

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖДАЮ
преподаватель по учебной работе
О.Г. Локтионова
2016 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРАЦИОННОГО ИНСТРУМЕНТА БЕЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ В СРЕДЕ MATHCAD

Методические указания к выполнению практических и
самостоятельных работ по дисциплине «Проектирование
мехатронных систем» для студентов направления 15.03.06

Курск 2016

УДК 621.864

Составители: С.Ф. Яцун, Л.Ю. Волкова

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Б.В. Лушников*

Моделирование движения вибрационного инструмента без технологической нагрузки в среде MathCAD: методические указания по выполнению практической и индивидуальной работ по дисциплине «Проектирование мехатронных систем» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.Ф. Яцун, Л.Ю. Волкова. Курск, 2016. 22 с.

Методические указания содержат сведения по разработке математической модели вибрационного инструмента, написания алгоритма численного моделирования его движения, программной реализации математической модели в среде MathCAD. Приведены варианты моделируемой мехатронной системы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов специальности 15.03.06 - Мехатроника и робототехника.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. . Тираж 20 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение	4
Задание	4
1. Описание мехатронной системы	7
2. Математическая модель вибрационного инструмента	8
3. Мгновенный пуск двигателя	11
3.1 Алгоритм численного расчета	11
3.2 Программирование в MathCAD	15
4. Программно-управляемый пуск двигателя	18

Введение

Одним из наиболее важных этапов в проектировании мехатронной системы является разработка ее математической модели и реализация численного моделирования, позволяющего исследовать основные характеристики устройства и особенности его движения.

В настоящем методическом указании рассмотрена разработка математической модели мехатронной системы вибрационного инструмента без учета воздействия на него обрабатываемой среды, алгоритма моделирования движения объекта и исследование влияния на его динамику режимов пуска двигателя.

Задание

1 Исследовать динамику мехатронной системы, изображенной на рис. 1, при мгновенном и программно-управляемом пуске двигателя в среде MathCAD.

2 Построить временные зависимости $i(t), \ddot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t), \varphi(t), \ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), U(t)$ при двух видах пуска двигателя.

3 Сделать выводы о влиянии пускового режима двигателя на переходный и установившийся режимы работы системы.

Численные данные, используемые при моделировании, указаны в табл. 1. Характеристики двигателей приведены в табл. 2.

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.02 \text{ кг;} \\ c_1 &:= 250 \text{ Н/м;} \\ \mu_1 &= 2.5 \text{ Н}\cdot\text{с/м;} \\ r &= 0.01 \text{ м;} \\ g &= 10 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Табл. 1 - Численные данные вибрационной системы

№	m2/ m1	Двигатель
1	1	RE-16 3.2 ВТ
2	5	RE-13 3 ВТ
3	1	RE-13 2.5 ВТ
4	5	RE-25 20 ВТ
5	1	RE-30 60 ВТ
6	5	RE-40 150 ВТ
7	1	RE-75 250 ВТ
8	5	RE-16 4.5 ВТ
9	1	RE-16(2) 3.2 ВТ
10	3	RE-30 60 ВТ
11	5	RE-16 3.2 ВТ
12	1	RE-13 3 ВТ
13	5	RE-13 2.5 ВТ
14	1	RE-25 20 ВТ
15	5	RE-30 60 ВТ
16	1	RE-40 150 ВТ
17	5	RE-75 250 ВТ
18	1	RE-16 4.5 ВТ
19	5	RE-16(2) 3.2 ВТ
20	3	RE-40 150 ВТ

Табл. 2 – Характеристики двигателей

Параметры	RE-16	RE-13	RE-13	RE-25	RE-30	RE-40	RE-75	RE-16	RE-16
	3.2 Вт	3 Вт	2.5 Вт	20 Вт	60 Вт	150 Вт	250 Вт	4.5 Вт	3.2 Вт
Ном. напряжение, В	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0
Скорость холостого хода, об/мин	7130	13100	11000	9770	8170	6920	1820	13900	5990
Ток холостого хода, мА	6.05	44.4	11.0	165	300	241	568	46.0	4.63
Ном. скорость, об/мин	5020	10200	7370	8630	7630	6370	1540	11900	3830
Ном. момент, мНм	5.47	2.45	2.89	23.5	51.7	94.9	551	3.95	5.37
Ном. ток, А	0.347	0.331	0.291	2.25	4.00	6.00	10.0	0.531	0.286
Пусковой момент, мНм	18.6	11.1	8.79	261	844	1680	5960	28.8	14.9
Пусковой ток, А	1.16	1.32	0.856	23.2	60.5	102	103	3.55	0.784
Сопротивление цепи ротора, Ом	10.3	9.07	14.0	0.517	0.198	0.117	0.117	3.38	15.3
Индуктивность цепи ротора, мГн	0.452	0.316	0.485	0.0573	0.0345	0.0245	0.0402	0.113	0.639
Моментная постоянная, мНм/А	16.0	8.42	10.3	11.2	13.9	16.4	58.1	8.11	19.0
Скоростная постоянная, (об/мин)/В	597	1130	930	850	685	581	164	1180	502
Механическая постоянная времени, мс	5.24	6.92	7.15	5.89	3.42	6.03	4.95	6.84	5.26
Момент инерции ротора, гсм ²	1.29	0.541	0.537	14.4	33.5	139	1430	1.33	1.24

1. Описание мехатронной системы

Рассмотрим мехатронную систему, представляющую собой вибрационный инструмент, используемый при операциях обработки различных технологических сред, расчетная схема которой изображена на рис. 1. Инструмент состоит из несущего корпуса 1, упруго-вязким образом связанного с неподвижным основанием 2. В полости корпуса расположен дебалансный вибровозбудитель 3 с приводом от электродвигателя ограниченной мощности. Направление движения инструмента и обработки обеспечивается идеальными направляющими 4. Корпус жестко соединен с рабочим органом.

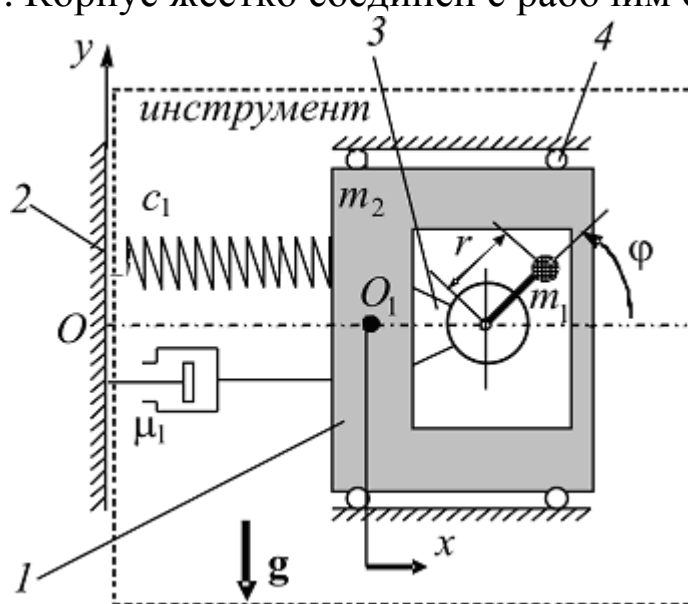


Рис. 1 Схема мехатронной системы

Технологическая ось инструмента совпадает с горизонтальной осью Ox , перпендикулярной направлению действия силы тяжести g . Вращение дебаланса вибровозбудителя происходит относительно горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости yOx .

Корпус и рабочий орган инструмента моделируются единым абсолютно твердым телом массой m_2 , поступательное движение которого описывается координатой x центра масс корпуса (точка O_1), отсчитываемой от недеформированного состояния системы в направлении горизонтальной оси Ox .

Масса m_1 дебаланса центробежного вибровозбудителя сконцентрирована в точке, отстоящей от оси электродвигателя на расстоянии r . Положение дебаланса относительно корпуса будем

определять углом φ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки.

Крепление корпуса к основанию описывается реологической моделью тела Кельвина–Фойгта с коэффициентом жесткости c_1 и коэффициентом демпфирования μ_1 .

2. Математическая модель вибрационного инструмента

Для разработки математической модели инструмента рассмотрим расчетную схему, приведенную на рис. 2.

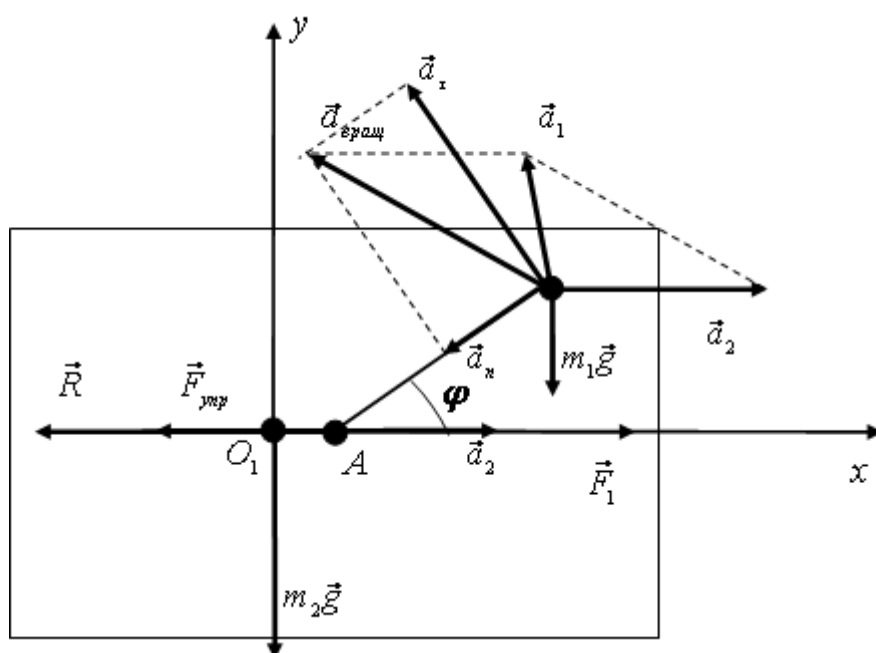


Рис. 2 Расчетная схема вибрационного инструмента

Запишем в общем виде систему дифференциальных уравнений, описывающих механическую составляющую движения системы:

$$\begin{cases} m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \\ J\ddot{\varphi} = \sum M_{iA} \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение можно представить в виде:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{R} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} \quad (2)$$

В проекции на ось O_1x :

$$m_1a_{x1} + m_2a_{x2} = -F_{\text{упр}} - R \quad (3)$$

Корпус вибрационного инструмента движется возвратно-поступательно вдоль горизонтальной оси, поэтому проекцию его ускорения на ось O_1x определим как:

$$a_{x_2} = \ddot{x} \quad (4)$$

Дебаланс совершает сложное движение, переносная составляющая которого – это возвратно-поступательное движение вместе с корпусом вибросистемы, относительная – вращательное движение внутри корпуса вокруг точки закрепления:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (5)$$

Нормальная и тангенциальная составляющие ускорения вращательного движения определяются по следующим формулам:

$$a_n = \dot{\varphi}^2 r \quad (6)$$

$$a_\tau = \ddot{\varphi} r \quad (7)$$

Тогда проекция ускорения дебаланса на ось O_1x можно записать в виде:

$$a_{x_1} = a_{x_2} - a_\tau \sin \varphi - a_n \cos \varphi \quad (8)$$

$$a_{x_1} = \ddot{x} - \ddot{\varphi} r \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi \quad (9)$$

Силы упругости и вязкости определяются по формулам:

$$F_{уп} = c_1 x, \quad (10)$$

$$R = \mu_1 \dot{x}. \quad (11)$$

Уравнение линейного движения системы примет вид:

$$m_2 \ddot{x} + m_1 (\ddot{x} - \ddot{\varphi} r \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi) = -c_1 x - \mu_1 \dot{x} \quad (12)$$

$$m \ddot{x} = m_1 (\ddot{\varphi} r \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi) - c_1 x - \mu_1 \dot{x} \quad (13)$$

где $m = m_1 + m_2$ – общая масса несущего корпуса и дебаланса.

В уравнение моментов относительно точки А помимо моментов, вызванных действием силы тяжести дебаланса и его линейным ускорением, входит момент, создаваемый двигателем:

$$J \ddot{\varphi} = m_1 \ddot{x} r \sin \varphi - m_1 g r \cos \varphi + M(i) \quad (14)$$

где $M(i)$ – момент, развиваемый электромагнитной системой двигателя.

Полное движение электромеханической системы вибрационного инструмента описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_1 \frac{dx}{dt} + c_1 x = m_1 r \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \varphi \right]; \\ J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_1 r \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \sin \varphi - g \cos \varphi \right) = M(i); \\ L \frac{di}{dt} + Ri + C_w \frac{d\varphi}{dt} = U(t), \end{cases} \quad (15)$$

где $J = J_D + m_1 r^2$ - приведенный к оси вращения момент инерции двигателя и дебаланса (J_D – момент инерции двигателя);

i – ток в цепи электродвигателя;

L, R – индуктивность и сопротивление обмотки электродвигателя;

C_w – электрическая константа угловой скорости;

$U(t)$ – напряжение.

Первое уравнение системы (15) определяет поступательное движение всей модели, второе – вращательное движение ротора двигателя и дебаланса, а третье – закон Кирхгофа в цепи электродвигателя.

Подключение электродвигателя к источнику питания постоянного тока может осуществляться мгновенно (с помощью электронного ключа) или программно-управляемым способом во время пускового режима двигателя. Будем рассматривать следующий закон изменения напряжения питания:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{t_0} t, & 0 < t < t_0; \\ U_0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (16)$$

где U_0 – постоянное напряжение питания;

t_0 – время выхода напряжения на заданный уровень.

Приблизительно момент $M(i)$ на валу двигателя принимается в виде линейной функции тока:

$$M(i) = C_E i \quad (17)$$

где C_E – коэффициент пропорциональности.

3. Мгновенный пуск двигателя

3.1 Алгоритм численного расчета

Определение тока в обмотках двигателя, линейных и угловых перемещений, скоростей и ускорений рабочего органа выполняется численно в соответствии со специально разработанным алгоритмом (рис. 3). Моделирование проводится при следующих начальных

условиях: $t=0$, $i(0)=0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(0)=0$, $\frac{d\varphi}{dt}(0)=0$, $\varphi(0)=0$,

$\frac{d^2x}{dt^2}(0)=0$, $\frac{dx}{dt}(0)=0$, $x(0)=0$.

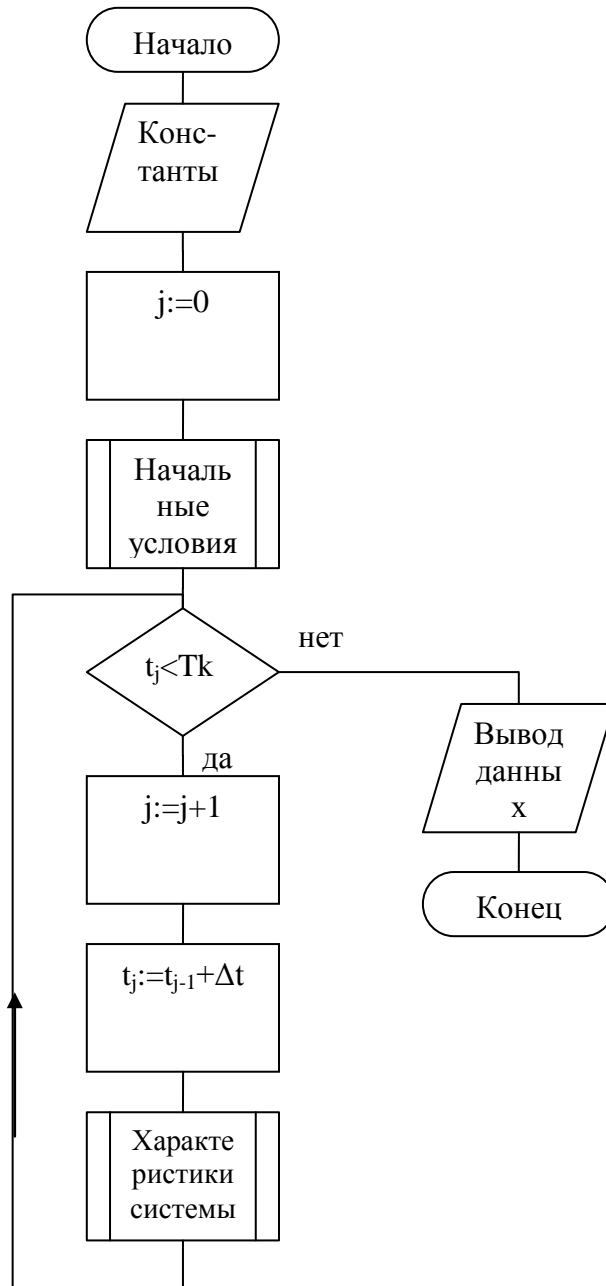


Рис. 3 Алгоритм численного расчета характеристик мехатронной системы

Результаты моделирования записываются в матрицу, которая имеет 9 столбцов $(t, \frac{di}{dt}, i, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \frac{d\varphi}{dt}, \varphi, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x)$ и число строк, равное $\frac{T_k}{\Delta t}$, где T_k – конечное время моделирования, Δt – шаг по времени. Счетчик j обеспечивает переход на следующую строку

матрицы. Величины $\left(\frac{di}{dt}\right)_j$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_j$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_j$, \square \square выражаются из системы уравнений (7). Порядок их нахождения определяется работой системы, которую можно представить следующим образом:

1 Задающее воздействие $U(t)$ формирует ток i на обмотках электродвигателя.

2 Вращение вала двигателя приводит к вращению дебалансного привода φ .

3 Вращение дебаланса вызывает возвратно-поступательное движение корпуса виброинструмента x .

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_j = \frac{U}{L} - \frac{R}{L} i_{j-1} - \frac{C_w}{L} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{j-1} \quad (18)$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_j = \frac{C_E}{J} i_j + \frac{m_1 r}{J} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{j-1} \sin \varphi_{j-1} - \frac{m_1 r}{J} g \cos \varphi_{j-1} \quad (19)$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_j = \frac{m_1 r}{m} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_j \sin \varphi_j + \frac{m_1 r}{m} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_j^2 \cos \varphi_j - \frac{\mu_1}{m} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{j-1} - \frac{c_1}{m} x_{j-1} \quad (20)$$

Для расчета остальных характеристик используется метод интегрирования Верле, в соответствии с которым

$$i_j = i_{j-1} + \left(\frac{di}{dt}\right)_j \Delta t, \quad (21)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_j = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{j-1} + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_j \Delta t, \quad (22)$$

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_j \Delta t + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_j \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (23)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_j = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{j-1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_j \Delta t, \quad (24)$$

$$x_j = x_{j-1} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_j \Delta t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_j \frac{(\Delta t)^2}{2}. \quad (25)$$

Алгоритмы подпрограмм задания начальных условий и нахождения характеристик вибросистемы приведены на рис. 4 и 5 соответственно.

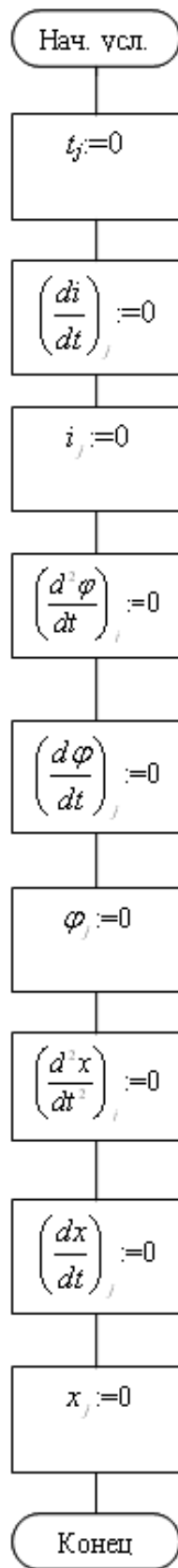


Рис. 4 Алгоритм подпрограммы задания начальных условий при $U=\text{const}$

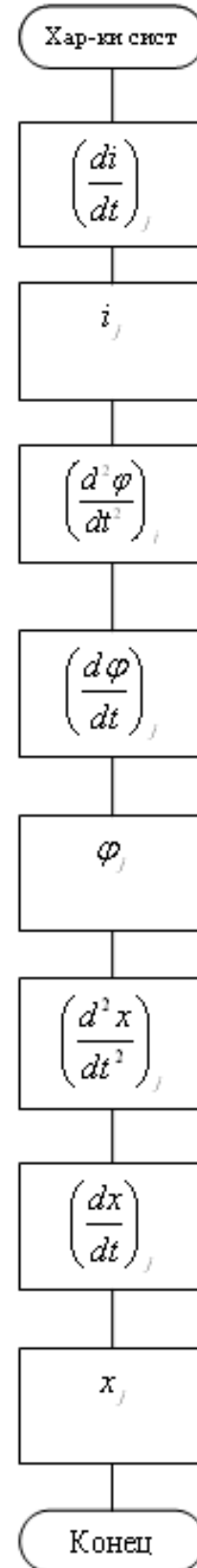


Рис. 5 Алгоритм подпрограммы характеристик системы при $U=\text{const}$

3.2 Программирование в MathCAD

Для формирования матрицы A результатов моделирования динамики вибросистемы необходимо ввести переобозначения величин, записываемых в ее столбцы. Нумерация столбцов и строк в MathCAD начинается с 0.

$$A^{<0>} - t,$$

$$A^{<1>} - \frac{di}{dt},$$

$$A^{<2>} - i,$$

$$A^{<3>} - \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$A^{<4>} - \frac{d\varphi}{dt},$$

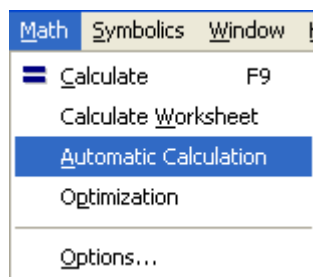
$$A^{<5>} - \varphi,$$

$$A^{<6>} - \frac{d^2x}{dt^2},$$

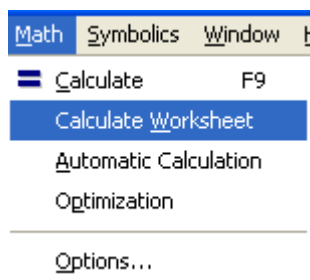
$$A^{<7>} - \frac{dx}{dt},$$

$$A^{<8>} - x.$$

1. При программировании в MathCAD рекомендуется отключить автоматическую калькуляцию, убрав галочку на пункте *Automatic Calculation* панели *Math*.



Для вызова принудительного расчета файла после написания программы нужно использовать команду *Calculate Worksheet* панели *Math*.



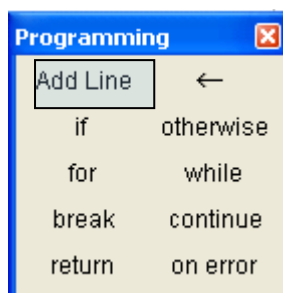
2. Константы задаются вне тела программы без использования индексов при помощи оператора присваивания.

$$m1 := 0.2$$

3. Матрица A вводится с использованием оператора присваивания.

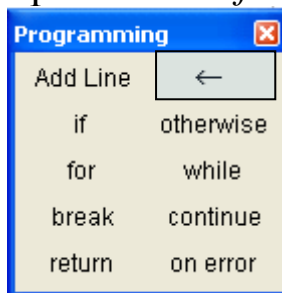
$$A :=$$

4. Для формирования каждой строки матрицы необходимо использовать команду *Add Line* панели *Programming*.



$$A := \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$$

5. Присваивание в пределах программы производится с помощью оператора *Local Definition* панели *Programming*.



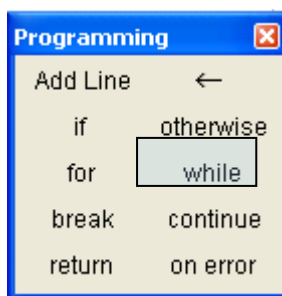
$$A := \begin{pmatrix} j \leftarrow 0 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$$

6. Для обращения к элементу матрицы необходимо записывать $A_{j,0}$, номер столбца, используя для задания индекса команду *Subscript* панели *Matrix*.



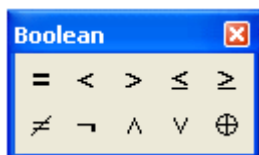
$$A := \begin{pmatrix} j \leftarrow 0 \\ A_{j,0} \leftarrow \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$$

7. Для формирования цикла по времени используется оператор *while* панели *Programming*.



```
A := | j ← 0
      | Aj,0 ← 0
      | while
```

В местозаполнителе справа от него записывается условие работы цикла с помощью операторов панели *Boolean*.



```
A := | j ← 0
      | Aj,0 ← 0
      | while Aj,0 < Tk
```

8. Тело цикла записывается в нижний местозаполнитель и ограничивается вертикальной линией *Add Line*.

```
A := | j ← 0
      | Aj,0 ← 0
      |
      | while Aj,0 < Tk
      |   | j ← j + 1
      |   | Aj,0 ← Aj-1,0 + Δt
      |   |
      | A
```

9. В последней строке программы необходимо вызвать матрицу A для ее формирования.

10. Для вывода матрицы на экран необходимо записать

$$A=$$

После этого программа автоматически сформирует матрицу.

11. Для построения графиков характеристик вибросистемы необходимо обращаться к соответствующим столбцам матрицы A , например, $A^{<0>}$ - столбец времени,

Листинг программы приведен на рис. 6.

```

A := | j ← 0
      | Aj,0 ← 0
      | Aj,1 ← 0
      | Aj,2 ← 0
      | Aj,3 ← 0
      | Aj,4 ← 0
      | Aj,5 ← 0
      | Aj,6 ← 0
      | Aj,7 ← 0
      | Aj,8 ← 0
      | while Aj,0 < Tk
      |   | j ← j + 1
      |   | Aj,0 ← Aj-1,0 + Δt
      |   | Aj,1 ←  $\left(\frac{U}{L}\right) - \left(A_{j-1,2} \cdot \frac{R}{L}\right) - \left(C_w \cdot \frac{A_{j-1,4}}{L}\right)$ 
      |   | Aj,2 ← Aj-1,2 + Aj,1 · Δt
      |   | Aj,3 ←  $C_e \cdot \frac{A_{j,2}}{J} + m_1 \cdot \frac{r}{J} \cdot A_{j-1,6} \cdot \sin(A_{j-1,5}) - m_1 \cdot r \cdot \frac{g}{J} \cdot \cos(A_{j-1,5})$ 
      |   | Aj,4 ← Aj-1,4 + Aj,3 · Δt
      |   | Aj,5 ← Aj-1,5 + Aj,4 · Δt + Aj,3 ·  $\frac{(\Delta t)^2}{2}$ 
      |   | Aj,6 ←  $m_1 \cdot \frac{r}{m} \cdot A_{j,3} \cdot \sin(A_{j,5}) + m_1 \cdot \frac{r}{m} \cdot (A_{j,4})^2 \cdot \cos(A_{j,5}) - \frac{\mu_1}{m} \cdot A_{j-1,7} - \frac{c_1}{m} \cdot A_{j-1,8}$ 
      |   | Aj,7 ← Aj-1,7 + Aj,6 · Δt
      |   | Aj,8 ← Aj-1,8 + Aj,7 · Δt + Aj,6 ·  $\frac{(\Delta t)^2}{2}$ 
      | A

```

Рис. 6 Листинг программы моделирования динамики вибросистемы при мгновенном пуске двигателя

4. Программно-управляемый пуск двигателя

Для хранения результатов моделирования динамики виброинструмента при программно-управляемом пуске двигателя будем использовать матрицу B , в которой будет на один столбец

больше, чем в матрице A . В этот столбец будут заноситься значения напряжения U в каждый момент времени t_j для построения соответствующего графика. Для этого вводится переобозначение:

$$B^{<9>} - U.$$

В алгоритмы подпрограммы задания начальных условий и определения характеристик вибросистемы добавляется по одному блоку (рис. 7, 8).

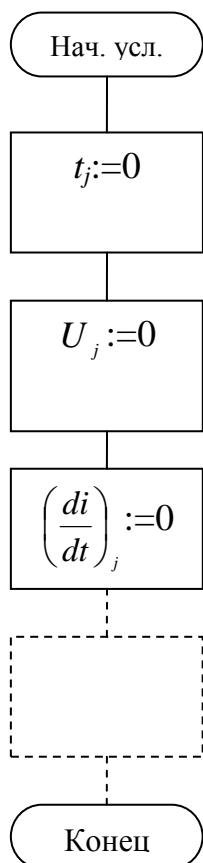


Рис. 7 Алгоритм подпрограммы задания начальных условий при $U=U(t)$

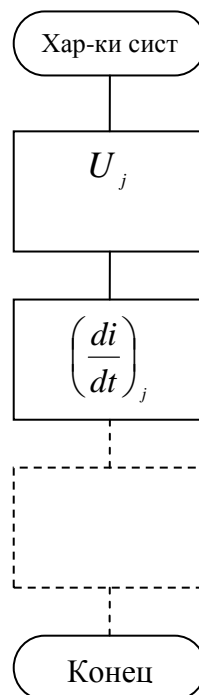
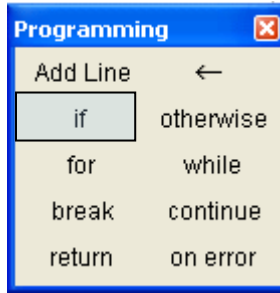


Рис. 8 Алгоритм подпрограммы определения характеристик системы при $U=U(t)$

Условия, при помощи которых формируется закон напряжения, записываются с использованием *Add Line* и условного оператора *if* панели *Programming*.



$$B_{j,9} \leftarrow \begin{cases} \frac{U \cdot B_{j,0}}{t_0} & \text{if } B_{j,0} < t_0 \\ U & \text{if } B_{j,0} \geq t_0 \end{cases}$$

Остальной текст программы остается без изменений.

Графики тока, угловой скорости, угла поворота и линейного перемещения вибрационного инструмента от времени при двух видах пуска двигателя в переходном и установившемся режимах приведены на рис. 9-15.

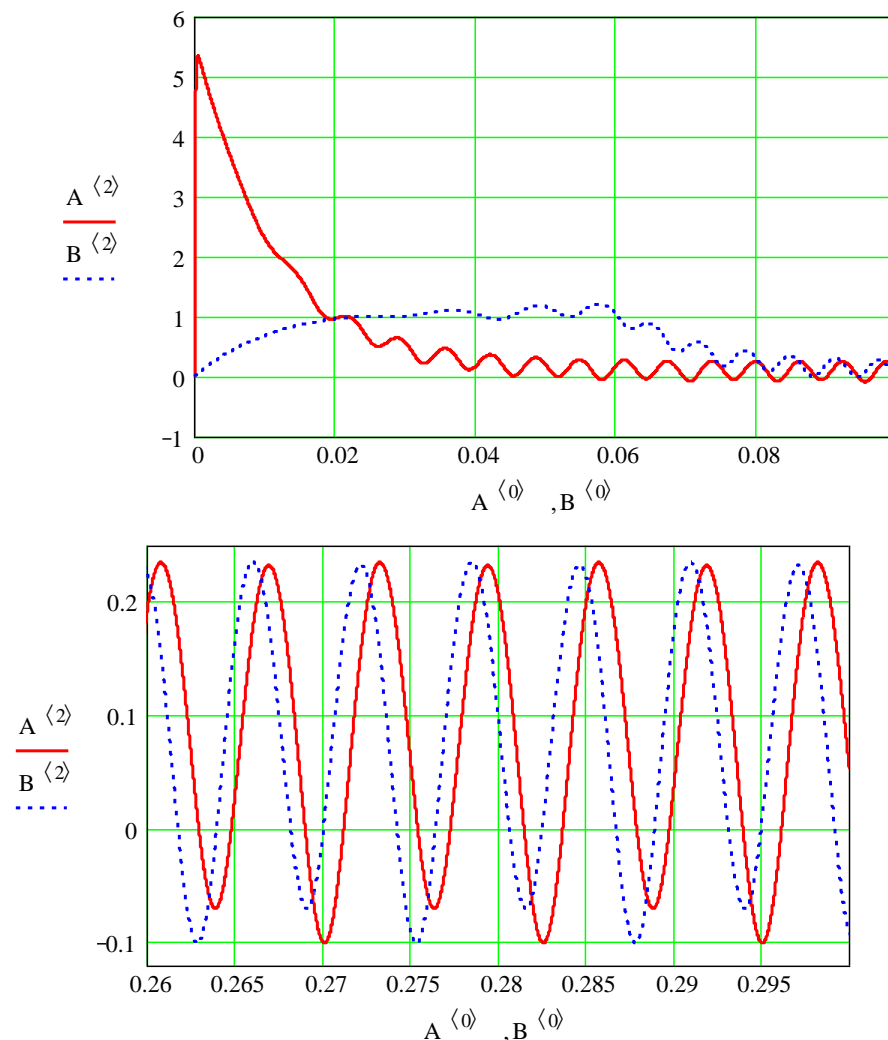


Рис. 9 Графики тока двигателя: — при мгновенном пуске двигателя, - - - при программно-управляемом пуске двигателя

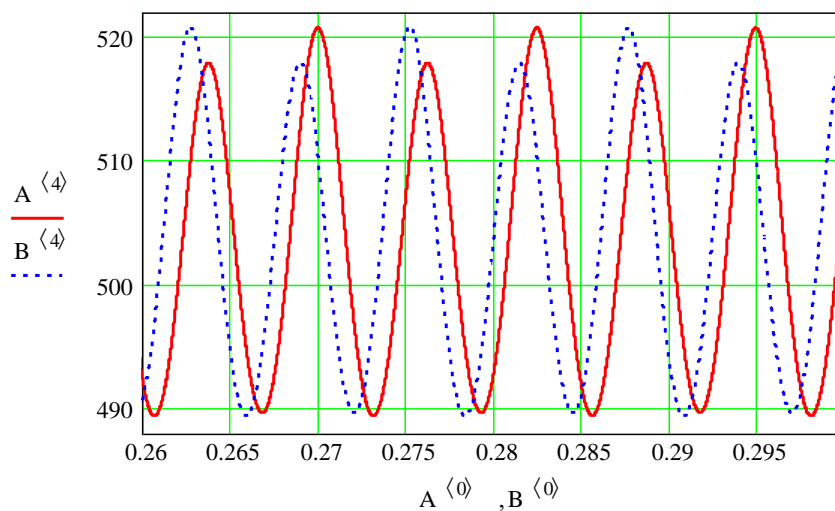


Рис. 10 Графики угловой скорости дебаланса: — при мгновенном пуске двигателя, - - - при программно-управляемом пуске двигателя

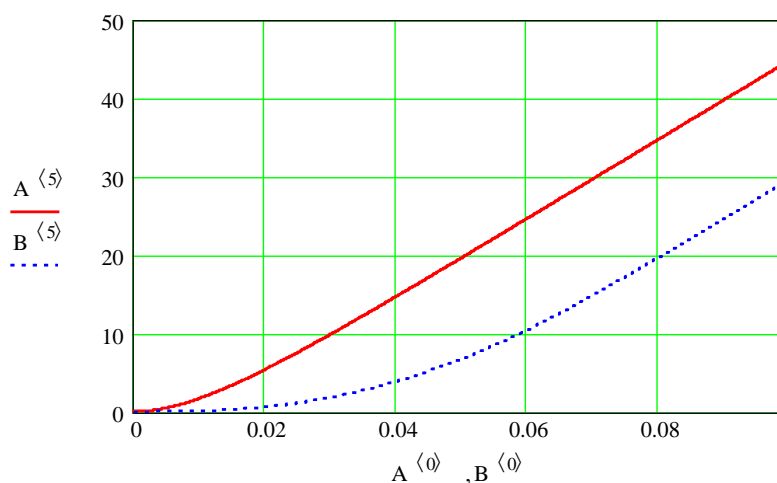


Рис. 11 Графики угла поворота дебаланса: — при мгновенном пуске двигателя, - - - при программно-управляемом пуске двигателя

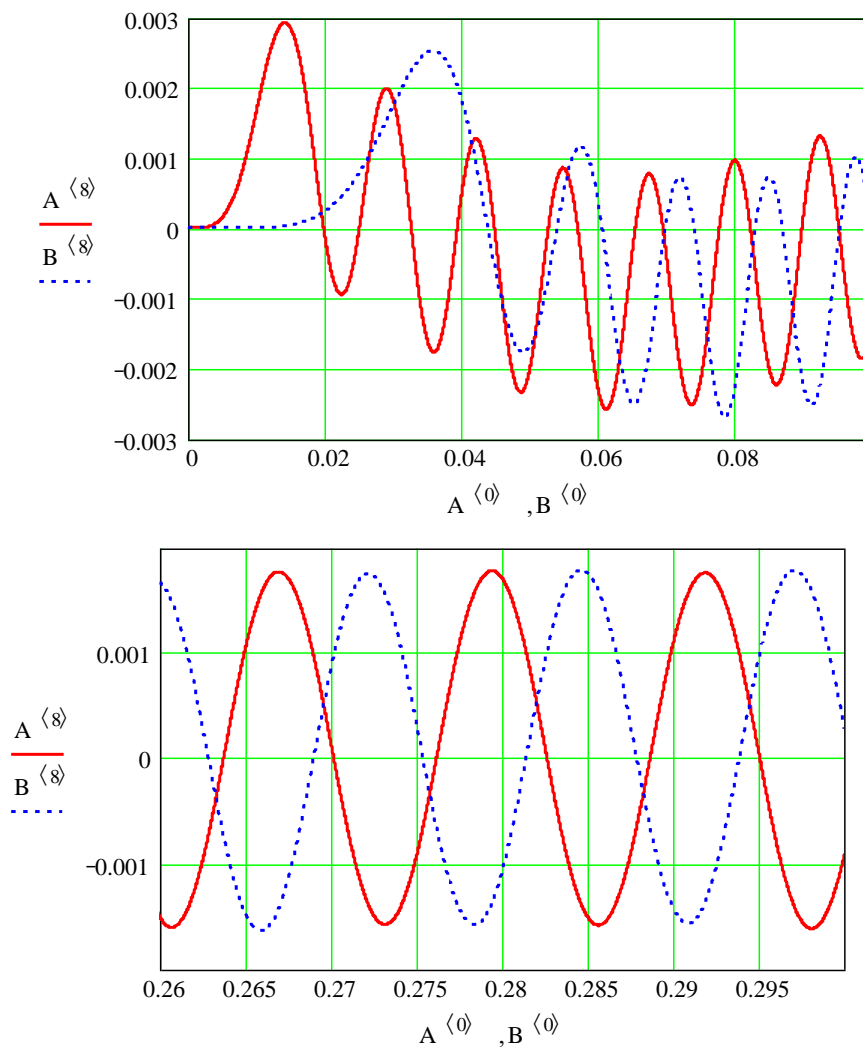


Рис. 12 Графики линейного перемещения виброинструмента:
 — при мгновенном пуске двигателя, - - - при программно-
 управляемом пуске двигателя