

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 31.08.2021 15:13:34

Уникальный программный идентификатор:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6


МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра «Машиностроительные технологии и оборудование»

Проректор по учебной работе
« _____ » _____ 20__ г.
О.А. Покотилова



НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ СВЯЗИ

Методические указания к проведению практических занятий для студентов по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств профиль «Технология машиностроения»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Куц, М.С. Разумов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.О. Гладышкин*

Непараметрические методы изучения связи : методические указания к проведению практических и лабораторных занятий / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, М.С. Разумов. – Курск, 2018. 18 с.: табл. 5.

Содержат сведения по вопросам непараметрических методов изучения связи. Указывается порядок выполнения практического занятия, подходы к решению и правила оформления.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности автоматизированного машиностроительного производства (УМОАМ).

Предназначено для студентов направлений 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» профиль «Технология машиностроения» дневной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 07.02.18 г. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 1. Уч.-изд.л. 0,8. Тираж 40 экз. Заказ.876 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы: исследовать зависимости между результатами наблюдений непараметрическими методами изучения связи.

2 Задание: Рассчитать коэффициенты корреляции знаков, Спирмена, Кендалла, конкордации и установить значимость этих коэффициентов.

3 Краткие теоретические сведения

Корреляционно-регрессионный метод применим только к количественным признакам. Однако задача измерения связи ставится перед статистикой и по отношению к таким признакам, как пол, образование, занятие, семейное состояние человека, отрасль, форма собственности предприятия, т. е. признакам, не имеющим количественного выражения. Для измерения связи между качественными (атрибутивными) признаками в статистике широко используются: коэффициент сопряженности А. А. Чупрова, коэффициенты ассоциации, контингенции, а также коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

3. 1. Коэффициент корреляции знаков (коэффициент Фехнера)

Простейшим непараметрическим показателем тесноты связи между двумя признаками x и y является коэффициент Фехнера. В основе его расчета лежит принцип сопоставления не абсолютных значений признаков x и y , а их отклонений от среднего уровня. Применение коэффициента Фехнера в практических расчетах основано на предположении, что отклонения эмпирических значений признака x_i от его средней величины $x_i - \bar{X}$ носят случайный характер и должны случайным образом сочетаться с отклонениями эмпирических значений признака y от его среднего уровня $y_i - \bar{Y}$. Соотношение пар совпадений или несовпадений знаков отклонений $x_i - \bar{X}$ и $y_i - \bar{Y}$ позволяет судить о наличии и степени тесноты связи между x и y . Коэффициент Фехнера (K_{Φ}) определяется по формуле следующего вида:

$$K_{\Phi} = \frac{C - H}{C + H}, \quad (1)$$

где C – число совпадений знаков отклонений; H – число несовпадений знаков отклонений. Коэффициент Фехнера может принимать как положительные, так и отрицательные значения в пределах от (-1) до $(+1)$, т. е. $-1 \leq K_{\Phi} \leq +1$.

При $K_{\Phi} = \pm 1$ связь между признаками x и y функциональная.

При $K_{\Phi} = 0$ связь отсутствует.

Промежуточные значения коэффициента Фехнера характеризуют степень тесноты связи между двумя признаками. Знак коэффициента Фехнера свидетельствует о направлении связи между двумя признаками: если $K_{\Phi} \in [-1; 0]$, то связь обратная, т. е. с увеличением или снижением x снижается или увеличивается y ; если $K_{\Phi} \in [0; +1]$, то связь прямая, т. е. с увеличением или снижением x увеличивается или снижается y .

При значении $K_{\Phi} > 0,6$ делается вывод о наличии сильной прямой (обратной) зависимости между признаками.

Пример. Рассчитаем коэффициент Фехнера по данным о деятельности аудиторско-консультационных фирм Москвы в 2001 г., построив для этого табл. 1.

$$K_{\Phi} = \frac{C - H}{C + H} = \frac{8 - 2}{8 + 2} = 0,6.$$

Таблица 1 - Расчетные данные для определения K_{Φ}

№ п/п	Совокупная выручка, млн. руб., y	Общая численность профес- сионалов, чел., x	Знаки отклонений		
			$x_i - \bar{X}$	$y_i - \bar{Y}$	C
1	2,62	23	-1,081	-30,6	1
2	3,04	32	-0,661	-21,6	1
3	3,15	50	-0,551	-3,6	1
4	3,83	53	+0,129	-0,6	
5	3,58	55	-0,121	+1,4	
6	4,08	58	+0,379	+4,4	1
7	4,09	59	+0,389	+5,4	1
8	4,20	62	+0,499	+8,4	1
9	4,18	69	+0,479	+15,4	1
10	4,24	75	+0,539	+21,4	1
Итого	37,01	536			8
Средняя	3,701	53,6			

Таким образом, связь между совокупной выручкой и численностью профессионалов аудиторско-консультационных фирм Москвы прямая и сильная.

Недостатком коэффициента Фехнера, что значительно сокращает возможности его практической реализации, является равенство весов различных по абсолютной величине отклонений фактических значений признаков от их среднего уровня. Кроме того неточность этого показателя проявляется еще и в том, что он учитывает только знаки отклонений, а не числовые значения отклонений.

3.2. Ранговые коэффициенты связи (коэффициенты Спирмена, Кендалла, конкордации)

В ряде случаев, когда факторный признак может иметь не количественное выражение, а атрибутивное (т. е. не имеющее количественного выражения), то в качестве условных обозначений значений признаков и оценки связей между ними также используются ранги и ранговые коэффициенты связи.

Например, на объем реализации товаров оказывают влияние такие факторы, как уровень образования, мода и др., но которые нельзя выразить каким-либо числом.

Ранжирование – это процедура упорядочения объектов изучения, которая выполняется на основе предпочтения.

Ранг – это порядковый номер значений признака, расположенных в порядке возрастания или убывания их величин. Если значения признака имеют одинаковую количественную оценку, то ранг всех этих значений принимается равным средней арифметической от соответствующих номеров мест, которые их определяют. Данные ранги называются *связными*.

Пример. Проранжируем предприятия автомобильной промышленности одного из регионов по величине балансовой прибыли. Наиболее предпочтительному предприятию, величина балансовой прибыли которого наибольшая, присваивается ранг «1»; затем в порядке уменьшения величины балансовой прибыли были проранжированы все рассматриваемые предприятия автомобильной промышленности (табл. 2).

Таблица 2 - Балансовая прибыль предприятий автомобильной промышленности одного из регионов в 1998 г.

Предприятие	Балансовая прибыль, млн. руб.	Ранжирование (ранги)
1	10	6,5
2	12	4
3	10	6,5
4	12	4
5	12	4
6	15	2
7	17	1

Среди непараметрических методов оценки тесноты связи наибольшее значение имеют ранговые коэффициенты ρ – Спирмена и τ – Кендалла. Эти коэффициенты могут быть использованы для определения тесноты связи, как между количественными, так и между качественными признаками при условии, если их значения упорядочить или проранжировать по степени убывания или возрастания признака.

Так, например, можно при помощи одной группы экспертов проранжировать кандидатов на занятие какой-либо должности по степени профессиональной подготовленности, а другую группу экспертов просить проранжировать тех же кандидатов по личностным и этическим качествам, а затем измерить связь между рангами.

3.2.1. Коэффициент корреляции рангов Спирмена

Коэффициент корреляции рангов (коэффициент Спирмена) рассчитывается по формуле (для случая, когда нет связанных рангов)

$$\rho_{x/y} = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

где d_i^2 – квадрат разности рангов $d_i^2 = (R_x - R_y)^2$, R_x – ранг качественных показателей, R_y – ранг качественных показателей, n – число наблюдений (число пар рангов). Коэффициент Спирмена принимает любые значения в интервале $[-1; 1]$. Если ранги по обоим признакам

совпадают, то $d_i^2=0$, $\rho=1$ и, следовательно, связь полная прямая. Если $\rho=-1$, связь полная обратная, при $\rho=0$ связь между признаками отсутствует. Значимость коэффициента корреляции рангов Спирмена проверяется на основе t -критерия Стьюдента. Расчетное значение критерия определяется по формуле:

$$t_P = \rho_{x/y} \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_{x/y}^2}}.$$

Значение коэффициента корреляции считается статистически существенным, если $t_P > t_{кр}(P; k=n-2)$. Значение $t_{кр}(P=1-q; k=n-2)$ выбирается из справочных таблиц (приложение А).

Пример. Вычислим коэффициент корреляции рангов по данным о стоимости основных фондов и выпуске продукции (млн. руб.). Соответствующие расчеты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Расчет коэффициента Спирмена

Наименование фирмы	Стоимость основных фондов x , млн. руб.	Выпуск продукции y , млн.руб.	Знак отклонения от средней арифметической		Ранги			
			$x_i - \bar{X}$	$y_i - \bar{Y}$	по x	по y	Разность рангов	Квадрат разности рангов
«Светлана»	6,0	2,4	-	-	1,0	1,0	0	0
«XXI век»	8,0	4,0	-	-	2,0	3,5	- 1,5	2,25
«Золотой век»	9,0	3,6	-	-	3,0	2,0	+ 1,0	1,00
«Перспектива»	10,0	4,0	-	-	4,5	3,5	+ 1,0	1,00
«Бест»	10,0	4,5	-	-	4,5	5,0	- 0,5	0,25
«Карен»	11,0	4,6	+	-	6,0	6,0	0	0
«Элита»	12,0	5,6	+	+	7,0	8,0	- 1,0	1,00
«Интерстиль»	13,0	6,5	+	+	8,0	9,0	- 1,0	1,00
«Гейзер»	14,0	7,0	+	+	9,0	10,0	- 1,0	1,00
«Олимп»	15,0	5,0	+	+	10,0	7,0	+ 3,0	9,00
Итого	108,0	47,2						16,5
Средняя	10,8	4,72						

Ранги стоимости основных фондов для фирм «Перспектива» и «Бест» определяются как средняя из $\bar{X} = (4,0 + 5,0)/2 = 4,5$, потому что стоимости основных фондов в 10 млн. руб. соответствуют ранги 4 и 5 (это так называемые связанные ранги). Аналогично ранги выпуска продукции для фирмы «XXI век» и «Золотой век» определяют-

ся как средняя из $\bar{X} = (3,0 + 4,0)/2 = 3,5$. Итак, коэффициент Спирмена

$$\rho_{x/y} = 1 - \frac{6 \cdot 16,5}{10(10^2 - 1)} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Полученный ранговый коэффициент корреляции свидетельствует о наличии прямой тесной связи между величиной основных фондов и выпуском продукции. Ранговый коэффициент корреляции более точный по сравнению с коэффициентом корреляции знаков, потому что он учитывает не только знаки отклонений, но и место величины признака в данном ряду.

3.2.2. Коэффициент корреляции рангов Кендалла τ

Ранговый коэффициент корреляции Кендалла τ может также использоваться для измерения взаимосвязи между качественными и количественными признаками, характеризующими однородные объекты, ранжированные по одному принципу. Расчет рангового коэффициента Кендалла осуществляется по формуле:

$$\tau_{xy} = 1 - \frac{2S}{n(n-1)},$$

где n – число наблюдений; S – сумма разностей между числом последовательностей и числом инверсий по второму признаку.

Расчет данного коэффициента выполняется в следующей последовательности:

- 1) значения x ранжируются в порядке возрастания или убывания;
- 2) значения y располагаются в порядке, соответствующем значениям x ;
- 3) для каждого ранга y определяется число следующих за ним значений рангов, превышающих его величину. Суммируя таким образом числа, определяют величину P как меру соответствия последовательностей рангов по x и y и учитывают со знаком (+);
- 4) для каждого ранга определяется число следующих за ним рангов, меньших его величины. Суммарная величина обозначается через Q и фиксируется со знаком (–);

5) определяется сумма баллов по всем членам ряда. Этот коэффициент также изменяется в пределах $-1 < \tau < 1$. Он дает несколько более строгую оценку связи, нежели коэффициент Спирмена. Как правило, коэффициент Кендалла меньше коэффициента Спирмена, соотношение между ними:

$$r_s \approx \frac{3}{2} \tau.$$

Это соотношение выполняется *при большом числе наблюдений, $n > 30$* , и слабых либо умеренно тесных связях. Тогда $S = P - Q$. Можно показать, что $P + Q = -n(n-1)$, так что τ может быть представлен как

$$\tau = \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Пример (корреляции рангов Кендалла). В приведенном выше примере:

$$P = 9 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 = 40.$$

$$Q = 0 + (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 = -4.$$

Таким образом,

$$\tau_{xy} = 1 - \frac{2(40 - 4)}{10(10 - 1)} = \frac{72}{90} = 0,8,$$

что также свидетельствует о наличии тесной связи между рассматриваемыми признаками. Хотя $\tau < \rho_{x/y}$ ($\rho_{x/y} = 0,9$), но поскольку связь тесная, соотношение между этими двумя коэффициентами не вполне соответствует упомянутому: коэффициент Спирмена в нашем примере превосходит τ не в 1,5 раза, а на 125 %. Если в изучаемой совокупности есть связанные ранги, то расчеты необходимо проводить по следующей формуле:

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{\left[\frac{n(n-1)}{2} - U_x \right] \left[\frac{n(n-1)}{2} - U_y \right]}},$$

где $U_x = \frac{\sum t_x(t_x - 1)}{2}$; $U_y = \frac{\sum t_y(t_y - 1)}{2}$;

t_x, t_y – число связанных рангов в ряду X и Y соответственно.

Рассмотрим расчет коэффициента корреляции рангов Кендалла для случая наличия связанных рангов:

$$P = 9 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 = 40.$$

$$Q = 0 + (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1) + (-1) + (-1) + 0 = -4.$$

$$U_x = (2(2 - 1))/2 = 1. \quad U_y = (2(2 - 1))/2 = 1.$$

$$\tau = \frac{40 - 4}{\sqrt{\left[\frac{10(10 - 1)}{2} - 1\right] \left[\frac{10(10 - 1)}{2} - 1\right]}} = 0,82,$$

что свидетельствует о существенной связи между номинальной стоимостью основных фондов и выпуском продукции. Связь между признаками можно признать статистически значимой, если значения коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендалла больше 0,5.

3.2.3. Множественный коэффициент ранговой корреляции (коэффициент конкордации W)

Для определения тесноты связи между произвольным числом ранжированных признаков применяется *множественный коэффициент ранговой корреляции (коэффициент конкордации) (W)*, который вычисляется по формуле:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)},$$

где m – количество факторов; n – число наблюдений; S – отклонение суммы квадратов рангов от средней квадратов рангов.

Пример. Коэффициент конкордации. Определим тесноту связи между уставным капиталом, числом выставленных акций и числом занятых на предприятиях, выставивших акции на аукционы в 2001 г. (табл. 4):

$$S = 2863 - \frac{165^2}{10} = 2863 - 2722,5 = 140,5,$$

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 140,5}{(91000 - 10)} = 0,018.$$

Таблица 4 -Расчет коэффициента конкордации

Номер предприятия	Уставный капитал, тыс. руб., x	Число вы- ставлен- ных акций, y	Число заня- тых на пред- приятии, z	R_x	R_y	R_z	Сумма строк	Квадраты сумм
1	29540	856	119	9	7	1	17	289
2	16050	930	125	1	9	2	12	144
3	41020	1563	132	10	10	3	23	529
4	23500	682	141	6	5	4	15	225
5	26250	616	150	7	3	5	15	225
6	17950	495	165	4	2	6	12	144
7	28130	815	178	8	6	7	21	441
8	17510	858	181	3	8	8	19	361
9	17000	467	201	2	1	9	12	144
10	22640	661	204	5	4	10	19	361
Итого	–	–	–	–	–	–	165	2863

Значимость коэффициента конкордации проверяется на основе χ^2 -критерия Пирсона:

$$\chi_p^2 = \frac{12S}{m \cdot n(n-1)}.$$

Для нашего примера:

$$\chi_p^2 = \frac{12 \cdot 140,5}{3 \cdot 10(10-1)} = 6,24.$$

Расчетное значение $\chi_p^2 = 6,24$ меньше $\chi_{кр}^2 = 16,919$ ($P=1-q=0,05$, $k=n-1=9$), что подтверждает незначимость коэффициента конкордации и свидетельствует о слабой связи между рассматриваемыми признаками. В случае наличия связанных рангов коэффициент конкордации определяется по формуле:

$$W = \frac{S}{1/12 m^2 (n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j},$$

где $T_j = 1/12 m \sum_{j=1}^m (t_j^3 - t_j)$; t_j – количество связанных рангов по отдельным показателям. Проверка значимости осуществляется по формуле:

$$\chi_p^2 = \frac{S}{1/12 m \cdot n(n-1) - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m T_j}.$$

Коэффициент конкордации принимает любые значения в интервале $[-1; 1]$.

Пример. Коэффициент конкордации (в случае наличия связанных рангов). По данным предприятий нефтеперерабатывающей промышленности определим зависимость прибыли от реализации, от среднегодовой стоимости основных производственных фондов и объема валовой продукции (табл. 5):

$$S = 1229,5 - \frac{84^2}{7} = 1229,5 - 1008 = 221,5$$

$$T_x = \frac{1}{12} [(2^3 - 2) + (2^3 - 2)] = 1;$$

$$T_y = \frac{1}{12} [(2^3 - 2) + (2^3 - 2)] = 1;$$

$$T_z = \frac{1}{12} [(2^3 - 2) + (2^3 - 2)] = 1;$$

$$\sum T_j = T_x + T_y + T_z = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$W = \frac{S}{1/12 m^2 (n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j} = \frac{221,5}{\frac{1}{12} 3^2 (7^3 - 7) - 3 \cdot 3} = \frac{221,5}{243,0} = 0,91.$$

Таблица 5 - Расчет коэффициента конкордации (в случае наличия связанных рангов)

Номер предприятия	Прибыль от реализации, млн. руб. x	Объем валовой продукции, млрд. руб. y	Среднегодовая стоимость ОПФ, млрд. руб. z	R_x	R_y	R_z	Сумма строк	Квадраты сумм
1	40	1,7	0,27	1,5	1	1,5	4	16
2	75	3,2	0,55	3	5	4	12	144
3	82	2,9	0,97	4,5	3,5	5,5	13,5	182,25
4	40	1,8	0,27	1,5	2	1,5	5	25
5	106	11,8	0,98	6	6,5	7	19,5	380,25
6	82	2,9	0,35	4,5	3,5	3	11	121
7	109	11,8	0,97	7	6,5	5,5	19	361
Итого	—	—	—	28	28	28	84	1229,5

Расчетное значение χ^2 -критерия Пирсона для проверки значимости коэффициента конкордации по данным нашего примера составило:

$$\chi_p^2 = \frac{13 \cdot 221,5}{1/12 \cdot 3 \cdot 7(7-1) - \frac{1}{7-1} \cdot 3} = 22,15.$$

Расчетное значение $\chi_p^2 = 22,15$ больше $\chi_{кр}^2 = 12,592$, ($P=1-q=0,05$; $k=n-1=6$), что подтверждает значимость коэффициента конкордации и свидетельствует о сильной связи между рассматриваемыми признаками. Преимуществом ранговых коэффициентов корреляции Спирмена, Кендалла и конкордации является то, что с их помощью можно измерять и оценивать связи как между количественными, так и между атрибутивными признаками, которые поддаются ранжированию.

4 Выполнение работы

Получив исходные данные для выполнения практической работы (см. приложение В), студент изучает теоретические сведения согласно пункту 3. Далее выполняет расчеты аналогичные в рассмотренных примерах **с учетом имеющихся особенностей задания.**

В отчёте по практической работе должны найти отражение следующие пункты:

- название работы;
- цель работы;
- индивидуальное задание для выполнения работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты выполнения работы;
- подробные выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое корреляция?
2. Как рассчитывается коэффициент корреляции знаков.
3. Как рассчитывается коэффициент Спирмена.
4. Как рассчитывается коэффициент Кендалла.
5. Как рассчитывается коэффициент конкордации.

6. Как установить значимость коэффициента корреляции знаков.
7. Как установить значимость коэффициента Спирмена.
8. Как установить значимость коэффициента Кендалла.
9. Как установить значимость коэффициента конкордации.

Библиографический список

1. Сергеев, А.Г. Метрология [Текст]/ А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. Учебное пособие для вузов. М.: Логос, 2001. 488 с.: ил.
2. Алексахин, С.В. Прикладной статистический анализ [Текст]/ С.В. Алексахин, А.В. Балдин, А.Б. Николаев, В.Ю. Строганов. Учебное пособие для вузов. М.: “Издательство ПРИОР”, 2001. 224 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Распределение Стьюдента (t_p)

k	P											
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
1	0,079	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	63,657
2	0,071	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	9,925
3	0,068	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	5,841
4	0,067	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	4,604
5	0,066	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	4,032
6	0,065	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,707
7	0,065	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	3,499
8	0,065	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	3,355
9	0,064	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	3,250
10	0,064	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	3,169
11	0,064	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	3,106
12	0,064	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	3,055
13	0,064	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	3,012
14	0,064	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,977
15	0,064	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,947
16	0,064	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,921
17	0,064	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,898
18	0,064	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,878
19	0,064	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,861
20	0,063	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,845
21	0,063	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,831
22	0,063	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,819
23	0,063	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,807
24	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,797
25	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,787
26	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,779
27	0,063	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,771
28	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,763
29	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,756
30	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,750
300	0,063	0,126	0,254	0,386	0,525	0,675	0,843	1,038	1,284	1,650	1,968	2,592

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Значения $\chi_{k,P}^2$ для различных значений k и P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,02	0,04	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,21
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,343	3	4,351	6,064	7,289	9,236	11,07	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,07	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,647	2,032	2,733	3,49	4,594	5,527	7,344	9,524	11,03	13,362	15,507	18,168	20,09
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,38	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,94	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,34	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,041	8,634	9,926	12,34	15,119	16,985	19,812	22,362	25,471	27,688
14	4,66	5,368	6,571	7,79	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,39	10,865	12,857	14,44	17,338	20,601	22,76	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,9	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,26	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,41	35,02	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,24	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,6	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,27	42,98
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,94	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,82	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,878	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,14	46,963
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588

<i>k</i>	P												
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,53	36,25	40,256	43,773	47,962	50,892
31	15,655	17,042	19,281	21,434	24,255	26,44	30,336	34,598	37,359	41,422	44,985	49,226	52,191
32	16,362	17,783	20,072	22,271	25,148	27,373	31,336	35,665	38,466	42,585	46,194	50,487	53,486
33	17,073	18,527	20,867	23,11	26,042	28,307	32,336	36,731	39,572	43,745	47,4	51,743	54,775
34	17,789	19,275	21,664	23,952	26,938	29,242	33,336	37,795	40,676	44,903	48,602	52,995	56,061
35	18,509	20,027	22,465	24,797	27,836	30,178	34,336	38,859	41,778	46,059	49,802	54,244	57,342
36	19,233	20,783	23,269	25,643	28,735	31,115	35,336	39,922	42,879	47,212	50,998	55,489	58,619
37	19,96	21,542	24,075	26,492	29,635	32,053	36,336	40,984	43,978	48,363	52,192	56,73	59,893
38	20,691	22,304	24,884	27,343	30,537	32,992	37,335	42,045	45,076	49,513	53,384	57,969	61,162
39	21,426	23,069	25,695	28,196	31,441	33,932	38,335	43,105	46,173	50,66	54,572	59,204	62,428
40	22,164	23,838	26,509	29,051	32,345	34,872	39,335	44,165	47,269	51,805	55,758	60,436	63,691
41	22,906	24,609	27,326	29,907	33,251	35,813	40,335	45,224	48,363	52,949	56,942	61,665	64,95
42	23,65	25,383	28,144	30,765	34,157	36,755	41,335	46,282	49,456	54,09	58,124	62,892	66,206
43	24,398	26,159	28,965	31,625	35,065	37,698	42,335	47,339	50,548	55,23	59,304	64,116	67,459
44	25,148	26,939	29,787	32,487	35,974	38,641	43,335	48,396	51,639	56,369	60,481	65,337	68,71
45	25,901	27,72	30,612	33,35	36,884	39,585	44,335	49,452	52,729	57,505	61,656	66,555	69,957
46	26,657	28,504	31,439	34,215	37,795	40,529	45,335	50,507	53,818	58,641	62,83	67,771	71,201
47	27,416	29,291	32,268	35,081	38,708	41,474	46,335	51,562	54,906	59,774	64,001	68,985	72,443
48	28,177	30,08	33,098	35,949	39,621	42,42	47,335	52,616	55,993	60,907	65,171	70,197	73,683
49	28,941	30,871	33,93	36,818	40,534	43,366	48,335	53,67	57,079	62,038	66,339	71,406	74,919
50	29,707	31,664	34,764	37,689	41,449	44,313	49,335	54,723	58,164	63,167	67,505	72,613	76,154
51	30,475	32,459	35,6	38,56	42,365	45,261	50,335	55,775	59,248	64,295	68,669	73,818	77,386
52	31,246	33,256	36,437	39,433	43,281	46,209	51,335	56,827	60,332	65,422	69,832	75,021	78,616
53	32,019	34,055	37,276	40,308	44,199	47,157	52,335	57,879	61,414	66,548	70,993	76,223	79,843
54	32,793	34,856	38,116	41,183	45,117	48,106	53,335	58,93	62,496	67,673	72,153	77,422	81,069
55	33,571	35,659	38,958	42,06	46,036	49,055	54,335	59,98	63,577	68,796	73,311	78,619	82,292
56	34,35	36,464	39,801	42,937	46,955	50,005	55,335	61,031	64,658	69,919	74,468	79,815	83,514
57	35,131	37,27	40,646	43,816	47,876	50,956	56,335	62,08	65,737	71,04	75,624	81,009	84,733
58	35,914	38,078	41,492	44,696	48,797	51,906	57,335	63,129	66,816	72,16	76,778	82,201	85,95

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Исходные данные к работе

Таблица 1

	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>q</i>	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05

Таблица 2

Вар. 1		Вар. 2		Вар. 3		Вар. 4		Вар. 5		Вар. 6		Вар. 7		Вар. 8	
<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
83	4,0	65	2,0	80	1,0	94	10,0	27	2,0	100	4,0	64	3,0	57	2,0
28	5,0	77	10,0	74	2,0	25	5,0	36	10,0	54	8,0	63	7,0	85	1,0
24	3,0	53	6,0	91	4,0	49	2,0	12	7,0	85	9,0	32	3,0	61	9,0
58	3,0	18	2,0	26	2,0	78	10,0	70	5,0	42	7,0	43	8,0	94	7,0
92	10,0	58	4,0	90	1,0	77	10,0	59	7,0	99	9,0	14	10,0	40	5,0
98	1,0	33	1,0	71	10,0	49	5,0	38	6,0	25	10,0	11	8,0	87	8,0
69	8,0	71	1,0	17	9,0	72	2,0	94	9,0	85	10,0	93	5,0	78	5,0
10	6,0	100	10,0	80	9,0	87	7,0	43	4,0	61	10,0	72	6,0	40	10,0
92	2,0	24	4,0	94	5,0	22	6,0	80	2,0	11	8,0	12	4,0	32	7,0
83	10,0	10	2,0	94	6,0	34	6,0	72	8,0	75	9,0	88	7,0	99	5,0
94	4,0	24	1,0	87	1,0	57	10,0	91	3,0	88	8,0	21	6,0	80	3,0
65	8,0	40	3,0	13	2,0	17	3,0	26	8,0	37	5,0	99	10,0	23	10,0
10	7,0	88	5,0	82	2,0	18	3,0	10	8,0	57	4,0	44	1,0	50	8,0
53	10,0	29	10,0	94	1,0	29	6,0	68	5,0	44	5,0	10	6,0	69	5,0
55	10,0	81	8,0	73	6,0	72	4,0	100	3,0	25	3,0	61	6,0	35	8,0

Вар. 9		Вар. 10		Вар. 11		Вар. 12		Вар. 13		Вар. 14		Вар. 15	
<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
36	10,0	45	10,0	67	5,0	59	10,0	64	7,0	82	6,0	61	9,0
92	4,0	77	6,0	91	6,0	41	10,0	66	7,0	78	1,0	26	6,0
37	8,0	75	4,0	30	1,0	30	9,0	93	6,0	93	3,0	94	4,0
47	6,0	17	5,0	61	4,0	67	9,0	74	6,0	47	5,0	45	7,0
53	8,0	63	3,0	75	6,0	34	5,0	73	10,0	61	4,0	20	9,0
48	4,0	38	4,0	37	1,0	56	8,0	71	2,0	39	5,0	55	6,0
81	7,0	10	7,0	59	9,0	40	9,0	10	5,0	61	2,0	88	8,0
22	2,0	63	1,0	38	6,0	67	4,0	33	2,0	69	6,0	18	3,0
76	9,0	52	2,0	52	5,0	30	2,0	80	6,0	74	3,0	70	6,0
55	10,0	40	2,0	63	5,0	33	10,0	28	3,0	14	10,0	16	8,0
56	2,0	84	7,0	92	9,0	11	3,0	92	2,0	97	2,0	56	6,0
52	8,0	39	1,0	53	5,0	98	4,0	67	10,0	76	1,0	87	10,0
94	3,0	11	9,0	95	2,0	15	9,0	49	7,0	85	9,0	92	2,0
42	2,0	11	10,0	30	9,0	12	2,0	83	4,0	61	4,0	42	7,0
44	5,0	72	9,0	57	8,0	68	4,0	37	3,0	25	1,0	32	9,0