**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«8» 08 2023 г.

# СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Методические указания
по выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
*В. Г. Андронов*

**Сложение колебаний и волн**: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 12 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x841/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 752. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1 Цель работы

- изучить принципы наложения гармонических колебаний.

## 2 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим вопрос о наложении синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками $S_1$ и $S_2$ (рисунок 1), циклические частоты гармонических колебаний которых равны $\omega_1$ и $\omega_2$, а начальные фазы – соответственно $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Пусть вызываемые ими колебания в произвольной точке М одинаково направлены и удовлетворяют уравнению:

$$s_1 = (a_1 / r_1)\sin(w_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1) = A_1 \sin \varPhi_1$$

или в комплексной форме: $s_1 = A_1 e^{\varPhi_1}$

$$s_2 (a_2 / r_2)\sin(w_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2) = A_2 \sin \varPhi_2$$
$$\left(s_2 = A_2 e^{\varPhi_2}\right)$$

По принципу суперпозиции, результирующее колебание в точке М определяется

$$\left(s = A e^{\varPhi}\right)$$

Для нахождения А и Ф воспользуемся методом временных диаграмм (рисунок 2).

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varPhi_2 - \varPhi_1) \tag{1}$$

Возможны два случая

$$tg\varPhi = (A_1 \sin \varPhi_1 + A_2 \sin \varPhi_2) / (A_1 \cos \varPhi_1 + A_2 \cos \varPhi_2) \tag{2}$$

а) разность фаз волн $\varPhi_2 - \varPhi_1$ в точке $M$ изменяется с течением времени; такие волны и возбуждающие их источники *S1* и *S2* называются некогерентными;

б) разность фаз волн $\varPhi_2 - \varPhi_1$ не зависит от времени; такие волны и возбуждающие их источники называются когерентными.

Используя соотношение $k=\omega/\upsilon$, где $\upsilon$ – фазовая скорость волны, получим $\varPhi_1 = w_1 t - w_1 (r_1 / v_1) + \alpha_1$

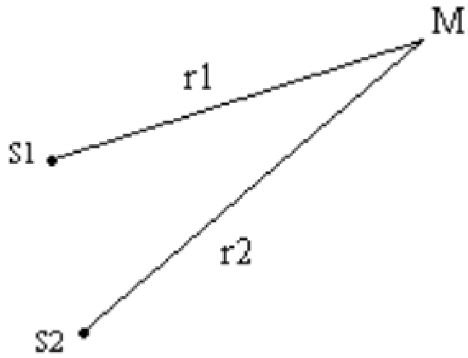



Рисунок 1 – Синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками $S_1$ и $S_2$

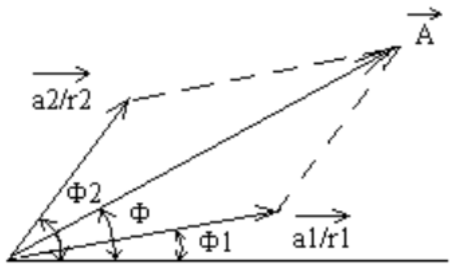



Рисунок 2 – Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

$$\Phi_2 = w_2 t - w_2 \left( r_2 / v_2 \right) + \alpha_2$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \left( w_2 - w_1 \right) t - \left( w_2 \left( r_2 / v_2 \right) - w_1 \left( r_1 / v_1 \right) \right) + \left( \alpha_2 - \alpha_1 \right) \qquad (3)$$

Второй и третий члены правой части равенства не зависят от времени. Поэтому две синусоидальные волны когерентны, если их частоты одинаковы, и некогерентны, если их частоты различны.

Из формулы (1) следует, что при наложении некогерентных синусоидальных волн амплитуда результирующих колебаний в точке М среды зависит от времени, то есть результирующие колебания негармонические. Амплитуда А изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$, причем циклическая частота колебаний амплитуды А совпадает с циклической частотой изменения $\Phi_2 - \Phi_1$, то есть равна $|w_2 - w_1|$. Если эта частота достаточно велика, то любой регистрирующий прибор не будет успевать реагировать на изменения величины *A*, то есть будет показывать лишь некоторое ее среднее значение.

Найдем среднее значение $\langle A^2 \rangle$ квадрата амплитуды за время, равное периоду $\tau$ ее изменения:

$$\left\langle A^2 \right\rangle = (1/\tau)\int_0^\tau A^2 dt = (1/\tau)\int_0^\tau \left[ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2 - \Phi_1) \right] dt$$

$$\left\langle A^2 \right\rangle = A_1^2 + A_2^2 + (2A_1A_2/\tau)\int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt \tag{4}$$

Так как за время τ разность $\Phi_2 - \Phi_1$ изменяется на $2\pi$, то

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \qquad \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt = 0 \qquad \int_0^\tau e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} dt = 0$$

и
$$\left\langle A^2 \right\rangle = A_1^2 + A_2^2$$

Таким образом, при наложении некогерентных волн среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны равно сумме квадратов амплитуд исходных волн. В согласии с законом сохранения энергии при наложении некогерентных волн происходит суммирование их энергий.

Иначе обстоит дело при наложении когерентных волн. Полагая в формуле (6.3) $w_1 = w_2 = w$ и учитывая, что при этом в однородной и изотропной среде $v_1 = v_2 = v$, получаем

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -w/v(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Поэтому формулу (1) можно переписать в таком виде:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[ k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) \right] \tag{5}$$

Так как $\alpha_1 - \alpha_2 = const$ и $k = const$, то амплитуда А не зависит от времени. Косинус в правой части формулы (5) равен единице и амплитуда результирующего колебания максимальна $(A = A_1 + A_2)$ во всех точках *M*, для которых аргумент косинуса равен четному числу $\pi$:

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm 2m\pi \tag{6}$$

где $m=0, 1, 2\ldots.$, или, заменив *k* на $2\pi/\lambda$, получим

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda + \left( (\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi \right)\lambda \tag{7}$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то это условие принимает вид:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания минимальна $(A = |A_1 - A_2|)$ во всех точках *M*, для которых

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm(2m - 1)\pi$$

или
$$r_2 - r_1 = \pm(2m - 1)\lambda/2 + \left( (\alpha_2 - \alpha_2)/2\pi \right)\lambda \tag{9}$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то условие минимума амплитуды имеет такой вид:

$$r_2 - r_1 = \pm(2m-1)\lambda/2$$

Величина $r_2 - r_1$ называется геометрической разностью хода волн от их источников S1 и S2 до рассматриваемой точки.

При наложении когерентных волн квадрат амплитуды и энергия результирующей волны, вообще говоря, отличны от суммы, соответственно, квадратов амплитуд и энергий исходных волн. В самом деле, в точках *M*, удовлетворяющих условию (7),

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2$$

больше $\left(A_1^2 + A_2^2\right)$,

а в точках M, удовлетворяющих условию (8),

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2$$

меньше $\left(A_1^2 + A_2^2\right)$.

Интерференцией волн называют явление, осуществляющееся при наложении двух или нескольких волн и состоящее в устойчивом во времени их взаимном усилении в одних точках пространства и ослаблении - в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Из предыдущего ясно, что интерферировать могут только когерентные волны, если им соответствуют колебания, совершающееся вдоль одного и того же или близких направлений.

При интерференции волн отсутствует простое суммирование их энергий. Иными словами, интерференция волны приводит к перераспределению энергии колебаний между соседними областями среды. Однако, в среднем, для достаточно большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн. Поэтому явление интерференции ни в какой мере не противоречит закону сохранения и превращения энергии [1].

Пример № 1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD сложение двух электромагнитных волн.

Решение:

а) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются перпендикулярно друг другу,

$$t := 0, 0.1..100 \quad w_2 := 5 \cdot 314 \quad \phi_2 := \frac{\pi}{2} \quad B := 12$$

$$y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$$

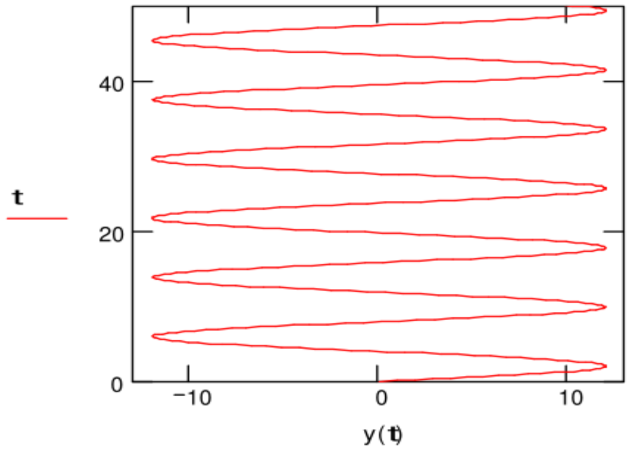



Рисунок 3 – Результат реализации функции $y(t) := B\cdot\cos(w_2\cdot t+\phi_2)$ в программе MathCAD

$$w_1 := 314\cdot 3 \quad \phi_1 := \frac{\pi}{6} \quad A := 10 \quad x(t) := A\cdot\cos(w_1\cdot t+\phi_1)$$

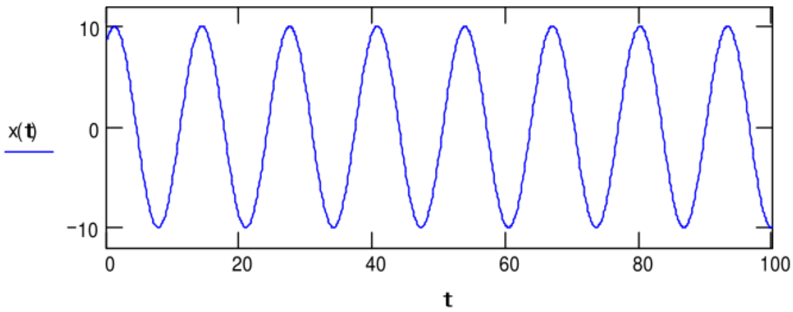



Рисунок 4 – Результат реализации функции $x(t) := A\cdot\cos(w_1\cdot t+\phi_1)$ в программе MathCAD

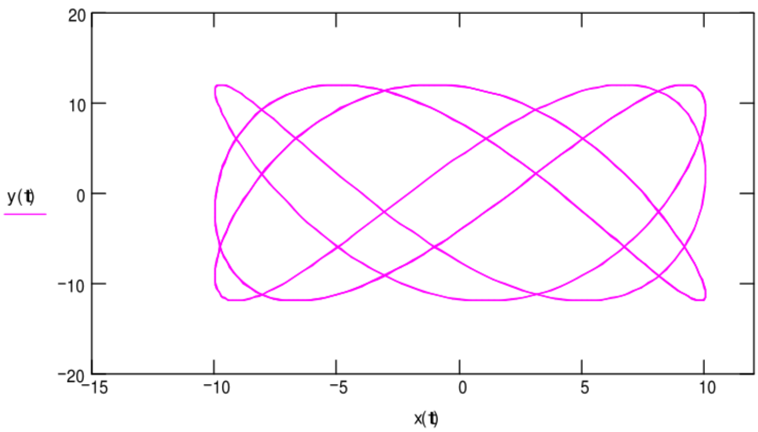



Рисунок 5 – Результат совместной реализации функций $x(t) := A\cdot\cos(w_1\cdot t+\phi_1)$ и $y(t) := B\cdot\cos(w_2\cdot t+\phi_2)$ в программе MathCAD б) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются параллельно друг другу:

$$\phi := \phi_2 - \phi_1 \qquad w := w_2 - w_1 \qquad z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$$

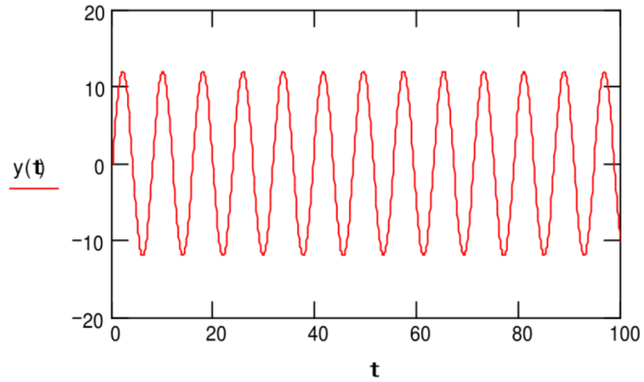



Рисунок 6 – Результат реализации функции $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$ в программе MathCAD

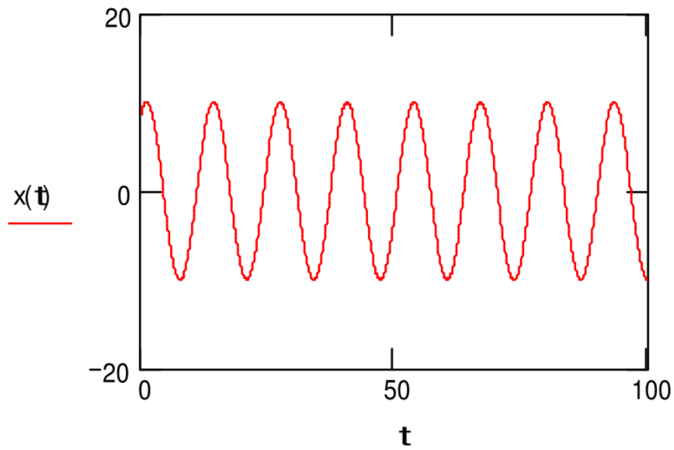



Рисунок 7 – Результат реализации функции $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$ в программе MathCAD

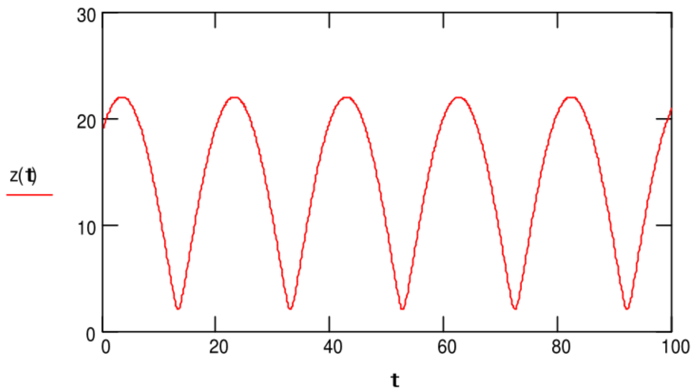



Рисунок 8 – Результат реализации функции $z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$ в программе MathCAD

Частным случаем интерференции волн являются так называемые стоячие волны. Стоячие волны возникают при наложении двух распространяющихся навстречу бегущих монохроматических волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Такая картина получается, в частности, при полном отражении волны от границы. Падающая на границу волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль одной оси в противоположных направлениях.

$$\varsigma_1 = a\cos\left(wt - kx + \alpha_1\right)$$

$$\varsigma_2 = a\cos\left(wt + kx + \alpha_2\right)$$

Сложив вместе эти уравнения, получим:

$$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 = 2a\cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(wt + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Полученное уравнение - это уравнение стоячей волны.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля стоячей волны, созданной наложением встречных линейно поляризованных плоских волн. Выберем ось $Z$ в направлении распространения одной из волн, а ось $X$- в направлении поляризации. Начало отсчета расстояний на оси $Z$ выберем в точке, где колебания напряженности электрического поля обеих волн происходят в одинаковой фазе, а начало отсчета времени - в тот момент, когда эти напряженности в начале координат достигают максимума. Результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = \left\{2E_0 e^{-iwt}\cos kz; 0; 0\right\}$$

$$\vec{B} = \left\{0; 2; B_0 e^{iwt}\sin kz; 0\right\}$$

Из этих формул видно, что вектор напряженности электрического поля результирующей волны в каждой точке совершает гармоническое колебание в направлении оси $X$ с частотой $\omega$, причем амплитуда колебаний изменяется от максимального значения $2E_0$ в плоскостях $z = \left(\pi / k\right)n$ $\left(n = 0, \pm1, \pm2, ...\right)$, называемых пучностями электрического поля, до нуля в плоскостях $z = \left(t / k\right)\left(n + 1/2\right) = \left(/2\right)\left(n + 1/2\right)$, называемых узлами. Фаза колебаний во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе.

В отличии от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени. Она лишь периодически переходит из кинетической энергии, локализованной в основном вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную в основном вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую [1].

Пример № 2. В вакууме в направлении оси $Z$ установилась стоячая электромагнитная волна. Рассмотреть распространение электромагнитной волны а) в положительном направлении оси $Z$, б) в отрицательном направлении оси Z. Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны в моменты $t=0$ и $t=T/4$, где T – период колебаний.

Решение: Учтем, что векторы $\vec{E},\vec{B},\vec{k}$ в каждой из волн, образующих стоячую волну, образовывают правую тройку векторов.

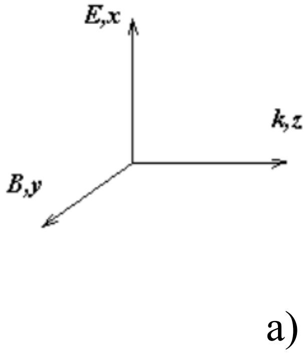
а) Волна распространяется в положительном направлении оси $Z$

$$B = Bm\cos(kz)\cos(wt), \quad E = Em\cos(kz)\cos(wt)$$

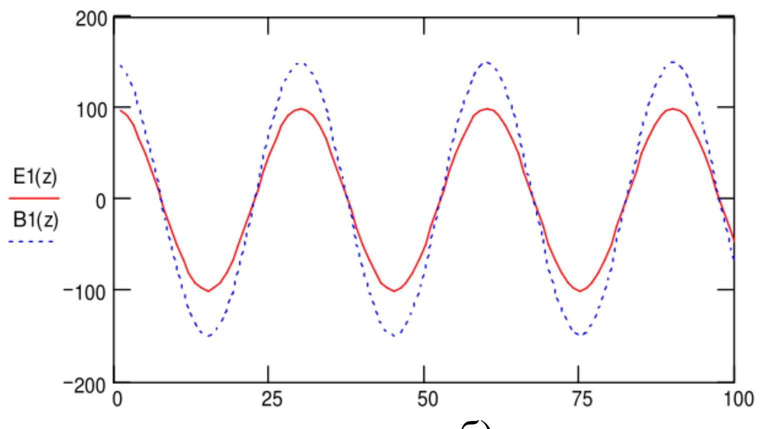
$$T := 10 \qquad w := 60 \qquad \lambda := 30 \quad \kappa := 2\cdot\frac{\pi}{\lambda}$$

$$E_m := 100 \;\; B_m := 150 \;\; t_1 := 0 \qquad t_2 := \frac{T}{4}$$

$$E_1(z) := E_m\cdot\cos(\kappa\cdot z)\cdot\cos(w\cdot t_1) \quad B_1(z) := B_m\cdot\cos(\kappa\cdot z)\cdot\cos(w\cdot t_1)$$




а)




б)

Рисунок 9 – Взаимная ориентация векторов (а), диаграмма гармонических колебаний $E_1(z)$ и $B_1(z)$

$$E_2(z) := E_m\cdot\cos(\kappa\cdot z)\cdot\cos(w\cdot t_2) \quad B_2(z) := B_m\cdot\cos(\kappa\cdot z)\cdot\cos(w\cdot t_2)$$

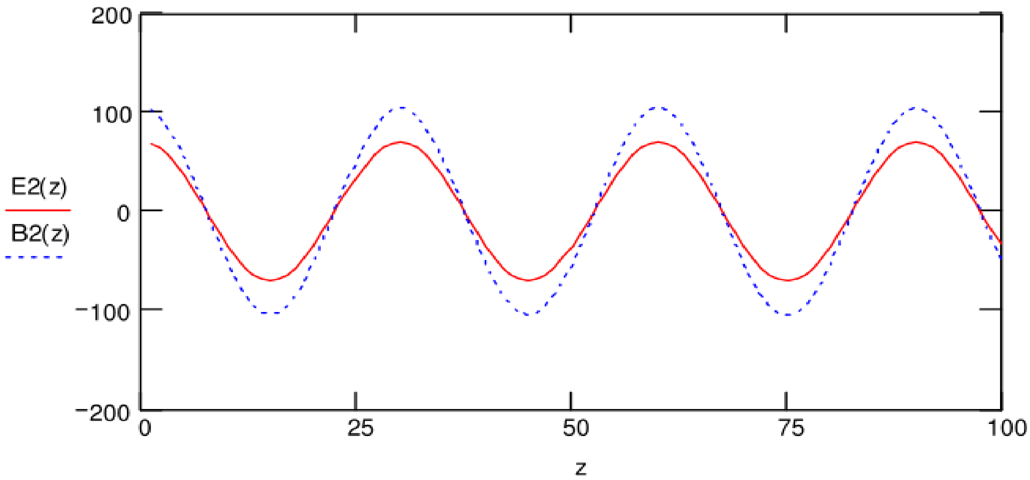



Рисунок 10 – Диаграмма гармонических колебаний $E_2(z)$ и $B_2(z)$

б) Волна распространяется в отрицательном направлении оси Z.

$$E = E_m \cos(-kz)\cos(wt) \quad B = -B_m \cos(-kz)\cos wt$$

$$z := 1..100 \;\; E_3(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(w \cdot t_1) \quad B_3(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(w \cdot t_1)$$

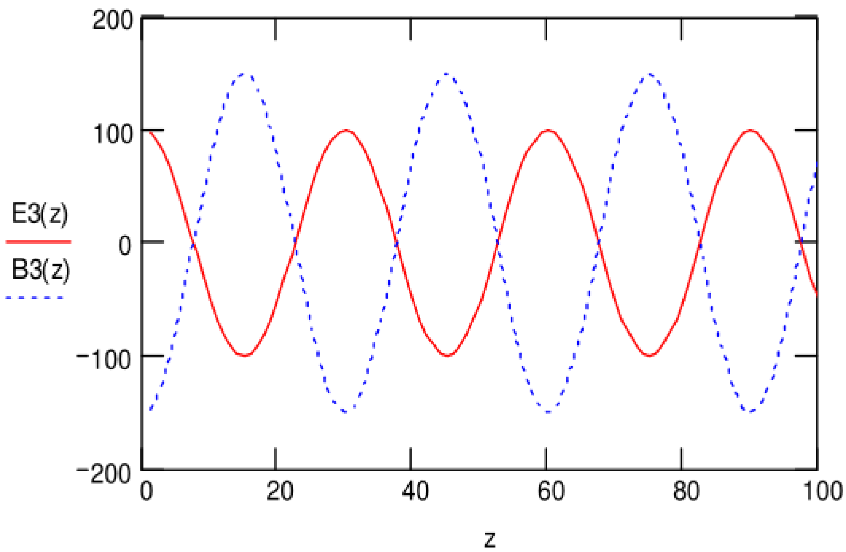



Рисунок 11 – Диаграмма гармонических колебаний $E_3(z)$ и $B_3(z)$

$$E_4(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(w \cdot t_2) \quad B_4(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(w \cdot t_2)$$

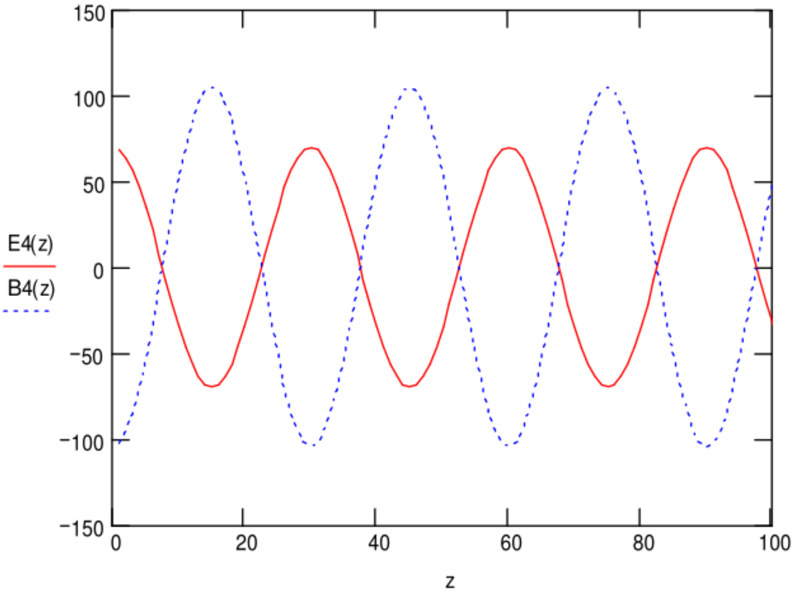



Рисунок 12 – Диаграмма гармонических колебаний $E_4(z)$ и $B_4(z)$

## 3 Задание на лабораторную работу

1) В направлении оси $OZ$ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz)\cos(wt)$. Найти магнитную составляющую волны $B(z,t)$. Изобразить картину распределения магнитной составляющей волны в разные моменты времени.

2) В вакууме вдоль оси $OZ$ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz)\cos(wt)$. Найти $Z$ - проекцию вектора Пойнтинга $S_2(z,t)$ и ее среднее за период значение.

## 4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение некогерентных волн.
2. Дайте определение интерференции волн.
3. Запишите выражение для среднего значение квадрата амплитуды за время, равное периоду $\tau$ ее изменения.
4. Дайте определение дифракции волн.
5. Дайте определение стоячей волны.