

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖДАЮ  
\_\_\_\_\_  
по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
\_\_\_\_\_ 2016 г.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОРОБОТА ПО ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Методические указания к выполнению практических и  
самостоятельных работ по дисциплине «Проектирование  
мехатронных систем» для студентов направления 15.03.06

Курск 2016

УДК 621.864

Составители: С.Ф. Яцун, Л.Ю. Волкова

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Б.В. Лушников*

**Исследование движения виброробота по шероховатой поверхности при различных моделях силы трения:** методические указания по выполнению практической и индивидуальной работ по дисциплине «Проектирование мехатронных систем» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.Ф. Яцун, Л.Ю. Волкова. Курск, 2016. 15 с.

Методические указания содержат сведения по разработке математической модели вибрационного робота, написания алгоритма численного моделирования его движения, программной реализации математической модели в среде MathCAD. Приведены варианты моделируемой мехатронной системы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов специальности 15.03.06 – Мехатроника и робототехника.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. . Тираж 20 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| Введение   | 4  |
| Задание  | 4  |
| 1. Математическая модель виброробота                 | 6  |
| 2. Модели силы трения                                | 7  |
| 3. Алгоритм моделирования движения виброробо         | 9  |
| 4. Алгоритм определения средней скорости виброробота | 12 |
| 5. Моделирование в среде MathCAD                     | 14 |

## Введение

Одним из наиболее важных этапов в проектировании мехатронной системы является разработка ее математической модели и реализация численного моделирования, позволяющего исследовать основные характеристики устройства и особенности его движения.

В настоящем методическом указании рассмотрена разработка математической модели вибрационного робота, перемещающегося без отрыва от поверхности под действием вынуждающей силы, алгоритма моделирования движения объекта и исследование влияния на режимы его движения угла наклона вынуждающей силы и модели силы трения.

## Задание

1 В соответствии с математической моделью виброробота и алгоритмом его движения в среде MathCAD написать программу, моделирующую движение устройства.

2 Построить графики характеристик объекта:

1)  $\ddot{x}(t)$ ,

2)  $\dot{x}(t)$ ,

3)  $x(t)$ ,

4)  $N(t)$ ,

5)  $F_{fr}(x)$ ,

6)  $F_{fr}(\dot{x})$ ,

7)  $F_{fr}(t)$  и  $\Phi(t)$

для значений угла наклона возбуждающей силы  $\alpha$ , при которых робот:

- колеблется относительно положения равновесия,
- движется в положительном направлении с откатом,
- движется в положительном направлении без отката.

3 Сделать выводы о влиянии угла наклона возбуждающей силы на характер движения мобильного виброробота.

4 В соответствии с алгоритмом рис. 4 написать программу определения средней за период скорости робота при изменении угла наклона возбуждающей силы  $\alpha=0^{\circ}\div 90^{\circ}$ .

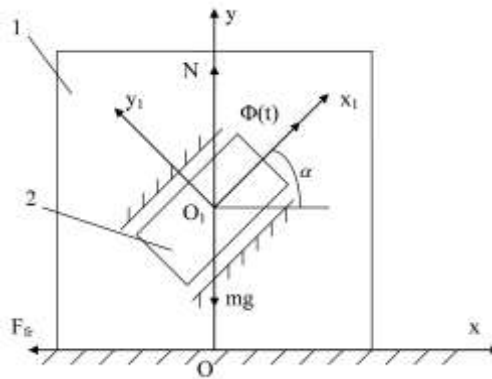
5 Сделать выводы по графику средней скорости.

Табл. 1 – Численные данные для моделирования

| №  | $\Phi_0, Н$ | $m, кг$ | $\omega, рад/с$ | $f_0^s$ | $f_0^d$ | $f_0$ | $\beta$ | Модель<br>силы<br>трения |
|----|-------------|---------|-----------------|---------|---------|-------|---------|--------------------------|
| 1  | 0,015       | 0,01    | 50              | -       | -       | 0,1   | -       | 1                        |
| 2  | 0,7         | 0,2     | 10              | 0,3     | 0,25    | -     | -       | 2                        |
| 3  | 0,3         | 0,1     | 25              | -       | -       | 0,2   | 5       | 3                        |
| 4  | 0,1         | 0,04    | 15              | -       | -       | 0,2   | -       | 1                        |
| 5  | 0,3         | 0,1     | 25              | 0,2     | 0,16    | -     | -       | 2                        |
| 6  | 0,7         | 0,2     | 10              | -       | -       | 0,3   | 4       | 3                        |
| 7  | 0,4         | 0,12    | 30              | -       | -       | 0,24  | -       | 1                        |
| 8  | 0,1         | 0,04    | 15              | 0,2     | 0,18    | -     | -       | 2                        |
| 9  | 0,015       | 0,01    | 50              | -       | -       | 0,1   | 10      | 3                        |
| 10 | 1           | 0,5     | 20              | -       | -       | 0,16  | -       | 1                        |
| 11 | 0,4         | 0,12    | 30              | 0,24    | 0,2     | -     | -       | 2                        |
| 12 | 0,8         | 0,4     | 15              | -       | -       | 0,14  | 2       | 3                        |
| 13 | 0,2         | 0,08    | 40              | -       | -       | 0,18  | -       | 1                        |
| 14 | 0,8         | 0,4     | 15              | 0,14    | 0,13    | -     | -       | 2                        |
| 15 | 0,4         | 0,12    | 30              | -       | -       | 0,24  | 4       | 3                        |
| 16 | 0,7         | 0,2     | 10              | -       | -       | 0,3   | -       | 1                        |
| 17 | 0,2         | 0,08    | 40              | 0,18    | 0,16    | -     | -       | 2                        |
| 18 | 1           | 0,5     | 20              | -       | -       | 0,16  | 6       | 3                        |
| 19 | 0,8         | 0,4     | 15              | -       | -       | 0,14  | -       | 1                        |
| 20 | 1           | 0,5     | 20              | 0,16    | 0,13    | -     | -       | 2                        |
| 21 | 0,1         | 0,04    | 15              | -       | -       | 0,2   | 3       | 3                        |
| 22 | 0,015       | 0,01    | 50              | 0,1     | 0,08    | -     | -       | 1                        |
| 23 | 0,3         | 0,1     | 25              | -       | -       | 0,2   | -       | 2                        |
| 24 | 0,2         | 0,08    | 40              | -       | -       | 0,18  | 5       | 3                        |

## 1. Математическая модель виброробота

На рис. 1 представлена расчетная схема для моделирования движения виброробота. Корпус робота 1 перемещается по горизонтальной шероховатой поверхности в неподвижной системе координат  $Oxy$ , внутренняя подвижная масса 2 совершает гармонические колебания относительно центра масс всей конструкции  $O_1$  вдоль оси  $O_1x_1$  подвижной системы координат  $O_1x_1y_1$ . Будем считать, что на движение объекта оказывает влияние вызываемая перемещением внутренней массы гармоническая сила, точку приложения которой - центр масс виброробота - считаем постоянной, а перемещение внутренней массы учитывать не будем. Поэтому перейдем к рассмотрению материальной точки, движущейся под действием периодической вынуждающей силы.



1 – корпус робота, 2 – внутренняя подвижная масса

Рис. 1 - Расчетная схема виброробота

Будем рассматривать движение виброробота по горизонтальной шероховатой плоскости под действием силы тяжести  $mg$ , нормальной реакции  $N$ , силы сухого трения  $F_{fr}$  и периодической силы  $\Phi(t)$ , направленной к поверхности под углом  $\alpha$ . Отрыва корпуса робота от поверхности не происходит. Вынуждающая сила изменяется по закону:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где  $\omega$  – круговая частота, рад/с,

$\varphi_0$  – начальная фаза, рад.

Рассмотрим статический и динамический режимы.

Когда объект неподвижен, справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \Phi \cos \alpha - F_{fr}; \\ 0 = N - mg + \Phi \sin \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

В динамике система уравнений (2) принимает вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Phi \cos \alpha - F_{fr}; \\ 0 = N - mg + \Phi \sin \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Тело приобретает ускорение, определяемое разностью проекций вынуждающей силы и силы трения, которое приводит к появлению скорости и перемещения тела вдоль горизонтальной оси:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} (\Phi \cos \alpha - F_{fr}); \quad (4)$$

## 2. Модели силы трения

Рассмотрим наиболее часто используемые модели шероховатой поверхности, по которой перемещается виброробот.

В общем виде формула силы сухого трения имеет вид:

$$F_{fr} = \begin{cases} F_{fr}^d, & \dot{x} \neq 0; \\ F_{fr}^s, & \dot{x} = 0, |F_0| \leq F_{pred}; \\ F_{fr}^{per}, & \dot{x} = 0, |F_0| > F_{pred}. \end{cases} \quad (5)$$

где  $F_{fr}^d$  - сила трения в динамике,

$F_{fr}^s$  - сила трения в статике,

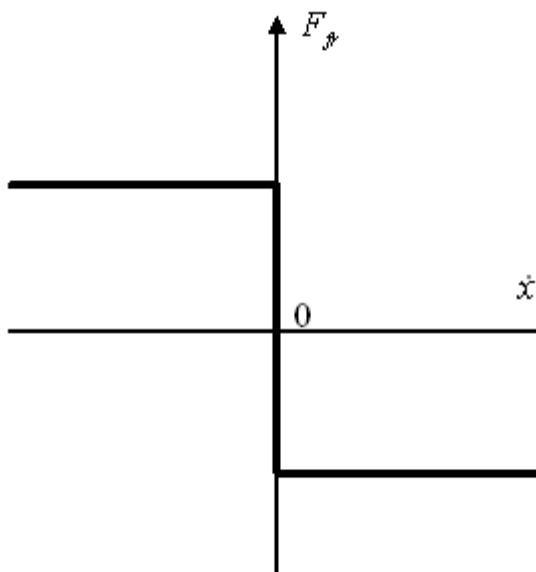
$F_{fr}^{per}$  - сила трения в переходном режиме,

$F_{pred}$  - предельная сила трения,

$F_0$  – равнодействующая всех сил кроме силы сухого трения, приложенных к конструкции робота;

$\dot{x}$  - скорость робота вдоль оси  $Ox$ ,

## 1 Симметричное сухое трение



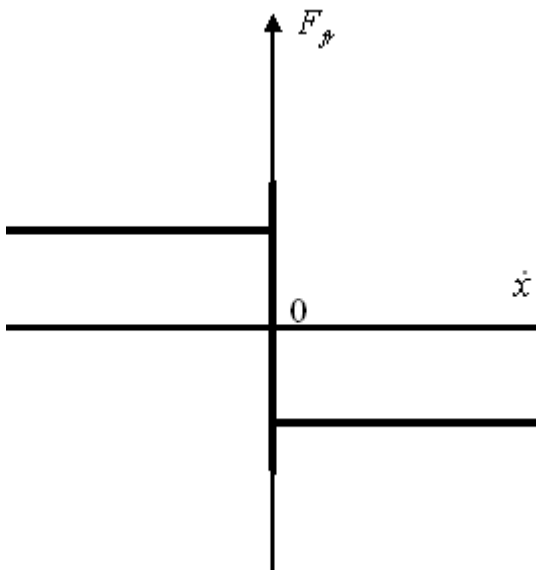
$$F_{fr}^s = -F_0$$

$$F_{fr}^{per} = -f_0 N \text{sign}(F_0)$$

$$F_{fr}^d = -f_0^d N \text{sign}(\dot{x})$$

$$F_{pred} = f_0 N$$

## 2 Сила трения уменьшенной динамической составляющей



$$F_{fr}^s = -F_0$$

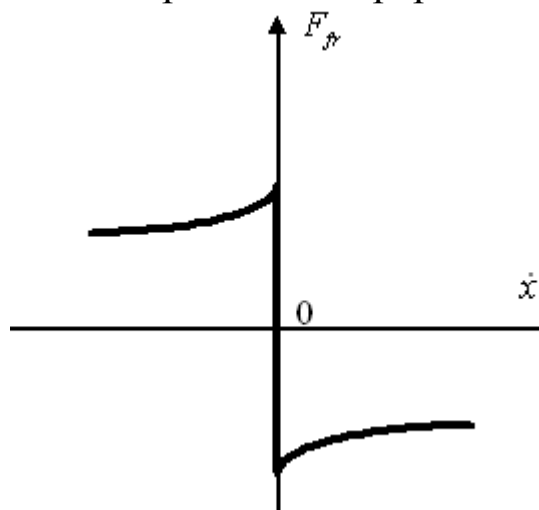
$$F_{fr}^{per} = -f_0^s N \text{sign}(F_0)$$

$$F_{fr}^d = -f_0^d N \text{sign}(\dot{x})$$

$$F_{pred} = f_0^s N$$



### 3 Сила трения с непрерывно падающей характеристикой



$$F_{fr}^s = -F_0$$

$$F_{fr}^{per} = -f_0 N \text{sign}(F_0)$$

$$F_{fr}^d = -f_0 N \cdot e^{-\beta|\dot{x}|} \text{sign}(\dot{x})$$

$$F_{pred} = f_0 N$$

$f_0$  – коэффициент сухого трения;

$f_0^s, f_0^d$  – коэффициенты трения покоя и скольжения соответственно,

$N$  – нормальная реакция опоры робота;

$\beta$  – параметр, определяющий свойства шероховатой поверхности.

### 3. Алгоритм моделирования движения виброробота

Алгоритм (рис. 2) позволяет исследовать следующие характеристики виброробота: перемещение, скорость, ускорение вдоль оси  $x$ , силу трения, нормальную реакцию.

Результаты исследования записываются в матрицу, которая имеет 6 столбцов ( $t, x, \dot{x}, \ddot{x}, F_{fr}, N$ ) и число строк, равное  $\frac{T_k}{\Delta t}$ , где

$T_k$  – конечное время. Каждая строка матрицы соответствует определенному моменту времени. Счетчик  $i$  обеспечивает переход на следующую строку матрицы.

В начале алгоритма задаются значения констант, необходимых для расчетов характеристик объекта. В момент  $t=0$  начинается наблюдение за перемещением объекта. Для этого момента указываются значения перемещения, скорости и ускорения объекта и рассчитываются по соответствующим формулам нормальная

реакция и сила трения. Это необходимо для того, чтобы сформировать первую строку матрицы.

Циклический пересчет характеристик объекта по времени обеспечивает выполнение условия  $t_i \leq (Tk - \Delta t)$ , то есть пока время на  $i$ -ом этапе меньше или равно разности между конечным временем движения и шагом по времени, цикл будет работать.

В каждый момент времени характеристики движения объекта находятся по формулам статики или динамики. Для того чтобы определить, по каким именно формулам они должны высчитываться, необходимо проверить условие  $\dot{x}_{i-1} = 0$ . При его выполнении требуется дополнительная проверка состояния объекта по условию:  $|F0_i| \leq F_{pred}$ .

Если второе условие выполняется, то объект неподвижен и его характеристики на  $i$ -ом этапе определяются по формулам статики с последующим сохранением их значений в соответствующей строке матрицы.

При невыполнении второго условия объект находится в так называемом переходном режиме. Его характеристики рассчитываются по формулам динамики, только вместо сигнатуры скорости ( $sign(\dot{x}_{i-1})$ ) берется значение сигнатуры всех сил кроме сил трения в проекции на ось  $x$  ( $sign(F0_{i-1})$ ). В результате этого в матрице формируется еще одна строка.

Если скорость объекта на предыдущем шаге не равна нулю, то его ускорение и скорость вычисляются по формулам динамики. Для определения скорости и ускорения используется метод Верле:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i \Delta t; \quad (6)$$

$$x_i = x_{i-1} + \dot{x}_i \Delta t + \ddot{x}_i \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (7)$$

где  $\Delta t$  - шаг по времени,

$i$  – номер шага.

После этого выполняется проверка еще одного условия  $\dot{x}_i \cdot \dot{x}_{i-1} \leq 0$  для определения момента перехода объекта из динамики в статику. При выполнении дополнительного условия скорость объекта на  $i$ -ом шаге обнуляется, при невыполнении – рассчитывается по формулам динамики. Все остальные

характеристики объекта на данном этапе определяются по формулам динамики. При этом формируется  $i$ -ая строка матрицы.

При завершении цикла по времени полностью сформировывается матрица характеристик робота.

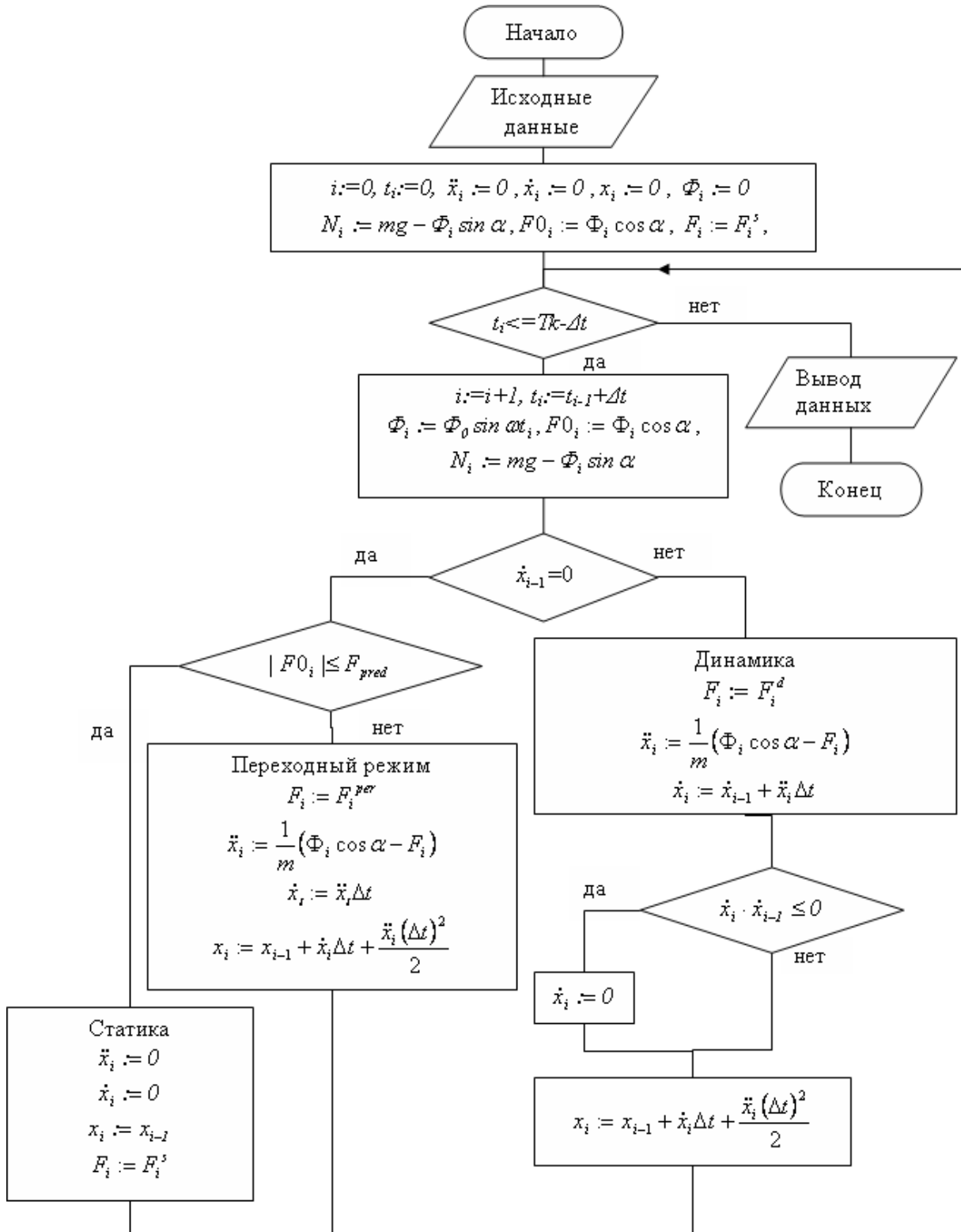


Рис. 2 Алгоритм моделирования движения виброробота

#### 4. Алгоритм определения средней скорости виброробота

Алгоритм определения средней скорости движения устройства в зависимости от изменения угла наклона возбуждающей силы представлен на рис. 3.

В соответствии с этим алгоритмом средняя скорость  $vsr_j$  определяется при каждом значении угла  $\alpha_j$  как среднее арифметическое суммы скоростей виброробота за период.

$$vsr_j = \frac{\sum_{i=1}^N \dot{x}}{N} = \frac{v}{N} \quad (8)$$

где  $N$  – число шагов  $\Delta t$  за один период,  
 $v$  – переменная, в которой хранится значение суммы скоростей робота за период.

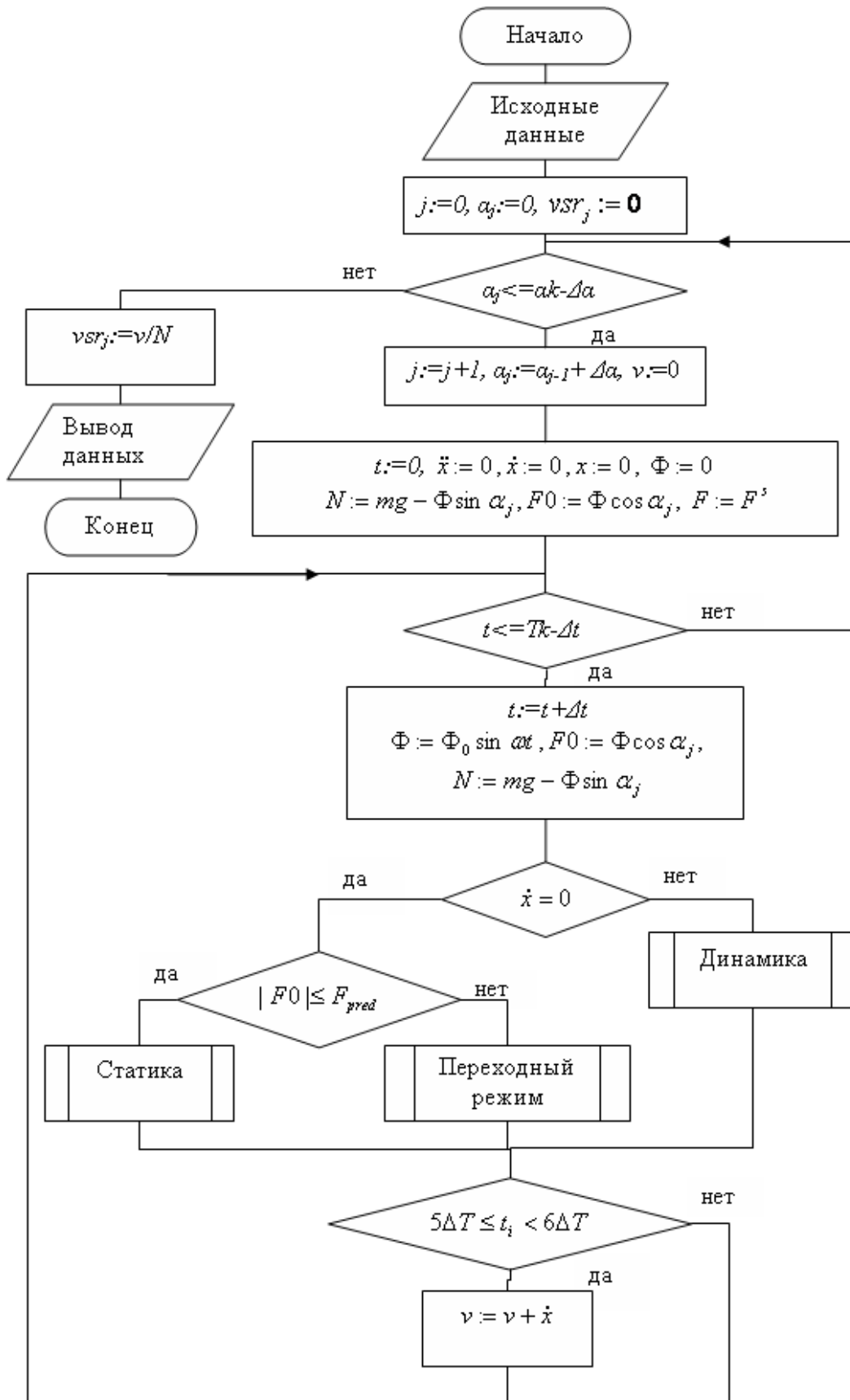


Рис. 3 Алгоритм определения средней скорости виброробота в зависимости от угла наклона возбуждающей силы

## 5. Моделирование в среде MathCAD

Программа записывается путем формирования матрицы результатов моделирования динамики виброробота с учетом введения переобозначений, как было показано в практической работе №1.

Функция сигнатуры в тексте программы записывается следующим образом:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}} \quad (9)$$

Графики движения виброробота при модели симметричного сухого трения приведены на рис. 4, зависимость средней скорости от угла действия возбуждающей силы – на рис. 5.

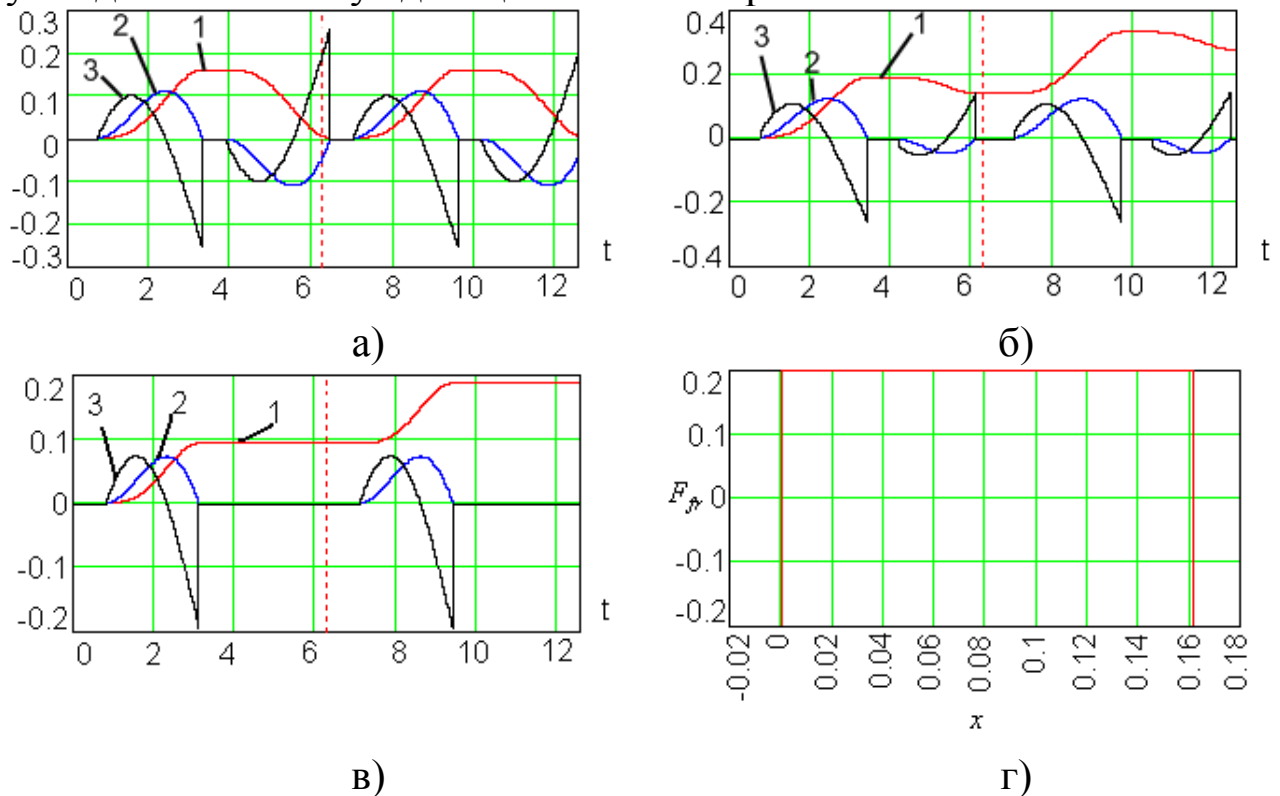


Рис. 4 Графики движения робота при симметричном сухом трении: 1 – перемещение, м; 2 – скорость, м/с; 3 – ускорение, м/с<sup>2</sup>: а) – колебания, б) – движение с откатом, в) – движение без отката, г) – петля гистерезиса

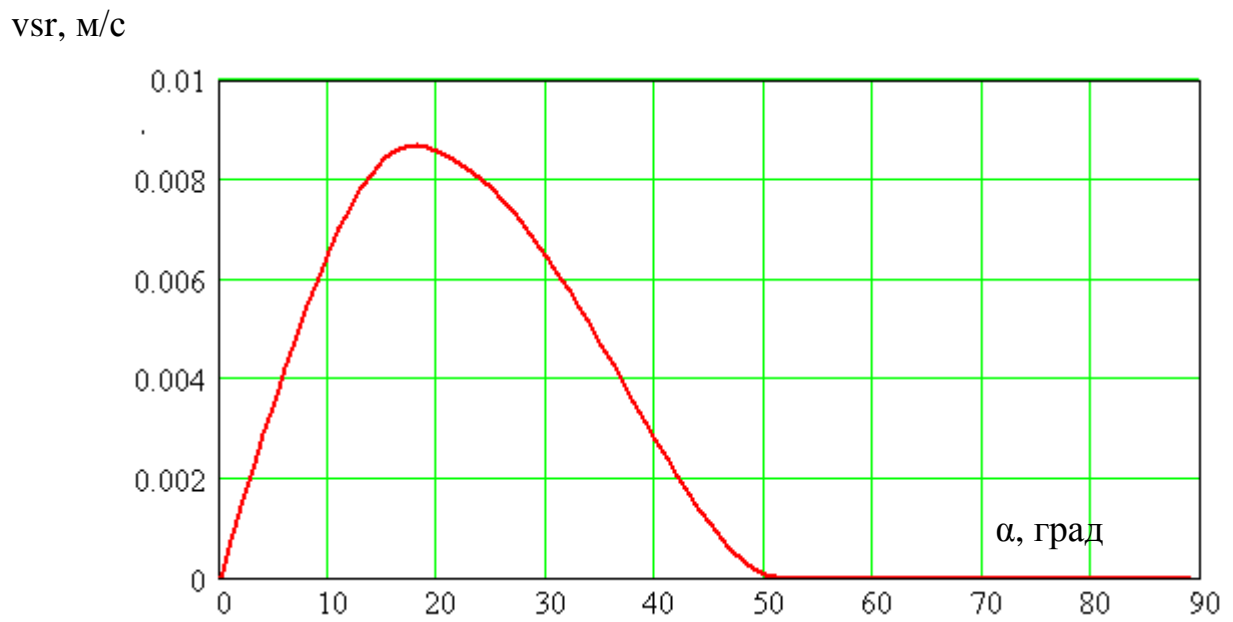


Рис. 5 График средней скорости в зависимости от угла наклона возбуждающей силы