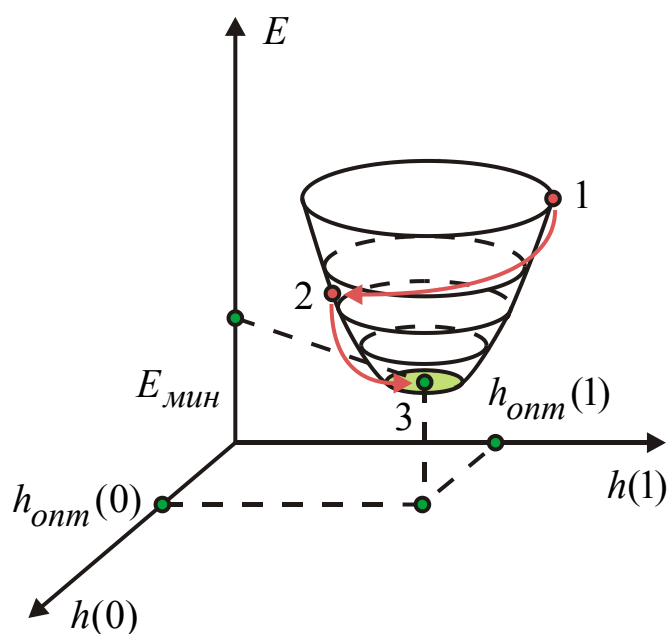


Рис. 2. Поверхность производительности

Схема наименьших квадратов основана на алгоритме быстрого спуска, в котором весовые коэффициенты обновляются при обработке выборок следующим образом:

$$h_{n+1}(k) = h_n(k) - \mu \nabla_n(k), \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где $h_n(k)$ и $\nabla_n(k)$ – k -е компоненты векторов коэффициентов фильтра и градиента суммы квадратичных ошибок, вычисленные в n -й момент времени, а μ – параметр, определяющий устойчивость и скорость сходимости алгоритма.

Адаптивный алгоритм наименьших квадратов Уидроу-Хопфа последовательного обновления весовых коэффициентов путем определенных математических преобразований, не рассматриваемых в настоящей работе, может быть получен на основе выражения (8) и имеет следующий вид:

$$h_{n+1}(k) = h_n(k) + \mu e(n)x(n-k), \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где $e(n)$ – значение сигнала ошибки, представляющее собой разницу между значением эталонной последовательности $d(n)$ и значением выходной последовательности фильтра $y(n)$ в момент времени n , $x(n-k)$ – выборка входного сигнала, расположенная в k -м элементе задержки в момент времени n , а произведение $e(n)x(n-k)$ – аппроксимация (оценка) отрицательного градиента для k -го коэффициента фильтра в момент времени n .

Как было отмечено выше, параметр μ контролирует скорость сходимости алгоритма к оптимальному решению. *Большое (малое)* значение μ приводит к *большому (малому)* размеру шага регулировки коэффициентов фильтра и, следовательно, к *быстрой (медленной)* скорости сходимости алгоритма. Однако если параметр μ выбран очень большим, адаптивный алгоритм наименьших квадратов становится неустойчивым. Для гарантированной устойчивости параметр μ должен быть выбран в следующем диапазоне:

$$0 < \mu < \frac{1}{10(N+1)P_x}, \quad (10)$$

где $N+1$ – длина адаптивного КИХ-фильтра, а P_x – мощность входного сигнала $x(n)$, $0 \leq n \leq M$, которую можно приблизить следующим выражением:

$$P_x \approx \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M x^2(n) = \frac{r_{xx}(0)}{M+1}. \quad (11)$$

Математическое обоснование выражений (10) и (11), а также доказательство адаптивного алгоритма наименьших квадратов, приводящего к оптимальному решению (оптимальным коэффициентам адаптивного КИХ-фильтра), может быть найдено в соответствующей научно-технической литературе.

Дополнительно необходимо отметить, что численная оценка скорости сходимости алгоритма может быть выполнена на основе

величины *оконого среднего отсчетов квадратичной ошибки (ОСКО)* $e^2(n)$, вычисляемой с использованием следующего выражения:

$$\text{ОСКО}(m) = \frac{1}{K+1} \sum_{n=k}^{k+K} e^2(n), \quad (12)$$

где $K+1$ – длина окна, $m = k/K = 0, 1, 2, \dots$

Очевидно, что адаптивный алгоритм наименьших квадратов не требует априорных знаний статистик сигнала, то есть $r_{dx}(k)$ и $r_{xx}(k)$, а использует их мгновенные оценки. Весовые коэффициенты, полученные с помощью адаптивного алгоритма наименьших квадратов, – это только оценки, которые постепенно улучшаются по мере того как настраиваются коэффициенты, и фильтр «изучает» характеристики сигнала.

Ниже приводится схема вычислений, принятая в адаптивном алгоритме наименьших квадратов.

1. Изначальное присваивание каждому весовому коэффициенту $h(n)$, $0 \leq n \leq N$ произвольного фиксированного значения, например, нуля. В каждый последующий момент выборки $n > 0$ осуществляется выполнение шагов 2-4.

2. Вычисление выхода фильтра в момент времени n с использованием выражения (1).

3. Вычисление оценки ошибки в момент времени n с использованием выражения (2).

4. Обновление набора весовых коэффициентов в момент времени n с использованием выражения (9).

Простота адаптивного алгоритма наименьших квадратов и легкость реализации, очевидные из приведенных выше выкладок, объясняют то, почему данный метод используется в системах реального времени, когда это возможно. Описанный алгоритм требует примерно $2N+3$ операций умножения и $2N+3$ операций сложения для каждого нового набора входных и выходных выборок. Основные операции умножения-накопления, фигурирующие в алгоритме, можно выполнять на большинстве сигнальных процессоров, что наводит на мысль использовать прямую реализацию алгоритма.

Рассмотрев основные особенности и устройство адаптивного алгоритма наименьших квадратов, кратко опишем некоторые задачи теории адаптивной обработки сигналов, изучению которых посвящена практическая часть настоящей работы.

3. Системная идентификация (системное моделирование)

Проблема *системной идентификации* или *системного моделирования* представляет задачу, в которой с использованием теории адаптивной обработки сигналов необходимо определить характеристики неизвестной системы, представленной в настоящей работе КИХ-фильтром или БИХ-фильтром. Блок-схема системы подобного типа приведена на рис. 3.

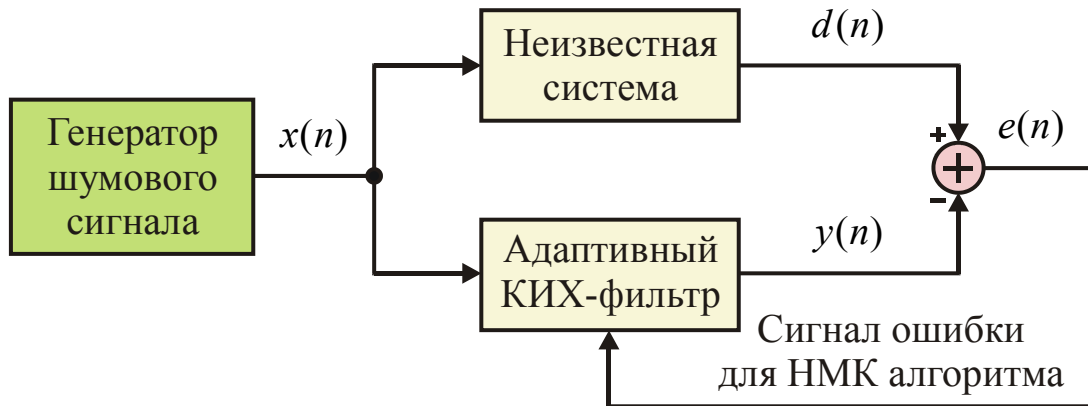


Рис. 3. Блок-схема решения задачи системной идентификации (системного моделирования)

Видно, что основными составляющими блок-схемы системной идентификации являются неизвестная система, характеристики которой необходимо определить, и параллельно соединенным с ней АФ, который в настоящей работе представлен КИХ-фильтром. На вход как неизвестной системы, так и адаптивного КИХ-фильтра подается идентичный сигнал, представленный на рис. 3 шумоподобным сигналом $x(n)$. Тогда если положить, что $y(n)$ – это сигнал на выходе адаптивного КИХ-фильтра, а $d(n)$ – сигнал на выходе неизвестной системы (эталонный сигнал), можно сформировать сигнал ошибки $e(n) = d(n) - y(n)$, на основе которого, с использованием адаптивного алгоритма наименьших квадратов, осуществляется настройка коэффициентов адаптивного КИХ-фильтра. Последний после настройки должен обладать приближенными или точными, в зависимости от ситуации, характеристиками неизвестной системы.

4. Подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале

Рассмотрим некоторый сигнал $x(n)$, представляющий собой сумму полезного широкополосного сигнала $w(n)$ и узкополосной помехи $s(n)$, которую необходимо подавить, в предположении, что сигналы $w(n)$ и $s(n)$ некоррелированные. Подобная проблема возникает в цифровой связи, когда на полезный широкополосный сигнал оказывает влияние узкополосная помеха из другого пользовательского диапазона частота или преднамеренная узкополосная помеха от станции постановки помех, которая предназначена для разрушения канала связи.

С точки зрения задачи фильтрации цель состоит в том, чтобы синтезировать фильтр, подавляющий узкополосную помеху. Фактически, такой фильтр должен иметь подавление в частотной полосе, занимаемой помехой. Однако с практической точки зрения задача осложняется тем, что частотная полоса помехи может быть неизвестной и медленно изменяющейся с течением времени. Поэтому при решении данной задачи можно воспользоваться методами адаптивной обработки, с использованием которых существует возможность оценить узкополосную помеху и вычесть ее из сигнала $x(n)$.

Поскольку полоса частот помехи $s(n)$ является более узкой, чем полоса полезного сигнала $w(n)$, следовательно, отсчеты сигнала $s(n)$ являются более высоко коррелированными, чем отсчеты сигнала $w(n)$. Используя это замечание, можно сформировать систему, с использованием которой появляется возможность подавить узкополосную помеху на фоне полезного широкополосного сигнала.

Блок-схема системы подобного рода представлена на рис. 4. Как видно из рисунка, на вход системы подается сигнал $x(n)$, представляющий сумму полезного широкополосного сигнала $w(n)$ и узкополосной помехи $s(n)$. Как и в задаче системной идентификации для настройки коэффициентов адаптивного КИХ-фильтра, входящего в состав рассматриваемой системы, необходимо сформировать сигнал ошибки $e(n)$, который определяется с использованием следующего выражения:

$$e(n) = x(n) - \hat{s}(n), \quad (13)$$

где $\hat{s}(n)$ является оценкой сигнала помехи $s(n)$, которая формируется на выходе адаптивного КИХ-фильтра с использованием следующего выражения:

$$\hat{s}(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k-D). \quad (14)$$

Как видно из рис. 4, на вход адаптивного КИХ-фильтра подается задержанная на D отсчетов копия сигнала $x(n)$. Задержка необходима для декорреляции отсчетов широкополосных сигналов $w(n)$ и $w(n-D)$, входящих в состав сигналов $x(n)$ и $x(n-D)$ соответственно. Подобная декорреляция позволяет сформировать на выходе адаптивного КИХ-фильтра необходимую оценку $\hat{s}(n)$ сигнала помехи $s(n)$.



Рис. 4. Адаптивный фильтр для оценивания и подавления узкополосной помехи

Для определения коэффициентов адаптивного КИХ-фильтра можно воспользоваться адаптивным алгоритмом наименьших квадратов, который в силу присутствующей задержки входного сигнала $x(n)$ на D отсчетов примет следующий вид:

$$h_{n+1}(k) = h_n(k) + \mu e(n)x(n-k-D), \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Исходя из описанного выше, очевидно, что адаптивный КИХ-фильтр должен иметь АЧХ с полосой пропускания, совпадающей с полосой частот узкополосной помехи $s(n)$. Тогда как полная система, представленная на рис. 4, должна иметь АЧХ с подавлением указанной полосы частот.

5. Адаптивный самонастраивающийся фильтр

В предыдущем разделе был описан метод, позволяющий подавить узкополосную помеху на фоне полезного широкополосного сигнала. Адаптивный самонастраивающийся фильтр (рис. 5) представляет собой систему, которая имеет ту же конфигурацию, что и система, изображенная на рис. 4, за исключением следующих отличий:

1. Узкополосный сигнал $s(n)$ является полезным сигналом, а широкополосный сигнал $w(n)$ представляет широкополосную шумовую компоненту, которую необходимо подавить.

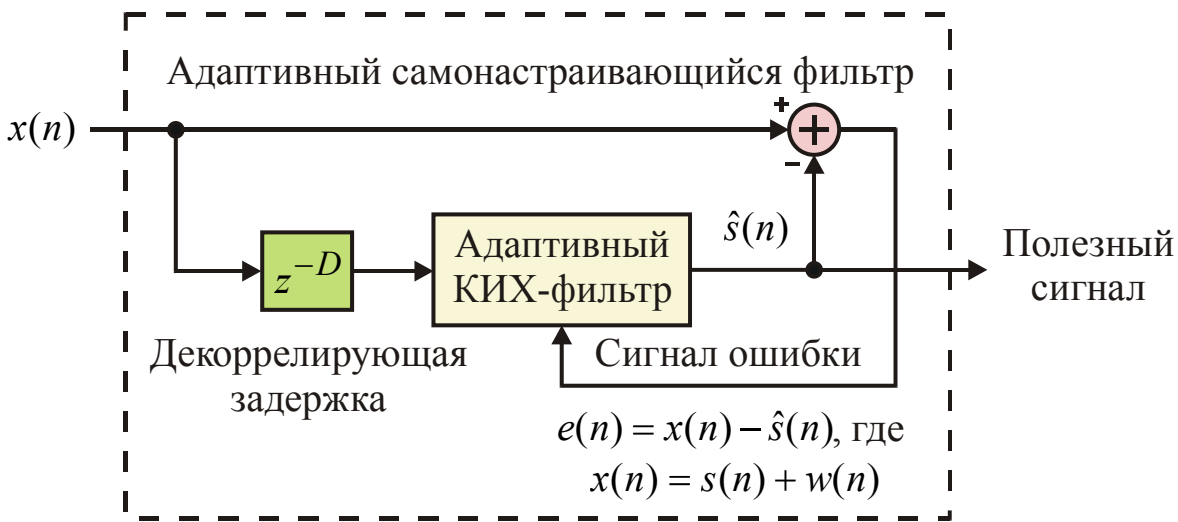


Рис. 5. Адаптивный самонастраивающийся фильтр

2. АЧХ адаптивного КИХ-фильтра совпадает с АЧХ системы, представленной на рис. 5, в состав которой этот фильтр входит.

Содержание лабораторной работы

1. Исследование задачи системной идентификации (системного моделирования).

2. Исследование системы подавления узкополосной помехи в широкополосном сигнале.

3. Исследование адаптивного самонастраивающегося фильтра.

Замечание. Из трех типов исследований, представленных в содержании работы, по указанию преподавателя должно быть выбрано одно, с исходными данными, приведенными в табл. 1.

Исходные данные

Шифр студента	Тип задачи и исходные параметры
1	Системная идентификация (системное моделирование), Параметры неизвестной системы: $a(1) = 0.5$, $a(2) = 0.05$, $b(1) = -1$, $b(2) = 0.2$
2	Системная идентификация (системное моделирование), Параметры неизвестной системы: $a(1) = -0.5$, $a(2) = 0.05$, $b(1) = 1$, $b(2) = 0.2$
3	Системная идентификация (системное моделирование), Параметры неизвестной системы: $a(1) = -1$, $a(2) = -1$, $b(1) = -1$, $b(2) = 0.9$
4	Системная идентификация (системное моделирование), Параметры неизвестной системы: $a(1) = -0.5$, $a(2) = 0.5$, $b(1) = -0.4$, $b(2) = -0.4$
5	Подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале, число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$: $L_1 = 1$
6	Подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале, число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$: $L_1 = 2$
7	Подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале, число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$: $L_1 = 3$
8	Подавление узкополосной помехи в широкополосном сигнале, число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$: $L_1 = 4$
9	Адаптивный самонастраивающийся фильтр, число гармонических составляющих в полезном сигнале $s(n)$: $L_2 = 1$
10	Адаптивный самонастраивающийся фильтр, число гармонических составляющих в полезном сигнале $s(n)$: $L_2 = 2$
11	Адаптивный самонастраивающийся фильтр, число гармонических составляющих в полезном сигнале $s(n)$: $L_2 = 3$
12	Адаптивный самонастраивающийся фильтр, число гармонических составляющих в полезном сигнале $s(n)$: $L_2 = 4$

Порядок выполнения работы

1. Исследование задачи системной идентификации (системного моделирования)

Для выполнения настоящего пункта необходимо с использованием элементов написания программного кода пакета Matlab построить систему, представленную на рис. 3. Используя написанную программную модель, можно произвести серию измерений, позволяющую установить основные особенности задачи системной идентификации. Основные этапы, необходимые для решения поставленной задачи, приведены ниже.

1. Сгенерировать шумовой сигнал $x(n)$, представляющий собой последовательность случайных чисел с нулевым математическим ожиданием (нулевым средним значением). В качестве последовательности случайных чисел можно воспользоваться последовательностью с равномерно распределенными значениями на замкнутом интервале $[-a, a]$. Очевидно, что последовательность данного типа имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $a^2/3$. Исходя из указанного, входной сигнал $x(n)$ имеет мощность $P_x = a^2/3$. В пакете Matlab генерация входного сигнала может быть выполнена с использованием функции `rand`, необходимый листинг которой может быть найден в помощи пакета.

2. Построить неизвестную систему с использованием следующего разностного уравнения:

$$y(n) = x(n) + a(1)x(n-1) + a(2)x(n-2) - b(1)y(n-1) + b(2)y(n-2). \quad (16)$$

Замечание. Коэффициенты разностного уравнения (16) должны быть взяты из табл. 1 по указанию преподавателя.

Построение неизвестной системы можно осуществить с использованием функции `filter`, необходимый листинг которой может быть найден в помощи пакета Matlab.

Замечание. При использовании функции `filter` необходимо помнить, что коэффициенты фильтра $a(n)$ и $b(n)$, $0 \leq n \leq 2$, используемые в ней в качестве входных параметров, являются поменянными местами по сравнению с разностным уравнением (16). Последнее связано с расхождением обозначений, используемых в цифровой обработке сигналов, в англоязычной и русскоязычной литературе.

3. С использованием функции `lms_algorithm`, описание кода Matlab которой приведено ниже, произвести построение адаптивного КИХ-фильтра порядка N .

```

function h = lms_algorithm(x,d,delta,N)
% Алгоритм наименьших квадратов, предназначенный
% для регулировки коэффициентов адаптивного
% фильтра
%
% h -- оцененная импульсная характеристика
% КИХ-фильтра
% x -- входной вектор данных x(n)
% d -- желаемый вектор данных d(n), длина
% которого совпадает с x(n)
% delta -- параметр, определяющий устойчивость и
% скорость сходимости алгоритма наименьших
% квадратов
% N -- длина импульсной характеристики КИХ -
% фильтра h(n)
%
M = length(x); y = zeros(1,M);
h = zeros(1,N);
for n = N:M
    x1 = x(n:-1:n-N+1);
    y = h * x1';
    e = d(n) - y;
    h = h + delta*e*x1;
end

```

4. Произвести исследование скорости сходимости адаптивного алгоритма наименьших квадратов в зависимости от параметра μ , который можно выбирать как внутри интервала сходимости алгоритма, описываемого выражением (10), так и вне него (порядок N адаптивного КИХ-фильтра должен быть фиксированным). Результат должен быть графически проиллюстрирован для каждого отдельного параметра μ с использованием формулы (12), описывающей зависимость величины ОСКО от некоторого номера m , фактически определяющего момент времени усреднения значений квадратичной ошибки. Значение параметра K в формуле (12) рекомендуется выбрать равным величине $10N + 9$.

Замечание. Для удачного отображения результатов число отсчетов входного сигнала $x(n)$ необходимо подобрать вручную.

5. Построить графики импульсной, амплитудно-частотной, фазочастотной характеристик неизвестной системы и адаптивного КИХ-фильтра. Произвести исследование изменения характеристик адаптивного КИХ-фильтра в зависимости от порядка фильтра при фиксированном параметре сходимости μ .

Замечание. Отображение графиков АЧХ и ФЧХ можно осуществить с использованием функции `freqz_m`, описание кода *Matlab* которой приведено ниже.

```
function [db,mag,pha,w] = freqz_m(a,b)
% Модифицированная версия функции freqz
%
% mag -- абсолютные значения АЧХ, вычисленные
% от 0 до pi радиан
% db -- относительные значения АЧХ в дБ,
% вычисленные от 0 до pi радиан
% pha -- ФЧХ, вычисленная от 0 до pi радиан
% w -- вектор частотных значений от 0 до pi
% радиан
% a -- коэффициенты числителя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра значения a
% эквивалентны отсчетам импульсной
% характеристики)
% b -- коэффициенты знаменателя передаточной
% функции (для КИХ-фильтра b=[1])
%
[H,w] = freqz(a,b,1000,'whole');

H = (H(1:1:501))';
w = (w(1:1:501))';

mag = abs(H);

eps = 0.0001;
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha = angle(H);
```

2. Исследование системы подавления узкополосной помехи в широкополосном сигнале

Для выполнения настоящего пункта необходимо с использованием элементов написания программного кода пакета Matlab построить систему, представленную на рис. 4. Используя написанную программную модель, можно произвести серию измерений, позволяющую установить основные особенности задачи подавления узкополосной помехи в широкополосном сигнале. Основные этапы, необходимые для решения поставленной задачи, приведены ниже.

1. Сгенерировать полезный широкополосный сигнал $w(n)$. В качестве последнего рекомендуется выбрать последовательность случайных чисел с нулевым математическим ожиданием (нулевым средним значением) и равномерно распределенными значениями на замкнутом интервале $[-a, a]$. Очевидно, что последовательность данного типа имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $a^2/3$. В пакете Matlab генерация полезного широкополосного сигнала $w(n)$ может быть выполнена с использованием функции `rand`, необходимый листинг которой может быть найден в помощи пакета.

2. Сгенерировать узкополосную помеху $s(n)$ в виде:

$$s(n) = \sum_{k=1}^{L_1} A_k \sin(\hat{\omega}_{0k} n), \quad 0 < \hat{\omega}_{0k} < \pi, \quad (17)$$

где A – амплитуда k -го гармонического сигнала, $\hat{\omega}_{0k}$ – нормированная частота k -го гармонического сигнала, измеряемая в радианах, а L_1 – число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$, указанное в табл. 1.

3. С использованием функции `lms_algorithm`, описание кода Matlab которой приведено выше, произвести построение адаптивного КИХ-фильтра порядка N .

Замечание. При генерации полезного широкополосного сигнала $w(n)$ с мощностью P_w и узкополосной помехи $s(n)$ с мощностью P_s должно выполняться следующее условие:

$$P_s > P_w,$$

например, $P_s = 10P_w$. Дополнительно необходимо отметить, что в силу некоррелированности сигналов $w(n)$ и $s(n)$ мощность сигнала

$x(n) = s(n) + w(n)$, подаваемого на вход адаптивной системы, определяется с использованием следующего выражения:

$$P_x = P_s + P_w,$$

которое необходимо для определения параметра μ в адаптивном алгоритме наименьших квадратов, согласно выражению (10).

4. Выбрать значение декоррелирующей задержки D , представленной на рис. 4, равным 1. Последнее связано с тем, что полезный широкополосный сигнал $w(n)$ генерируется с использованием функции `rand`, как белый шум, то есть как сигнал, описываемый равномерной спектральной плотностью мощности.

5. Произвести исследование скорости сходимости адаптивного алгоритма наименьших квадратов в зависимости от параметра μ , который можно выбирать как внутри интервала сходимости алгоритма, описываемого выражением (10), так и вне него (порядок N адаптивного КИХ-фильтра должен быть фиксированным). Результат должен быть графически проиллюстрирован для каждого отдельного параметра μ с использованием формулы (12), описывающей зависимость величины ОСКО от некоторого номера m , фактически определяющего момент времени усреднения значений квадратичной ошибки. Значение параметра K в формуле (12) рекомендуется выбрать равным величине $10N + 9$.

Замечание. Для удачного отображения результатов число отсчетов входного сигнала $x(n)$ необходимо подобрать вручную.

6. Построить графики последовательности $s(n)$, $w(n)$, $x(n)$, а также графики АЧХ и ФЧХ адаптивного КИХ-фильтра и полной системы подавления узкополосной помехи (рис. 4). Произвести исследование изменения качества работы системы в зависимости от порядка фильтра при фиксированном параметре сходимости μ . Под качеством работы системы подразумевается точность оценки полезного сигнала, которую можно определить с использованием СКО, вычисляемой на основе следующего математического выражения:

$$\text{СКО} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(k) - \hat{f}(k))^2, \quad (18)$$

где $f(k)$ – эталонный сигнал, $\hat{f}(k)$ – восстановленный сигнал.

Замечание. Программный код пакета *Matlab* для вычисления СКО, с использованием функции `MSE`, приведен ниже.

```

function mse = MSE(signal,rsignal)
% Функция для оценки качества восстановленного
% сигнала по критерию среднеквадратической
% ошибки
%
% mse -- среднеквадратическая ошибка
% signal -- эталонный сигнал
% rsignal -- восстановленный сигнал
%
if isequal(signal,rsignal)
    disp('Сигналы идентичны; СКО равно нулю')
else
    N = length(signal);
    mse = sum((double(signal) - ...
              double(rsignal)).^ 2)/N;
    disp(sprintf('СКО = %5.4f',mse));
end

```

3. Исследование адаптивного самонастраивающегося фильтра

Для выполнения настоящего пункта необходимо с использованием элементов написания программного кода пакета Matlab построить систему, представленную на рис. 5. Используя написанную программную модель, можно произвести серию измерений, позволяющую установить основные особенности работы адаптивного самонастраивающегося фильтра. Основные этапы, необходимые для решения поставленной задачи, приведены ниже.

1. Сгенерировать полезный узкополосный сигнал $s(n)$ в виде:

$$s(n) = \sum_{k=1}^{L_2} A_k \sin(\hat{\omega}_{0k} n), \quad 0 < \hat{\omega}_{0k} < \pi, \quad (19)$$

где A – амплитуда k -го гармонического сигнала, $\hat{\omega}_{0k}$ – нормированная частота k -го гармонического сигнала, измеряемая в радианах, а L_2 – число гармонических составляющих в сигнале $s(n)$, указанное в табл. 1.

2. Сгенерировать шумоподобный широкополосный сигнал $w(n)$. В качестве последнего рекомендуется выбрать последовательность случайных чисел с нулевым математическим ожиданием (нулевым средним значением) и равномерно распределенными значениями на замкнутом интервале $[-a, a]$. Очевидно, что последовательность

данного типа имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $a^2/3$. В пакете Matlab генерация шумоподобного широкополосного сигнала $w(n)$ может быть выполнена с использованием функции `rand`, необходимый листинг которой может быть найден в помощи пакета.

3. С использованием функции `lms_algorithm`, описание кода Matlab которой приведено выше, произвести построение адаптивного КИХ-фильтра порядка N .

Замечание. При генерации полезного узкополосного сигнала $s(n)$ с мощностью P_s и шумоподобного широкополосного сигнала $w(n)$ с мощностью P_w должно выполняться следующее условие:

$$P_s < P_w,$$

например, $P_w = 10P_s$. Дополнительно необходимо отметить, что в силу некоррелированности сигналов $w(n)$ и $s(n)$ мощность сигнала $x(n) = s(n) + w(n)$, подаваемого на вход адаптивной системы, определяется с использованием следующего выражения:

$$P_x = P_s + P_w,$$

которое необходимо для определения параметра μ в адаптивном алгоритме наименьших квадратов, согласно выражению (10).

4. Выбрать значение декоррелирующей задержки D , представленной на рис. 5, равным 1. Последнее связано с тем, что шумоподобный широкополосный сигнал $w(n)$ генерируется с использованием функции `rand`, как белый шум, то есть как сигнал, описываемый равномерной спектральной плотностью мощности.

5. Произвести исследование скорости сходимости адаптивного алгоритма наименьших квадратов в зависимости от параметра μ , который можно выбирать как внутри интервала сходимости алгоритма, описываемого выражением (10), так и вне него (порядок N адаптивного КИХ-фильтра должен быть фиксированным). Результат должен быть графически проиллюстрирован для каждого отдельного параметра μ с использованием формулы (12), описывающей зависимость величины ОСКО от некоторого номера m , фактически определяющего момент времени усреднения значений квадратичной ошибки. Значение параметра K в формуле (12) рекомендуется выбрать равным величине $10N + 9$.

Замечание. Для удачного отображения результатов число отсчетов входного сигнала $x(n)$ необходимо подобрать вручную.

6. Построить графики последовательности $s(n)$, $w(n)$, $x(n)$, а также графики АЧХ и ФЧХ адаптивного КИХ-фильтра и полной системы подавления узкополосной помехи (рис. 5). Произвести исследование изменения качества работы системы в зависимости от порядка фильтра при фиксированном параметре сходимости μ . Под качеством работы системы подразумевается точность оценки полезного сигнала, которую можно определить с использованием СКО, вычисляемой на основе выражения (18).

Контрольные вопросы

1. Что такое адаптивный цифровой фильтр?
2. Какие основные компоненты входят в состав адаптивного фильтра?
3. Что такое алгоритм быстрой спуска?
4. Сформулировать и перечислить основные этапы адаптивного алгоритма наименьших квадратов.
5. Какую задачу в адаптивном алгоритме наименьших квадратов выполняет параметр μ ?
6. Каким образом можно проанализировать скорость сходимости адаптивного алгоритма наименьших квадратов?
7. Привести примеры приложений адаптивной обработки сигналов.
8. Сформулировать задачу системной идентификации (системного моделирования).
9. Сформулировать задачу подавления узкополосной помехи в широкополосном сигнале.
10. Сформулировать задачу подавления широкополосной помехи на основе адаптивного самонастраивающегося фильтра.

Литература

1. Hayes M.H. Statistical Digital Signal Processing and Modeling. John Wiley and Sons, Inc., 1996.
2. Ingle V.K., Proakis J.G. Digital Signal Processing using Matlab V. 4. PWS Publishing Company, 1997.
3. Тараканов А.Н., Хрящев В.В., Приоров А.Л. Адаптивная цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2001.
4. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л. Цифровые фильтры: Учеб. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.

5. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – Вильямс, 2004.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
7. Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.
8. Хрящев В.В., Приоров А.Л., Волохов В.А. Основы теории цепей: сборник задач. – Ярославль: ЯрГУ, 2008.
9. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.

Описание графической среды для синтеза и анализа фильтров

Удобным средством для анализа (синтеза) ЦФ является Filter Design & Analysis Tool (FDATool), входящий в пакет Matlab 7.12 (R2011a). Он вызывается из командной строки Matlab командой `fdatool`. Главное окно FDATool представлено на рис. П. 1.

В панели инструментов FDATool имеется ряд кнопок, которые позволяют вывести множество дополнительных параметров и характеристик фильтров. Название кнопки выводится при установке на ней курсора мыши. Отметим назначение следующих кнопок:

Full view analysis – вывод отдельного окна просмотра данных анализа;

Filter specification – спецификации фильтра;

Magnitude response – АЧХ;

Phase response – ФЧХ;

Magnitude and phase response – одновременный вывод графиков АЧХ и ФЧХ;

Group delay response – групповая задержка;

Phase delay – фазовая задержка;

Impulse response – импульсная характеристика;

Step response – переходная характеристика;

Pole/zero plot – нуль-полюсная диаграмма;

Filter coefficients – просмотр коэффициентов фильтра (выводимое здесь представление фильтра зависит от выбранной формы реализации);

Filter information – общая информация о фильтре;

Magnitude response estimate – оценка АЧХ фильтра, с учетом эффектов квантования. Она получается пропусканием через фильтр шумоподобного сигнала;

Round-off noise power spectrum – оценка спектральной плотности мощности шума округления.

В левой нижней части окна расположены дополнительные кнопки, задающие режим проектирования:

Create a multirate filter – создание фильтра для многоскоростной обработки;

Transform filter – преобразование фильтра;

Set quantization parameters – установка параметров квантования;

Realize Model – вывод параметров реализации фильтра;

Pole/Zero Editor – редактор нуль-полюсной диаграммы;

Import filter to workspace – импорт фильтра в рабочее пространство;

Design filter – запуск проектировщика фильтров.

Замечание. В настоящем лабораторном практикуме в качестве режима проектирования выбирается *Design filter*.

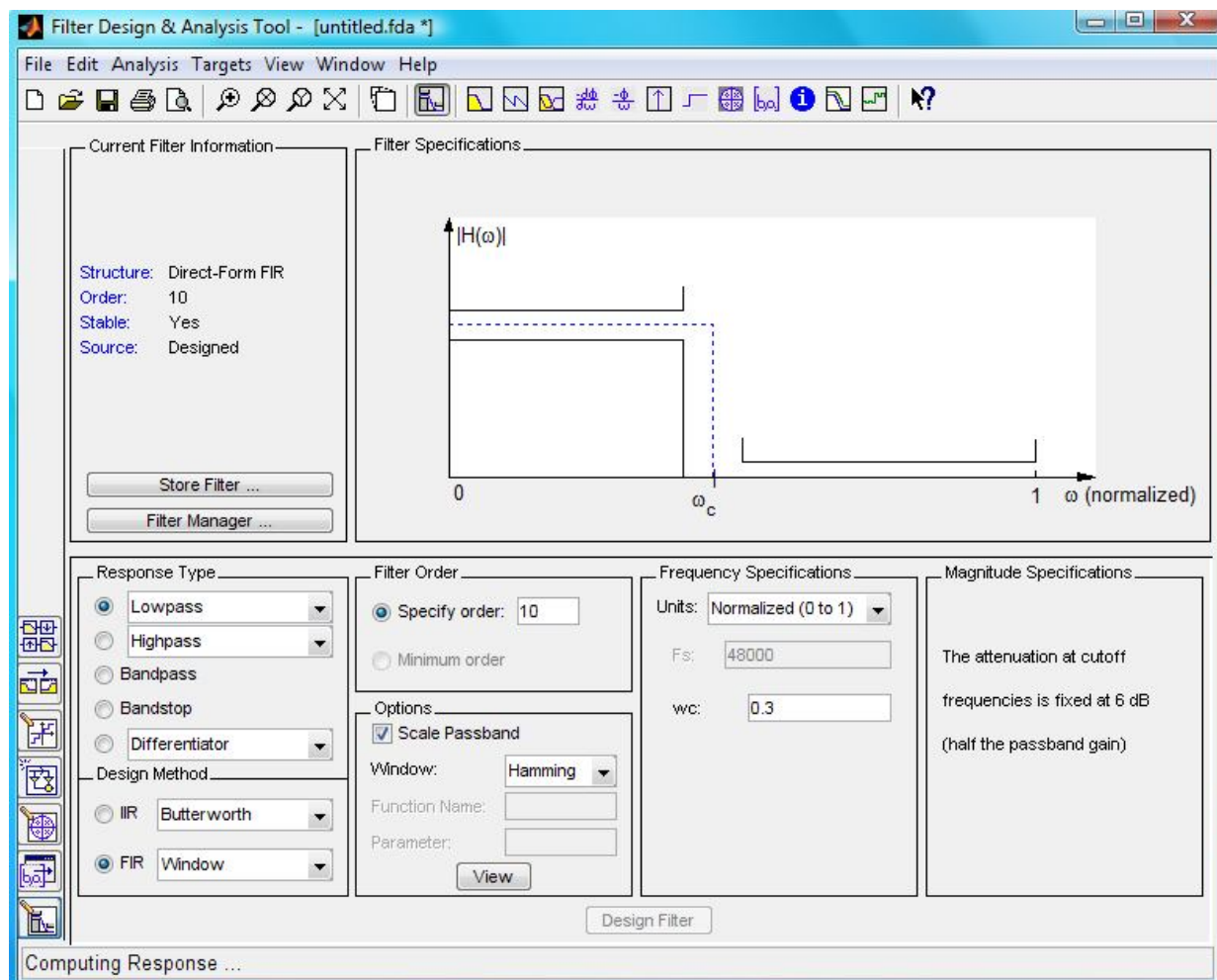


Рис. П. 1. Главное окно FDATool

Пример отображения АЧХ с использованием элементов FDATool представлен на рис. П. 2. Щелчок правой кнопки мыши по графику АЧХ в FDATool позволяет отобразить координаты выбранной точки АЧХ (см. рис. П. 2). Щелчок правой кнопки мыши в области отображения АЧХ, свободной от графика, позволяет выбрать элементы настройки отображения рассматриваемой зависимости (см. рис. П. 2).

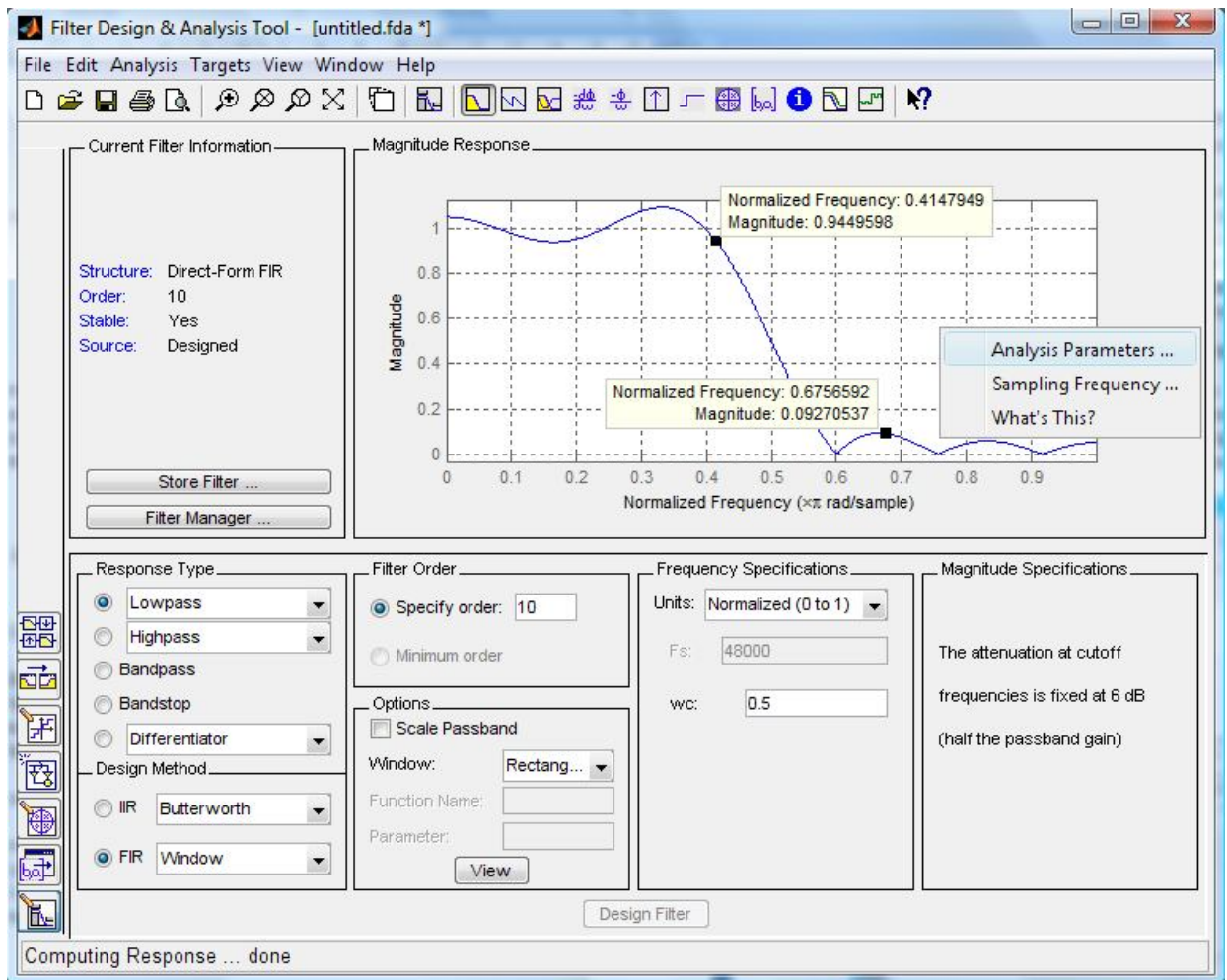


Рис. П. 2. Окно FDATool, подготовленное для использования в настоящей работе