

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 16.09.2023 19:31:07
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426c69c51741cbb1537b134f64d851f41561989

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 14 » _____ г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО РАДИУСА СФЕРИЧЕСКОЙ ФРЕЗЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоя-
тельной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Определение наибольшего радиуса сферической фрезы для обработки заданной поверхности : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 18 с.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы: Получить теоретические сведения и практические навыки построения сплайн-поверхностей, расчета квадратичных норм поверхностей и радиусов кривизны в системе *Maple*.

2 Задание:

2.1. На основе координат точек исходных сечений поверхности выполнить построение уравнения поверхности в виде сплайн-функций.

2.2. Определить максимальный радиус сферической фрезы которая позволит выполнить обработку данной поверхности без локальных подрезов.

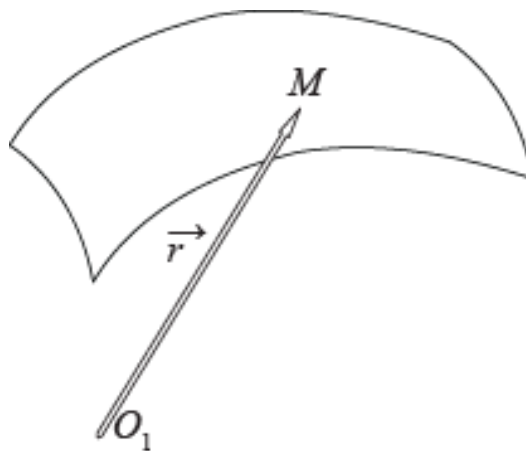
3 Краткие теоретические сведения

3.1. Понятие поверхности

Поверхность опишем при помощи радиус-вектора

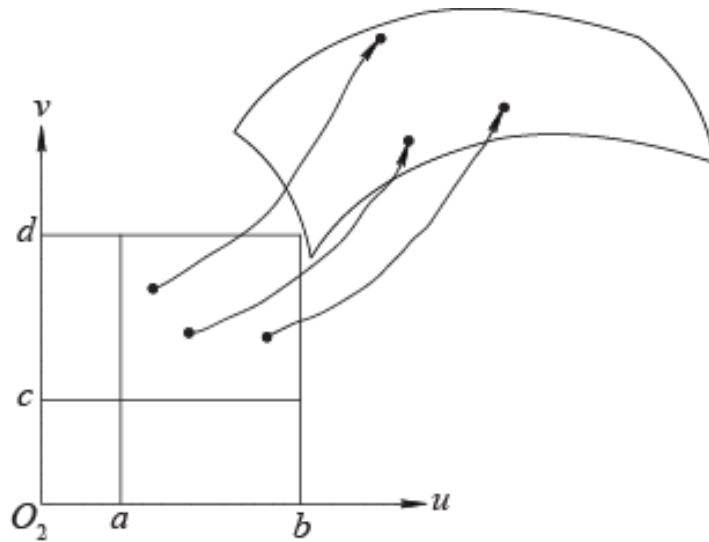
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

соединяющего произвольный фиксированный центр и точку, принадлежащую поверхности.



Поверхность задается в области некоторой числовой плоскости, на которой выбраны декартовы координаты

$$(u, v).$$



Поверхность называется простой, если каждой точке заданной области соответствует особая точка поверхности.

Поверхность называется регулярной, если у каждой ее точки есть окрестность, являющаяся простой поверхностью, и в этой точке векторная функция $\vec{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}.$$

Т. к. между точками заданной области и точками регулярной поверхности имеется взаимно однозначное соответствие, то пару чисел (\mathbf{u}, \mathbf{v}) можно также рассматривать, как координаты точки на регулярной поверхности.

Кривые

$$\begin{cases} u = s \\ v = v_0 = \text{const} \\ u = u_0 = \text{const} \\ v = s \end{cases}$$

называются координатными линиями на регулярной поверхности, которые образуют два семейства регулярных кривых.

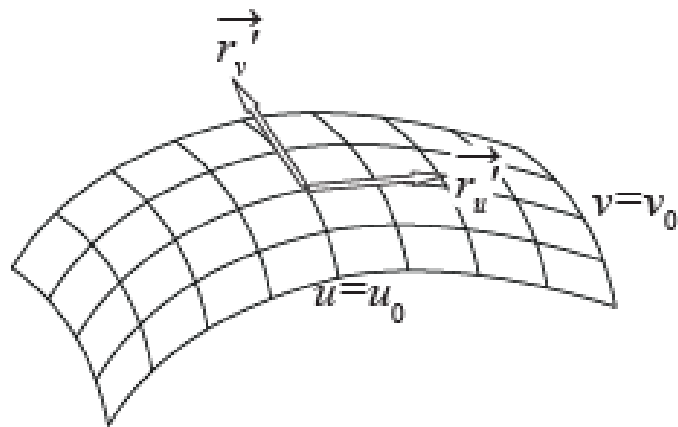
Векторы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

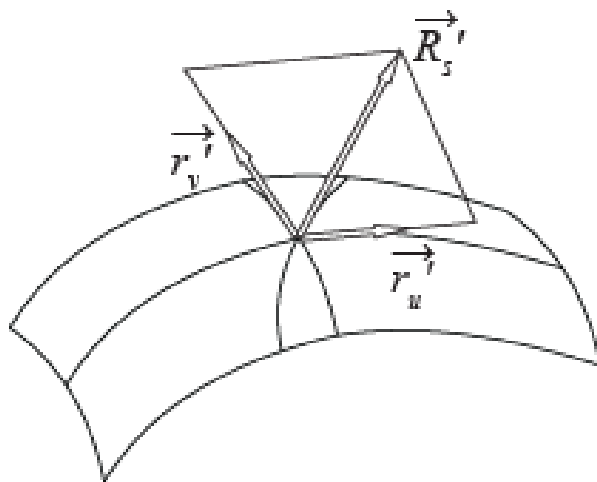
определяют касательные к соответствующим координатным линиям, а условие

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$$

означает, что касательные всегда существуют и пересекаются под углом, отличным от 0 и 180.



Плоскостью, касательной к регулярной поверхности в заданной точке, называется плоскость, касательная ко всем регулярным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку.



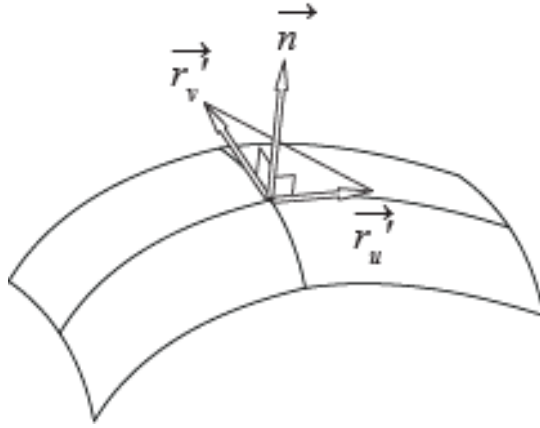
3.2. Квадратичные формы регулярной поверхности

Положение касательной плоскости удобно характеризовать с помощью единичного вектора

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$

перпендикулярного к этой плоскости.

При этом вектор \vec{n} называют нормалью регулярной поверхности.



Первой квадратичной формой регулярной поверхности называют квадрат полного дифференциала векторной функции, определяющей поверхность:

$$g = d\vec{r}^2.$$

Первая квадратичная форма регулярной поверхности определяется особыми коэффициентами:

$$g = d\vec{r}^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot dv \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2 \cdot du^2 + 2 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot du \cdot dv + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2 \cdot dv^2;$$

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2;$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v};$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2;$$

$$g = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2.$$

Если регулярная поверхность задана графиком

$$z = z(x, y),$$

то

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2;$$

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

Определим длину регулярной кривой L на регулярной поверх-

НОСТИ:

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\vec{R}}{ds} \right| ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} \right)^2} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{E \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \cdot F \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + G \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2} ds \\ &= \int_L \sqrt{g}.\end{aligned}$$

Говорят, что первая квадратичная форма задает метрику регулярной поверхности.

Направлением (du, dv) в заданной точке регулярной поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ называется направление вектора $d\vec{r}$.

Угол между направлениями $(du^{(1)}, dv^{(1)})$, $(du^{(2)}, dv^{(2)})$ называется углом между соответствующими векторами

$$d\vec{r}^{(1)}, \quad d\vec{r}^{(2)}.$$

Направление регулярной кривой на регулярной поверхности в заданной точке – это направление вектора, касательного к кривой в точке.

Угол между регулярными кривыми на регулярной поверхности в заданной точке – это угол между направлениями кривых в точке.

Угол между координатными линиями регулярной поверхности

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Координатная сеть на регулярной поверхности будет ортогональна, если

$$F = 0.$$

Площадь регулярной поверхности

$$A = \iint_S \sqrt{E \cdot G - F^2} dudv.$$

Второй квадратичной формой регулярной поверхности называется взятое со знаком «-» скалярное произведение полного дифференциала векторной функции, определяющей поверхность, на полный дифференциал нормали поверхности:

$$q = -d\vec{r} \cdot d\vec{n}.$$

Вторая квадратичная форма регулярной поверхности определяется своими коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 q &= -d\vec{r} \cdot d\vec{n} \\
 &= \left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \right) \cdot du^2 + \left(\left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right) + \left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \right) \right) \\
 &\quad \cdot du \cdot dv + \left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right) \cdot dv^2; \\
 L &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}; \\
 M &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right) + \left(-\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \right) \right); \\
 N &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}; \\
 q &= L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2.
 \end{aligned}$$

Другой способ определения коэффициентов второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
 d\vec{r} \cdot \vec{n} &= 0; \\
 d(d\vec{r} \cdot \vec{n}) &= d^2\vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{n} = 0; \\
 q = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} &= d^2\vec{r} \cdot \vec{n} \\
 &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \cdot \vec{n} \cdot du^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n} \cdot du \cdot dv + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \cdot \vec{n} \cdot dv^2; \\
 L &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \cdot \vec{n}; \\
 M &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n}; \\
 N &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \cdot \vec{n}.
 \end{aligned}$$

Если регулярная поверхность задана графиком

$$z = z(x, y),$$

то

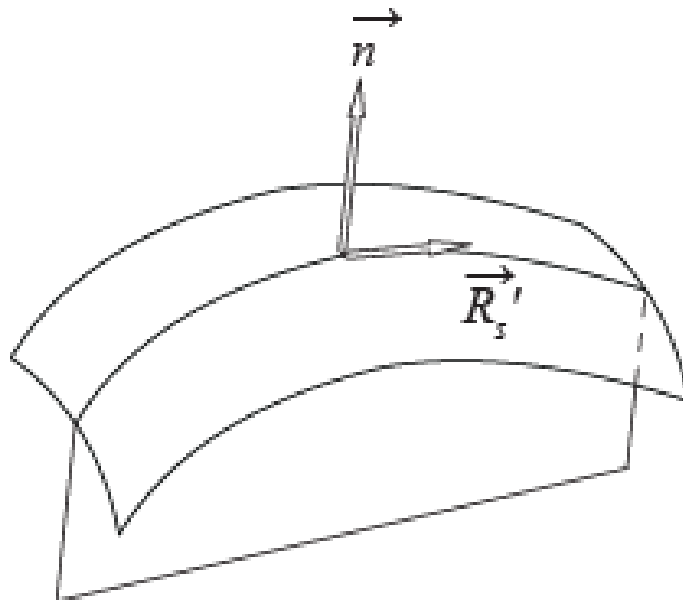
$$L = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$M = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$N = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

3.3. Нормальная кривизна регулярной поверхности

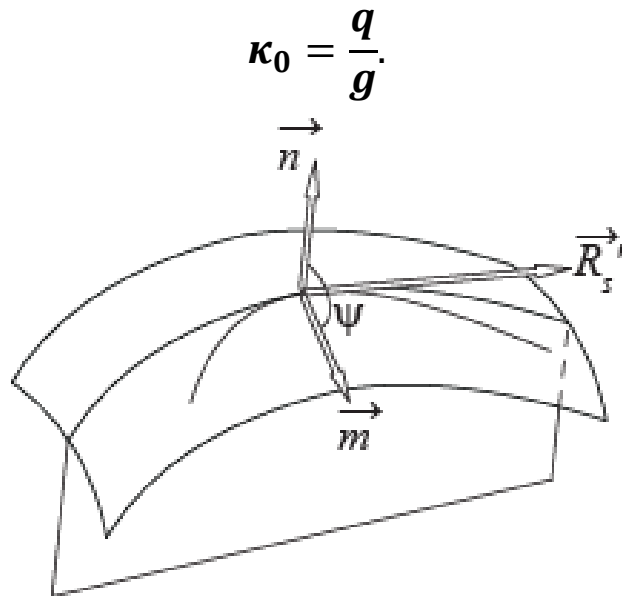
Если пересечь регулярную поверхность плоскостью, проходящей через нормаль в заданной точке, то в достаточно малой окрестности точки получим плоскую регулярную кривую пересечения. Кривизна этой кривой пересечения называется нормальной кривизной регулярной поверхности в заданной точке в направлении кривой пересечения.



Произведение кривизны регулярной кривой регулярной поверхности в заданной точке на косинус угла между главной нормалью кривой и нормалью поверхности есть нормальная кривизна поверхности в направлении кривой:

$$\kappa \cdot \cos \psi = \kappa_0.$$

Следствие



Для изучения регулярной поверхности в малой окрестности заданной точки совместим с точкой начало отсчета декартовой системы координат. Ось z направим по нормали поверхности, а оси x , y расположим в касательной плоскости.

При этом саму поверхность в заданной малой окрестности представим графиком

$$z = z(x, y).$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора, пренебрегая бесконечно малой частью разложения:

$$z = z(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot x \cdot y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot y^2 \right).$$

График получившейся функции представляет собой параболоид, который называется соприкасающимся в заданной точке.

Надлежащим поворотом осей x , y вокруг оси z приводим уравнение соприкасающегося параболоида к виду

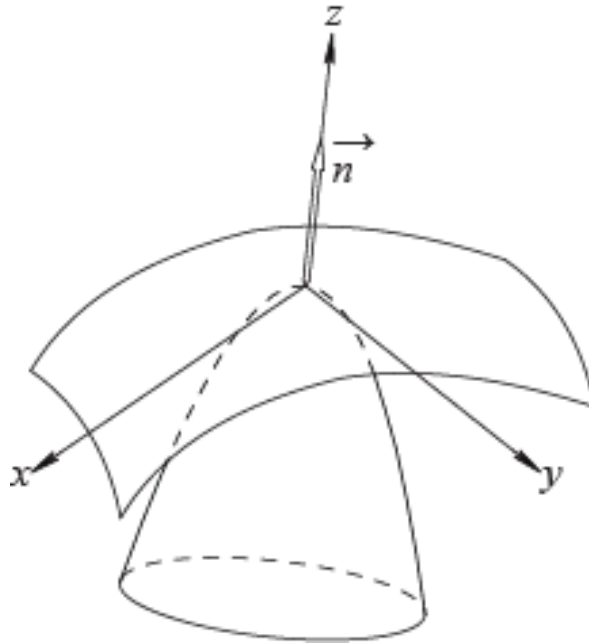
$$z = z(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot x^2 + k_2 \cdot y^2).$$

При этом направления осей x , y называются главными направлениями в заданной точке.

Нормальные сечения в этих направлениях называются главными нормальными сечениями, а кривизны этих сечений – главными нормальными кривизнами. Главные нормальные сечения представляют собой параболы с кривизнами k_1 , k_2 , равными соответствующим главным нормальным кривизнам.

Если $k_1 > 0$, то главная нормаль параболы совпадает с нормалью соприкасающегося параболоида, если же $k_1 < 0$, то угол меж-

ду этими нормальными равна 180° .



Теорема Эйлера: нормальная кривизна регулярной поверхности в заданной точке в направлении, составляющем угол φ первым главным направлением, равна

$$k = k_1 \cdot (\cos \varphi)^2 + k_2 \cdot (\sin \varphi)^2.$$

Теорема: главные направления в заданной точке регулярной поверхности – это те направления, в которых нормальные кривизны достигают экстремумов.

Главные радиусы кривизны определяются, как

$$R_1 = \frac{1}{k_1} \text{ и } R_2 = \frac{1}{k_2}.$$

Гауссовой кривизной называется произведение

$$K = k_1 k_2,$$

а средняя кривизна в точке определяется, как

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Неизвестные главные кривизны в заданной точке можно определить из уравнения

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

где k_1, k_2 являются корнями данного уравнения, а коэффициенты H и K можно определить, как

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{LG - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}$$

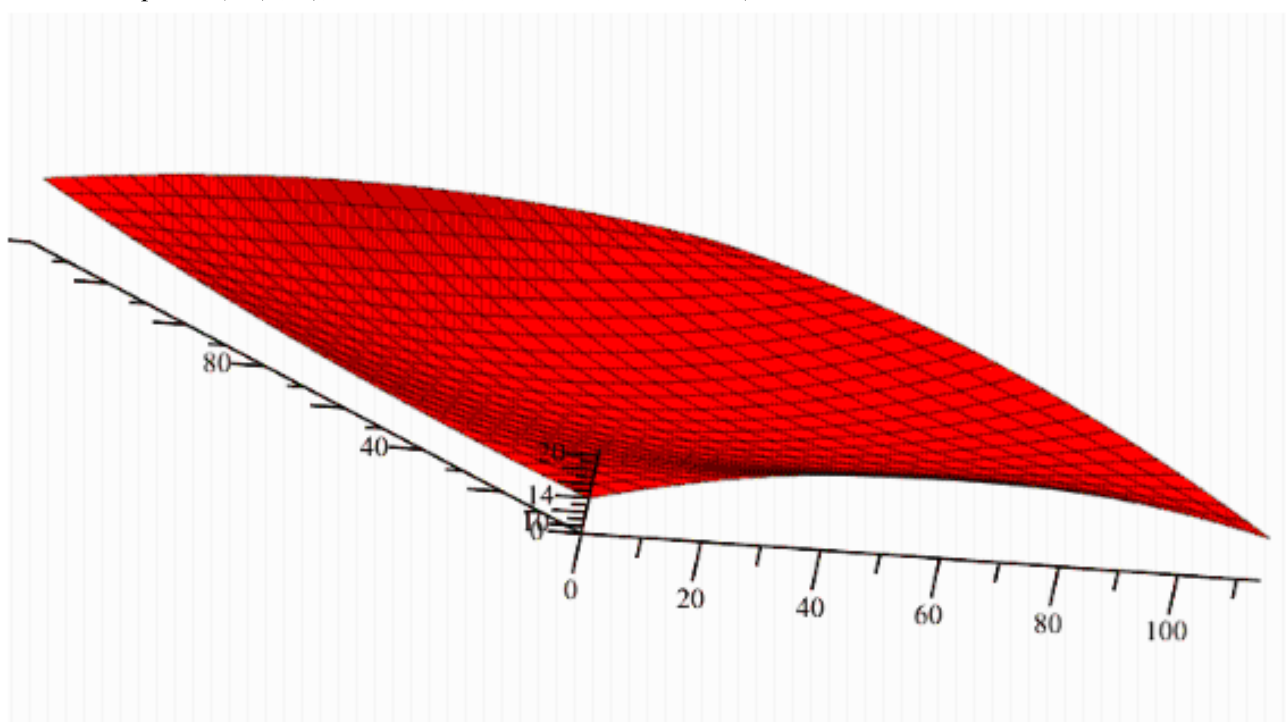
Максимальный радиус инструмента в заданной точке можно

определить как

$$R_{\max} = \min(|R_1|, |R_2|).$$

4. Пример выполнения работы

- > `restart : with(CurveFitting) : with(LinearAlgebra) : with(plots) :`
- > `#Задаём координаты точек чечений поверхности`
- > `X := [0, 76, 114] :`
- > `Y1 := [14., 20., 15.] :`
- > `Y2 := [14., 11., 19.] :`
- > `Y3 := [18., 20., 16.] :`
- > `Z := [0, 60., 140.] :`
- > `#Выполняем интерполяцию сечений поверхности`
- > `f1 := PolynomialInterpolation(X, Y1, x) :`
- > `f2 := PolynomialInterpolation(X, Y2, x) :`
- > `f3 := PolynomialInterpolation(X, Y3, x) :`
- > `# Создаём список сечений поверхности`
- > `Y := [f1, f2, f3] :`
- > `#Выполняем интерполяцию по поверхности`
- > `Yz := PolynomialInterpolation(Z, Y, z) :`
- > `#Задаем векторное уравнение поверхности`
- > `r0 := (u, v) → evalf(subs(z = u, x = v, [u, Yz, v])) :`
- > `#Выполняем геометрическое построение поверхности`
- > `detal := plot3d(r0(u, v), u = 0 ..140, v = 0 ..114, color = red)`



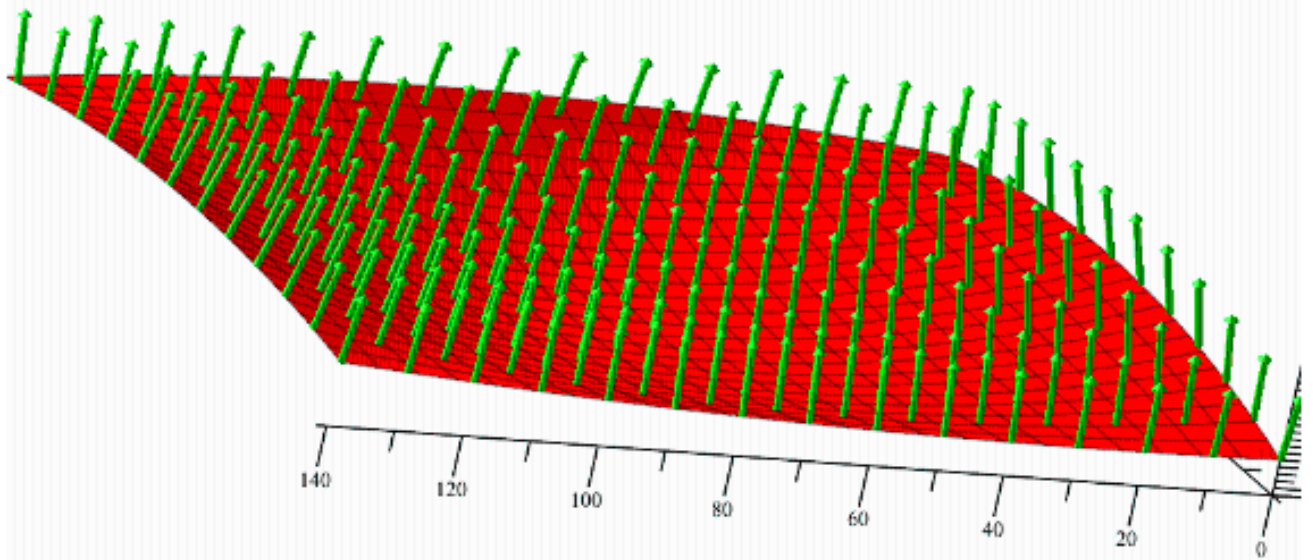
- > `#Создаем вектор нормали к поверхности`
- > `# Знак "минус" или "плюс" в формуле определяет направление вектора нормали`
- > `n(u, v) := evalf(subs(u1 = u, v1 = v, -CrossProduct(diff(r0(u1, v1), u1), diff(r0(u1, v1), v1)))) :`

> #выполняем геометрическое отображение векторов нормали по поверхности

>

```
ris := arrow(  
    {seq(  
        seq([r0(u, v), 10· n(u, v)], u = 0 ..140, 10),  
        v = 0 ..114, 10  
    )  
    },  
    width = 1, head_length = 1, color = green  
):
```

> display(detal, ris)



> #Задаём уравнения для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности

> $E := \text{diff}(r0(u, v)[1], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[1], u) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[2], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[2], u) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[3], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[3], u) :$

> $F := \text{diff}(r0(u, v)[1], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[1], v) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[2], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[2], v) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[3], u) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[3], v) :$

> $G := \text{diff}(r0(u, v)[1], v) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[1], v) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[2], v) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[2], v) +$
 $\text{diff}(r0(u, v)[3], v) \cdot \text{diff}(r0(u, v)[3], v) :$

> #Задаём уравнения для коэффициентов второй квадратичной формы поверхности

> $L := \frac{\text{DotProduct}(\text{diff}(r0(u, v), u\$2), n(u, v))}{\sqrt{E \cdot G - F^2}} :$

> $M := \frac{\text{DotProduct}(\text{diff}(r0(u, v), u, v), n(u, v))}{\sqrt{E \cdot G - F^2}} :$

> $N := \frac{\text{DotProduct}(\text{diff}(r0(u, v), v\$2), n(u, v))}{\sqrt{E \cdot G - F^2}} :$

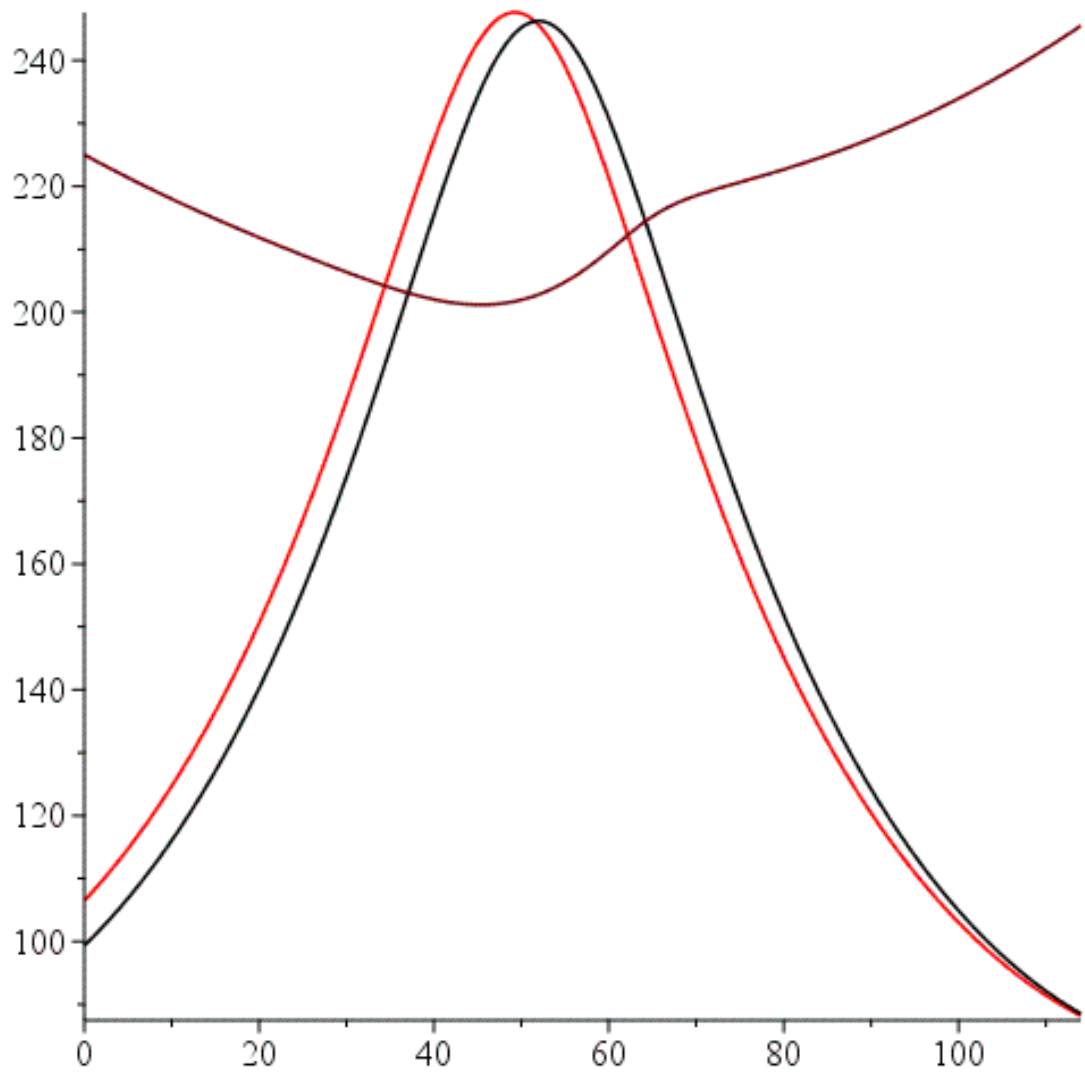
> #Задаём уравнения коэффициентов для определения главных кривизн поверхности

> $K := \frac{(L \cdot N - M^2)}{E \cdot G - F^2} :$

```

> H := (L·G - 2·F·M + E·N) /
        2·(E·G - F²) :
> #Задаём уравнение для определения главных кривизн поверхности
> Ur := k² - 2·H·k + K :
        #Задаём формулу для расчёта главных радиусов кривизны поверхности
> R1(uu, vv) := 1 /
        fsolve(evalf(subs(u = uu, v = vv, Ur)) = 0, k, maxsols = 2)[1] :
> R2(uu, vv) := 1 /
        fsolve(evalf(subs(u = uu, v = vv, Ur)) = 0, k, maxsols = 2)[2] :
> #Задаём формулу для расчёта минимального положительного главного радиуса
        кривизны поверхности
>
R(uu, vv) := piecewise(
        R1(uu, vv) > 0 and R2(uu, vv) > 0, min(R1(uu, vv), R2(uu,
        vv)),
        R1(uu, vv) ≤ 0 and R2(uu, vv) > 0, R2(uu, vv),
        R1(uu, vv) > 0 and R2(uu, vv) ≤ 0, R1(uu, vv),
        R1(uu, vv) ≤ 0 and R2(uu, vv) ≤ 0, 1000
) :
> #Выполняем построение графиков изменения радиусов кривизны в сечениях
        поверхности
>
display(
        plot([seq([vv, R(140, vv)], vv = 0 ..114, 0.1)], color = red),
        plot([seq([vv, R(0, vv)], vv = 0 ..114, 0.1)], color = black),
        plot([seq([vv, R(70, vv)], vv = 0 ..114, 0.1)])
)

```



> #Выполняем расчет наибольшего радиуса сферической фрезы для обработки всей поверхности

```
> min(
  seq(
    seq(R(uu, vv), uu = 0 ..140, 1),
    vv = 0 ..114, 1
  )
)
```

88.19682961

Индивидуальное задание

№ варианта	Координаты сечений поверхности
1	<p>X := [0, 82, 152] Y1 := [18., 20., 16.] Y2 := [13., 10., 13.] Y3 := [12., 19., 14.] Z := [0, 200., 250.]</p>
2	<p>X := [0, 73, 141] Y1 := [13., 20., 16.] Y2 := [20., 19., 11.] Y3 := [18., 15., 15.] Z := [0, 100., 160.]</p>
3	<p>X := [0, 90, 150] Y1 := [13., 14., 19.] Y2 := [16., 13., 15.] Y3 := [19., 14., 11.] Z := [0, 200., 270.]</p>
4	<p>X := [0, 43, 75] Y1 := [19., 13., 18.] Y2 := [10., 16., 10.] Y3 := [17., 18., 20.] Z := [0, 50., 250.]</p>
5	<p>X := [0, 37, 69] Y1 := [17., 18., 17.] Y2 := [19., 10., 15.] Y3 := [20., 15., 17.] Z := [0, 200., 300.]</p>
6	<p>X := [0, 75, 118] Y1 := [15., 18., 14.] Y2 := [20., 10., 10.] Y3 := [12., 19., 15.] Z := [0, 100., 300.]</p>
7	<p>X := [0, 59, 83] Y1 := [19., 12., 14.] Y2 := [11., 10., 14.] Y3 := [10., 12., 11.] Z := [0, 70., 170.]</p>
8	<p>X := [0, 30, 90] Y1 := [17., 19., 18.] Y2 := [11., 12., 14.]</p>

	Y3 := [20., 18., 18.] Z := [0, 100., 180.]
9	X := [0, 21, 96] Y1 := [14., 17., 11.] Y2 := [18., 14., 16.] Y3 := [17., 15., 12.] Z := [0, 80., 150.]
10	X := [0, 5, 101] Y1 := [14., 11., 16.] Y2 := [16., 19., 17.] Y3 := [17., 12., 12.] Z := [0, 90., 190.]
11	X := [0, 83, 166] Y1 := [19., 20., 11.] Y2 := [12., 19., 10.] Y3 := [16., 12., 12.] Z := [0, 200., 300.]
12	X := [0, 38, 110] Y1 := [17., 14., 11.] Y2 := [11., 20., 12.] Y3 := [14., 20., 14.] Z := [0, 100., 200.]
13	X := [0, 20, 101] Y1 := [10., 13., 15.] Y2 := [13., 13., 20.] Y3 := [18., 14., 14.] Z := [0, 50., 150.]
14	X := [0, 20, 81] Y1 := [11., 16., 20.] Y2 := [10., 13., 12.] Y3 := [16., 18., 16.] Z := [0, 50., 150.]
15	X := [0, 17, 84] Y1 := [18., 10., 20.] Y2 := [18., 10., 20.] Y3 := [13., 12., 14.] Z := [0, 200., 250.]
16	X := [0, 83, 94] Y1 := [18., 14., 18.] Y2 := [18., 19., 14.] Y3 := [17., 15., 18.] Z := [0, 100., 200.]
17	X := [0, 16, 28] Y1 := [11., 18., 10.]

	Y2 := [13., 19., 20.] Y3 := [15., 10., 13.] Z := [0, 200., 300.]
18	X := [0, 17, 108] Y1 := [17., 17., 20.] Y2 := [20., 18., 10.] Y3 := [19., 11., 17.] Z := [0, 80., 280.]
19	X := [0, 26, 47] Y1 := [10., 19., 13.] Y2 := [18., 18., 16.] Y3 := [16., 18., 15.] Z := [0, 100., 200.]
20	X := [0, 52, 86] Y1 := [14., 15., 16.] Y2 := [11., 17., 10.] Y3 := [18., 16., 18.] Z := [0, 100., 200.]
21	X := [0, 69, 118] Y1 := [19., 15., 16.] Y2 := [18., 16., 10.] Y3 := [17., 15., 10.] Z := [0, 90., 290.]
22	X := [0, 54, 113] Y1 := [17., 16., 12.] Y2 := [14., 19., 14.] Y3 := [10., 16., 10.] Z := [0, 100., 300.]
23	X := [0, 20, 27] Y1 := [17., 12., 17.] Y2 := [14., 19., 18.] Y3 := [17., 12., 10.] Z := [0, 200., 300.]
24	X := [0, 69, 113] Y1 := [20., 13., 11.] Y2 := [12., 19., 12.] Y3 := [15., 13., 12.] Z := [0, 80., 140.]
25	X := [0, 26, 89] Y1 := [19., 14., 10.] Y2 := [17., 20., 13.] Y3 := [19., 13., 10.] Z := [0, 100., 200.]

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Мокимова
« 14 » _____ г.



НАХОЖДЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ, КАСАНИЯ И УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоя-
тельной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Нахождение точек пересечения, касания и уравнений геометрических объектов : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 29 с.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы:

Получить теоретические сведения и практические навыки нахождения точек пересечения, касания и уравнений геометрических в системе *Maple*.

2 Задание:

1. Построить уравнение для расчета координат точек пересечения прямых (кривых) и определить их числовые значения (см. приложение В).

2. Построить уравнение для расчета координат точек пересечения прямой (кривой) с окружностью и определить их числовые значения (см. приложение Г).

3. Построить уравнение окружности заданного радиуса касательной к двум прямым и рассчитать координаты точек касания (см. приложение Д).

4. Построить уравнение окружности касательной к трем прямым и рассчитать координаты точек касания (см. приложение Е).

5. Построить уравнение окружности заданного радиуса касательной к прямой и окружности, рассчитать координаты точек касания (см. приложение Ж).

6. Построить уравнение окружности касательной к двум прямым и окружности, рассчитать координаты точек касания (см. приложение З).

3 Краткие теоретические сведения

3.1. Параметрические уравнения типовых плоских кривых

Параметрическое уравнение прямой в общем виде

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ at + b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где a – тангенс угла наклона прямой к оси X ; b – параметр определяющий точку пересечения прямой с ось Y .

Параметрическое уравнение прямой на плоскости XOY по известному уравнению, вида $x = a \cdot y + b$

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cdot t + b \\ t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости ХОУ, проходящей через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{(t - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + x_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты соответственно 1-й и 2-й точки.

Параметрическое уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 + R \cos(t) \\ y_0 + R \sin(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

Параметрическое уравнение параболы на плоскости ХОУ по известному уравнению, вида $y = ax^2 + bx + c$

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ a \cdot t^2 + b \cdot t + c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Параметрическое уравнение параболы на плоскости ХОУ по известному уравнению, вида $x = ay^2 + by + c$

$$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cdot t^2 + b \cdot t + c \\ t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

3.2. Нахождение точек пересечения и касания плоских

кривых

Для нахождения точек пересечения двух геометрических объектов, уравнения которых записаны в параметрическом виде, необходимо составить систему двух уравнений

$$\begin{cases} \bar{i} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0, \end{cases} \quad (7)$$

и решить относительно неизвестных параметров t_1 и t_2 .

Например: Рассмотрим пример расчета точки пересечения двух прямых заданных уравнениями

$$\bar{r}_1(t) = \begin{bmatrix} t_1 \\ 0.5t_1 + 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \bar{r}_2(t) = \begin{bmatrix} t_2 \\ -0.8t_2 + 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Тогда, система уравнений (7) примет вид

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = 0; \\ 0.5t_1 + 0.8t_2 + 5 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Далее необходимо решить данную систему относительно параметров t_1 и t_2 . В приложении приведена программа данного расчета.

Решение задачи касания геометрических объектов связано, как правило, с построением параметрического уравнения сопряженной кривой (с определением неизвестных параметров уравнения) исходя из условий касания. Относительно каждой точки касания может быть сформирована система трех уравнений

$$\begin{cases} \bar{i} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \frac{\bar{r}_{t1}(t_1) \cdot \bar{r}_{t2}(t_2)}{|\bar{r}_{t1}(t_1)| |\bar{r}_{t2}(t_2)|} = 1 \text{ или } -1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\bar{r}_{t1}(t_1)$ и $\bar{r}_{t2}(t_2)$ - производные векторных функций (8) по параметру t ;

$\bar{r}_{t1}(t_1) \cdot \bar{r}_{t2}(t_2)$ - скалярное произведение векторов (для вычисления в *Maple* используется функция **DotProduct**);

$|\bar{r}_{i1}(t_1)|$ и $|\bar{r}_{i2}(t_2)|$ - модули векторов $\bar{r}_{i1}(t_1)$ и $\bar{r}_{i2}(t_2)$ (для вычисления в *Maple* используется функция *Norm*)

Первые два уравнения определяют условия пересечения кривых в точке касания (аналогично системе уравнений (7)), а третье уравнение условие параллельности касательных к кривым в точке контакта. Знак «1» соответствует ситуации, когда касательные одинаково направлены, «-1» разнонаправлены.

Соответственно, количество систем уравнений вида (10) должно соответствовать количеству точек касания объекта.

Например: рассмотрим окружность с центром в точке (20, 20) и радиусом 15. Необходимо построить уравнение касательной к окружности прямой проходящей через точку с координатами $p_1 = (-10, 20)$.

Для этого составим уравнение прямой в общем виде

$$\bar{r}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ a \cdot t + b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

и окружности

$$\bar{r}_2(t) = \begin{bmatrix} 20 + 15 \cos(t) \\ 20 + 15 \sin(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Далее составим систему определяющих уравнений

$$\begin{cases} \bar{i} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \frac{\bar{r}_{i1}(t_1) \cdot \bar{r}_{i2}(t_2)}{|\bar{r}_{i1}(t_1)| |\bar{r}_{i2}(t_2)|} = 1; \\ \bar{i} \cdot [\bar{p}_1 - \bar{r}_1(t_{12})] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{p}_1 - \bar{r}_1(t_{12})] = 0. \end{cases}, \quad (13)$$

где первые три уравнения определяют условия касания прямой и окружности, а последние два уравнения условие прохождения прямой через точку p_1 . Данную систему необходимо решить относительно неизвестных параметров t_1, t_2, t_{12}, a, b . В приложении приве-

дена программа данного расчета. Отметим, что при решении данной системы прямая осуществит касание в нижней части окружности (рис. 1).

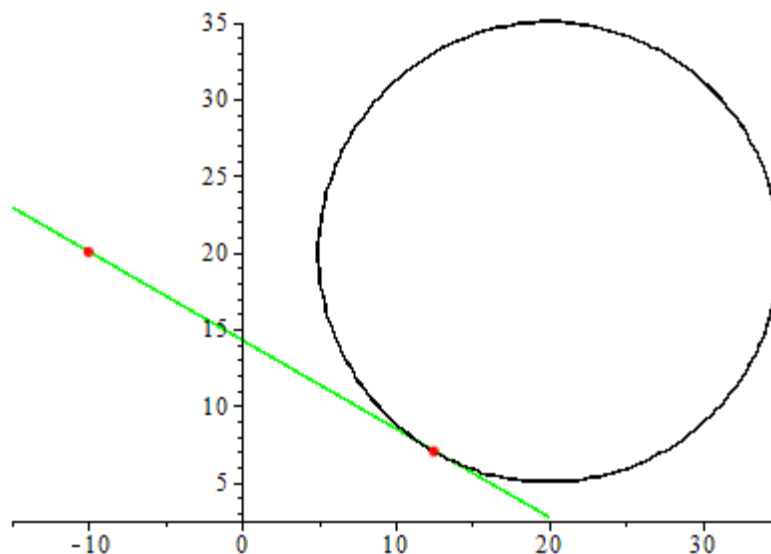


Рис. 1 – Результат решения системы уравнений (13)

Если систему уравнений представить, как

$$\begin{cases} \bar{i} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{r}_1(t_1) - \bar{r}_2(t_2)] = 0; \\ \frac{\bar{r}_{t1}(t_1) \cdot \bar{r}_{t2}(t_2)}{|\bar{r}_{t1}(t_1)| |\bar{r}_{t2}(t_2)|} = -1; \\ \bar{i} \cdot [\bar{p}_1 - \bar{r}_1(t_{12})] = 0; \\ \bar{j} \cdot [\bar{p}_1 - \bar{r}_1(t_{12})] = 0, \end{cases} \quad (14)$$

то прямая осуществит касание в верхней части окружности (рис. 2).

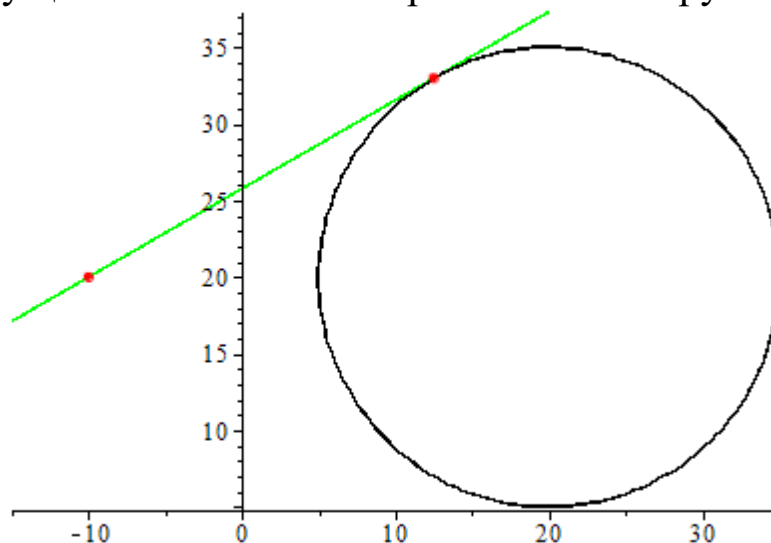


Рис. 2 – Результат решения системы уравнений (11)

Пример программы 1

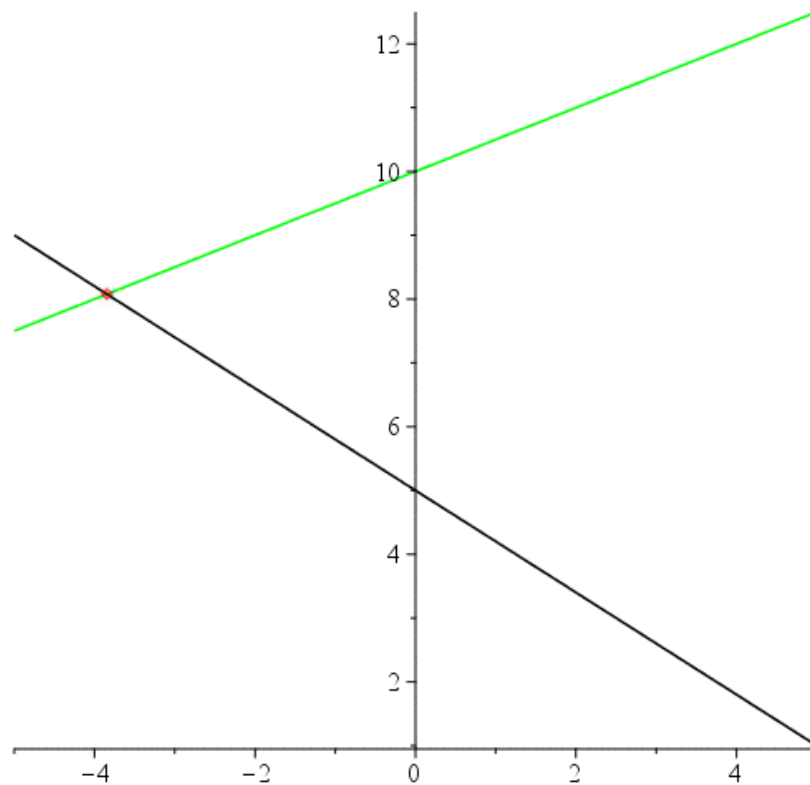
```

> restart : with(plots) :
> #Создаём уравнения прямых в параметрическом виде
> r1(t) := [t, 0.5·t + 10] :
> r2(t) := [t, -0.8·t + 5] :
> #Составляем и решаем систему уравнений для нахождения точки пересечения
>
> res := solve(
      {
        (r1(t1) - r2(t2))[1] = 0,
        (r1(t1) - r2(t2))[2] = 0
      }
    )
      res := {t1 = -3.846153846, t2 = -3.846153846}

> assign(res) :
  #Выполняем присвоение значений переменным записанным в переменной res

> #Выполним геометрические построения прямых и точки пересечения
>
> display(
  plot([op(r1(t)), t=-5..5], color = green), #Построение первой прямой
  plot([op(r2(t)), t=-5..5], color = black), #Построение второй прямой
  pointplot(r1(t1), color = red)
  # Построение точки пересечения, как точки лежащей на первой прямой по
  найденному параметру t1
  )

```



Пример программы 2

```

> restart :
with(LinearAlgebra) :
    #Подключаем модуль для вычисления функций линейной алгебры
with(plots) :

> #Создаём уравнения прямой и окружности в параметрическом виде
> r1(t) := [t, a·t + b] :
> r2(t) := [20 + 15·cos(t), 20 + 15·sin(t)] :
> #Создаём уравнения производных прямой и окружности в параметрическом виде
> dr1(t) := diff(r1(x), x) |_{x=t} :
> dr2(t) := diff(r2(x), x) |_{x=t} :
> # Создаем точку по известным координатам
> p1 := [-10, 20] :
> #Составляем и решаем систему уравнений для нахождения точки касания и
    параметров уравнения касательной к окружности прямой

>
res := solve(
    {
        (r1(t1) - r2(t2))[1] = 0,

        #Два уравнения, определяющие точку пересечения прямой и окружности

        (r1(t1) - r2(t2))[2] = 0,

        (p1 - r1(t12))[1] = 0,

        #Два уравнения, определяющие условие прохождения прямой через точку p1

        (p1 - r1(t12))[2] = 0,

        
$$\frac{\text{DotProduct}(dr1(t1), dr2(t2), \text{conjugate} = \text{false})}{\text{Norm}(\text{convert}(dr1(t1), \text{Vector}), 2) \cdot \text{Norm}(\text{convert}(dr2(t2), \text{Vector}), 2)}$$

        = 1 # Уравнение, определяющее условие касания прямой к окружности

    }
)

res := { a =  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , b =  $-\frac{10\sqrt{3}}{3} + 20$ , t1 =  $\frac{25}{2}$ , t12 = -10, t2 =  $-\frac{2\pi}{3}$  }

> assign(res) :
    #Выполняем присвоение значений переменным записанным в переменной res

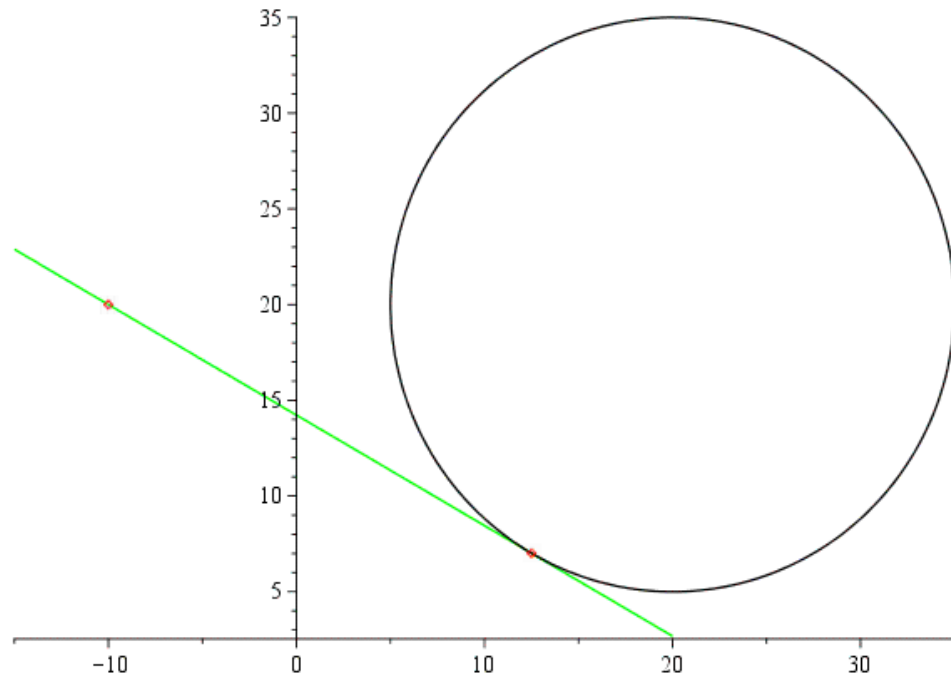
> #Выполним геометрические построения прямой, окружности, точки p1 и точки
    касания

```

```

> display(
  plot([op(r1(t)), t=-15..20], color=green),#Построение прямой
  plot([op(r2(t)), t=0..2·Pi], color=black),
  #Построение второй окружности
  pointplot([p1, r1(t1)], color=red) #Построение точки p1 и точки касания
)

```



```

> # Отображаем найденное уравнение прямой касательной к окружности
> r1(t)

```

$$\left[t, -\frac{\sqrt{3}}{3} t - \frac{10\sqrt{3}}{3} + 20 \right]$$

Индивидуальное задание

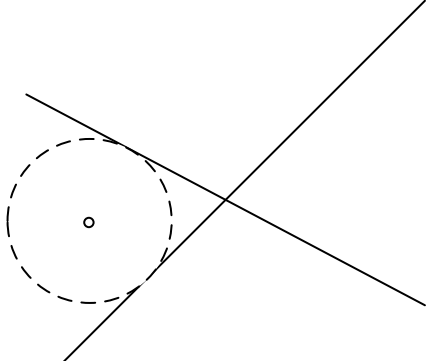
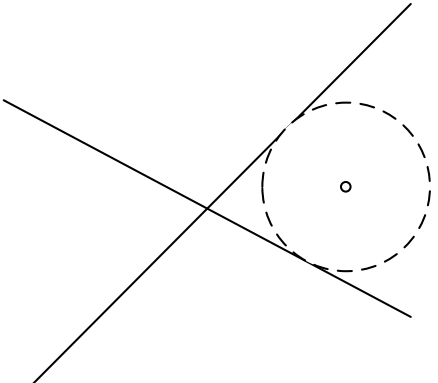
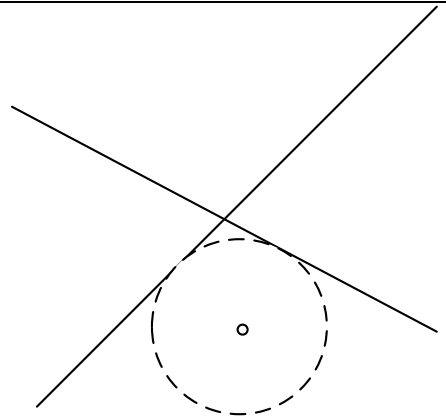
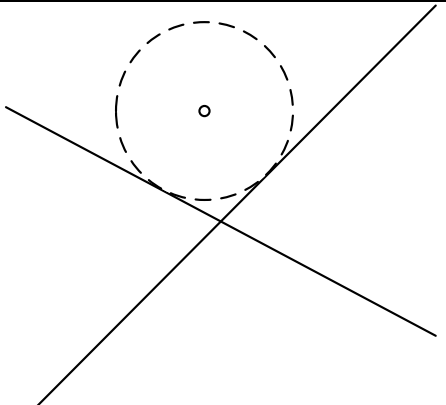
Вар.	Уравнение параболы	Точки прямой
1.	$3x^2 - 7x + 4$	(-2;10), (2;20)
2.	$-5x^2 - 8x + 3$	(-2;-10), (2;-20)
3.	$2y^2 - 9y + 10$	(15;-10), (2;-20)
4.	$-5y^2 - 6y + 1$	(-15;-10), (2;-20)
5.	$3x^2 - 14x + 16$	(-2;10), (2;20)
6.	$-2x^2 - 5x - 3$	(-2;-10), (2;-20)
7.	$3x^2 - 8x + 5$	(15;-10), (2;-20)
8.	$-5x^2 + 9x + 4$	(-15;-10), (2;-20)
9.	$36y^2 - 12y + 1$	(20;10), (2;-20)
10.	$-y^2 - 10y - 24$	(-2;-10), (2;-20)
11.	$x^2 + 6x - 19$	(15;-10), (2;-20)
12.	$-x^2 - 22x - 23$	(-15;-10), (2;-20)
13.	$x^2 - 7x + 12$	(-2;10), (2;20)
14.	$-x^2 - 10x + 25$	(-2;-10), (2;-20)
15.	$16x^2 - 8x + 1$	(15;-10), (2;-20)
16.	$-y^2 - 5y + 6$	(-15;-10), (2;-20)
17.	$x^2 + 2x + 2$	(-2;10), (2;20)
18.	$-2x^2 + 8x + 32$	(-2;-10), (2;-20)

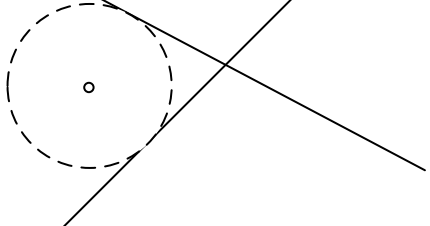
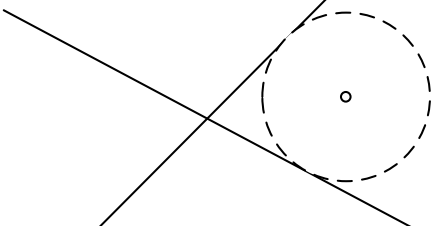
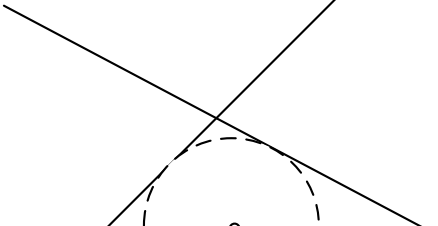
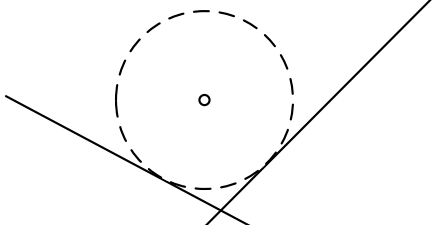
Индивидуальное задание

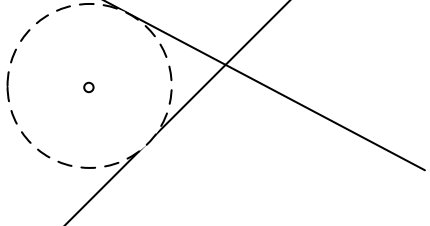
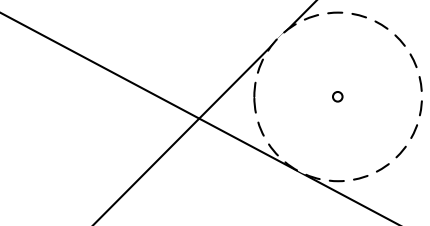
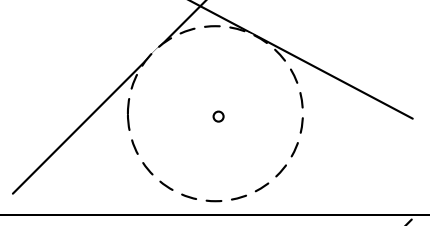
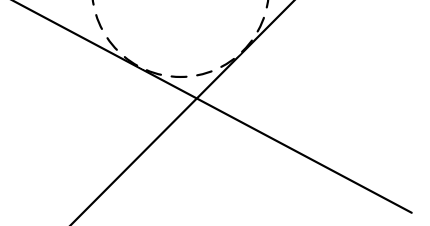
Вар.	Параметры окружности	Точки прямой
1.	$R=40; p_0=(20;15)$	$(-2;10), (2;20)$
2.	$R=50; p_0=(0;15)$	$(-2;-10), (2;-20)$
3.	$R=60; p_0=(5;10)$	$(15;-10), (2;-20)$
4.	$R=70; p_0=(-20;-15)$	$(-15;-10), (2;-20)$
5.	$R=80; p_0=(-10;15)$	$(-2;10), (2;20)$
6.	$R=90; p_0=(-20;15)$	$(-2;-10), (2;-20)$
7.	$R=100; p_0=(10;-15)$	$(15;-10), (2;-20)$
8.	$R=40; p_0=(-20;15)$	$(-15;-10), (2;-20)$
9.	$R=50; p_0=(10;-15)$	$(20;10), (2;-20)$
10.	$R=60; p_0=(-10;15)$	$(-2;-10), (2;-20)$
11.	$R=70; p_0=(-20;-15)$	$(15;-10), (2;-20)$
12.	$R=80; p_0=(5;10)$	$(-15;-10), (2;-20)$
13.	$R=90; p_0=(15;0)$	$(-2;10), (2;20)$
14.	$R=100; p_0=(-20;15)$	$(-2;-10), (2;-20)$
15.	$R=30; p_0=(10;-15)$	$(15;-10), (2;-20)$
16.	$R=60; p_0=(0;15)$	$(-15;-10), (2;-20)$
17.	$R=90; p_0=(10;15)$	$(-2;10), (2;20)$
18.	$R=45; p_0=(20,-30)$	$(-2;-10), (2;-20)$

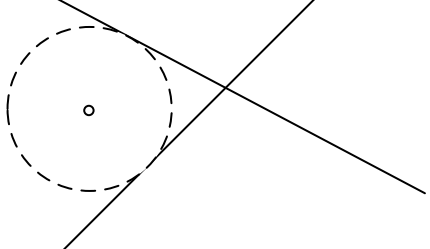
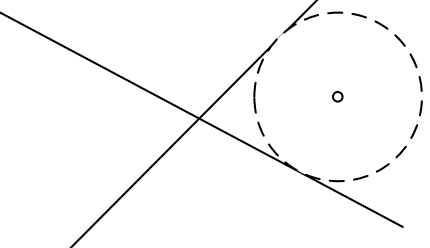
Индивидуальное задание

Вар.	Радиус вписанной окружности	Параметры 1-й прямой	Параметры 2-й прямой	Положение вписанной окружности
1.	40	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
2.	50	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
3.	60	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
4.	70	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	

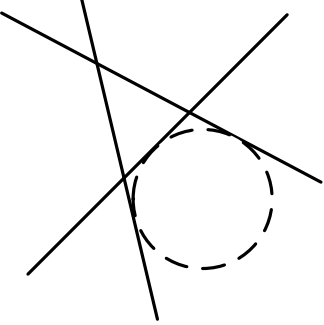
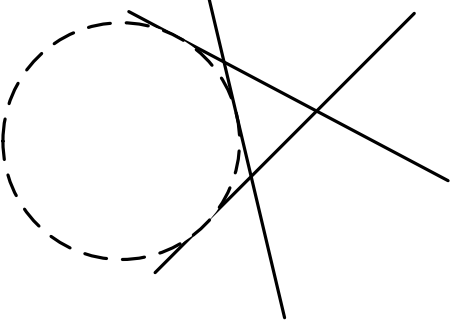
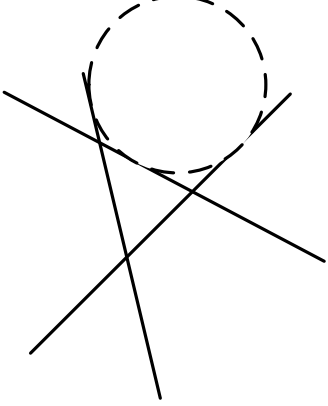
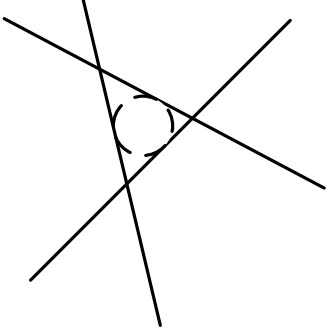
5.	80	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
6.	90	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
7.	100	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
8.	40	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	

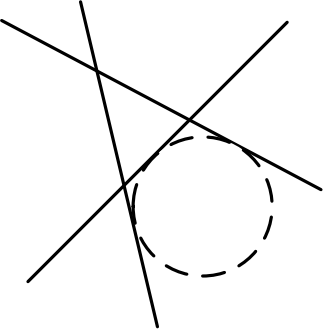
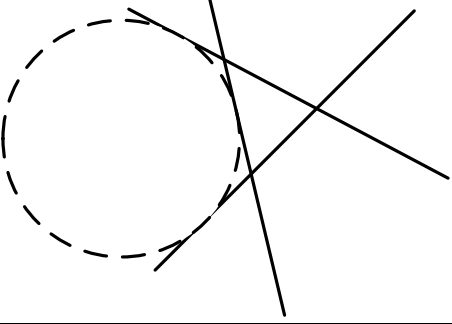
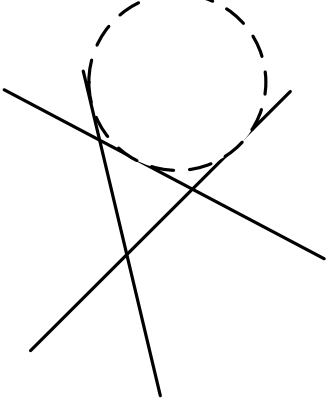
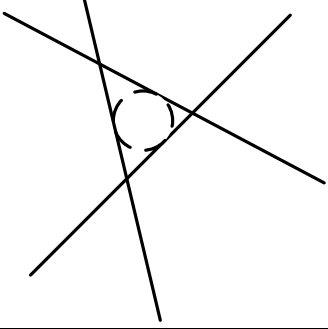
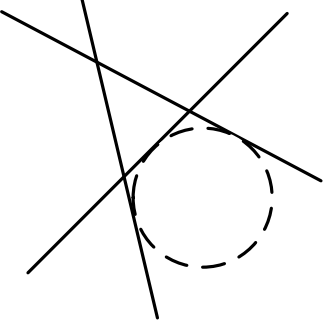
9.	50	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
10.	60	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
11.	70	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
12.	80	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	

13.	90	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
14.	100	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
15.	30	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
16.	60	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	

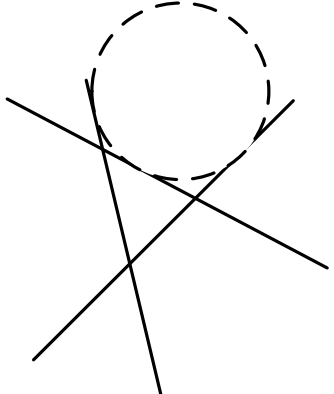
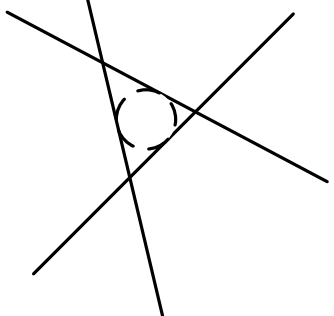
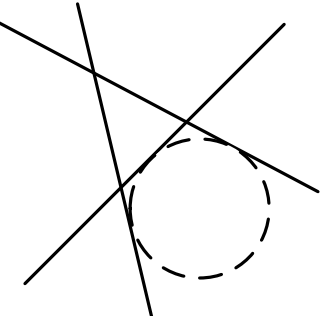
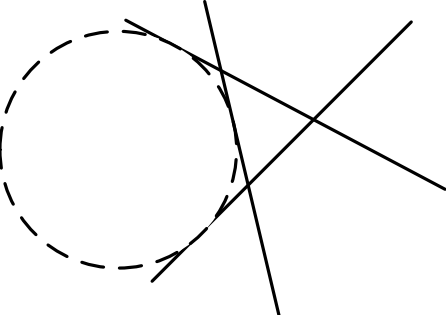
17.	90	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
18.	45	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	

Индивидуальное задание

Вар.	Параметры 1-й прямой	Параметры 2-й прямой	Параметры 3-й прямой	Положение вписанной окружности
1.	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	$a_3=-0.5;$ $b_3=100$	
2.	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	$a_3=-0.9;$ $b_3=-100$	
3.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	$a_3=0.9;$ $b_3=90$	
4.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=0.9;$ $b_3=-100$	

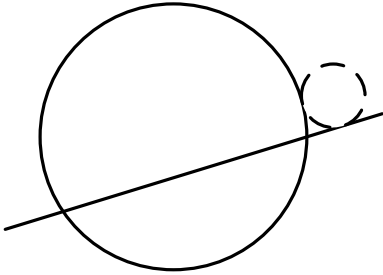
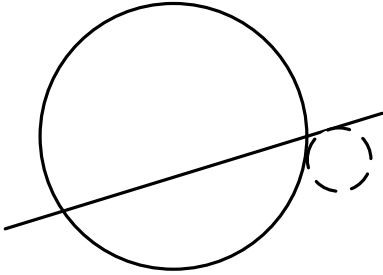
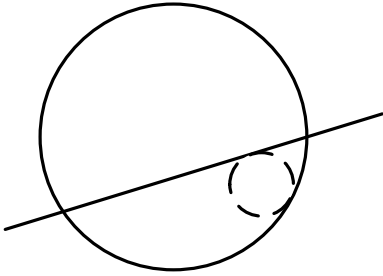
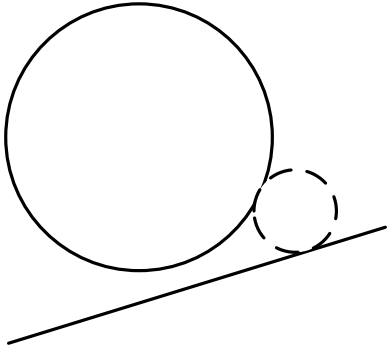
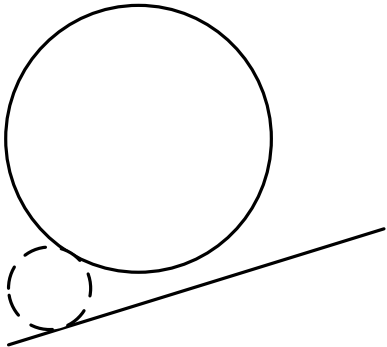
5.	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=-1.9;$ $b_3=120$	
6.	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	$a_3=-0.5;$ $b_3=-100$	
7.	$a_1=-0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	$a_3=-0.9;$ $b_3=80$	
8.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	$a_3=0.9;$ $b_3=-120$	
9.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=0.9;$ $b_3=70$	

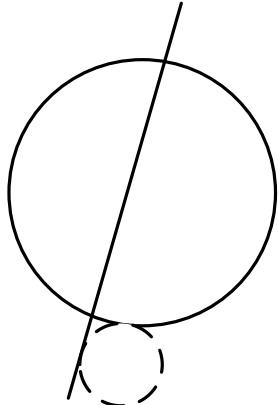
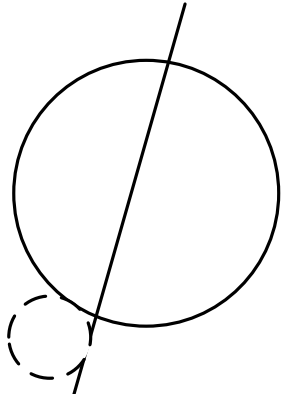
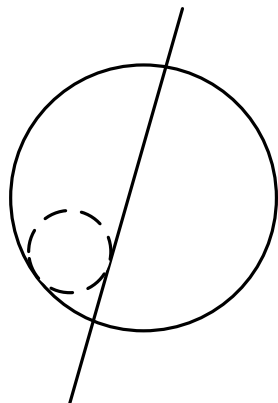
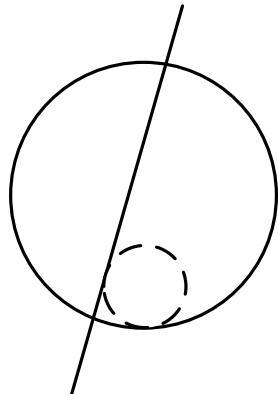
10.	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=-1.9;$ $b_3=-100$	
11.	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	$a_3=-0.5;$ $b_3=140$	
12.	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	$a_3=-0.9;$ $b_3=-140$	
13.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	$a_3=0.9;$ $b_3=130$	
14.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=0.9;$ $b_3=-170$	

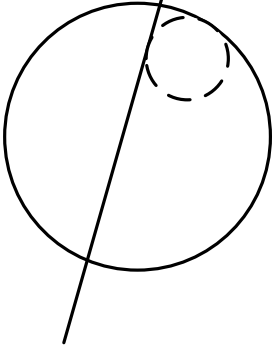
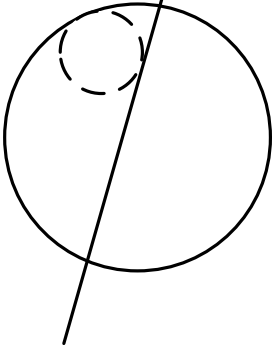
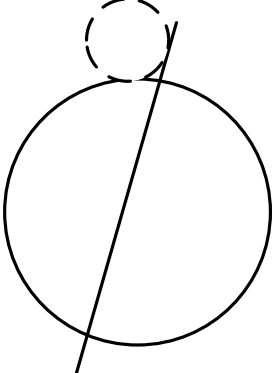
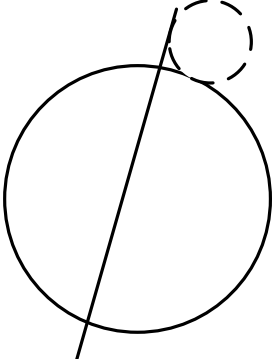
15.	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	$a_3=-1.9;$ $b_3=110$	
16.	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	$a_3=-0.5;$ $b_3=-110$	
17.	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	$a_3=-0.9;$ $b_3=100$	
18.	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	$a_3=0.9;$ $b_3=-100$	

Индивидуальное задание

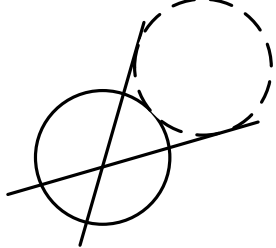
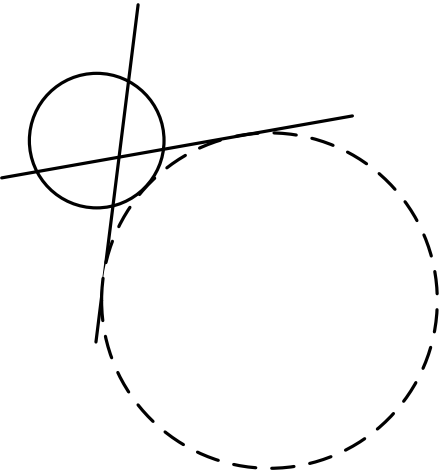
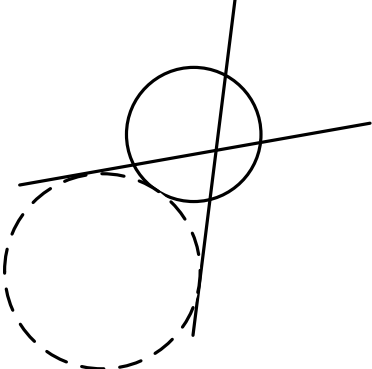
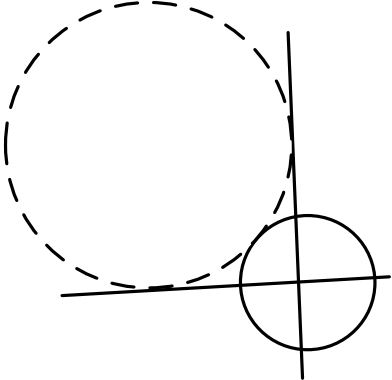
Вар.	Параметры 1-й прямой	Параметры окружности	Радиус вписанной окружности	Положение вписанной окружности
1.	$a=0.5;$ $b=-20$	$p_0=(-20; 30);$ $R_1=70$	20	
2.	$a=0.6;$ $b=-10$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=80$	25	
3.	$a=0.2;$ $b=-10$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=100$	10	
4.	$a=0.3;$ $b=20$	$p_0=(-20; -30);$ $R_1=120$	15	
5.	$a=0.3;$ $b=-20$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=90$	15	

6.	$a=0.4;$ $b=-30$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=90$	20	
7.	$a=0.6;$ $b=-10$	$p_0=(-20; 30);$ $R_1=70$	20	
8.	$a=0.2;$ $b=-10$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=80$	25	
9.	$a=0.2;$ $b=-140$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=100$	50	
10.	$a=-0.4;$ $b=-160$	$p_0=(-20; -30);$ $R_1=90$	60	

11.	$a=4;$ $b=-10$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=90$	15	
12.	$a=7;$ $b=20$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=100$	20	
13.	$a=6;$ $b=50$	$p_0=(-20; 30);$ $R_1=70$	20	
14.	$a=10;$ $b=-50$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=80$	25	

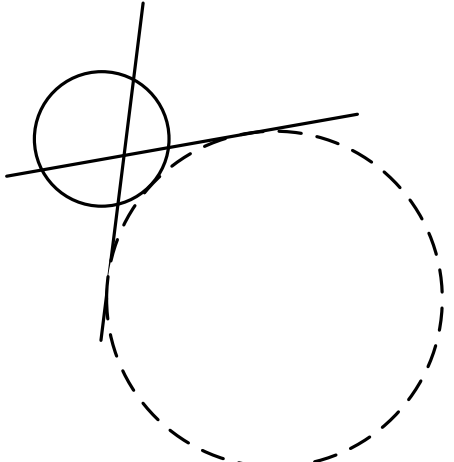
15.	$a=8;$ $b=10$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=100$	10	
16.	$a=6;$ $b=-10$	$p_0=(-20; -30);$ $R_1=120$	15	
17.	$a=6;$ $b=50$	$p_0=(20; -30);$ $R_1=90$	15	
18.	$a=10;$ $b=-50$	$p_0=(20; 30);$ $R_1=90$	20	

Индивидуальное задание

Вар.	Параметры окружности	Параметры 1-й прямой	Параметры 2-й прямой	Положение вписанной окружности
1.	$p_0=(0; 15);$ $R_1=100$	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
2.	$p_0=(10; 15);$ $R_1=130$	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
3.	$p_0=(15; 0);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
4.	$p_0=(0; -15);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	

5.	$p_0=(-10; 15);$ $R_1=150$	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
6.	$p_0=(-10; -15);$ $R_1=130$	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
7.	$p_0=(20; 0);$ $R_1=100$	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
8.	$p_0=(-15; 0);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
9.	$p_0=(0; -15);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
10.	$p_0=(-10; 15);$ $R_1=150$	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	

11.	$p_0=(-10; -15);$ $R_1=130$	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
12.	$p_0=(20; 0);$ $R_1=100$	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	
13.	$p_0=(-15; 0);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
14.	$p_0=(0; 15);$ $R_1=100$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
15.	$p_0=(10; 15);$ $R_1=130$	$a_1=1.9;$ $b_1=-10$	$a_2=0.1;$ $b_2=-20$	
16.	$p_0=(15; 0);$ $R_1=100$	$a_1=0.5;$ $b_1=10$	$a_2=-0.6;$ $b_2=-10$	
17.	$p_0=(0; -15);$ $R_1=100$	$a_1=0.9;$ $b_1=10$	$a_2=-0.8;$ $b_2=20$	

18.	$p_0=(-10;$ $15);$ $R_1=150$	$a_1=-0.9;$ $b_1=-10$	$a_2=-0.1;$ $b_2=20$	
-----	------------------------------------	--------------------------	-------------------------	---

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Мокимова
« 14 » _____ г.



ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА И РАСЧЕТ ЕЁ ХАРАКТЕРИСТИК В СИСТЕМЕ MAPLE

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоя-
тельной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Построение векторной функции скалярного аргумента и расчет её характеристик в системе Maple : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 21 с.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы: Получить теоретические сведения и практические навыки построения векторной функции скалярного аргумента и расчет её характеристик в системе *Maple*.

2 Задание:

2.1. Задать в системе Maple уравнение векторной функции скалярного аргумента (плоской кривой) $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в соответствии с индивидуальным заданием (приложение А).

2.2. Выполнить геометрическое построение данной кривой в интервале $[t_1, t_2]$.

2.3. Построить уравнение первой производной кривой по параметру t (касательной к кривой \vec{r}) и выполнить её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале $[t_1, t_2]$.

2.4. Построить уравнение второй производной кривой по параметру t и выполнить её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале $[t_1, t_2]$.

2.5. Построить уравнение для расчета длины плоской кривой $s(t)$ выполнить её расчет в интервале $[t_1, t_2]$.

2.6. Построить уравнение нормали к плоской кривой $\vec{n}(t)$ и выполнить её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале $[t_1, t_2]$.

2.7. Построить уравнения для расчета радиуса кривизны векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

2.8. Построить график изменения радиуса кривизны векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в интервале $[t_1, t_2]$.

3 Краткие теоретические сведения

3.1. Векторные функции скалярного аргумента

Вектор называется векторной функцией скалярного аргумента, если каждому значению скаляра из области допустимых значений соответствует определенное значение вектора:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Вектор $\vec{\alpha}$ называется бесконечно малым, если его модуль стремится к нулю.

Производной векторной функции по ее скалярному аргументу называется предел отношения приращения вектора к соответ-

ствующему приращению аргумента, когда это приращение стремится к нулю:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}'_t = \vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Применительно к векторной функции скалярного аргумента рассматриваются также дифференциал

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot dt$$

и интегралы, в частности определенный интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{r} dt.$$

Если векторную функцию скалярного аргумента рассматривать в декартовой системе координат, то

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k};$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ 1 \end{bmatrix}.$$

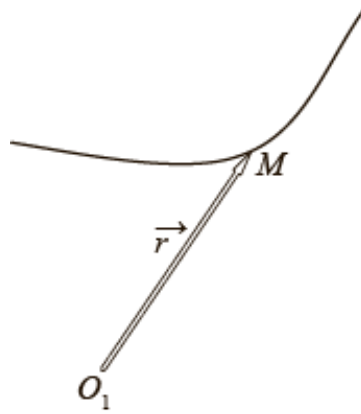
$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2};$$

3.2. Понятие кривой

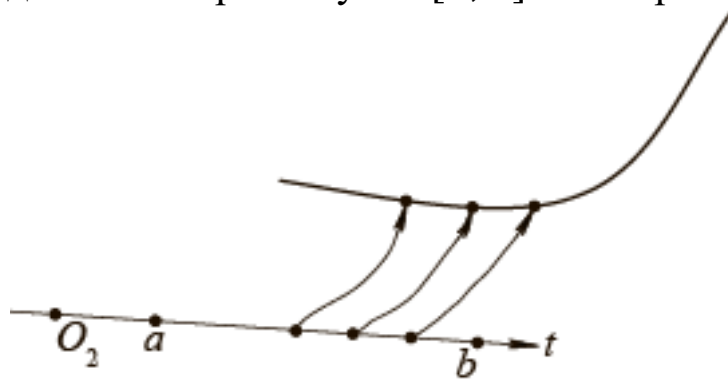
Кривую опишем при помощи радиус-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

соединяющего произвольный фиксированный центр и точку, принадлежащую кривой.



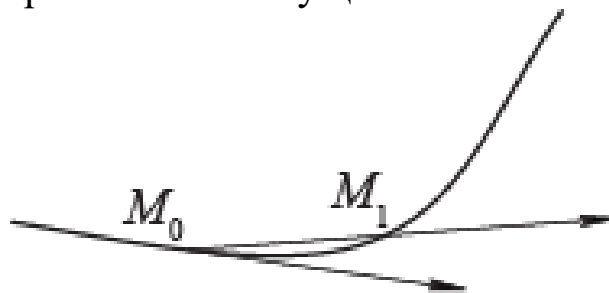
Кривая задается на промежутке $[a, b]$ некоторой числовой оси.



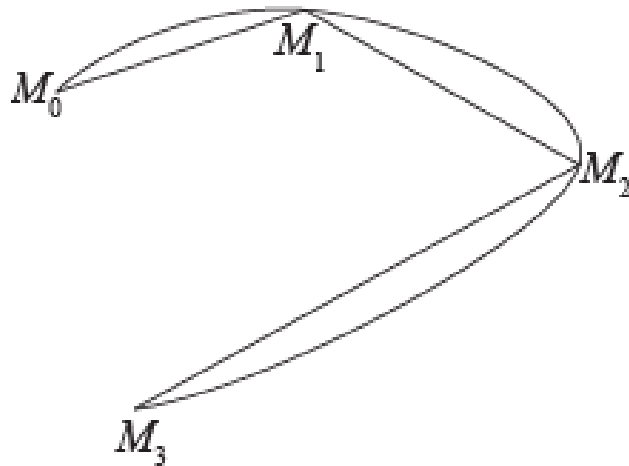
Кривая называется регулярной, если во всех точках заданного промежутка \vec{r} непрерывно дифференцируема и $\dot{\vec{r}} \neq \mathbf{0}$.

Пусть M_0, M_1 - точки, принадлежащие регулярной кривой и соответствующие параметрам $t_0 < t_1$.

Прямая M_0M_1 называется направленной секущей кривой в точке M_0 . Направленной касательной к кривой в точке M_0 называется предел направленных секущих в этой точке при $t_1 \rightarrow t_0$.



Длиной регулярной кривой называется предел длины ломаной, вписанной в кривую, при стремлении к нулю длины наибольшего сегмента ломаной.



Всякая регулярная кривая имеет определенную длину, если регулярная кривая задана векторной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то длина кривой

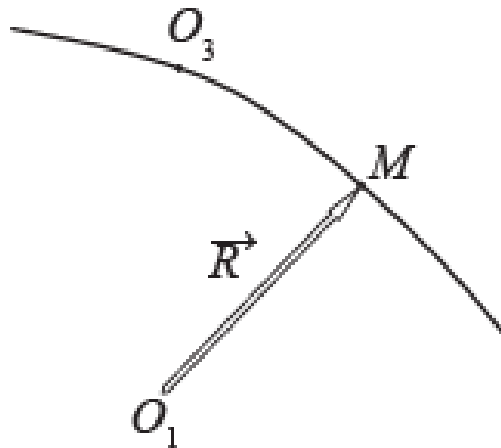
$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}| dt.$$

Для длины кривой справедлив:

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

Введем такой скалярный аргумент радиус-вектора \vec{R} точки регулярной кривой, как длина дуги s , отсчитываемая от некоторого центра, взятого на кривой.

Данный аргумент называется естественным.



Имеет место соотношение:

$$\left| \frac{d\vec{R}}{ds} \right| = 1.$$

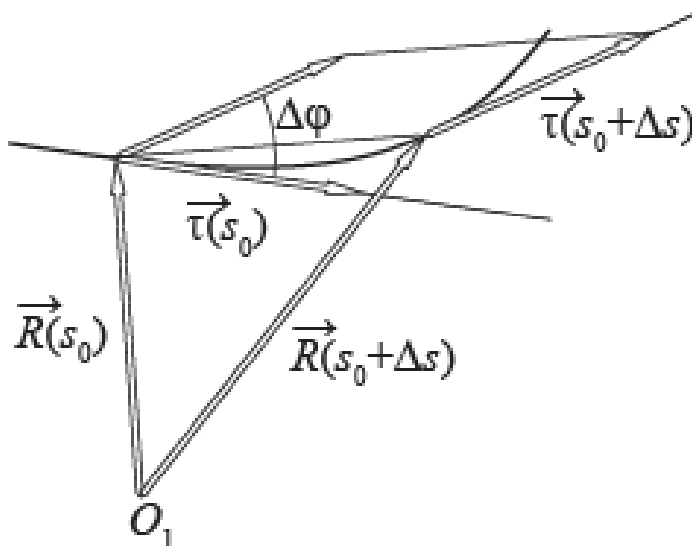
3.3. Кривизна кривой

На регулярной кривой возьмем две точки, радиус-векторы которых обозначим $\vec{R}(s_0)$, $\vec{R}(s_0 + \Delta s)$.

Единичные векторы направленных касательных к траектории в указанных точках обозначим $\vec{\tau}(s_0)$, $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$ соответственно

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{R}(s)}{ds}$$

Угол $\Delta\varphi$ между векторами $\vec{\tau}(s_0)$, $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$ называется углом смежности траектории в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{R}(s_0)$.



Число

$$\kappa = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

называется кривизной. Кривизна прямой равна 0.

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|.$$

Радиус кривизны окружности во всех ее точках равен радиусу окружности.

В каждой своей точке регулярная кривая характеризуется кривизной и для всех значений естественного параметра справедливо

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n},$$

где \vec{n} - это единичный вектор, называемый главной нормалью, причем

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}$$

и \vec{n} направлен в сторону вогнутости плоской кривой.

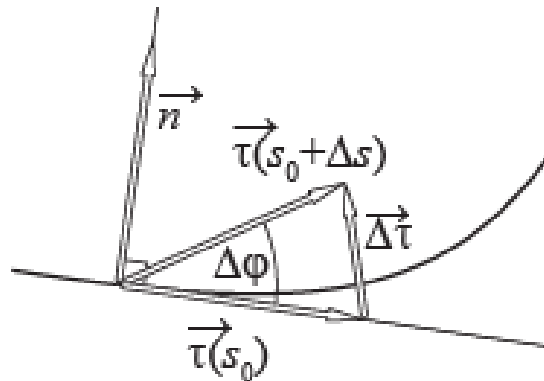
Вектор \vec{n} и кривизну кривой можно рассчитать по формулам

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|} = \frac{\frac{d^2\vec{R}}{ds^2}}{\left| \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} \right|}$$

и

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} \right|.$$

Плоскость, проходящая через векторы $\vec{\tau}$, \vec{n} , называется соприкасающейся. Соприкасающаяся плоскость является предельным положением плоскости, проходящей через векторы $\vec{\tau}(s_0)$, $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$, приложенные в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{R}(s_0)$.



Во всех точках плоской регулярной кривой определена одна и та же соприкасающаяся плоскость, совпадающая с плоскостью самой кривой.

Для регулярной кривой справедлива формула:

$$\kappa = \frac{\left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3}.$$

В случае, если рассматривается плоская регулярная кривая

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

в плоскости xOy , то

$$\vec{n} = \frac{[-\dot{y}, \dot{x}]}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

и

$$\kappa = \frac{|\ddot{x} \cdot \dot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

В случае, если $t = x$, т. е. $y = f(x)$, то

$$\kappa = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

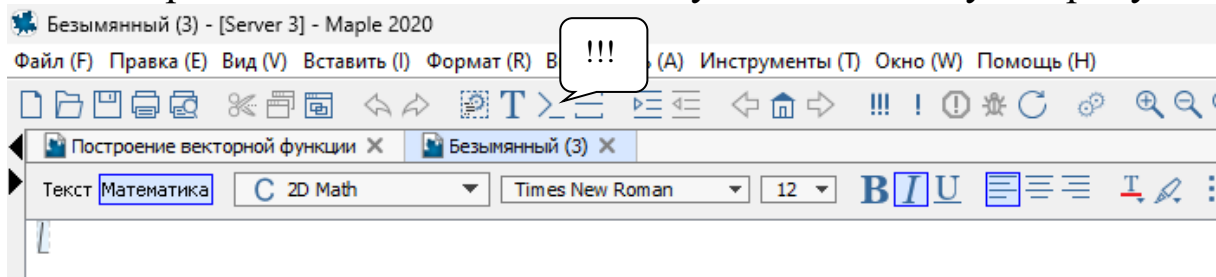
4. Пример выполнения работы

Рассмотрим векторную функцию

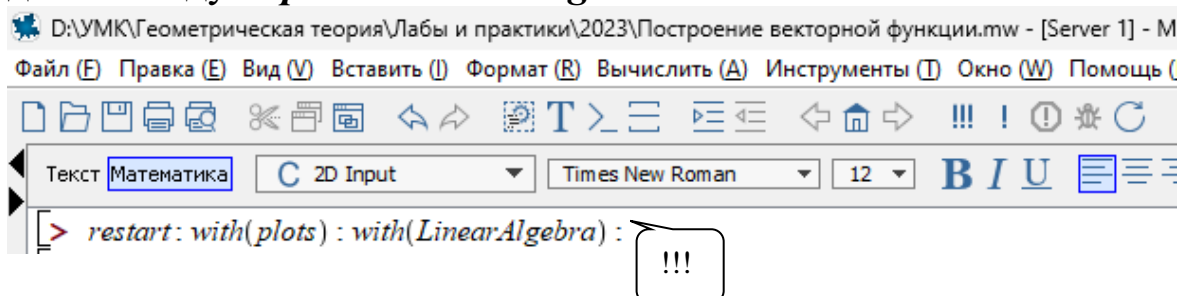
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

на интервале $[0,5]$.

Запускаем *Maple* и создаем (если необходимо) новый документ. Перед началом вставляем в документ командную строку.



В новой строке вводим команду *restart* и подключаем необходимые модули *plots* и *LinearAlgebra*.

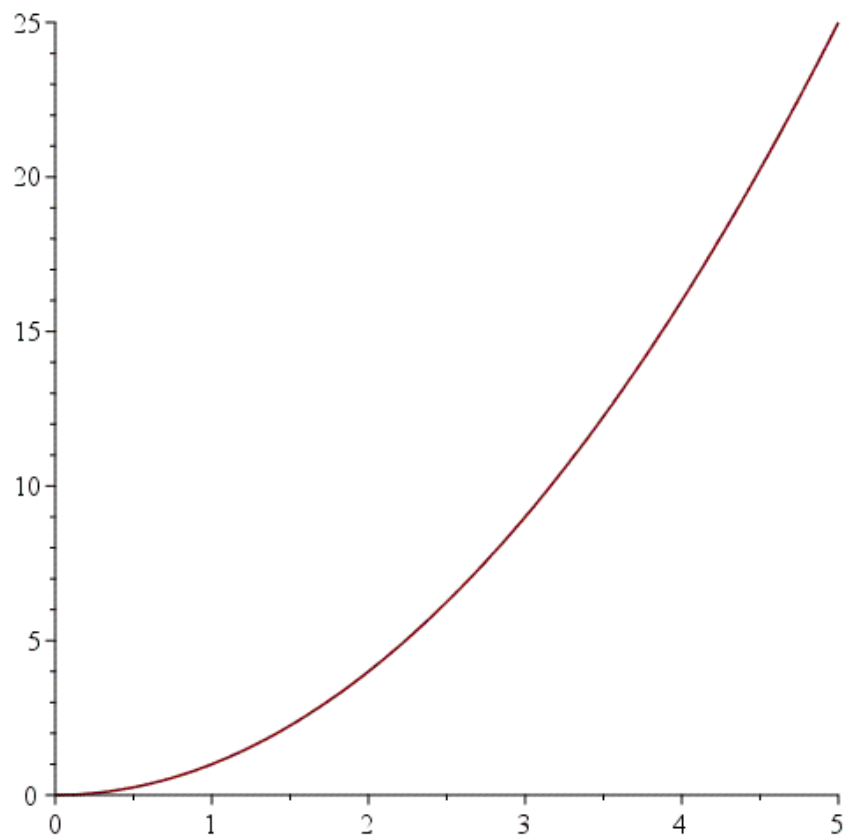


4.1. Задаем в системе Maple уравнение векторной функции скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в виде вектора строки.


```
D:\УМК\Геометрическая теория\Лабы и практики\2023\Построение векторной функции.mw - [Server 1] - M
Файл (F) Правка (E) Вид (V) Вставить (I) Формат (R) Вычислить (A) Инструменты (T) Окно (W) Помощь
Текст Математика C 2D Input Times New Roman 12 B I U
> restart: with(plots) : with(LinearAlgebra) :
> r(t) := [t, t^2];
```

4.2. Для выполнения геометрического построения данной кривой воспользуемся командой *plot*.

> *plot*([op(r(t)), t = 0 ..5]);



4.3. Строим уравнение первой производной кривой по параметру t

> $dr(t) := \text{subs}(tt = t, \text{diff}(r(tt), tt)) :$

Для просмотра результата в новой строке выполним команду $dr(t)$;

> $dr(t)$;

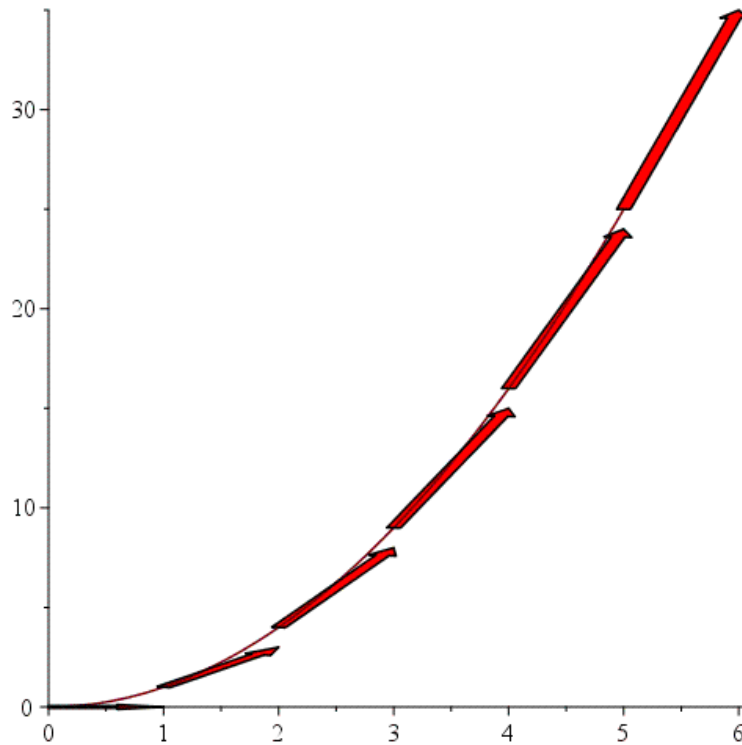
$[1, 2t]$

и выполняем её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале $[0, 5]$

```

display(
> plot([op(r(t)), t = 0 ..5]),
  arrow(
    {seq([r(t), dr(t)], t = 0 ..5, 1)},
    width = 0.12, head_length = 0.4, color = red
  )
)

```



4.4. Строим уравнение второй производной кривой по параметру t

```
> ddr(t) := evalf(subs(tt = t, diff(r(tt), [tt$2]))):
```

Для просмотра результат в новой строке выполним команду $dr(t)$;

```
> ddr(t)
```

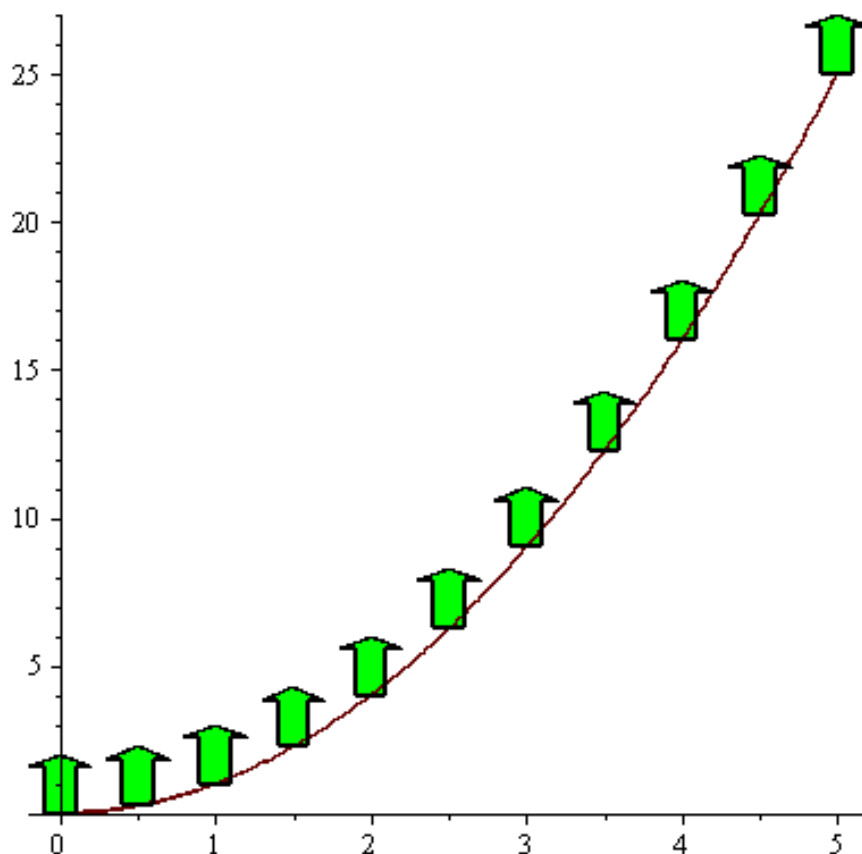
[0., 2.]

и выполняем её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале **[0, 5]**

```

> display(
  plot([op(r(t)), t = 0 ..5]),
  arrow(
    {seq([r(t), ddr(t)], t = 0 ..5, 0.5)},
    width = 0.2, head_length = 0.4, color = green
  )
)

```



4.5. Далее создаем функцию, которая позволит вычислить длину дуги по формуле $s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}| dt$

```

> s_t(t0, t1) := value(
  Int(
    Norm(
      convert(dr(t), Vector),
      2),
    t = t0 ..t1
  )
);

```

Выполним расчет длины дуги на заданном интервале [0, 5]

```

> evalf(s_t(0, 5))

```

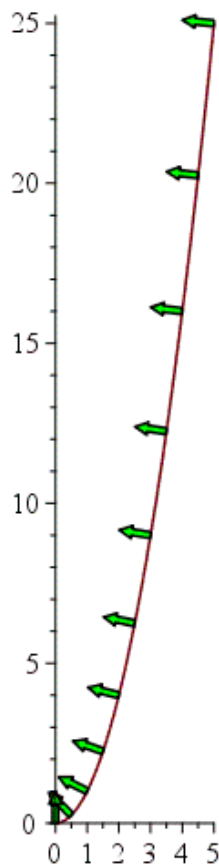
25.87424479

4.6. Построим уравнение нормали к плоской кривой

$$> n(t) := \text{evalf}\left(\frac{[-dr(t)[2], dr(t)[1]]}{\sqrt{dr(t)[1]^2 + dr(t)[2]^2}}\right)$$

и выполняем её геометрическое представление в заданных точках исходной кривой в интервале **[0, 5]**

```
> display(
  plot([op(r(t)), t = 0 .. 5]),
  arrow(
    {seq([r(t), n(t)], t = 0 .. 5, 0.5)},
    width = 0.2, head_length = 0.4, color = green
  )
)
```



4.7. Построим уравнения для расчета величин кривизны и радиуса кривизны векторной функции

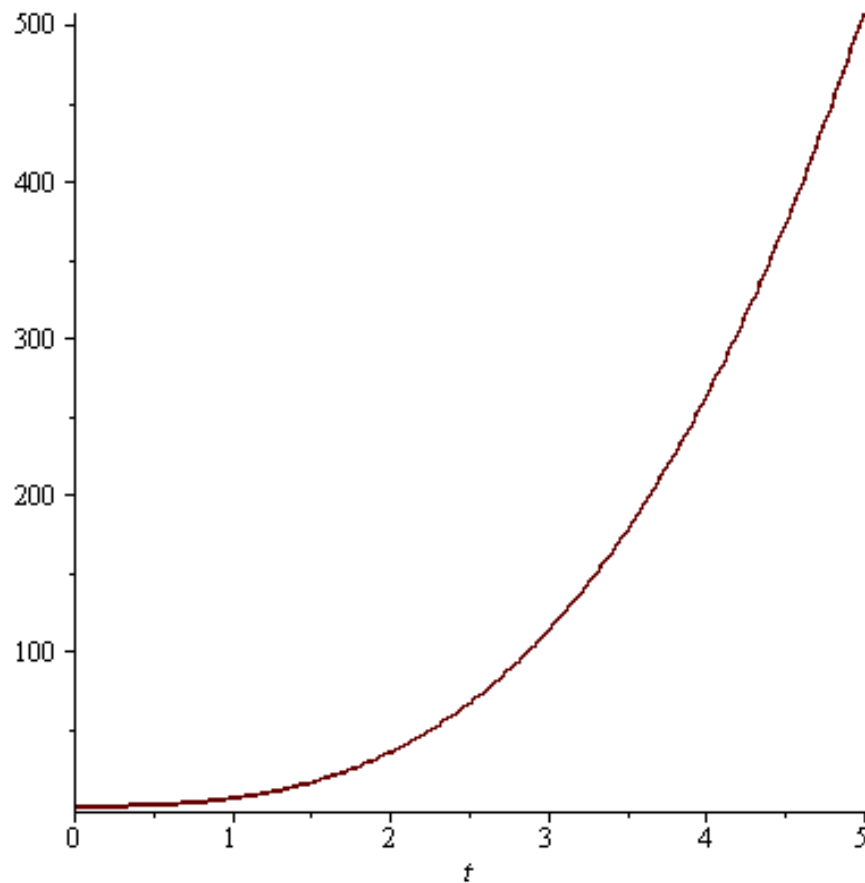
$$> Ro(t) := \frac{(dr(t)[1]^2 + dr(t)[2]^2)^{\frac{3}{2}}}{|ddr(t)[1] \cdot dr(t)[2] - dr(t)[1] \cdot ddr(t)[2]|}$$

> $Ro(t)$;

$$0.5000000000 (4.t^2 + 1.)^{3/2}$$

4.8. Построим графики изменения радиуса кривизны векторной функции в интервале параметра $t \in [0,5]$.

> $plot(Ro(t), t = 0..5)$



В приложении Б приведена программа выполнения данного расчета.

Индивидуальное задание

Вар.	Векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$	Интервал t
1.	$\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[0,3]
2.	$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ t^2 + t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,5]
3.	$\begin{bmatrix} \sin(t) \\ e^{-(t + \sin(t))} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[2,6]
4.	$\begin{bmatrix} t^3 \\ t + t^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[-1,1]
5.	$\begin{bmatrix} \sin(t) \\ t^2 + t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[0,4]
6.	$\begin{bmatrix} \sin(t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \\ e^{-(t + \sin(t))} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[3,6]

7.		$\begin{bmatrix} t^{-2} \\ t^{\ln(t)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,5]
8.		$\begin{bmatrix} t \\ e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[7,6]
9.		$\begin{bmatrix} t \\ t^{-2} \cdot e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,7]
10.		$\begin{bmatrix} t^{-3} \\ t^{-2} \cdot e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,3]
11.		$\begin{bmatrix} t^{-3} \\ \ln(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,5]
12.		$\begin{bmatrix} t^{-2} \\ t^{\ln(t)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,5]
13.		$\begin{bmatrix} t^2 \\ t^{-3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[7,6]

14.		$\begin{bmatrix} t^{-2} \\ t^{-3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,7]
15.		$\begin{bmatrix} \ln(t) \\ e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,3]
16.		$\begin{bmatrix} \ln(t) \\ t^2 + t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,5]
17.		$\begin{bmatrix} \log_{10}(t) \\ t^{-2} + t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,7]
18.		$\begin{bmatrix} \sin(t) \\ t^{\cos(t)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1,3]

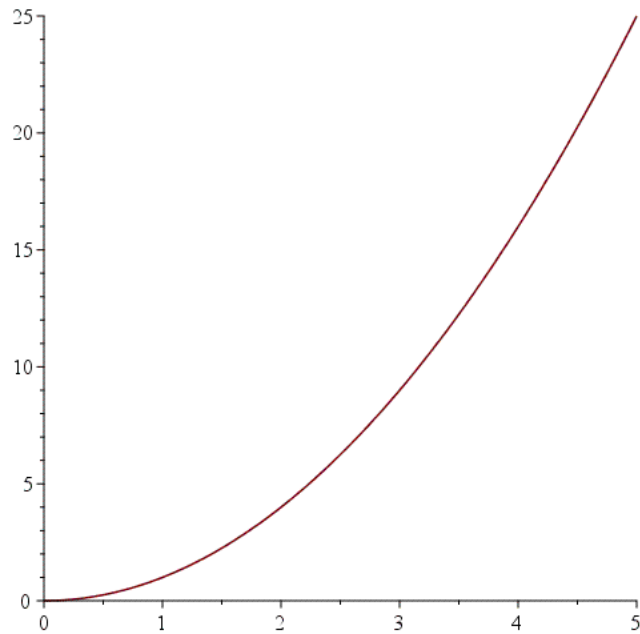
Пример программы

```
> restart : with(plots) : with(LinearAlgebra) :
```

```
> r(t) := [t, t^2];
```

$$r := t \mapsto [t, t^2]$$

```
> plot([op(r(t)), t=0..5]);
```

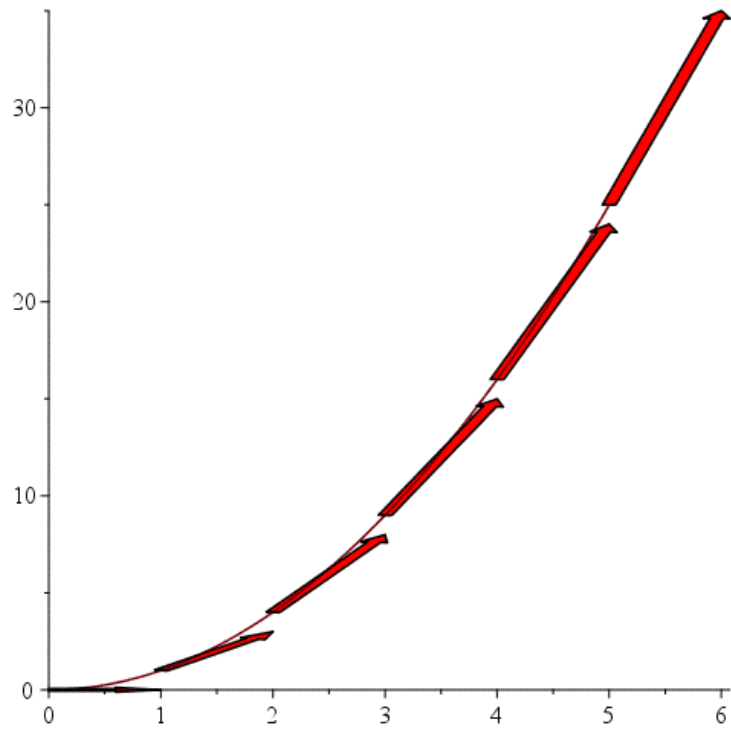


```
> dr(t) := subs(tt=t, diff(r(tt), tt)) :
```

```
> dr(t);
```

$$[1, 2 t]$$

```
> display(
  plot([op(r(t)), t=0..5]),
  arrow(
    {seq([r(t), dr(t)], t=0..5, 1)},
    width=0.12, head_length=0.4, color=red
  )
)
```

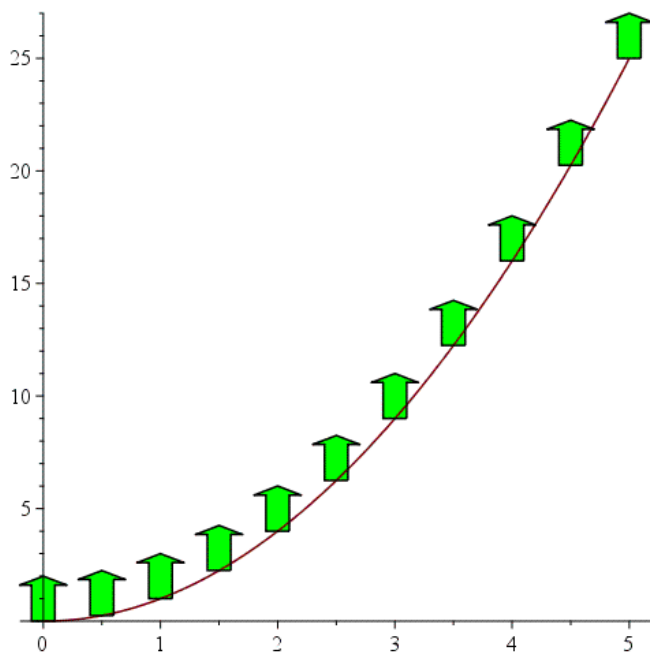


```
> ddr(t) := evalf(subs(tt = t, diff(r(tt), [tt$2]))):
```

```
> ddr(t)
```

```
[0., 2.]
```

```
> display(
  plot([op(r(t)), t = 0..5]),
  arrow(
    {seq([r(t), ddr(t)], t = 0..5, 0.5)},
    width = 0.2, head_length = 0.4, color = green
  )
)
```



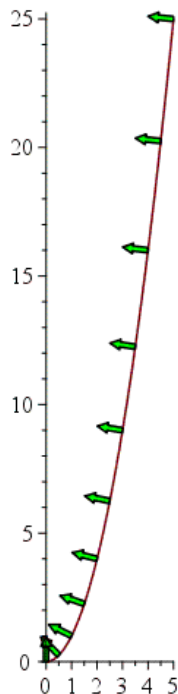
```
> s_t(t0, t1) := value(
    Int(
        Norm(
            convert(dr(t), Vector),
            2),
        t = t0 .. t1
    )
);

s_t := (t0, t1) ↦ value( ∫t0t1 Norm(convert(dr(t), Vector), 2) dt )
```

```
> evalf(s_t(0, 5))
25.87424479
```

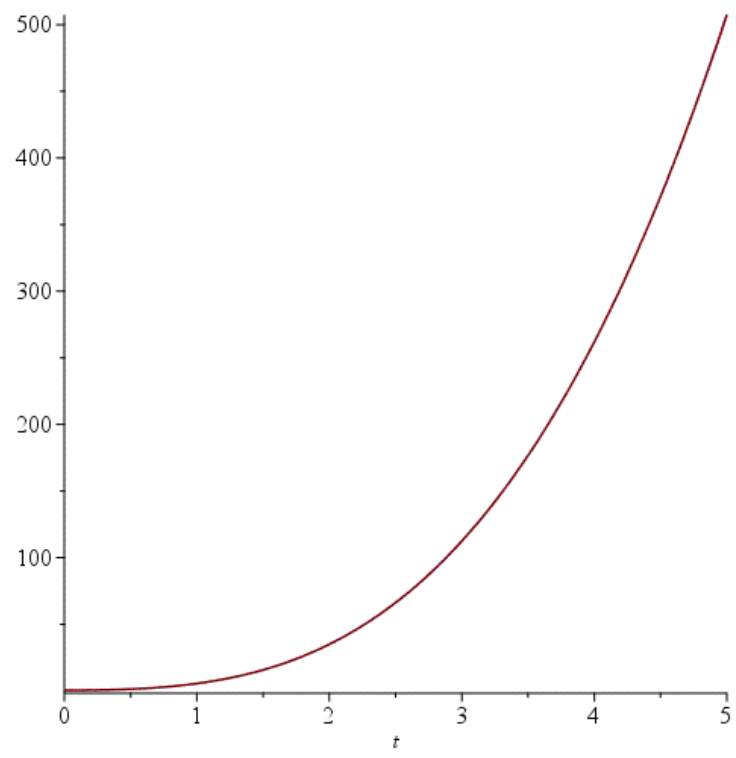
```
> n(t) := evalf( ( [-dr(t)[2], dr(t)[1]] /
    sqrt(dr(t)[1]^2 + dr(t)[2]^2) )
n := t ↦ evalf( ( [-dr(t)_2, dr(t)_1] /
    sqrt(dr(t)_1^2 + dr(t)_2^2) )
```

```
> display(
    plot([op(r(t)), t = 0 .. 5]),
    arrow(
        {seq([r(t), n(t)], t = 0 .. 5, 0.5)},
        width = 0.2, head_length = 0.4, color = green
    )
)
```



```
> Ro(t) := (dr(t)[1]^2 + dr(t)[2]^2)^(3/2) /
    |ddr(t)[1]·dr(t)[2] - dr(t)[1]·ddr(t)[2]|
Ro(t) := 0.5000000000 (4 t^2 + 1)^(3/2)
```

> plot(Ro(t), t = 0 ..5)



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Жакимонова
« 14 » _____ г.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Методические указания к выполнению лабораторной и
самостоятельной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Решение задачи о построении уравнения линии пересечения поверхностей : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 12 с.: ил. 3.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы: Получить теоретические сведения и практические навыки аналитического построения уравнения линии пересечения поверхностей.

2 Задание:

1) Изучить краткие теоретические сведения об аналитическом построении уравнения линии пересечения поверхностей.

2) Рассмотреть пример решения подобной задачи в Maple.

3) Выполнить построение уравнения линии пересечения поверхностей в Maple, согласно своего варианта (см. приложение А).

3 Краткие теоретические сведения

Если две поверхности представлены в параметрическом виде

$$\bar{r}_1(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} x_1(u_1, v_1) \\ y_1(u_1, v_1) \\ z_1(u_1, v_1) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \bar{r}_2(u_2, v_2) = \begin{bmatrix} x_2(u_2, v_2) \\ y_2(u_2, v_2) \\ z_2(u_2, v_2) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

то уравнение линии их пересечения может быть получено путем решения векторного уравнения

$$\bar{r}_1(u_1, v_1) = \bar{r}_2(u_2, v_2) \quad (2)$$

относительно любых трех параметров из возможных u_1, v_1, u_2, v_2 . Так например, если решить данное уравнение относительно параметров u_1, v_1, u_2 , то станет возможным их представление в виде функций

$$u_1 = u_1(v_2), v_1 = v_1(v_2), u_2 = u_2(v_2) \quad (3)$$

от параметра v_2 и тогда уравнение линии пересечения поверхностей $\bar{r}_{12}(v_2)$ можно получить, как

$$\bar{r}_{12}(v_2) = \bar{r}_1(u_1(v_2), v_1(v_2)) \quad (4)$$

или

$$\bar{r}_{12}(v_2) = \bar{r}_2(u_2(v_2), v_2). \quad (5)$$

Рассмотрим пример построения линии пересечения шара и косоуго конуса (рис. 1).

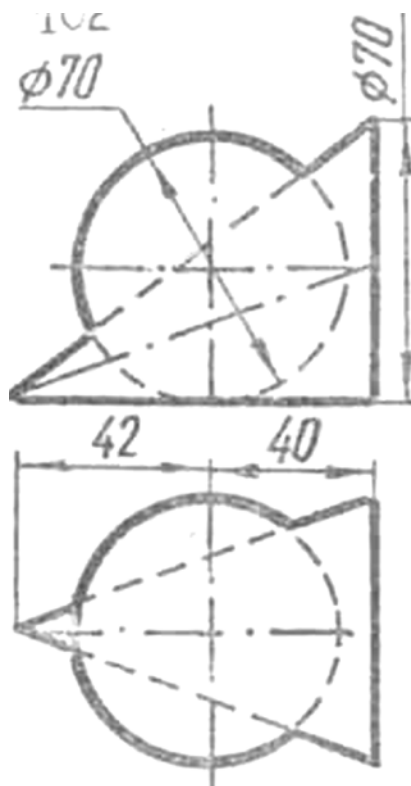


Рис. 1 Исходные данные для расчета

Выполним аналитическое представление поверхности шара

$$\bar{r}_1(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} x_1(u_1, v_1) \\ y_1(u_1, v_1) \\ z_1(u_1, v_1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(u_1) \sin(v_1) \\ R \sin(u_1) \sin(v_1) \\ R \cos(v_1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

и косоуго конуса

$$\bar{r}_2(u_2, v_2) = \begin{bmatrix} x_2(u_2, v_2) \\ y_2(u_2, v_2) \\ z_2(u_2, v_2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 - 42 \\ R_2 v_2 \cos(u_2) / 82 + 35v_2 / 82 - 35 \\ R_2 v_2 \sin(u_2) / 82 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда векторное уравнение (2) запишем как систему

$$\begin{cases} R \cos(u_1) \sin(v_1) = v_2 - 42; \\ R \sin(u_1) \sin(v_1) = R_2 v_2 \cos(u_2) / 82 + 35 v_2 / 82 - 35; \\ R \cos(v_1) = R_2 v_2 \sin(u_2) / 82, \end{cases}$$

и решим относительно параметров u_1, v_1, u_2 .

В приложении А приведена программа решения данной задачи.

> restart : with(plots) :

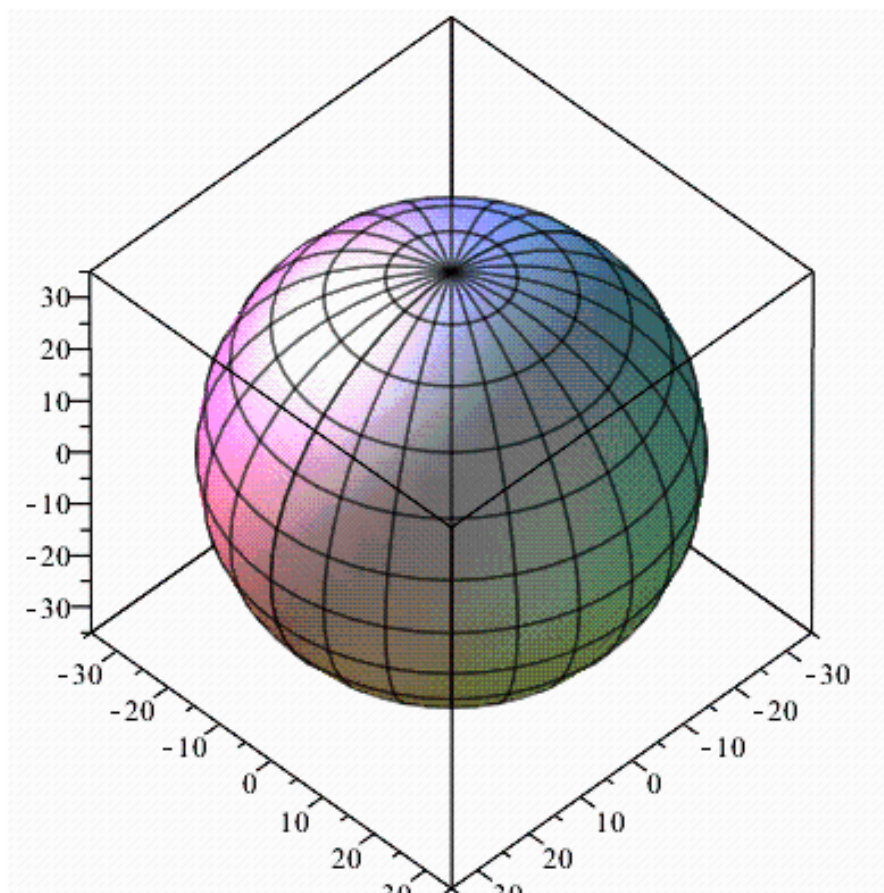
> #Построение уравнение поверхности окружности

$$> Rd := (u, v) \rightarrow \begin{bmatrix} R \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \\ R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v) \\ R \cdot \cos(v) \\ 1.0 \end{bmatrix} :$$

> R := 35

R := 35

> plot3d([Rd(u1, v1)[1, 1], Rd(u1, v1)[2, 1], Rd(u1, v1)[3, 1]], u1 = 0 .. 2·Pi, v1 = 0 .. 2·Pi)



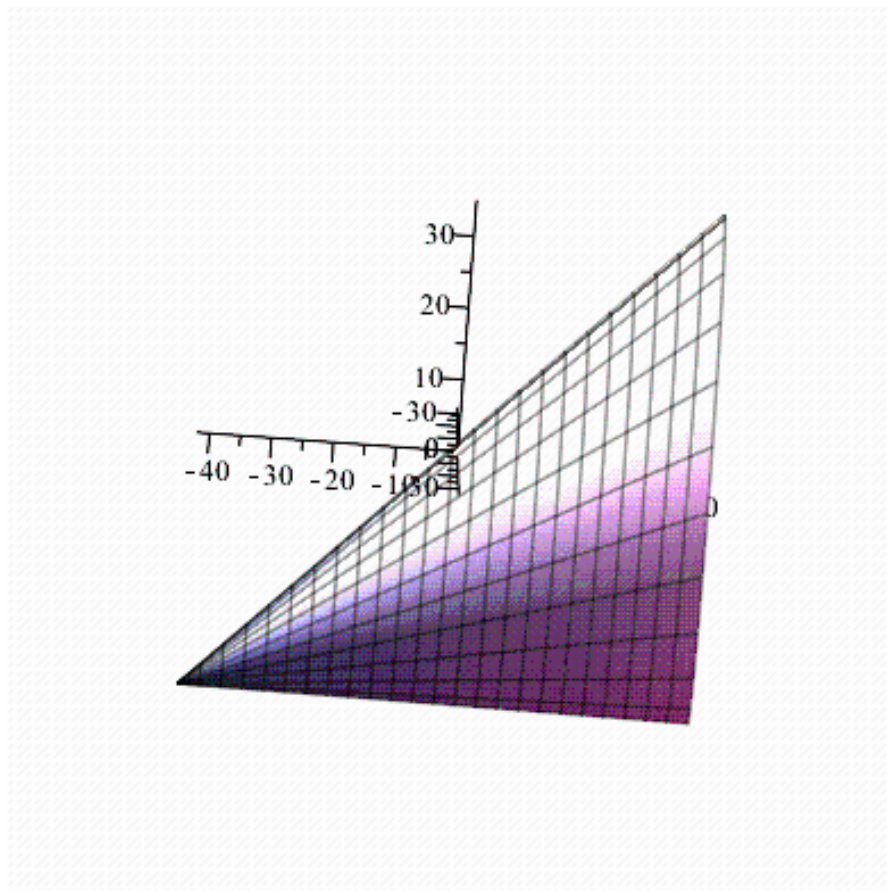
> #Построение уравнение поверхности косоуго конуса

$$> Rd2 := (u, v) \rightarrow \begin{bmatrix} -42 + v \\ \left(-35 + \frac{35}{82} v \right) + \frac{R2 \cdot v}{82} \cdot \cos(u) \\ \frac{R2 \cdot v}{82} \cdot \sin(u) \\ 1.0 \end{bmatrix} :$$

> R2 := 35

R2 := 35

> plot3d([Rd2(u2, v2)[1, 1], Rd2(u2, v2)[2, 1], Rd2(u2, v2)[3, 1]], u2 = 0 .. 2·Pi, v2 = 0 .. .82)



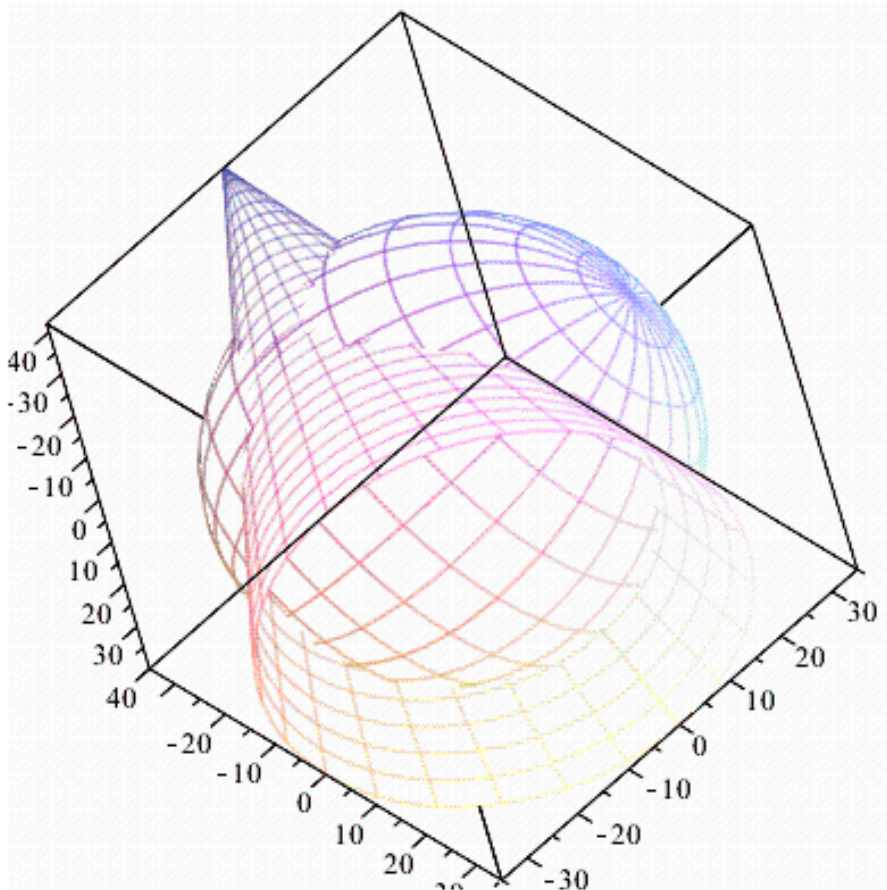
> pl1 := plot3d([Rd2(u2, v2)[1, 1], Rd2(u2, v2)[2, 1], Rd2(u2, v2)[3, 1]], u2 = 0 .. 2·Pi, v2 = 0 .. .82, style = hidden);

pl1 := PLOT3D(...)

> pl2 := plot3d([Rd(u1, v1)[1, 1], Rd(u1, v1)[2, 1], Rd(u1, v1)[3, 1]], u1 = 0 .. 2·Pi, v1 = 0 .. 2·Pi, style = hidden);

pl2 := PLOT3D(...)

> display(pl1, pl2);



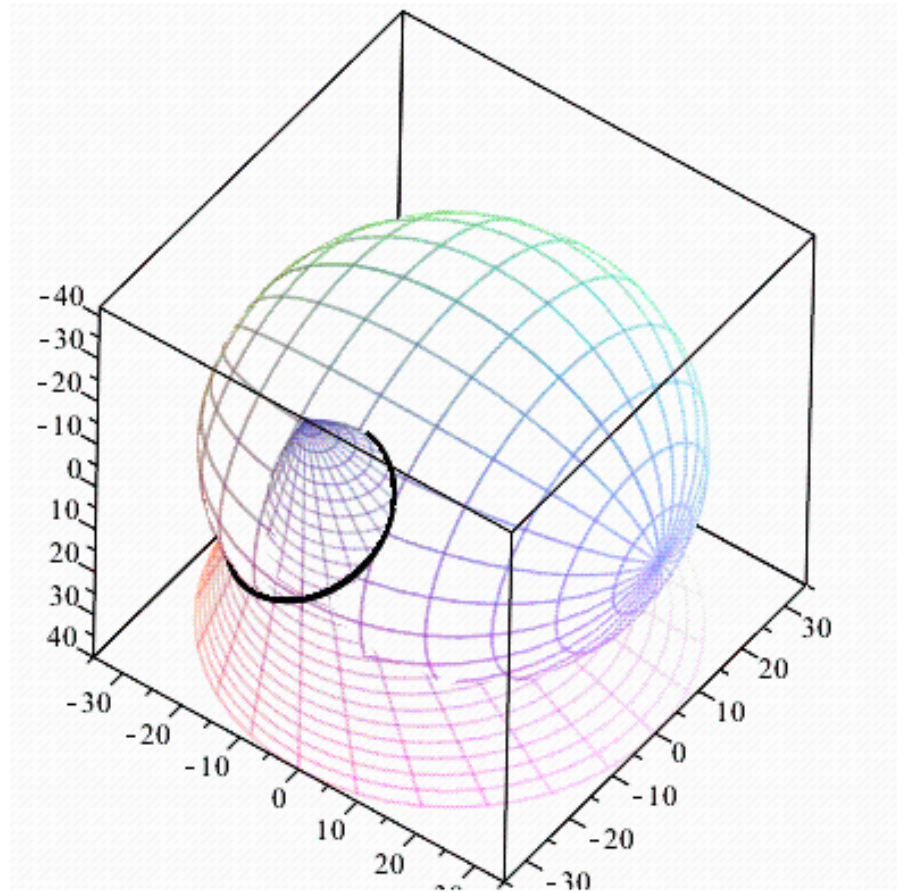
> #Решаем систему уравнений

> `assign(solve({ Rd(u1, v1)[1, 1] = Rd2(u2, v2)[1, 1], Rd(u1, v1)[2, 1] = Rd2(u2, v2)[2, 1], Rd(u1, v1)[3, 1] = Rd2(u2, v2)[3, 1] }, [u1, v1, u2]))`

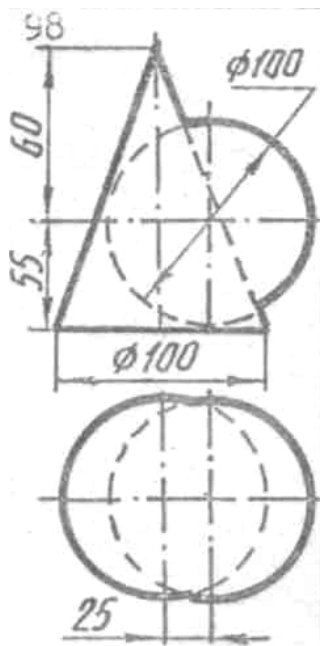
> `Rs := evalf(simplify(Rd2(u2, v2)));`

$$Rs := \left[\begin{array}{l} \left[-42. + v2 \right], \\ \left[-\frac{0.02857142857 (41. v2^2 - 2219. v2 - 28126.)}{v2 - 82.} \right], \\ \left[\frac{1}{v2 - 82.} (0.0003484320557 \text{RootOf}(_Z^2 + 19539944 v2^2 - 1624881496 v2 + 19938569616) (-42. + v2)) \right], \\ \left[1.0 \right] \end{array} \right]$$

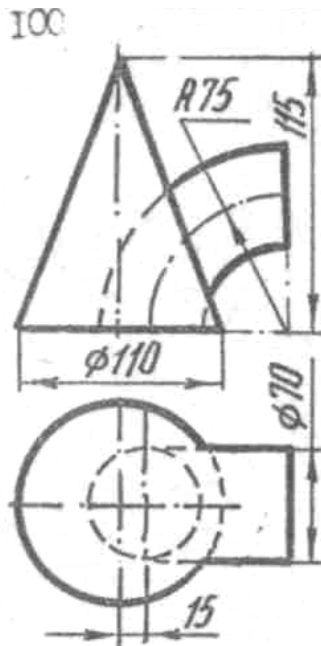
> `display(pl1, pl2, spacecurve([Rd2(u2, v2)[1, 1], Rd2(u2, v2)[2, 1], Rd2(u2, v2)[3, 1]], v2 = 0 ..82, color = black, thickness = 3, numpoints = 1000))`



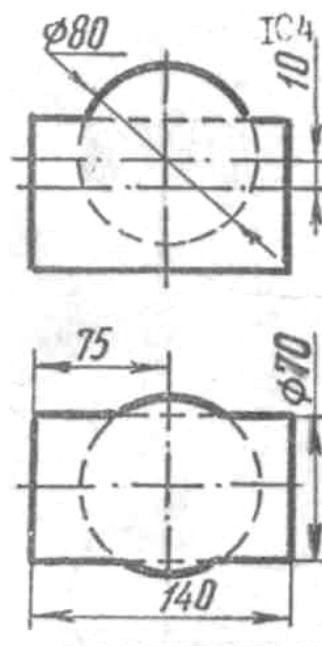
Варианты заданий



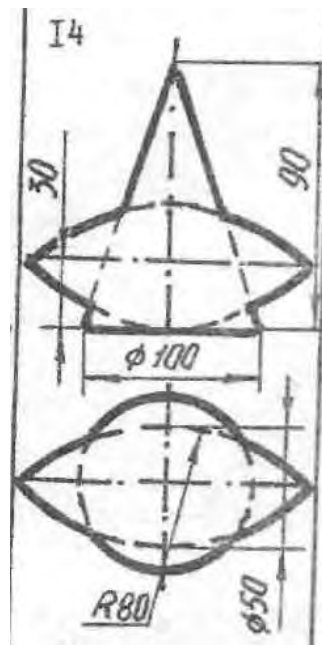
1



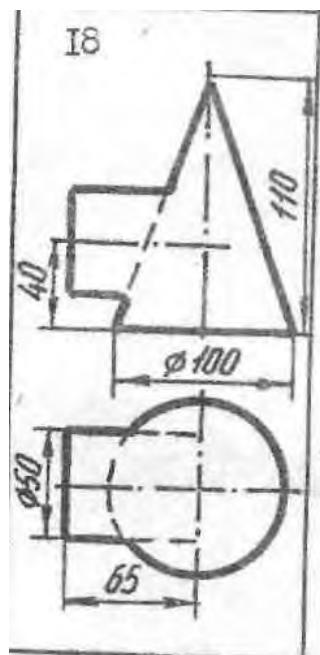
2



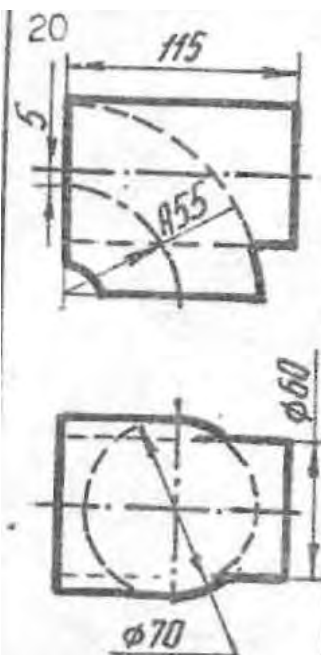
3



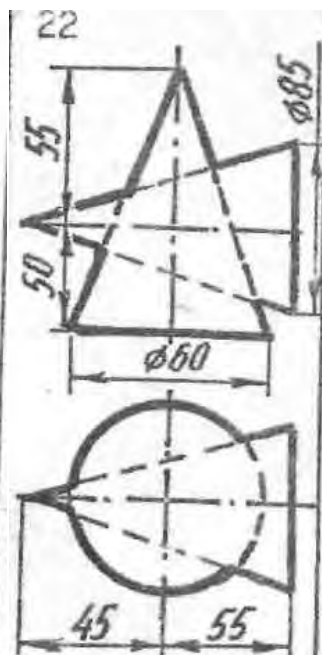
4



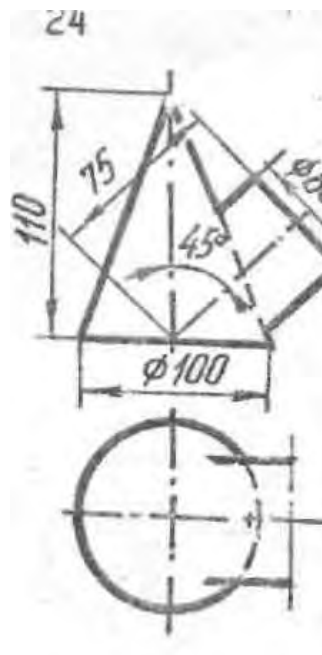
5



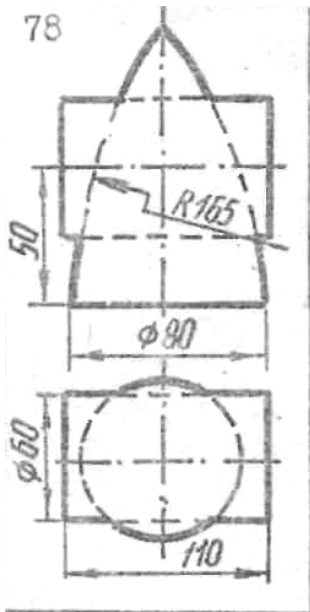
6



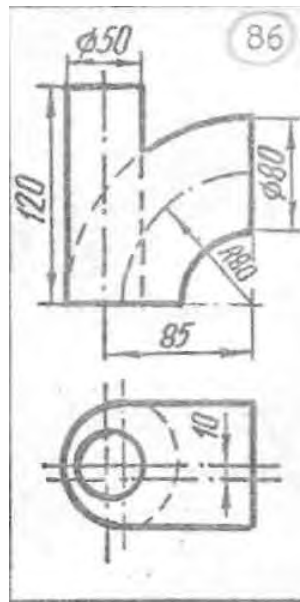
7



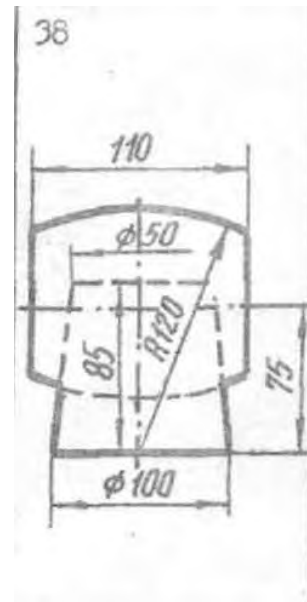
8



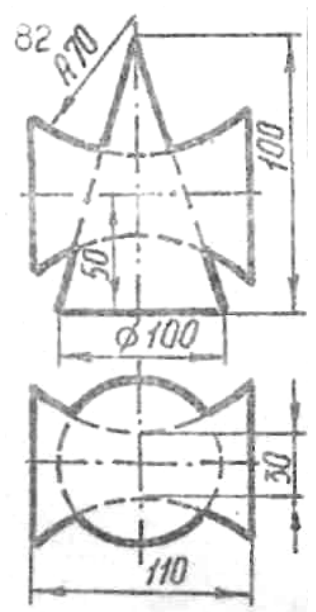
9



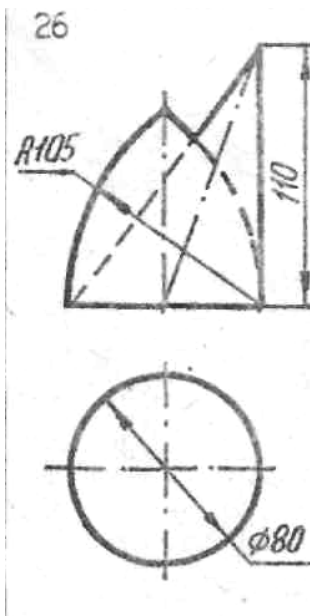
10



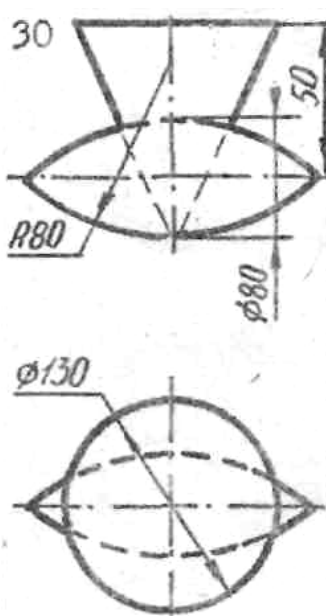
11



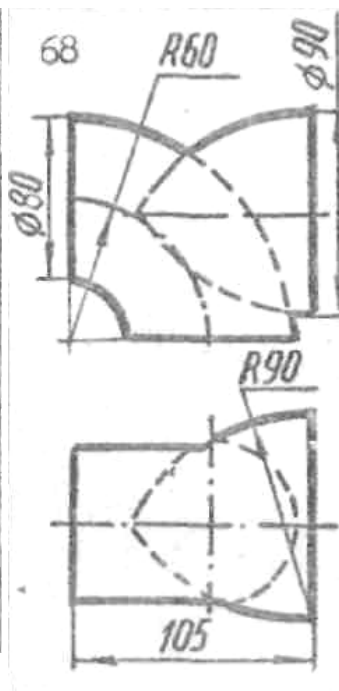
12



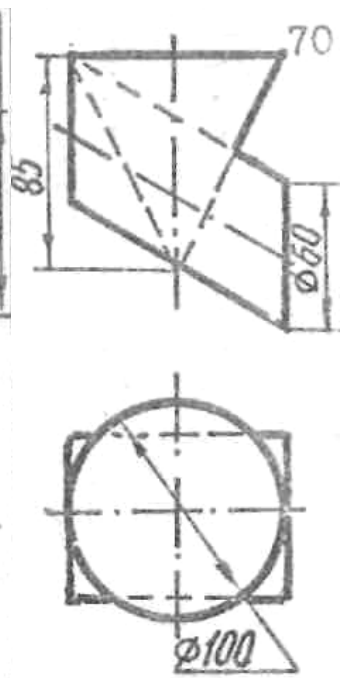
13



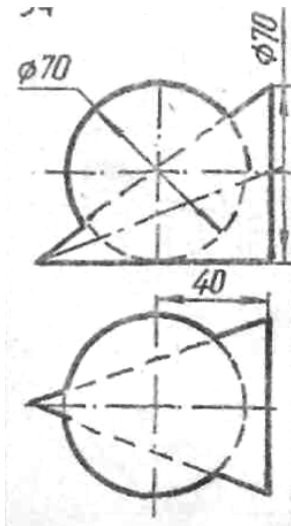
14



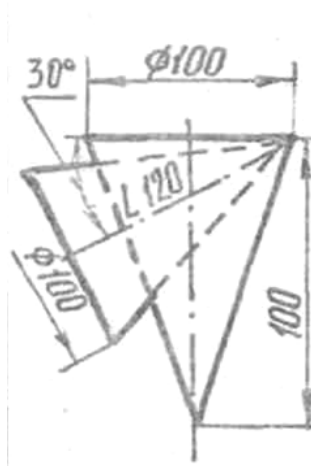
15



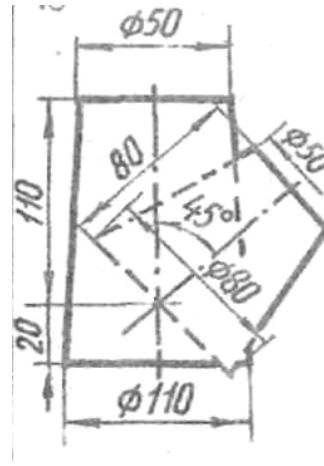
16



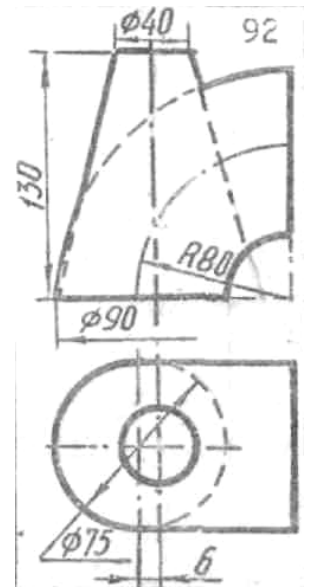
17



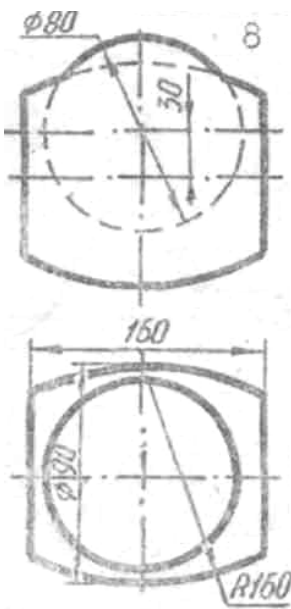
18



19



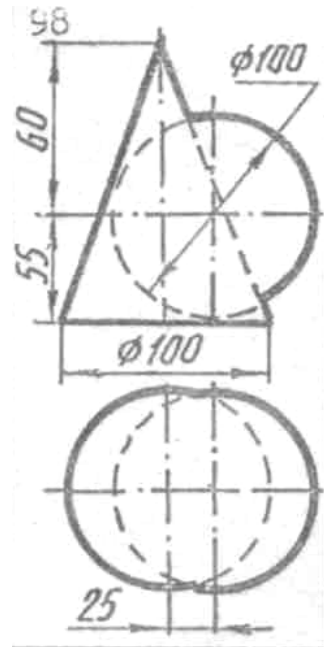
20



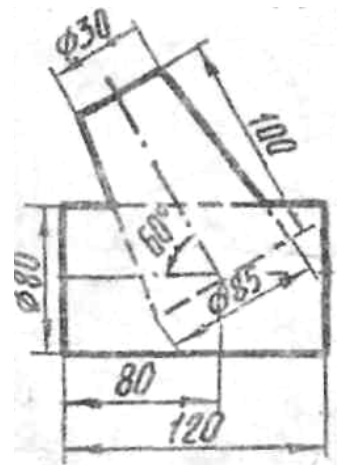
21



22



23



24

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Жосимонова
« 14 » _____ г.



МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В MAPLE

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоятель-
ной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Матричное представление геометрических объектов в Maple
: методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 14 с.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Краткие теоретические сведения

1. Матричное представление точки P в пространстве с координатами $P(x,y,z)$ будет выглядеть как

$${}^1A(x) \cdot {}^2A(y) \cdot {}^3A(z) \cdot \bar{e}^4,$$

где

2. Матричное представление линии параллельной оси Z проходящей через начало системы координат

$${}^3A(t) \cdot \bar{e}^4.$$

3. Матричное представление линии параллельной оси Z проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^3A(z_1) \cdot {}^3A(t) \cdot \bar{e}^4$$

или

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^3A(z_1 + t) \cdot \bar{e}^4.$$

4. Матричное представление линии лежащей в координатной плоскости XOY и расположенной под углом φ к оси X и параллельной оси Z и проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, 0)$

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^6A(\varphi) \cdot {}^1A(t) \cdot \bar{e}^4.$$

5. Матричное представление плоскости перпендикулярной оси Z и проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, 0)$

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^1A(u) \cdot {}^2A(v) \cdot \bar{e}^4.$$

6. Матричное представление плоскости проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, 0)$ под углом φ к оси X параллельно оси Z

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^4A(\varphi) \cdot {}^1A(u) \cdot {}^2A(v) \cdot \bar{e}^4.$$

7. Матричное представление цилиндрической поверхности радиусом R ось которой совпадает с осью X

$${}^1A(x) \cdot {}^4A(\varphi) \cdot {}^2A(R) \cdot \bar{e}^4$$

или

$${}^1A(x) \cdot {}^4A(\varphi) \cdot {}^3A(R) \cdot \bar{e}^4.$$

8. Матричное представление цилиндрической поверхности радиусом R ось которой проходит через точку $P_1(x_1, y_1, 0)$ под углом φ к оси X

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^1A(x) \cdot {}^4A(\varphi) \cdot {}^2A(R) \cdot \bar{e}^4.$$

9. Матричное представление конической поверхности с вершиной в точке $P_1(x_1, y_1, 0)$ ось которой параллельна оси X с углом при вершине $\theta/2$

$${}^1A(x_1) \cdot {}^2A(y_1) \cdot {}^4A(\varphi) {}^2A(x \cdot \tan \theta/2) \cdot {}^1A(x) \cdot \bar{e}^4.$$

Пример программы в Maple

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(plottools) :

> $e4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : A1 := t \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A2 := t \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A3 := t \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A4 := t$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A5 := t \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & \sin(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(t) & 0 & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A6 := t$

$\rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} :$

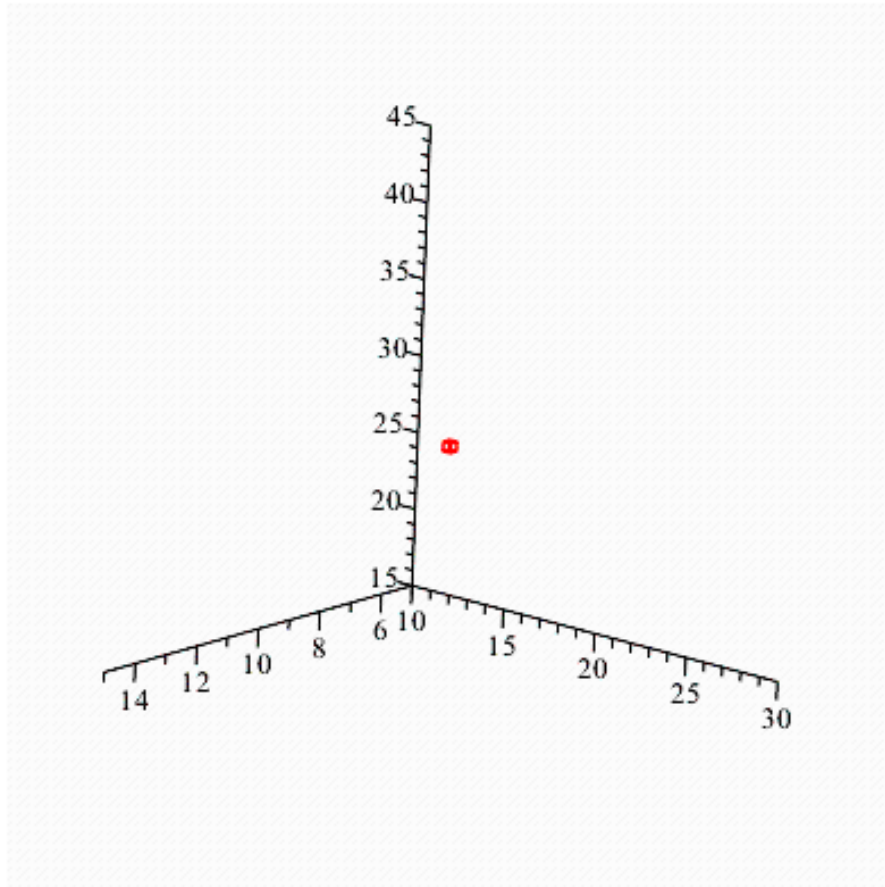
> #1. Матричное представление точки $P(x, y, z)$

> $P := multiply(A1(x), A2(y), A3(z), e4)$

$$P := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $x := 10 : y := 20 : z := 30 :$

> $pointplot3d([P[1, 1], P[2, 1], P[3, 1]], axes = normal, symbol = box, color = red);$

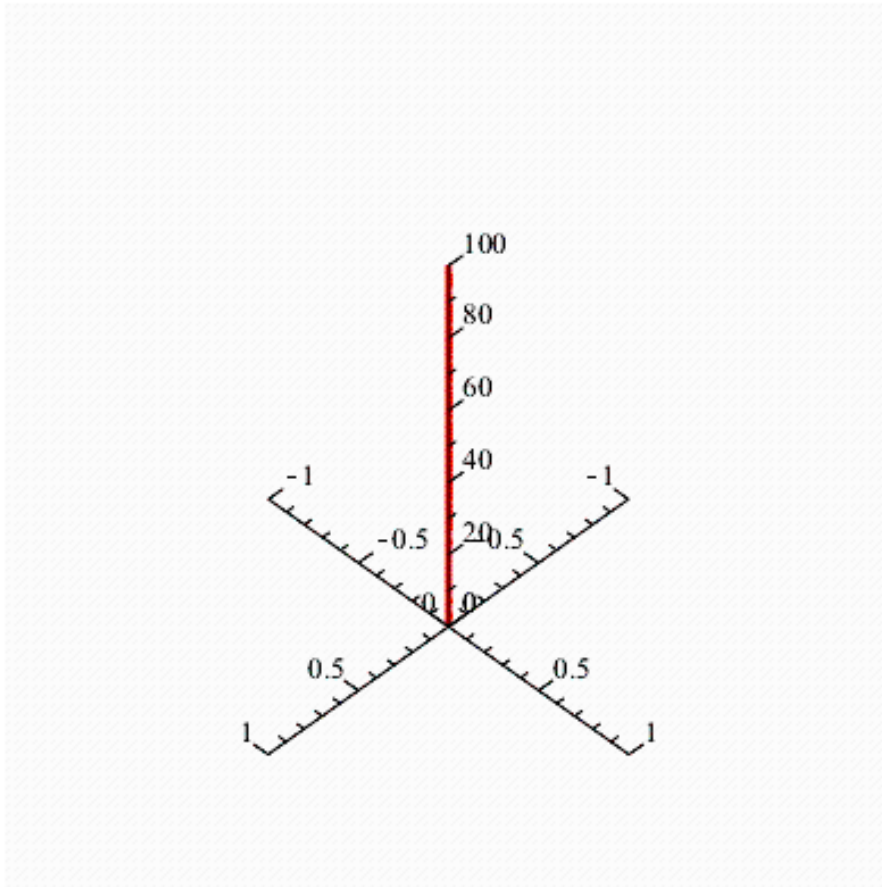


> #2. Матричное представление линии параллельной оси Z проходящей через начало системы координат

> $L1 := multiply(A3(t), e4)$

$$L1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $spacecurve([L1[1, 1], L1[2, 1], L1[3, 1]], t = 0 .. 100, axes = normal, symbol = box, color = red, thickness = 3);$



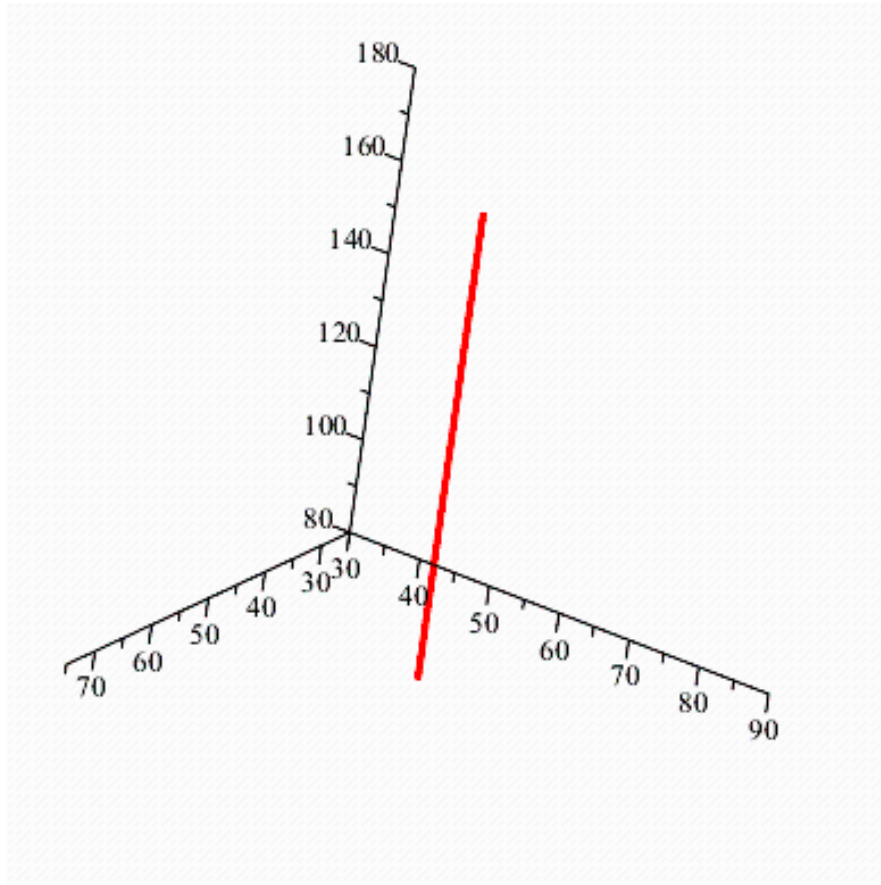
> #3. Матричное представление линии параллельной оси Z проходящей через точку с координатами $x1, y1, z1$ начало системы координат

> $L2 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A3(t), e4);$

$$L2 := \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ t + z1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $x1 := 50 : y1 := 60 : z1 := 80 :$

> $spacecurve([L2[1, 1], L2[2, 1], L2[3, 1]], t = 0 .. 100, axes = normal, symbol = box, color = red, thickness = 3);$



> #4. Матричное представление линии лежащей в координатной плоскости XOY и расположенной под углом ϕ к оси X и параллельной оси Z и проходящей через точку с координатами $x1, y1, z1$

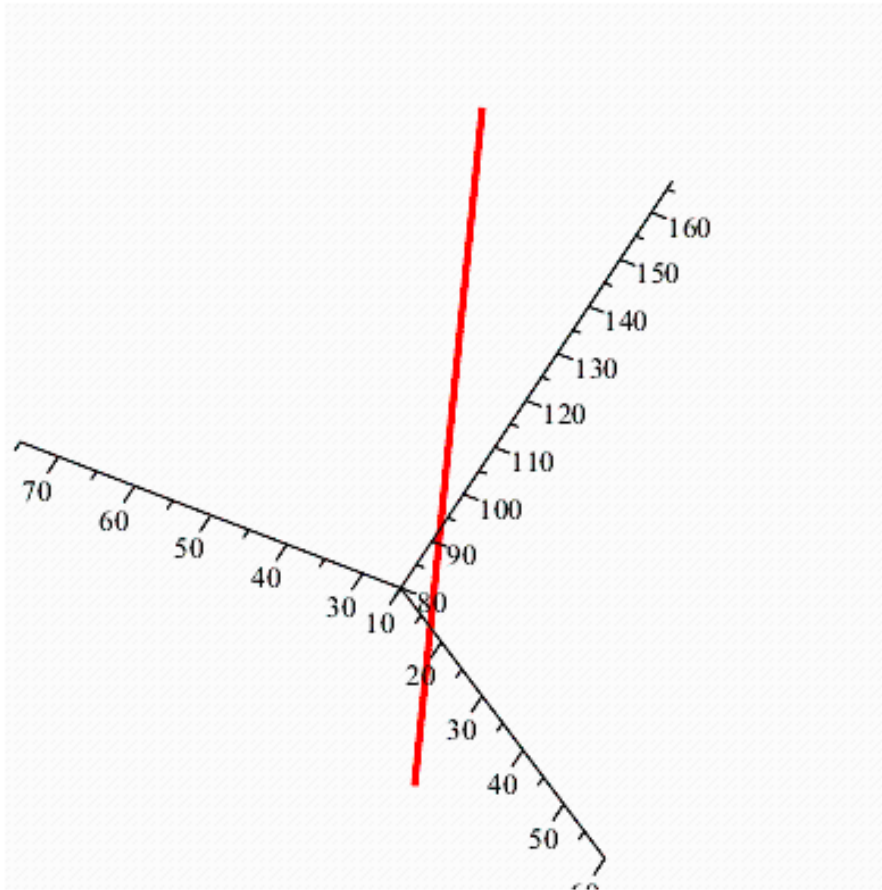
> $L3 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A4(\phi), A3(t), e4);$

$$L3 := \begin{bmatrix} 50 \\ 60 - \sin(\phi) t \\ 80 + \cos(\phi) t \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $\phi := \frac{30 \cdot \pi}{180};$

$$\phi := \frac{1}{6} \pi$$

> $spacecurve([L3[1, 1], L3[2, 1], L3[3, 1]], t = 0 .. 100, axes = normal, symbol = box, color = red, thickness = 3);$

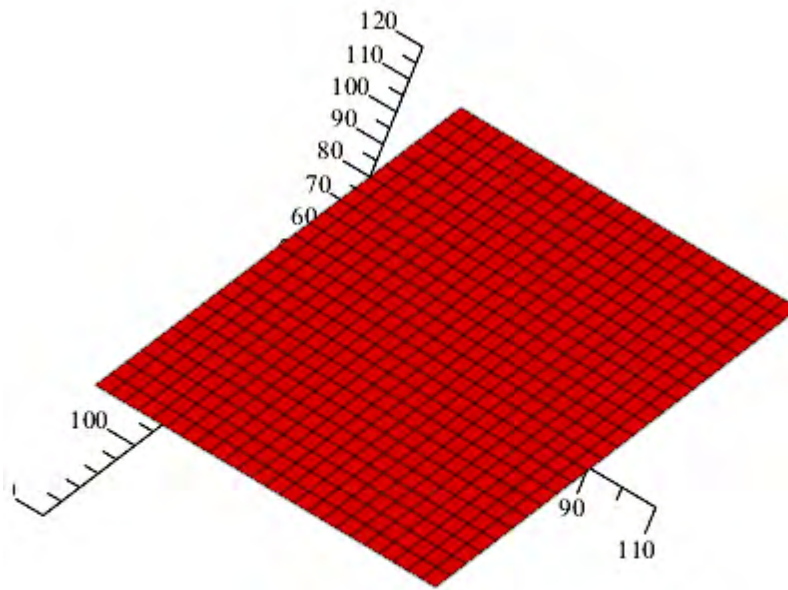


> #5. Матричное представление плоскости перпендикулярной оси Z и проходящей через точку с координатами $x1, y1, z1$

> $PL1 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A1(u), A2(v), e4);$

$$PL1 := \begin{bmatrix} u + 50 \\ 60 + v \\ 80 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $plot3d([PL1[1, 1], PL1[2, 1], PL1[3, 1]], u = -100 .. 100, v = -50 .. 50, axes = normal, color = red)$

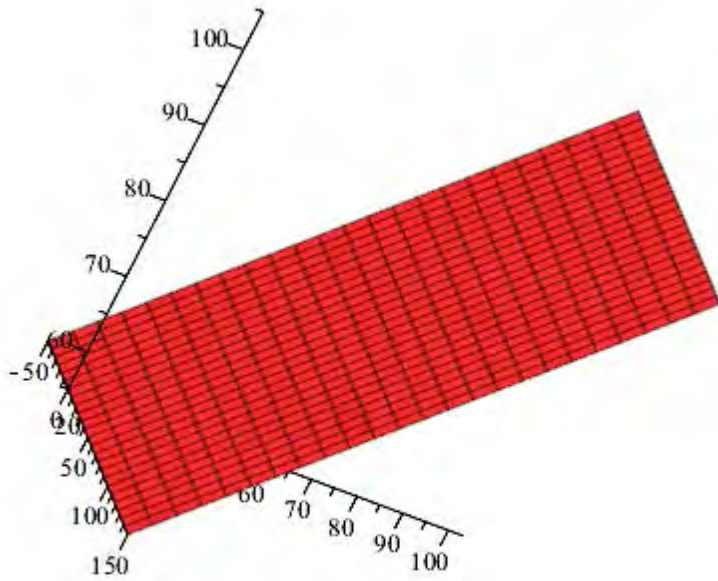


> #6. Матричное представление плоскости проходящей через точку с координатами $x1, y1, z1$ под углом ϕ к оси X и параллельно оси Z

> $PL2 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A4(\phi), A1(u), A2(v), e4);$

$$PL2 := \begin{bmatrix} u + 50 \\ 60 + \frac{1}{2} \sqrt{3} v \\ 80 + \frac{1}{2} v \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $plot3d([PL2[1, 1], PL2[2, 1], PL2[3, 1]], u = -100 .. 100, v = -50 .. 50, axes = normal, color = red)$



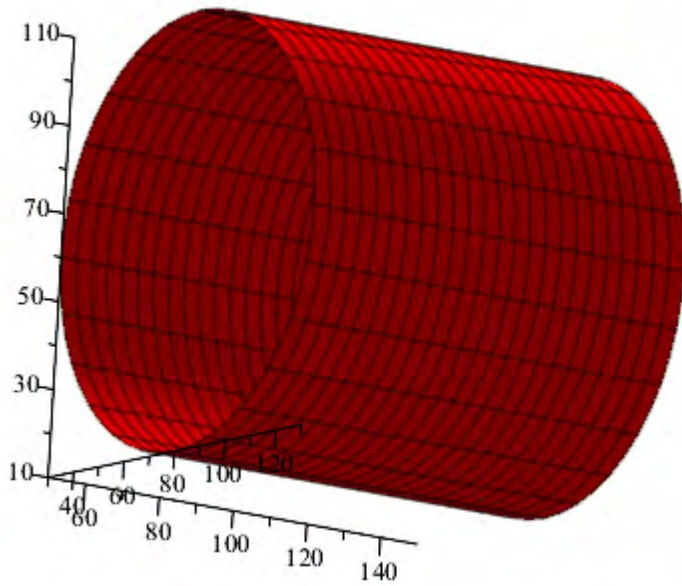
> #7. Матричное представление цилиндрической поверхности радиусом R ось которой проходит через точку $x1, y1, z1$ параллельна оси X

> $Cy11 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A1(h), A4(te), A2(R), e4);$

$$Cy11 := \begin{bmatrix} h + 50 \\ 60 + \cos(te) R \\ 80 + \sin(te) R \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $R := 50 :$

> $plot3d([Cy11[1, 1], Cy11[2, 1], Cy11[3, 1]], te = 0 .. 2 \cdot \pi, h = 0 .. 100, axes = normal, color = red)$



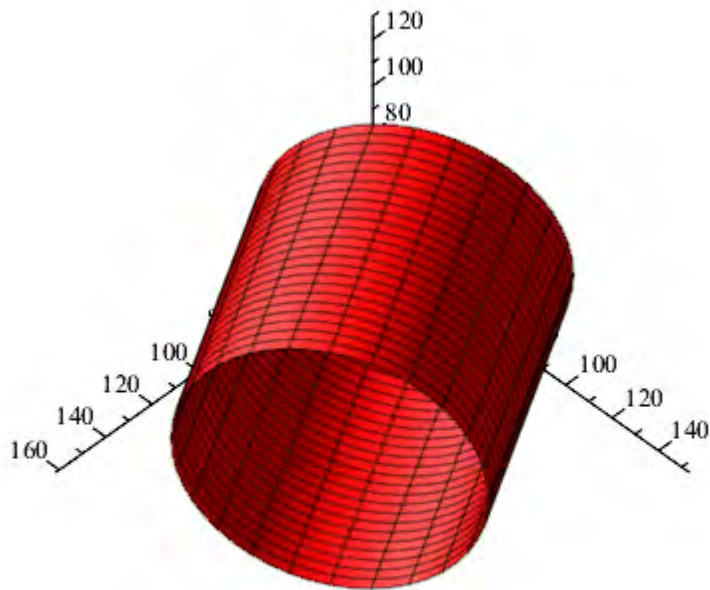
> #8. Матричное представление цилиндрической поверхности радиусом R ось которой проходит через точку $x1, y1, z1$ под углом ϕ к оси X

> $Cyl1 := multiply(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A6(\phi), A1(h), A4(te), A2(R), e4);$

$$Cyl1 := \begin{bmatrix} 50 - 25 \cos(te) + \frac{1}{2} \sqrt{3} h \\ 60 + 25 \sqrt{3} \cos(te) + \frac{1}{2} h \\ 80 + 50 \sin(te) \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $R := 50 :$

> $plot3d([Cyl1[1, 1], Cyl1[2, 1], Cyl1[3, 1]], te = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}, h = 0 .. 100, axes = normal, color = red)$



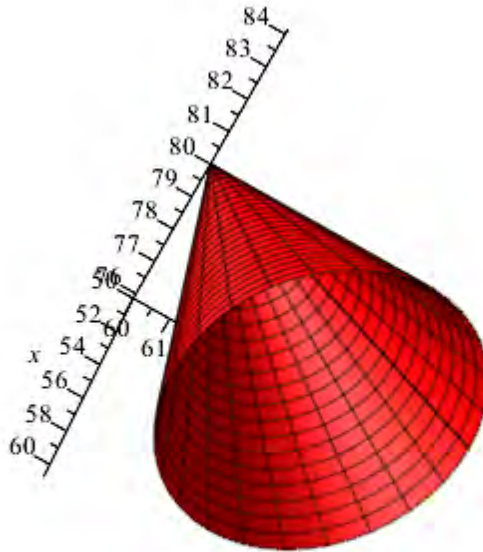
> #9. Матричное представление конической поверхности радиусом R ось которой проходит через точку x_1, y_1, z_1 под углом ϕ к оси X

> $Con1 := multiply\left(A1(x1), A2(y1), A3(z1), A6(fii), A4(te), A1(h), A2\left(h \cdot \tan\left(\frac{gam}{2}\right)\right), e4\right);$

$$Con1 := \begin{bmatrix} 50 - \frac{1}{2} \cos(te) h \tan\left(\frac{1}{8} \pi\right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} h \\ 60 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos(te) h \tan\left(\frac{1}{8} \pi\right) + \frac{1}{2} h \\ 80 + \sin(te) h \tan\left(\frac{1}{8} \pi\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $gam := \frac{45 \cdot \text{Pi}}{180} :$

> $plot3d([Con1[1, 1], Con1[2, 1], Con1[3, 1]], te = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}, h = 0 .. 10, axes = normal, color = red)$



Задание 1. Выполнить матричное представление линии с параметром t проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$ под углом α к заданной координатной плоскости и под углом φ к заданной координатной оси (см. табл.). Выполнить графические построения.

Номер варианта	$P_1(x_1, y_1, z_1)$	Координатная плоскость	$\alpha, ^\circ$	Координатная ось	$\varphi, ^\circ$
1	(0, -100, -10)	XOZ	30	Y	45
2	(0, -100, 0)	XOY	70	Z	30
3	(0, 0, -10)	YOZ	50	X	10
4	(-10, -10, -10)	XOY	0	Z	45
5	(10, 0, 10)	YOZ	0	X	70
6	(0, 0, 0)	XOZ	0	Y	30
7	(100, 0, 0)	XOY	45	Z	0
8	(0, 100, 10)	XOZ	-30	Y	-45
9	(0, 100, 0)	XOY	-70	Z	-30
10	(0, 0, 10)	YOZ	-50	X	-10
11	(10, 10, 10)	XOY	0	Z	-45
12	(-10, 0, -10)	YOZ	0	X	-70
13	(0, 0, 0)	XOZ	0	Y	-30
14	(-100, 0, 0)	XOY	-45	Z	0

Задание 2. Выполнить матричное представление плоскости с параметрами u, v проходящей через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$

перпендикулярно прямой проходящей под углом α к заданной координатной плоскости и под углом φ к заданной координатной оси (см. табл.).

Номер варианта	$P_1(x_1, y_1, z_1)$	Координатная плоскость	$\alpha, ^\circ$	Координатная ось	$\varphi, ^\circ$
1	(10, 0, 10)	XOZ	0	Y	-70
2	(0, 0, 0)	XOY	-45	Z	-30
3	(100, 0, 0)	YOZ	30	X	0
4	(0, 100, 10)	XOY	70	Z	45
5	(0, 100, 0)	YOZ	50	X	30
6	(0, 0, 10)	XOZ	0	Y	10
7	(10, 10, 10)	XOY	0	Z	45
8	(-10, 0, -10)	XOZ	0	Y	70
9	(0, 0, 0)	XOY	45	Z	30
10	(-100, 0, 0)	YOZ	-30	X	0
11	(0, -100, -10)	XOY	-70	Z	-45
12	(0, -100, 0)	YOZ	-50	X	-30
13	(0, 0, -10)	XOZ	0	Y	-10
14	(-10, -10, -10)	XOY	0	Z	-45

Задание 3. Выполнить матричное представление фигуры с параметрами u, v ось которой проходит через точку с координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$ под углом α к заданной координатной плоскости и под углом φ к заданной координатной оси (см. табл.). Выполнить графические построения.

Номер вар.	Фигура	$P_1(x_1, y_1, z_1)$	Координатная плоскость	$\alpha, ^\circ$	Координатная ось	$\varphi, ^\circ$
1	Цилиндр $R=20;$ $H=100;$	(0, 0, -10)	XOZ	0	Y	-70
2	Конус $\theta=45^\circ;$ $H=100$	(-10, -10, -10)	XOY	-45	Z	-30
3	Тор $R=50;$ $r=50$	(10, 0, 10)	XOZ	30	Y	0
4	Цилиндр $R=100;$ $H=20;$	(0, 0, 0)	XOY	70	Z	45
5	Конус	(100, 0, 0)	YOZ	50	X	30

	$\theta=90^\circ$; H=45					
6	Тор R=60; r=55	(0, 100, 10)	<i>XOY</i>	0	<i>Z</i>	10
7	Цилиндр R=10; H=200;	(0, 100, 0)	<i>YOZ</i>	0	<i>X</i>	45
8	Конус $\theta=30^\circ$; H=100	(0, 0, 10)	<i>XOZ</i>	0	<i>Y</i>	70
9	Тор R=50; r=5	(10, 10, 10)	<i>XOY</i>	45	<i>Z</i>	30
10	Цилиндр D=50; H=50;	(-10, 0, -10)	<i>XOZ</i>	-30	<i>Y</i>	0
11	Конус $\theta=120^\circ$; H=50	(0, 0, 0)	<i>XOY</i>	-70	<i>Z</i>	-45
12	Тор D=100; d=30	(-100, 0, 0)	<i>YOZ</i>	-50	<i>X</i>	-30
13	Цилиндр D=10; H=40;	(0, -100, -10)	<i>XOY</i>	0	<i>Z</i>	-10
14	Конус $\theta=5^\circ$; H=10	(0, -100, 0)	<i>YOZ</i>	0	<i>X</i>	-45

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Мокимова
« 14 » _____ г.



МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВНЫХ КРИВЫХ

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Моделирование составных кривых : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 17 с.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы:

Получить теоретические сведения и практические навыки построения уравнений плоских составных кривых в системе *Maple*.

2 Задание:

Построить уравнение плоской составной кривой и выполнить её геометрическое построение в соответствии с индивидуальным заданием (см. приложение Б).

3 Краткие теоретические сведения

3.1. Составные кривые

Из нескольких кривых можно построить составную кривую (рис. 1). Они характерны тем, что в точках стыковки первая производная радиус-вектора имеет разрыв или по длине или по направлению. Кривые образующие составную кривую называются сегментами. При построении составной кривой должно выполняться условие: начало каждого последующего сегмента должно совпадать с концом предыдущего.

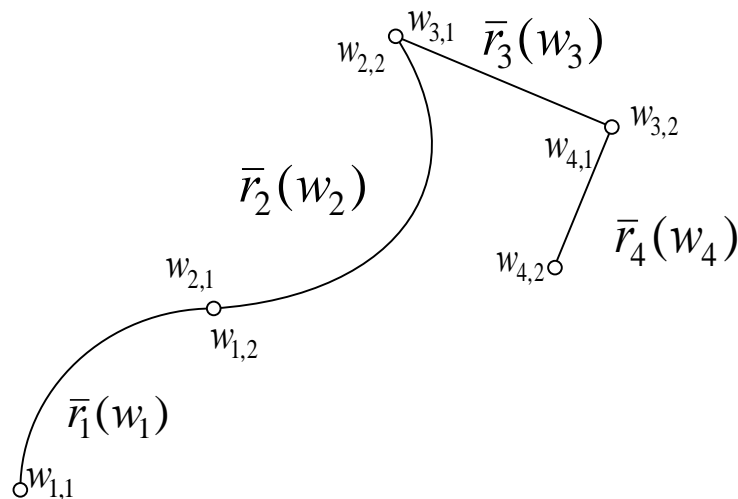


Рис. 1 – Составная кривая

Замкнутая кривая называется контуром. Для контура начало первого сегмента совпадает с концом последнего.

Пусть составная кривая содержит n сегментов

$$r_i(w_i), w_i \in [w_{i,1}, w_{i,2}], i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

Начальное значение параметра t составной кривой положим равной нулю. Параметрическую длину составной кривой будет равна сумме параметрических длин составляющих его кривых

$$t_{\min} = 0, t_{\max} = \sum_{i=1}^n |w_{i,2} - w_{i,1}|, \quad (2)$$

При вычислении радиус-вектора составной кривой сначала необходимо определить тот сегмент, на который попадает, двигаясь по параметру. Затем нужно определить соответствующее значение собственного параметра этого сегмента и с помощью его значения вычислить его производные. Номер сегмента k можно определить из соотношения

$$\sum_{i=1}^{k-1} |w_{i,2} - w_{i,1}| \leq t < \sum_{i=1}^k |w_{i,2} - w_{i,1}|. \quad (3)$$

Тогда радиус-вектор составной кривой будет определяться равенством

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_k \left(w_{k,1} + \operatorname{sgn}(w_{k,2} - w_{k,1}) \left[t - \sum_{i=1}^{k-1} |w_{i,2} - w_{i,1}| \right] \right) = \bar{r}_k(w_k), 0 \leq t < t_{\max}, \quad (4)$$

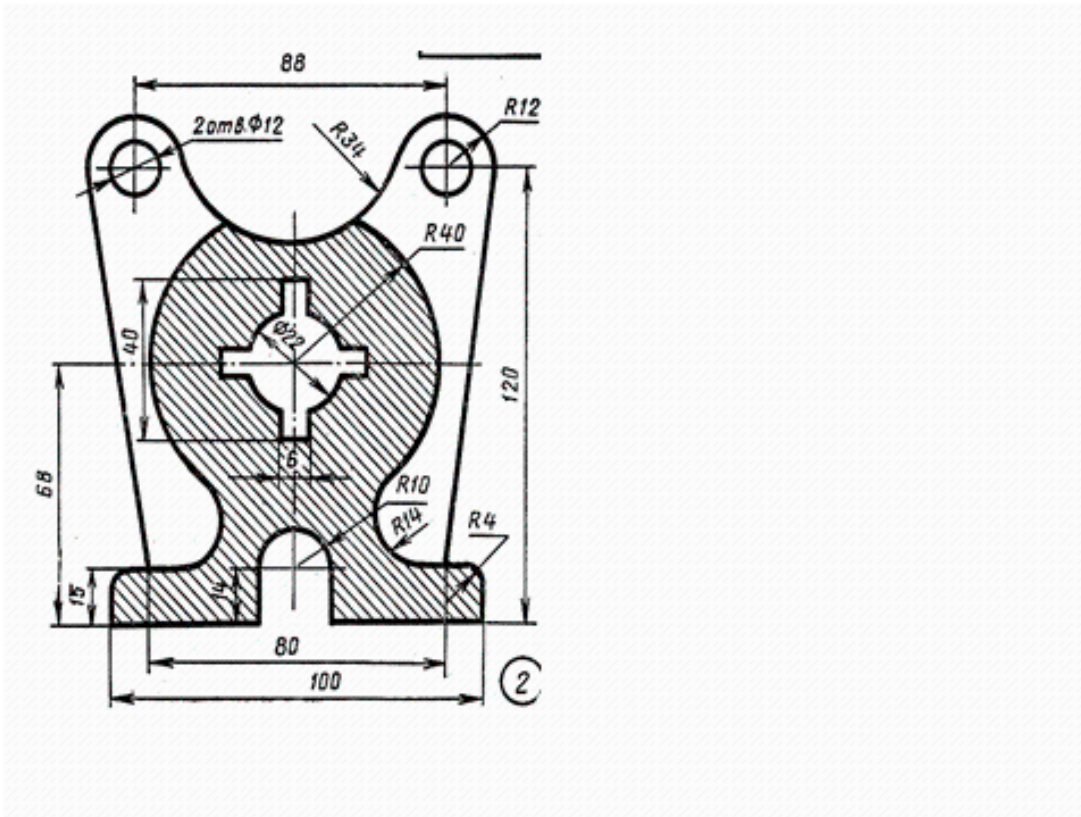
где

$$w_k = w_{k,1} + \operatorname{sgn}(w_{k,2} - w_{k,1}) \left[t - \sum_{i=1}^{k-1} |w_{i,2} - w_{i,1}| \right]. \quad (5)$$

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} \bar{r}_1(w_{1,1}), t < 0; \\ \bar{r}_k \left(w_{k,1} + \operatorname{sgn}(w_{k,2} - w_{k,1}) \left[t - \sum_{i=1}^{k-1} |w_{i,2} - w_{i,1}| \right] \right), 0 \leq t < |w_{1,2} - w_{1,1}| \\ \bar{r}_k \left(w_{k_{\min}} + t - \sum_{i=1}^{k-1} (w_{i_{\max}} - w_{i_{\min}}) \right) = \bar{r}_k(w_k), 1 \leq t < \sum_{i=1}^k |w_{i,2} - w_{i,1}| \end{cases}$$

Пример программы 1

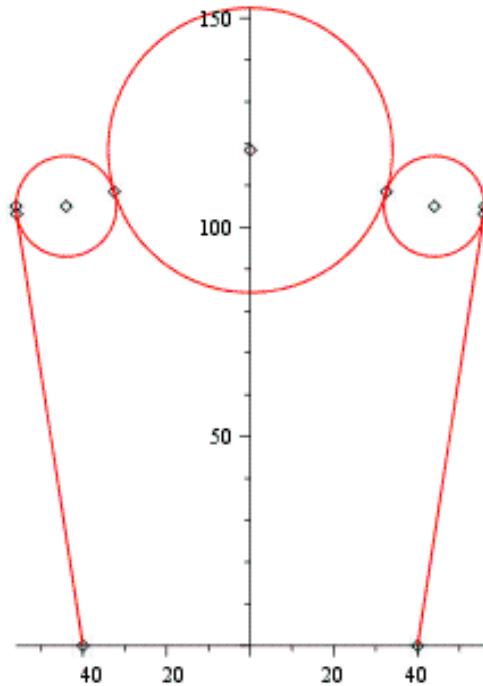
- > restart : with(plottools) : with(plots) :
- > B := 80 : H := 120 : H1 := 15 : B1 := 88 :



- > R1 := 12 : R2 := 34 :
- > x1 := $-\frac{B}{2}$: y1 := 0 :
- > x9 := $-\frac{B1}{2}$: y9 := H - H1 :
- > AA := -2 x9 : BB := -2 y9 : CC := $x9^2 + y9^2 - R1^2$:
- > res := allvalues(solve($\left\{ (x2 - x9)^2 + (y2 - y9)^2 = R1^2, \left(\frac{AA}{2} + x2\right) \cdot x1 + \left(\frac{BB}{2} + y2\right) \cdot y1 + \left(\frac{AA}{2} \cdot x2 + \frac{BB}{2} \cdot y2 + CC\right) = 0 \right\}, \{x2, y2\}$))
- res := $\left\{ x2 = -\frac{485228}{11041} - \frac{1260 \sqrt{10897}}{11041}, y2 = \frac{1144185}{11041} - \frac{48 \sqrt{10897}}{11041} \right\}, \left\{ x2 = -\frac{485228}{11041} + \frac{1260 \sqrt{10897}}{11041}, y2 = \frac{1144185}{11041} + \frac{48 \sqrt{10897}}{11041} \right\}$
- > assign(res[1]);
- > x3 := $-\frac{B1}{2} - R1$: y3 := y9 :
- > x10 := 0 :
- > res := allvalues(solve($\left[(x4 - x10)^2 + (y4 - y10)^2 = R2^2, (x4 - x9)^2 + (y4 - y9)^2 = R1^2, (x9 - x10)^2 + (y9 - y10)^2 = (R2 + R1)^2 \right], [x4, y4, y10]$))

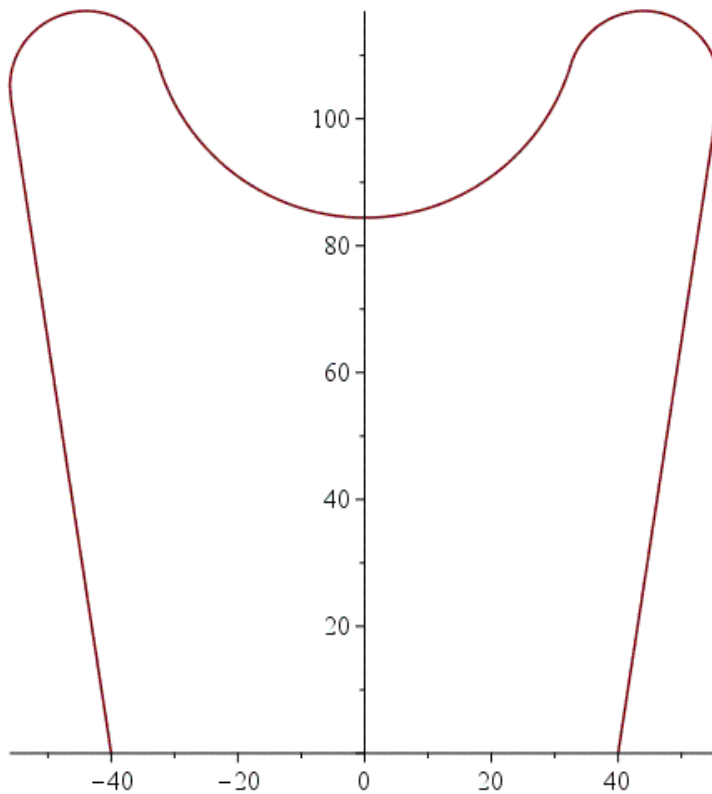
$$res := \left[\left[x4 = -\frac{748}{23}, y4 = 105 - \frac{36\sqrt{5}}{23}, y10 = 105 - 6\sqrt{5} \right], \left[x4 = -\frac{748}{23}, y4 = 105 + \frac{36\sqrt{5}}{23}, y10 = 105 + 6\sqrt{5} \right] \right]$$

- > assign(evalf(res[2]))
- > x5 := -x4 : y5 := y4 :
- > x6 := -x3 : y6 := y3 :
- > x7 := -x2 : y7 := y2 :
- > x8 := -x1 : y8 := y1 :
- > x11 := -x9 : y11 := y9 :
- > display(seq(point([x||i, y||i]), i = 1..11), circle([x9, y9], R1, color = red), circle([x11, y11], R1, color = red), circle([x10, y10], R2, color = red), line([x1, y1], [x2, y2], color = red), line([x7, y7], [x8, y8], color = red))

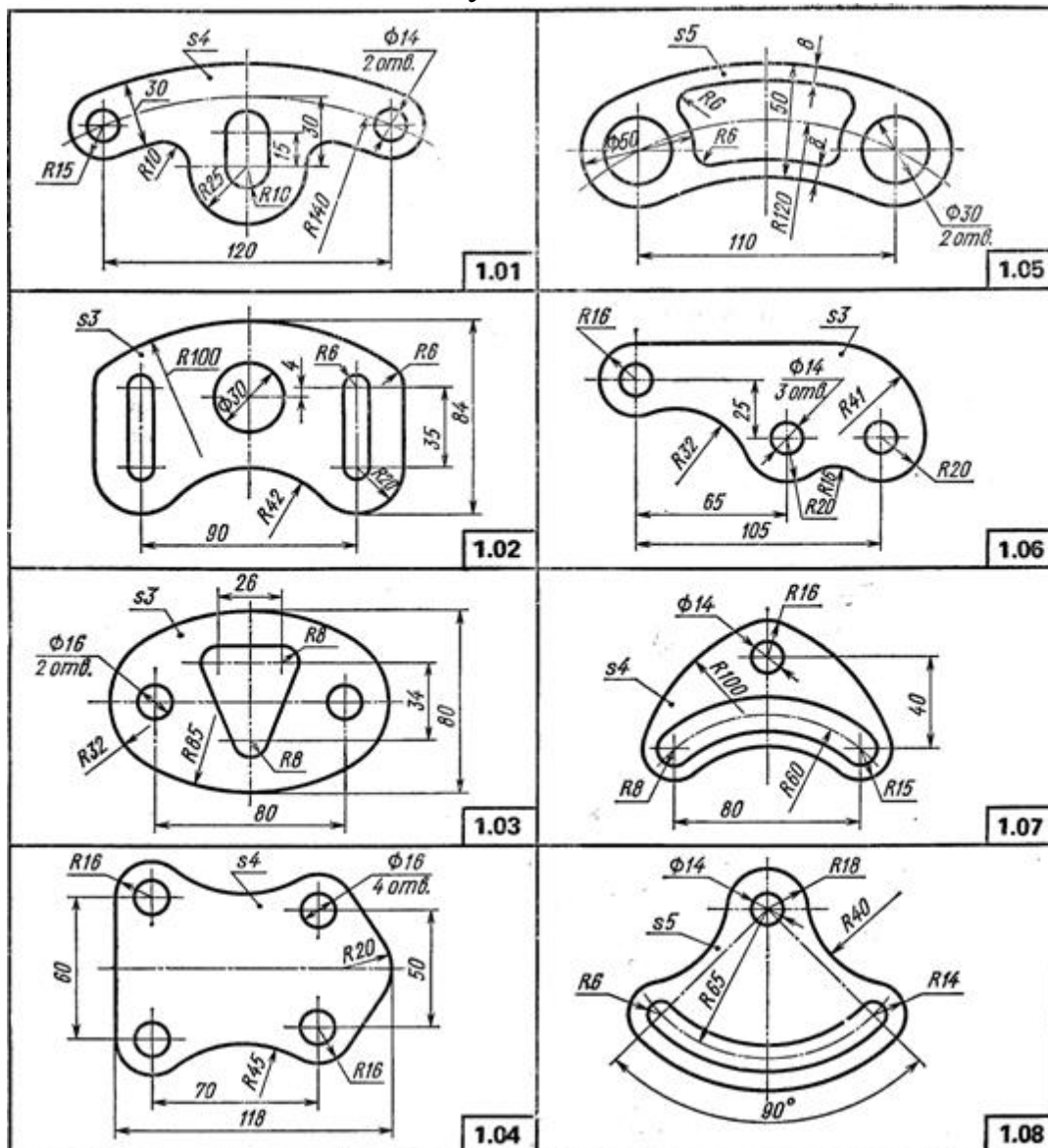


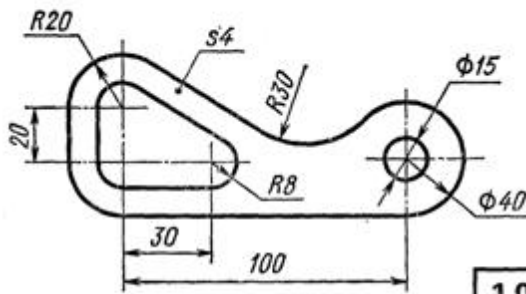
- >
- > rw[1] := ww → evalf(Vector([ww, (ww - x1) / (x2 - x1) * (y2 - y1), 0, 1])) : w[1, 1] := x1 : w[1, 2] := x2 :
- > rw[2] := ww → evalf(Vector([ww, y9 - (R1^2 - (ww - x9)^2)^0.5, 0, 1])) : w[2, 1] := x2 : w[2, 2] := x3 :
- >
- > rw[3] := ww → evalf(Vector([ww, y9 + (R1^2 - (ww - x9)^2)^0.5, 0, 1])) : w[3, 1] := x3 : w[3, 2] := x4 :
- > rw[4] := ww → evalf(Vector([ww, y10 - (R2^2 - (ww - x10)^2)^0.5, 0, 1])) : w[4, 1] := x4 : w[4, 2] := x5 :
- > rw[5] := ww → evalf(Vector([ww, y11 + (R2^2 - (ww - x11)^2)^0.5, 0, 1])) : w[5, 1] := x5 : w[5, 2] := x6 :

- > $rw[6] := ww \rightarrow evalf\left(\text{Vector}\left([ww, y11 - (R1^2 - (ww - x11)^2)^{0.5}, 0, 1\right]\right) : w[6, 1] := x6 : w[6, 2] := x7 :$
- > $rw[7] := ww \rightarrow evalf\left(\text{Vector}\left(\left[ww, \frac{(ww - x8)}{x7 - x8}(y7 - y8), 0, 1\right]\right) : w[7, 1] := x7 : w[7, 2] := x8 :$
- > $N := 7 :$
- > $q := \left(\sum_{i=1}^{k-1} \text{abs}(w[i, 2] - w[i, 1]) \leq t \text{ and } t < \sum_{i=1}^k \text{abs}(w[i, 2] - w[i, 1]) \right), rw[k] \left(w[k, 1] + \text{signum}(w[k, 2] - w[k, 1]) \cdot \left(t - \sum_{i=1}^{k-1} \text{abs}(w[i, 2] - w[i, 1]) \right) \right) :$
- > $t_max := evalf\left(\sum_{i=1}^N \text{abs}(w[i, 2] - w[i, 1])\right);$
 $t_max := 144.0000000$
- >
- > $RR := unapply(evalf(\text{subs}(t = tt, \text{piecewise}(\text{seq}(q, k = 1..N, 1), t \geq t_max, rw[N](w[N, 2])))), tt) :$
- > $\text{plot}([RR(t)[1], RR(t)[2], t = 0..t_max], \text{numpoints} = 1000)$

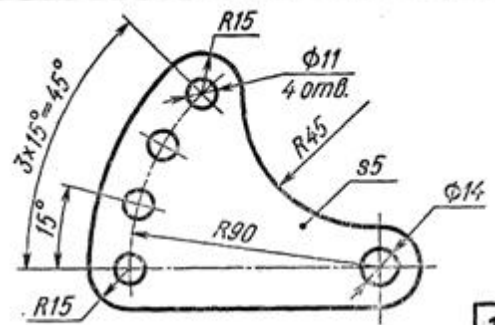


Индивидуальное задание

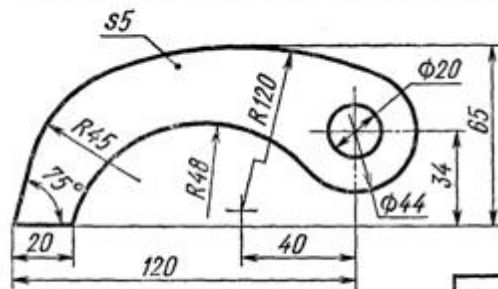




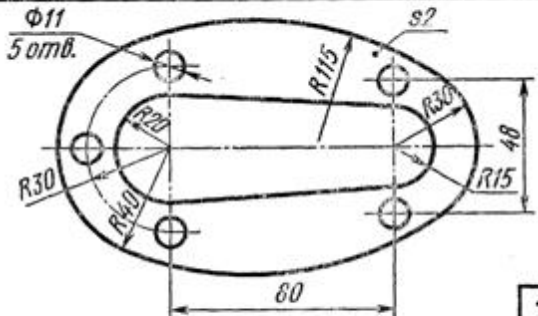
1.09



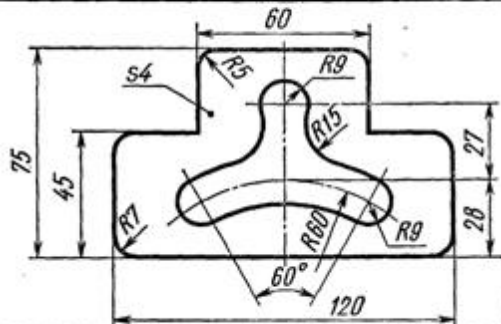
1.13



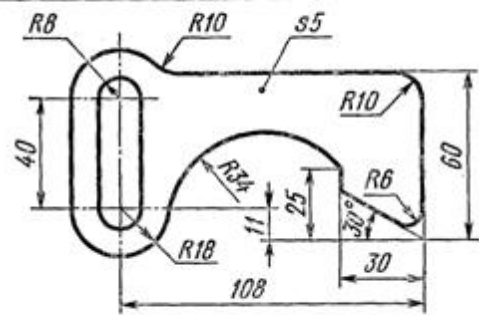
1.10



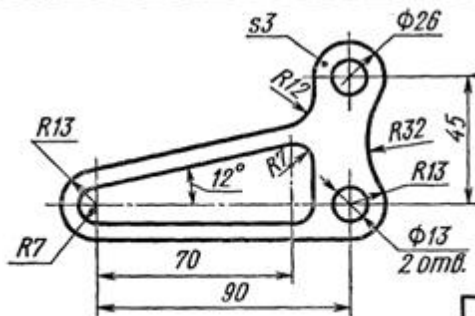
1.14



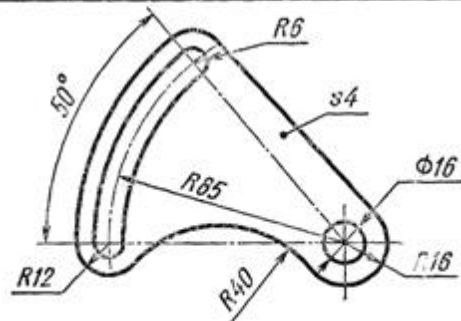
1.11



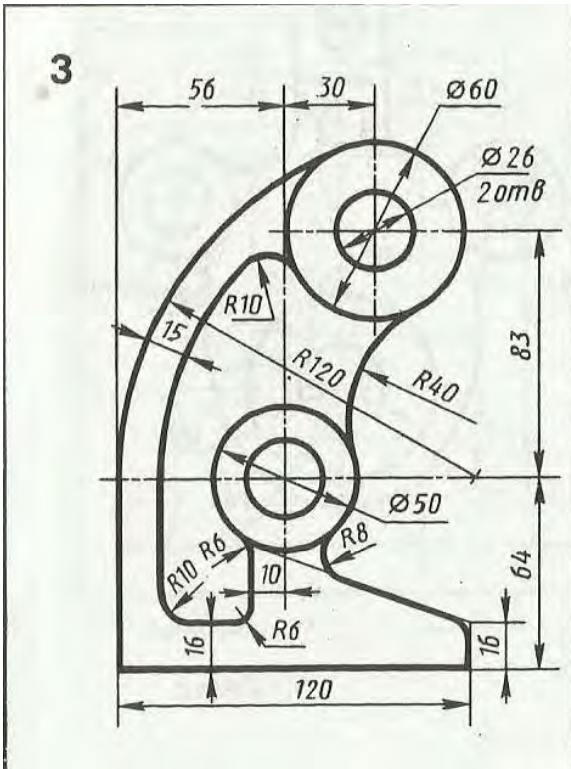
1.15



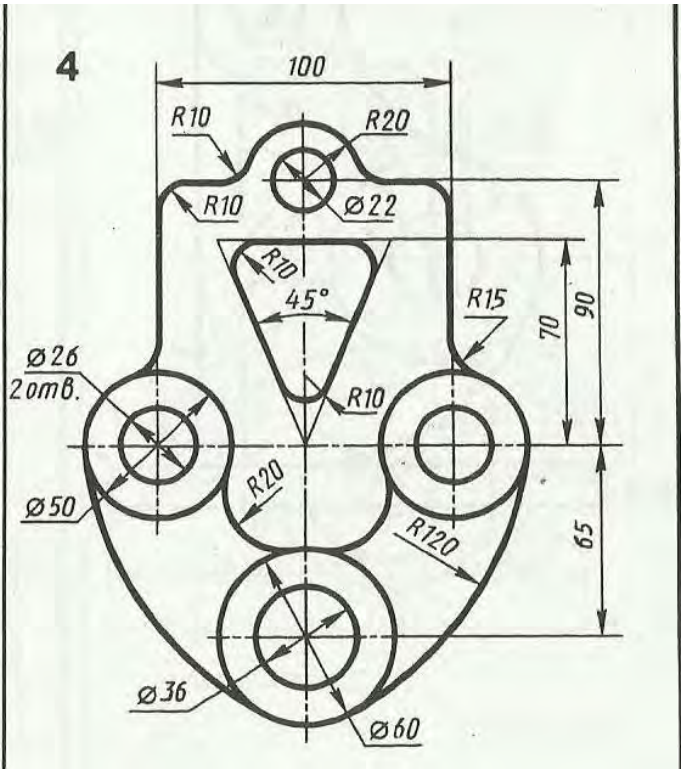
1.12



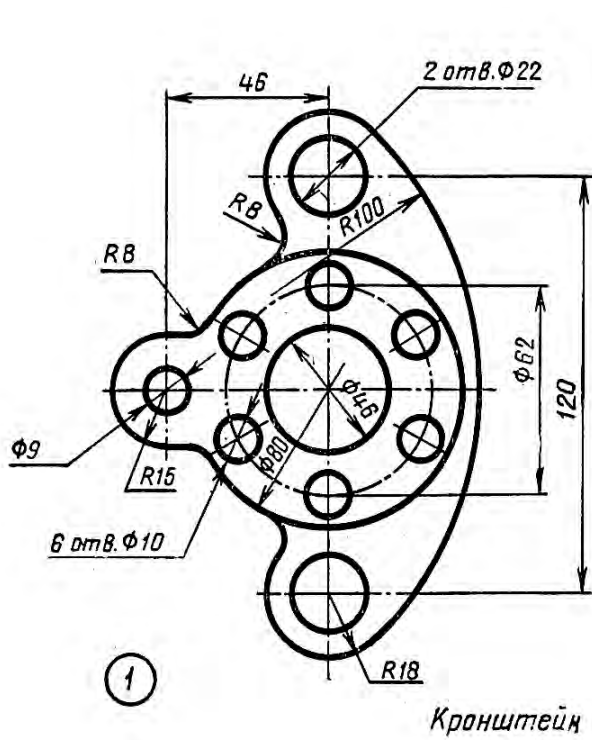
1.16



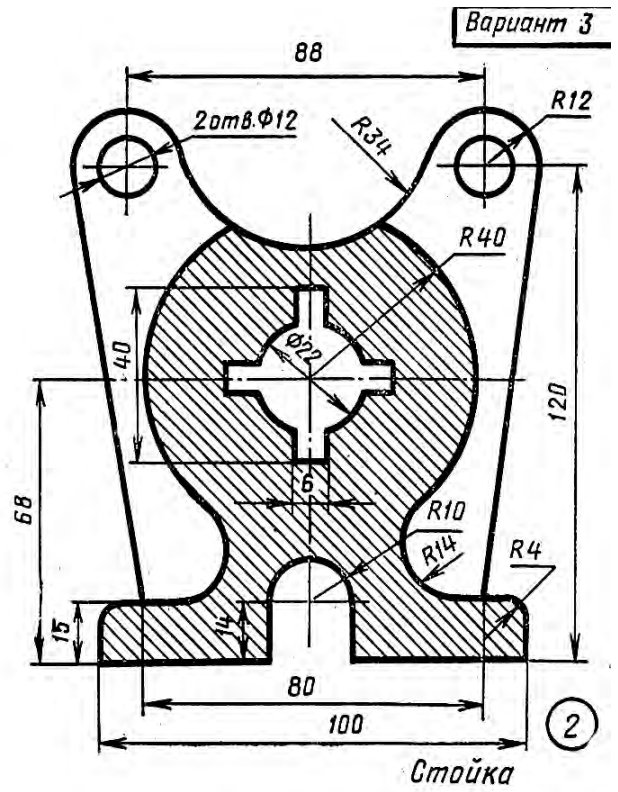
17



18



19



20

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Ложицкая
« 14 » _____ 20__ г.



**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОФИЛЯ ДЕТАЛИ ВСТРОЕННЫМИ
ПРОЦЕДУРАМИ MAPLE**

Методические указания к выполнению лабораторной и самостоятель-
ной работы для студентов по направлению
подготовки 15.04.01

Курск 2023

УДК 519.6

Составитель Куц В.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент А.Н. Гречухин

Интерполяция профиля детали встроенными процедурами Maple : методические указания к выполнению лабораторной и самостоятельной работы для студентов по направлению подготовки 15.04.01 / Минобрнауки России, Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц; ЮЗГУ. Курск, 2023. 11 с.: ил. 3.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ. л. 0,87 . Уч.-изд. л. 0,79.

Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

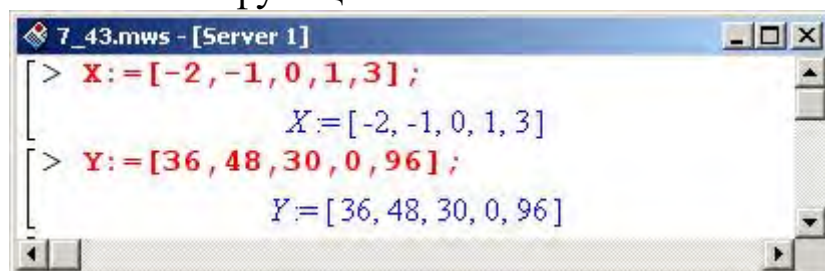
Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Встроенные процедуры Maple

Было бы удивительно, если разработчики Maple обошли стороной вопросы, связанные с проблемой интерполирования функций. В частности, для построения интерполяционного полинома в Maple предусмотрена процедура `interp()`. Процедура вызывается с тремя параметрами: списком значений узловых точек, списком значений интерполируемой функции в этих точках, а также названием переменной, которую следует использовать при построении интерполяционного полинома. Например, построим полином по значениям, приведенным в табл. 7.1.

В соответствии со значениями, приведенными в таблице, создаем два списка: сначала список X с узловыми точками, а затем список Y со значениями функции в этих точках.

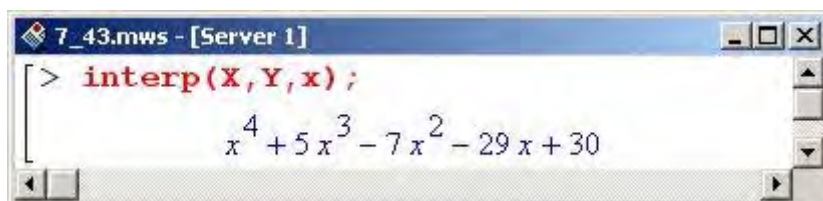


```
7_43.mws - [Server 1]
[ > X:=[-2,-1,0,1,3];
      X:=[-2,-1,0,1,3]
[ > Y:=[36,48,30,0,96];
      Y:=[36,48,30,0,96]
```

Таблица 7.1. Табулированные значения для интерполируемой функции.

Узловая точка	Значение функции
-2	36
-1	48
0	30
1	0
3	96

После этого можно вызвать процедуру интерполирования, указав описанные выше списки ее параметрами и, кроме того, приняв x за переменную интерполирования.



```
7_43.mws - [Server 1]
[> interp(X, Y, x);
      x4 + 5x3 - 7x2 - 29x + 30
```

Стоит заметить, что в качестве результата процедурой `interp()` возвращается выражение, а не оператор, как это было выше при разработке процедуры построения интерполяционного полинома Лагранжа.

Еще один достаточно популярный способ интерполяции состоит в следующем. На каждом интервале между соседними узловыми точками интерполируемая функция представляется в виде полинома. Но в отличие от, скажем, интерполяции Лагранжа, где один и тот же полином используется для всех точек, в данном случае на каждом интервале полином свой. Кроме равенства интерполяционной функции в узлах табличным значениям функции интерполируемой, на первую накладывается еще и условие непрерывности производных до порядка, на единицу меньшего, чем степень интерполяционных полиномов. Подобный тип интерполяции называется интерполяцией сплайнами, или сплайн-интерполяцией. Наибольшей популярностью пользуется интерполяция кубическими сплайнами.

В Maple для выполнения интерполяции сплайнами может быть использована процедура `spline ()`. Процедура имеет три обязательных параметра. Первые два – это списки с узловыми точками и значениями функции соответственно. Третьим параметром указывается переменная интерполирования. Если четвертый необязательный параметр не указан, то интерполяция будет выполняться кубическими сплайнами, т.е. для "сшивки" узловых точек будут использоваться полиномы третьей степени. Например, если параметрами процедуры указать ранее рассмотренные списки, табулирующие значения функции в узловых точках, получим такой результат.

```

7_43.mws - [Server 1]
> spline(X, Y, x);
{
  960 - 2454 x - 1620 x^2 - 270 x^3      x < -1
  30 - 1464 x - 630 x^2 + 60 x^3      x < 0
  30 - 1464 x - 630 x^2 + 804 x^3      x < 1
  2391 - 4767 x + 2673 x^2 - 297 x^3    otherwise
}

```

Четвертым параметром процедуры `spline()` может быть либо одно из зарезервированных ключевых слов из набора `linear` (интерполяция линейными зависимостями), `quadratic` (интерполяция параболлами), `cubic` (кубический сплайн), `quartic` (интерполяция полиномами четвертой степени), либо целое неотрицательное число, определяющее степень интерполяционного полинома. Причем указание числа от 1 до 4 эквивалентно использованию перечисленных текстовых опций, согласно того порядка, как они были представлены выше.

Внимание!

В качестве четвертого параметра может быть указано любое целое положительное число, не только в диапазоне от 1 до 4. Просто для этих чисел существует альтернативный вызов через текстовую опцию. Например, командой `spline(X, Y, x, 5)` можно выполнить интерполяцию рассмотренной выше функции полиномами пятой степени и т.д.

Интерполяция полиномами четвертой степени все той же функции выглядит следующим образом.

```

43.mws - [Server 1]
spline(X, Y, x, 4);
[
  - 6424996/691641 - 96669332/691641 x - 27002432/230547 x^2 - 27002432/691641 x^3 - 3375304/691641 x^4   x < -3/2
  20677604/691641 - 24395732/691641 x - 2911232/230547 x^2 + 5119168/691641 x^3 + 21272/7437 x^4   x < -1/2
  30 - 7940908/230547 x - 779408/76849 x^2 + 2470400/230547 x^3 + 3124312/691641 x^4   x < 1/2
  20301884/691641 - 20243956/691641 x - 5916992/230547 x^2 + 21726272/691641 x^3 - 14456/2479 x^4   x < 2
  381356/2077 - 77874428/230547 x + 15809280/76849 x^2 - 10539520/230547 x^3 + 2634880/691641 x^4   otherwise
]

```

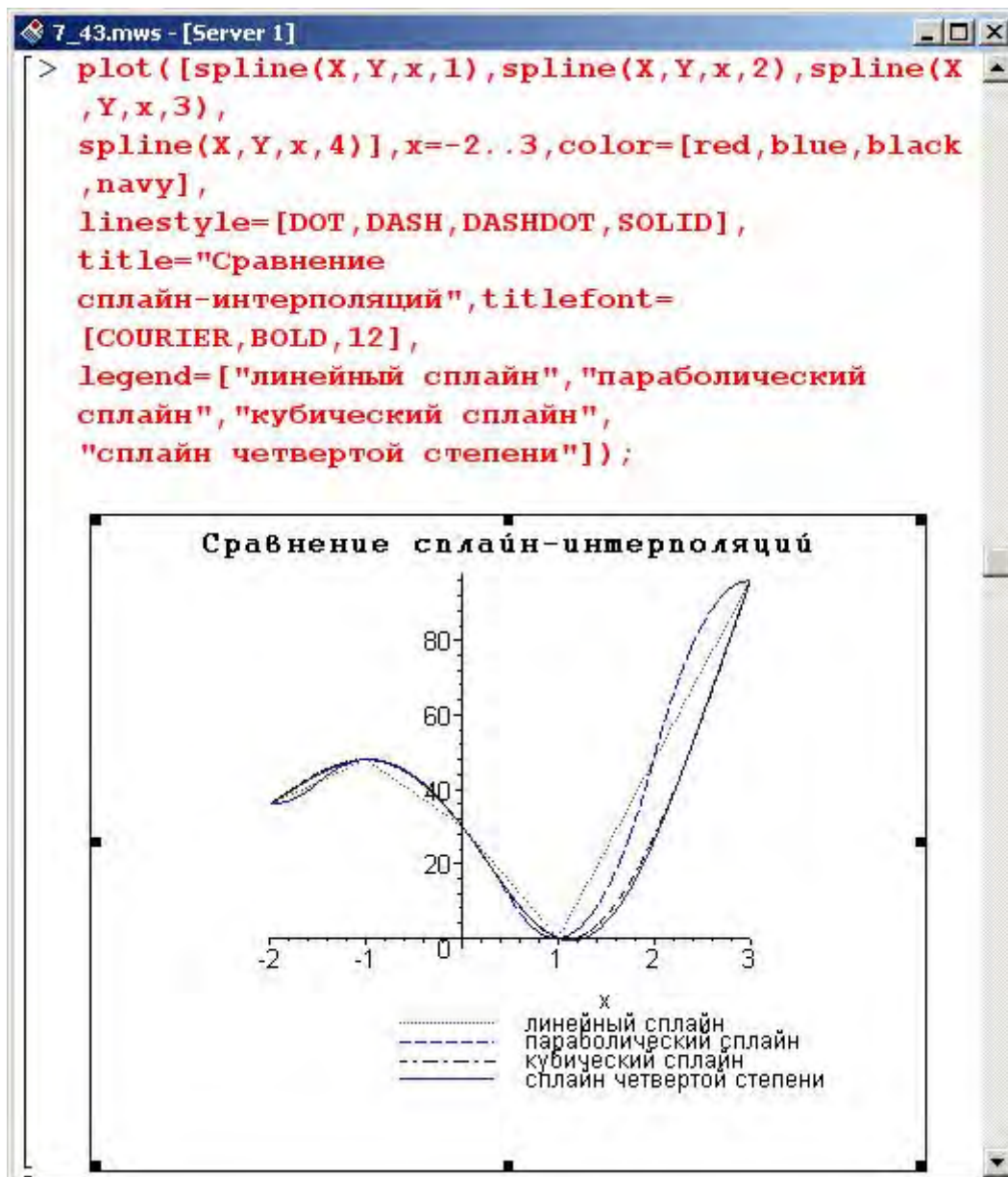
Выражения достаточно громоздки. Посмотрим, что будет, если использовать в качестве сплайн-полиномов линейные зависимости.

```

7_43.mws - [Server 1]
> spline(X, Y, x, linear);
[
  60 + 12 x   x < -1
  30 - 18 x   x < 0
  30 - 30 x   x < 1
  -48 + 48 x   otherwise
]

```

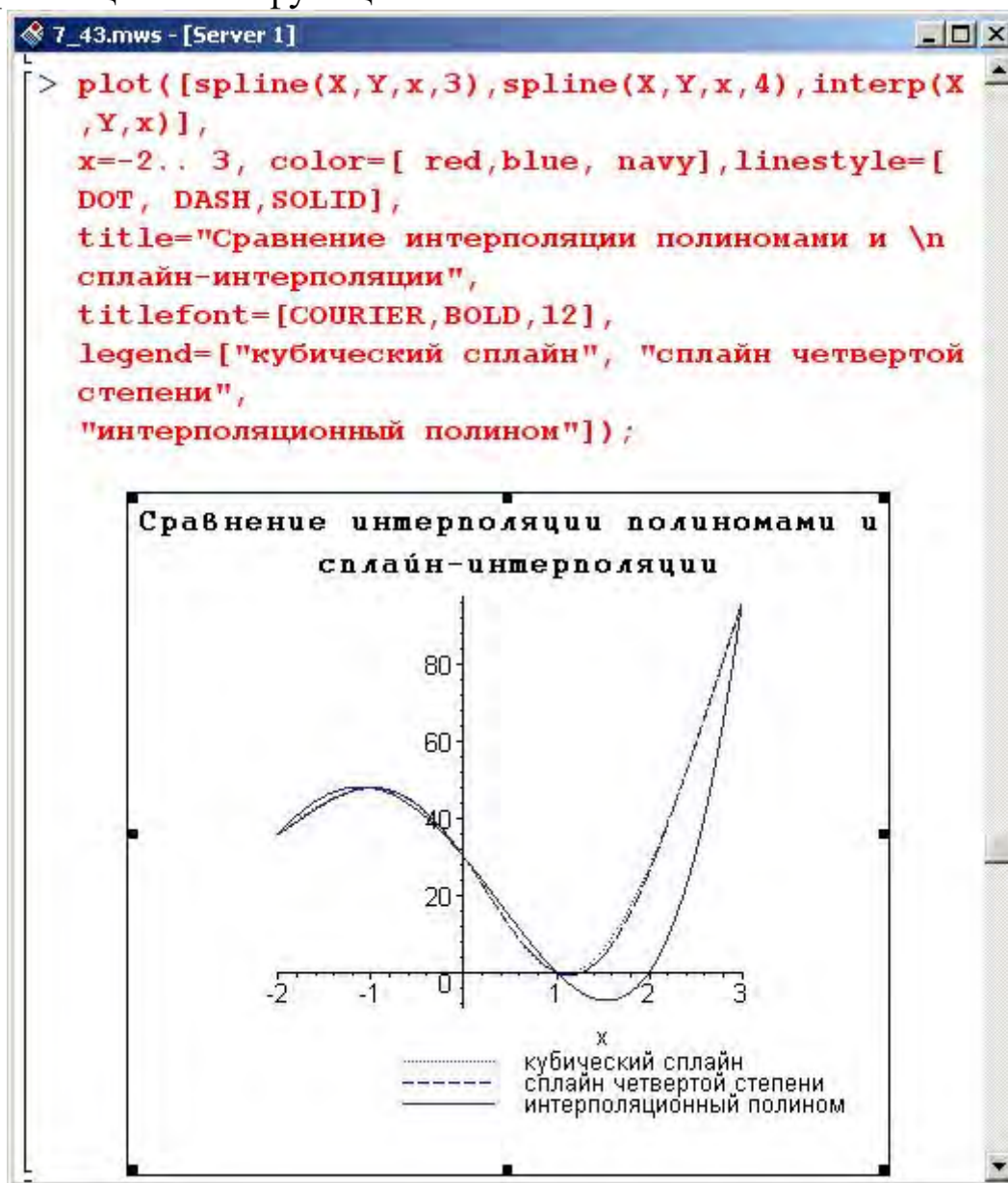
По сравнению с предыдущим случаем, здесь получен более простой результат. Однако простота – далеко не всегда значит эффективность. В этом несложно убедиться, если построить графики для интерполяционных функций, получаемых при сплайн-интерполяции полиномами разных степеней.



Очевидно, что линейная сплайн-интерполяция является достаточно грубой. По большому счету, это просто соединение интерполяционных точек линиями. Такой тип интерполяции используется крайне редко. Что касается использования полиномов прочих степеней, начиная со второй, то визуально особой разницы между ними (во всяком случае в данном примере) нет.

Однако не следует забывать, что степень сплайн-полиномов определяет гладкость полученных кривых. Это важно особенно в тех случаях, когда от полученных в результате интерполяции функций следует брать производные. В этом смысле полиномиальная интерполяция по сравнению со сплайн-интерполяцией обладает тем преимуществом, что и интерполяционный полином, и производные от него однозначно являются функциями непрерывными и гладкими. Поэто-

му интересно сравнить результаты интерполяции полиномом и сплайн-интерполяции. Для этого построим графики соответствующих интерполяционных функций.



Можно видеть, что все три графика (сплайны третьей и четвертой степени, а также интерполяционный полином четвертой степени) практически совпадают, особенно в левой части рисунка. Правда, интерполяционный полином является более гладкой функцией по сравнению с первыми двумя.

Задание:

1. Вычислить значения заданной функции (см. таблицу) $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции $x_i = a + h \cdot i$, где $h = (b - a)/10$, $i = 0, 1, \dots, 10$, на отрезке $[a, b]$.

2. Для вычисленных значений построить интерполяционную функцию spline (при интерполяции линейными зависимостями, интерполяции параболлами, кубическом сплайне) и interp.

3. Построить графики исходной функции и полученных интерполяционных функций на отрезке $[a, b]$ и сравнить.

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin x^2$	[0, 2]	9	$x \cdot \cos(x + \ln(1 + x))$	[1, 5]
2	$\cos x^2$	[0, 2]	10	$10 \cdot \ln 2x / (1 + x)$	[1, 5]
3	$e^{\sin x}$	[0, 5]	11	$\sin x^2 \cdot e^{-(x/2)^2}$	[0, 3]
4	$1/(0.5 + x^2)$	[0, 2]	12	$\cos(x + \cos^3 x)$	[0, 2]
5	$e^{-(x + \sin x)}$	[2, 5]	13	$\cos(x + e^{\cos x})$	[3, 6]
6	$1/(1 + e^{-x})$	[0, 4]	14	$\cos(2x + x^2)$	[0, 1]
7	$\sin(x + e^{\sin x})$	[0, 3]	15	$e^{\cos x} \cos x^2$	[0, 2]
8	$e^{-(x + 1/x)}$	[1, 3]			

Пример выполнения работы

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

на отрезке от $[0; 2.5]$ для случая с 5-ю интервалами.

Ниже приведен код программы в Maple/

> restart : readlib(spline) : with(plots) : with(plottools) :

> f := x -> x^2 * e^-x^2;

$$f := x \rightarrow x^2 e^{-x^2}$$

> a := 0; b := 3;

$$a := 0$$

$$b := 3$$

> h := $\frac{(b - a)}{5}$;

$$h := \frac{3}{5}$$

> X := [a + h * i\$ i = 0..5];

$$X := \left[0, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 3 \right]$$

> Y := evalf(map(f, X));

Y := [0., 0.2511634774, 0.3411759725, 0.1268910201,
0.01815040280, 0.001110688237]

>

>

> f1 := spline(X, Y, x, linear);

$$f1 := \begin{cases} 0.4186057957x & x < \frac{3}{5} \\ 0.1611509823 + 0.1500208252x & x < \frac{6}{5} \\ 0.7697458773 - 0.3571415873x & x < \frac{9}{5} \\ 0.4531128720 - 0.1812343622x & x < \frac{12}{5} \\ 0.08630926105 - 0.02839952427x & \text{otherwise} \end{cases}$$

> f2 := spline(X, Y, x, quadratic);

$$f2 := \begin{cases} -1.38777878078145 \cdot 10^{-16}x + 1.05829508139 \\ 0.00848202640198481 + 0.404469084996692x - 0.3841799 \\ 0.523945604476182 - 0.152308026646818x - 0.54378191 \\ 0.701278172908410 - 0.319103973782450x + 0.26578866 \\ 0.225923031580353 - 0.0865719286584805x + 0.12176474 \\ 0.00111068823700000 + 1.44560289664734 \cdot 10^{-18}x + 0.02252 \end{cases}$$

> f3 := spline(X, Y, x, 3);

$$f3 := \begin{cases} 0.451536552115152x - 0. \\ 0.0395169077381818 + 0.352744282769697x - 0.16465378 \\ 0.529136557332727 - 0.156633820693939x - 0.68430972 \\ 0.752519335789091 - 0.347571286493939x + 0.36608061 \\ 0.181851719192727 - 0.0682088818303030x + 0.0995233939 \end{cases}$$

> f4 := interp(X, Y, x)

$$f4 := -0.1046675093x^5 + 0.8057919153x^4 - 2.069295831x^3 \\ + 1.809438790x^2 - 0.0825971238x$$

> `plot([f(x), f1, f2, f3, f4], x = a .b, color = black, linestyle = [DOT, SOLID, DASHDOT, DASH, longdash], legend = ["Исходная функция", "Линейный сплайн", "Параболический сплайн", "Кубический сплайн", "Интерполяционный полином"])`

